arXiv:2603.02786v1 [math.CO] 3 Mar 2026

等差数列打包

Noga Alon、MICHAŁ DĘBSKI、JAROSŁAW GRYTCZUK 和 JAKUB PRZYBYŁO

摘要。设 $\mathcal{F}=\{A_1,A_2,\dots,A_k\}$ 是一个有限等差数列的集合，其中每个 A_d 都是正整数 d 的连续倍数集合 $D_d=\{d,2d,3d,\dots\}$ 的初始段。令 $m(\mathcal{F})$ 表示包含该族 $\mathcal{F}$ 中所有成员的两两不相交的平移副本所需的最短区间长度。我们研究以下两种情形下的这个参数：对于固定的正整数 n，(1) $\mathcal{F}$ 中的每个等差数列都具有形式 $A_d=D_d\cap\{1,2,\dots,n\}$；(2) $\mathcal{F}$ 的所有等差数列 A_d 都具有相同的大小 n，即 $A_d=D_d\cap\{1,2,\dots,nd\}$。我们特别推导出以下渐近估计。在情形 (1) 中，当 $k=n$ 时，我们得到 $m(\mathcal{F})=\Theta(n^{3/2}/\ln n)$。在情形 (2) 中，当 $k=n$ 时，我们得到 $m(\mathcal{F})=\Theta(n^3/\ln n)$；而若 $k>k_0(n)$，则有 $m(\mathcal{F})<3kn$。在这两种情形下，我们还渐近确定 $m(\mathcal{F})$，或对所有 $k<n$ 给出其数量级。

1. 引言

对于任意正整数 $m\in\mathbb{N}$，令 $[m]=\{1,2,\dots,m\}$。令 $D_d=\{d,2d,3d,\dots\}$ 表示某个数 $d\in\mathbb{N}$ 的所有正倍数构成的集合。对于给定子集 $A\subseteq\mathbb{N}$，其平移副本是任何形如 $s+A=\{s+a\colon a\in A\}$ 的集合，其中 s 是任意整数。我们用平移 一词同时指集合 $s+A$ 和数 s。

令 $\mathcal{F}=\{A_1,A_2,\dots,A_k\}$ 为 $\mathbb{N}$的有限子集的一个集合。我们称 $\mathcal{F}$可以装入 $[m]$，如果存在整数 s_i 使得：

(1) 对每个 $i\in[k]$，$s_i+A_i\subseteq[m]$；(2) 对所有 i，$j\in[k]$, $i\neq j$，$(s_i+A_i)\cap(s_j+A_j)=\emptyset$。

令 $m(\mathcal{F})$ 表示使 $\mathcal{F}$ 能够装入 $[m]$ 的最小 $m\in\mathbb{N}$。我们的目标是估计由公差两两不同且构成集合 $[k]$ 的等差数列组成的族的参数 $m(\mathcal{F})$。显然，只有对等差数列的长度施加限制，这个问题才有意义。这里我们考虑两种自然的变体。

首先，我们研究有界直径情形：对于固定的 $n\in\mathbb{N}$，我们考虑由集合 D_d 中完全包含于 $[n]$ 的极大初始段组成的族 $\mathcal{F}=\{A_1,A_2,\dots,A_k\}$。更正式地说，该族的每个成员都具有如下形式 $A_d=D_d\cap[n]=\{id\colon 1\leqslant i\leqslant\lfloor n/d\rfloor\}$。对于任意子集 $D\subseteq[n]$，记 $\mathcal{F}_D=\{A_d\colon d\in D\}$，并令 $m_D(n)=m(\mathcal{F}_D)$。若 $D=[k]$，其中 $k\leqslant n$，则我们简记为 $m_k(n)=m(\mathcal{F}_{[k]})$ 和 $m(n)=m_n(n)$。注意，对于 $k>n$，参数 $m_k(n)$ 未定义。

在第一个结果中，我们确定函数 $m(n)$ 的渐近阶。

第一作者的研究部分获得了美国国家科学基金会 DMS-2154082 号拨款的资助。第三作者的研究部分获得了国家科学中心 2020/37/B/ST1/03298 号拨款的资助。第四作者的研究部分获得了克拉科夫AGH科技大学 16.16.420.054 号拨款的资助，该拨款由波兰科学与高等教育部提供。

定理 1。 我们有 $m(n) = \Theta(n^{3/2}/\ln n)$。更准确地说，

$$\left(\frac{4}{3} - o(1)\right)\frac{n^{3/2}}{\ln n} \leqslant m(n) \leqslant \left(\frac{5}{3} + o(1)\right)\frac{n^{3/2}}{\ln n}.$$

若能缩小这些界之间的差距，那就再好不过了；我们猜测常数$4/3$ 更接近真实情况。事实上，即便将等差数列的公差限制为不超过 $\sqrt{n}$的素数，上述下界仍然成立。另一方面，若$k \leqslant \sqrt{n}$，则 $m_k(n) \leqslant (1.52 + o(1))n^{3/2}/\ln n$；而当 $k \ll \sqrt{n}$时，我们有 $m_k(n) = (1 + o(1))kn/\ln k$，这在一定程度上支持了这一猜想（见定理 4）。

其次，我们考察由大小相同的倍数集初始段构成的类似集合 D_d hav- ing。更确切地说，我们研究族 $\mathcal{G} = \{B_1, B_2, \ldots, B_k\}$的装填问题，其中 $B_d = D_d \cap [nd] = \{id\colon 1 \leqslant i \leqslant n\}$，且 $d \in [k]$。与前面一样，对于正整数的任意子集 D，记作 $\mathcal{G}_D = \{B_d : d \in D\}$。此外，相应的参数也以相同方式定义，并类似地记为 $M_D(n) = m(\mathcal{G}_D)$、$M_k(n) = m(\mathcal{G}_{[k]})$ 和 $M(n) = m(\mathcal{G}_{[n]})$。

我们的下一个结果确定了函数 $M(n)$ 的渐近阶。

定理 2. 我们有 $M(n) = \Theta(n^3/\ln n)$。更准确地说，

$$\left(\frac{1}{6} - o(1)\right)\frac{n^3}{\ln n} \leqslant M(n) \leqslant (0.526 + o(1))\frac{n^3}{\ln n}.$$

在第 4 节中，我们将给出该定理的一个更详细版本，其中包含对 $M_k(n)$在 $k \leqslant n$ 时的估计（见定理 5）。

请注意，参数 $M_k(n)$ 对 $k > n$ 完全适用，不同于 $m_k(n)$。当 k 远大于 n 时，通过采用不同的技巧，我们得到以下结果。

定理 3. 对于每个 $n \in \mathbb{N}$，都存在 $k_0 = k_0(n)$，使得对于所有 $k \geqslant k_0$，我们有 ve

$$M_k(n) \leqslant 3nk.$$

值得指出的是，对于任意一族n元集合（具有有界直径），类似的结论可能远非成立。例如，考虑集合

$$S_r = \{1, 2, \ldots, r, 2r, 3r, \ldots, (r+1)r\}$$

其大小为 $|S_r| = 2r = n$。不难看出，无法将 S_r 的两个平移副本打包使它们彼此重叠。因此，打包 k 个 S_r 的副本至少需要长度为 $kr(r+1) = \Omega(kn^2)$ 的区间。参照本文的其他结果，也可以构造类似的例子。

打包间隔各不相同的等差数列这一问题，源于一些风格相近的谜题；这些谜题都在寻找由某些距离约束定义的超图中的完美匹配。其中之一是由 Cipra 提出、并经 Guy 推广的以下修筑路障 问题 [12]。

令 S_n 表示 $[n]$ 的所有排列组成的集合。若对于某个 $i, j \in [n-1]$，有 $a_1 + \cdots + a_i = b_1 + \cdots + b_j$，则两个排列 $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ 和 $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ 称为相关的 。若子集 $A \subseteq S_n$ 中任意两个元素都不相关，则称其为独立的 。 S_n 中独立集的最大大小是多少？一个简单的上界是 $\lfloor n/2 \rfloor + 1$，一个自然的猜想是

这个上界可以达到。在 [8] 中，我们通过最初采用一些装填论证证明了其至少是线性的，这些论证与本文探讨的论证类似。

另一个更为直接的灵感来自 Johnson [14] 发明的完美节奏铺砌谜题（另见 [3] 和 [21]）。其任务是将线段 $[nk]$划分为 k 个等差数列，每个数列含 n 项，但任意两个的公差都不相同。是否对每一个固定的 n，当 k足够大时都存在这样的铺砌？即便对于 $n = 3$，答案也尚未知晓。

最后我们要指出，我们所关注的结构也出现在一些更为著名的问题中。例如，厄尔多斯 [9] 的乘法表 问题（见 [11]）只是询问上文所定义的等差数列之并集 $B_1 \cup \cdots \cup B_n$ 的基数，而 Katz 与 Tao [15] 的算术 *Kakeya* 猜想 （由 Ruzsa [20]独立提出）则关注其平移副本之并集$(s_1 + B_1) \cup \cdots \cup (s_k + B_k)$的最小可能规模。甚至黎曼猜想也可以等价地借助族 $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$的（略加修改的）关联矩阵 来表述，该矩阵被称为*Redheffer* 矩阵 [18], ，其行列式与莫比乌斯函数的部分和一致（见[5]）。

上述结果的证明将在接下来的三个章节中给出。最后一节将进行讨论，介绍一些进一步的简单结果，并提出若干未解决问题。

全文使用标准的渐近记号。特别地，我们假设在需要时， n 或 k 的值足够大。通常的记号 $o(1)$表示当相关参数趋于无穷大时趋于 0 的量。如果从上下文中无法看出这一点，我们将通过写作 $o_p(1)$来指定参数 p。以自然底数 e 为底的对数记作 $\ln x$，而 $\log x$ 表示以 2 为底的对数。

2. 关于 $m(n)$的界；定理 1 的证明

2.1. 预备知识。 我们考察整数集的装箱问题，因此将区间视为其中的整数点，有时也称为元素；这些整数点的数量称为区间的长度 。我们将利用若干已知估计，并主要关注渐近近似。为明确记号，我们暂且约定，长度为 x的区间（其中 x 为实数）包含 $\lfloor x \rfloor$个（整数）元素，除非另有明确说明。若整数集 A可装入 区间 I ，是指它有一个平移副本 $s + A$ 完全包含在 I中。

我们将特别反复用到素数定理的以下几个众所周知的推论。

引理 *1. </style}*所有不超过 x 的素数之和为

$$(1 + o(1))\frac{x^2}{2 \ln x},$$

而所有不超过 x 的素数的平方和为

$$(1 + o(1))\frac{x^3}{3 \ln x}.$$

还要回顾一下，如果一个整数的最大素因子不超过 y，则称它是-光滑数 y。我们将用到坎菲尔德、厄尔多斯和波默兰斯的以下结果 [7], 另见 [6]。

引理 2 （[7]）。若 $x = y^u$，其中 u 随 x 趋于无穷，且 $y \geqslant (\ln x)^{1.001}$，则不超过 x 的 y-光滑整数的数量为

$$\frac{x}{u^{(1+o(1))u}},$$

其中，$o(1)$ 项在 x （以及 y 和 u）趋于无穷时趋于0 。

我们还将使用以下简单事实。

引理 3。设 A 和 B 是区间 I 中的两个整数子集，该区间长度为 $g > n$，并假设 B 可容纳于长度为 n 的区间中。进一步假设 $|A| \cdot |B| < g - n$。那么存在 $z + B$ 的一个平移副本，使其与 A 不相交，并且包含于 I 中。

证明。至少有 $g - n$ 个 B 的平移副本位于 I 内。其中至多有 $|A| \cdot |B|$ 个会与 A 相交，因为它们分别是通过将某个元素 $b \in B$ 平移到某个$a \in A$ 而得到的。因此，存在一个满足所要求性质的 B 的平移副本。□

2.2. **定理 1 中的下界**。下界的证明相当直接，说明即使对于 $m_D(n)$ 也成立，其中 D 是所有素数的集合 $p \leqslant \sqrt{n}$。

命题 1。令 D 为所有不超过 $\sqrt{n}$的素数组成的集合。则

$$m_D(n) \geqslant \left(\frac{4}{3} - o(1)\right) \frac{n^{3/2}}{\ln n}.$$

证明。令 D 如上，并令 s_d 表示对 A_d 的平移，使得等差数列 $s_d + A_d$、$d \in D$ 两两不相交且都包含在 $[m]$ 中。我们需要证明

$$m \geqslant \left(\frac{4}{3} - o(1)\right) \frac{n^{3/2}}{\ln n}.$$

由于对于任意两个不同的素数 p和 q，等差数列 $s_p + A_p$和 $s_q + A_q$不相交，中国剩余定理意味着，包含 $s_p + A_p$ 的最短区间与包含 $s_q + A_q$ 的最短区间不可能有超过 pq 个公共元素。这意味着 $|s_p - s_q| \geqslant n - \max\{p, q\} - pq$。

令 $p_1 < p_2 < \ldots < p_t$为 D的所有元素，并按从小到大的顺序排列；令 π为 $[t]$ 的一个排列，该排列根据平移 s_d的顺序定义，即

$$s_{p_{\pi(1)}} \leqslant s_{p_{\pi(2)}} \leqslant \ldots \leqslant s_{p_{\pi(t)}}.$$

由上述事实和引理1 可知，$s_{p_{\pi(t)}}$ 与$s_{p_{\pi(1)}}$ 之间的差至少为

$$(1 - o(1))nt - \sum_{i<t} p_{\pi(i)} p_{\pi(i+1)}.$$

根据简单重排不等式（例如，参见 [13]），最后的和至多是 D中所有元素的平方和。根据引理1该和为

$$(1 + o(1)) \frac{(\sqrt{n})^3}{3 \ln(\sqrt{n})}.$$

由于 $t = (1 + o(1))\sqrt{n}/\ln(\sqrt{n})$ 根据素数定理，所求结果随之成立 s. □

2.3. **定理 1 中的上界。** 定理1中上界的证明比下界的证明更复杂。将所采用的装箱过程分成以下几个步骤来描述会更方便。设 $s = \sqrt{n}(\ln n)^3$。为简化表述，在不影响要点时，我们省略下取整和上取整符号。

步骤 1：差值 $d \leqslant s$ 是$(\ln n)^5$-光滑的。
由引理 2 可知，这类差值的数量为 $s^{4/5+o(1)} = n^{2/5+o(1)}$。我们将所有$A_d$ 差值为 d、在此步骤中考虑的等差数列分别嵌入长度为 n的连续区间中。因此，这些区间的总长度为 $n^{7/5+o(1)} = o(n^{3/2}/\ln n)$。
步骤 2：差值为 $d \leqslant s$ 且有一个素因子 p 满足$(\ln n)^5 \leqslant p \leqslant \sqrt{s}$。对于上述范围内的每个素数 p，定义

$$D_p^{(s)} = D_p \cap [s] = \{d \leqslant s : p|d\}.$$

注意，$|D_p^{(s)}| \leqslant s/p$。还要注意，对于 $D_p^{(s)}$ 中每一组 p 个连续元素，相应的等差数列 A_{pi}，$A_{p(i+1)}\ldots$，$A_{p(i+p)}$ 可以装入长度为n的区间中。事实上，每个 A_{pj} 都可以占据 $[n]$ 中与 j （模 p）同余的位置。因此，差值属于 $D_p^{(s)}$ 的等差数列可以装入总长度至多为 $n\lceil|D_p^{(s)}|/p\rceil \leqslant O(ns/p^2)$ 的区间中。

对上述范围内的所有 p 求和，至多得到

$$O\left(ns\sum_{p\geqslant(\ln n)^5}\frac{1}{p^2}\right) \leqslant O\left(ns\frac{1}{(\ln n)^5}\right) = O\left(\frac{n^{3/2}}{(\ln n)^2}\right) = o\left(\frac{n^{3/2}}{\ln n}\right).$$

Step 3：差值 $d \leqslant s$ 具有满足条件 $\sqrt{s} \leqslant p \leqslant s$ 的素因子 p。
注意，这里也可以假设这些差值没有大于 $(\ln n)^5$ 且小于 $\sqrt{s}$ 的素因子，不过论证并不需要这一点。

首先考虑差值 $d \leqslant s = \sqrt{n}(\ln n)^3$，它们能被素数 $p > \sqrt{n}$ 整除。注意，所有差值等于这类素数的等差数列都可以装入一个长度为 n 的区间中。事实上，对于每个这样的 p，只需将相应的等差数列 A_p 放在 $[n]$ 中与 0（模 p）同余的位置即可。根据中国剩余定理，任意两个这样的等差数列 A_p 和 A_q 在$[n]$ 中的嵌入不会相交，其中素数为 $p > q > \sqrt{n}$，正如所需。同样，我们可以将所有 A_{2p}（其素数为 $p > \sqrt{n}$）装入一个单独的（新）区间中，该区间长度为 n，依此类推。由于所有能被素数 $p > \sqrt{n}$ 整除的 $d \leqslant s$ 都具有形式 pg，其中 $g \leqslant (\ln n)^3$，因此可以将所有相应的等差数列 A_d 两两不相交地装入一个总长度为 $n(\ln n)^3 = o(n^{3/2}/\ln n)$ 的区间中。

其次，注意，对于每个满足 $\sqrt{s} \leqslant p \leqslant \sqrt{n}$ 的固定素数 p，集合 $D_p^{(s)}$ 中差为 d 的所有等差数列 A_d 都可以装入一个长度为 n 的区间中，因为 $|D_p^{(s)}| \leqslant s/p \leqslant p$。我们将在下文步骤 4 中说明，剩余的等差数列无需额外空间，因此这足以得到乘法因子约为 2 而非 5/3（或 4/3）的上界。事实上，此类素数的数量至多为 $(1+o(1))\sqrt{n}/\ln(\sqrt{n})$，

根据素数定理，因此容纳这些素数所需区间的总长度至多为 $(2+o(1))n^{3/2}/\ln n$。不过，我们在这里会更加仔细，采用更紧凑的装入方式，允许包含 A_d 且满足 d 的最小区间在选定的集合 $D_p^{(s)}$ 中相互重叠。

首先注意，根据上述说明，差为所有集合 $D_p^{(s)}$ with $\sqrt{s} \leqslant p \leqslant \sqrt{n/\ln n}$ 中元素的等差数列，可借助素数定理不相交地装入长度为 $o(n^{3/2}/\ln n)$ 的区间，因为素数定理表明，这类素数的数量为 p is $o(\sqrt{n}/\ln n)$。因此，我们只需考虑集合 $D_p^{(s)}$，其中 p 是范围 $\sqrt{n/\ln n} < p \leqslant \sqrt{n}$ 内的素数。令 $r = \lfloor (\ln n)^4 \rfloor$。

考虑两个连续素数 $p < q$，满足 $\sqrt{n/\ln n} < p < q \leqslant \sqrt{n}$，并注意到集合 $|D_p^{(s)}|$ 和 $|D_q^{(s)}|$ 的大小都至多为 r，因为 $s = \sqrt{n}(\ln n)^3$。我们将证明，可以将所有差属于 $D_p^{(s)} \cup D_q^{(s)}$ 的等差数列不相交地装入长度为 $2n - (1-o(1))pq$ 的区间。只需证明，对于某个固定整数 $m = (1-o(1))pq$，我们可以找到 $2r$ 个互不相交的等差数列，使得其中前一半的每个数列都包含 p 中每隔 $[m]$ 个的元素，而其余每个数列都由 $[m]$ 中每隔 q 个的元素组成。换言之，我们将证明存在 r 个互不相同的剩余类 $i \pmod p$ 和 r 个互不相同的剩余类 $j \pmod q$，使得对任意这样的数对 (i,j) 及每个 $\ell \in [m]$，要么 $\ell \neq i \pmod p$，要么 $\ell \neq j \pmod q$。若如此，将相应的等差数列延伸（例如，差为 p 的向左延伸，差为 q 的向右延伸），即可在长度为 $2n-(1-o(1))pq$ 的区间内，得到 r 个大小为 $\lfloor n/p \rfloor$、差为 p 的等差数列，以及 r 个大小为 $\lfloor n/q \rfloor$、差为 q 的等差数列，这已足以满足我们的需要。

我们声称，可以取 $m = (p-2r)q$ 和 $i = (-i'q) \pmod p$，其中 $i' \in [r]$，以及 $j = (-j'p) \pmod q$，其中 $j' \in [r]$（因此，$i \in [p-1]$ 和 $j \in [q-1]$）。事实上，假设对于某一对 $(i,\ j)$ 和任意给定的 $\ell \in [m]$，有 $\ell \equiv i \pmod p$ 且 $\ell \equiv j \pmod q$。那么存在整数 $s \in [0, q-2r)$ 和 $t \in [0, p-2r)$，使得 $\ell = sp+i$ 且 $\ell = tq+j$；并且存在正整数 $i',\ j' \in [r]$、$t' \leqslant r$、s'，使得 $i = -i'q + s'p$ 且 $j = -j'p + t'q$。因此，$(s+s'+j')p = (t+t'+i')q$，故 $t+t'+i' \geqslant p$，于是 $t \geqslant p-2r$，矛盾。

令 $p_1 > p_2 > \ldots > p_h$ 为区间 $(\sqrt{n/\ln n}, \sqrt{n}]$ 内的所有素数。将这组数中的每两个连续素数配成一对，并对每一对分别在一个独立区间中使用上述重叠打包，我们便能在长度至多为

$$\begin{aligned} & (1+o(1))n\frac{\sqrt{n}}{\ln(\sqrt{n})} - (1-o(1)) \sum_{1 \leqslant i \leqslant \lfloor h/2 \rfloor} (p_{2i})^2 \\ = \ & (1+o(1))n\frac{\sqrt{n}}{\ln(\sqrt{n})} - (1-o(1))\frac{1}{2} \cdot \frac{(\sqrt{n})^3}{3\ln(\sqrt{n})} \\ = \ & \left(\frac{5}{3} - o(1)\right)\frac{n^{3/2}}{\ln n}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

由素数定理和引理 1得出。

步骤 4：差值 $d > s$。

很容易看出，所研究族中所有等差数列的总大小 $\mathcal{F} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ 仅为 $O(n \ln n)$，而其余每个尚未装入的等差数列的大小至多为 $\sqrt{n}/(\ln n)^3$。因此，根据引理 3 （且仍有余量），可以将它们逐个装入现有的装箱中。

这就完成了上界的证明，从而也完成了定理 1的证明。 □

3. 小 k 时 $m_k(n)$ 的界

现在我们只关注在一个短区间内打包集合 A_1、A_2、……、A_n 中的前 $k < n$ 个等差数列。我们将证明定理 1 在 $k \leqslant \sqrt{n}$时的以下补充结果。（当 $k > \sqrt{n}$时，定理 1 的结论仍然成立，并给出 $m_k(n)$的正确数量级，因为相应的下界只利用不超过 $\sqrt{n}$的素数公差。）

定理 4. 设 k 和 n 是任意正整数，且满足 $k \leqslant \sqrt{n}$。若 $k \ll \sqrt{n}$，则

$$m_k(n) = (1 + o_k(1)) \frac{kn}{\ln k}.$$

否则，若 $k \leqslant \sqrt{n/2}$，则

$$\left(1 - \frac{k^2}{3n} - o(1)\right) \frac{kn}{\ln k} \leqslant m_k(n) \leqslant \left(1 - \frac{k^2}{3n} + \frac{k^2}{48n} + o(1)\right) \frac{kn}{\ln k},$$

并且如果 $\sqrt{n}/2 \leqslant k \leqslant \sqrt{n}$，那么

$$\left(1 - \frac{k^2}{3n} - o(1)\right) \frac{kn}{\ln k} \leqslant m_k(n) \leqslant \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3\sqrt{2}} \frac{\sqrt{n}}{k} + \frac{k^2}{48n} + o(1)\right) \frac{kn}{\ln k}.$$

证明。 对于下界，同样只需关注公差为 A_p 的等差数列，其中 $p \leqslant k$为素数。根据素数定理，这类素数的数量为 $t = (1 + o_k(1))k/\ln k$。根据命题 1证明中的相同推理，由所考察素数确定公差的等差数列所处的区间不可能过度重叠，因此，任何包含所有这些等差数列的不相交副本的区间，其长度都不可能小于

$$(1 - o_k(1))\, nt - \frac{k^3}{3 \ln k},$$

由此便在所有情况下证明了下界。

对于上界，首先注意，根据引理 2，$(\ln k)^2$-光滑正整数 $d \leqslant k$ 的数量至多为 $k^{1/2+o(1)}$。因此，公差为这类正整数的等差数列可以装入长度为 A_d 的区间中

$$o_k\left(\frac{kn}{\ln k}\right). \tag{3.1}$$

对于素数 p，回想一下 $D_p^{(k)} = D_p \cap [k] = \{d \leqslant k : \ p|d\}$。与定理 1的证明类似，对于每个固定的 $p \leqslant \sqrt{k}$，任何 p 等差数列 A_d 满足 $d \in D_p^{(k)}$的，都可以装入

$[n]$。因此，所有差值属于 $D_p^{(k)}$、对所有素数 $p \in [(\ln k)^2, \sqrt{k}]$的等差数列，都可以装入一个总长度至多为

$$n \cdot \sum_{(\ln k)^2 \leqslant p \leqslant \sqrt{k}} \left\lceil \frac{|D_p^{(k)}|}{p} \right\rceil \leqslant nk \cdot O\left(\sum_{p \geqslant (\ln k)^2} \frac{1}{p^2} \right) = O\left(\frac{kn}{(\ln k)^2} \right) = o_k\left(\frac{kn}{\ln k} \right). \tag{3.2}$$

剩下的差值属于满足 $\sqrt{k} < p \leqslant k$ 的素数 $D_p^{(k)}$。和之前一样，任何这样的固定集合 $D_p^{(k)}$中的差值为 d 的等差数列 A_d 都可以装入 $[n]$。因此，根据素数定理，差值 d 属于集合 $D_p^{(k)}$在$p \leqslant k/\ln k$上的并集的所有等差数列 A_d，都可以装入总长度至多为

$$O\left(\frac{nk}{(\ln k)^2} \right). \tag{3.3}$$

同样，对于剩余的（较大）p 值，满足 $d \in D_p^{(k)}$ 的剩余等差数列 A_d，其中 $k/\ln k < p \leqslant k$，可以装入长度为

$$n(1 + o_k(1)) \frac{k}{\ln k} \tag{3.4}$$

这样，任何 $D_p^{(k)}$中差值为 d 的等差数列 A_d 的嵌入所对应的最短区间，都不会与任何其他 $D_{p'}^{(k)}$、$p' \neq p$ 中差值为 d 的等差数列 A_d 的嵌入所对应的最短区间重叠。不过，我们可以按相应素数的降序排列这些区间，从而改进这种装入方式，并确保它们有大量重叠。

对于素数 $p \in (k/\ln k, k/2]$ 我们按照定理 1证明中步骤 3 的做法，首先将它们划分为连续素数对，并对每一对 $\{p, q\}$ 保证一个长度为 $(1 - o_k(1))pq$ 的重叠。由引理 1，此类重叠的长度总和因此为

$$(1 - o_k(1)) \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{k}{2}\right)^3}{3 \ln\left(\frac{k}{2}\right)} \tag{3.5}$$

参见（2.1）中的估计。

令 $p_1 > p_2 > \ldots > p_z$为 $(k/2, k]$中的所有（剩余）素数。由于对于每个这样的 p_i，我们都有 $D_{p_i}^{(k)} = \{p_i\}$，在这一范围内，我们可以更高效地处理，并为几乎所有 A_{p_i}的平移提供双侧重叠。具体而言，根据中国剩余定理，很容易保证：对于任意两个分别包含 A_{p_i} 和 $A_{p_{i+1}}$ 的平移副本的区间，它们的交集长度至少为 $(1 - o_k(1))\min\{p_i p_{i+1}, n/2\}$，对每个 $i < z$均成立。再次利用引理 1进行估算，我们由此推得，对于 $k \leqslant \sqrt{n}/2$ 所有其余的等差数列，即未计入（3.1）、（3.2）和（3.3）中的那些，都可以装入一个长度不超过以下数值的区间（其中，下方前两项分别对应（3.4）和（3.5），最后一项则估算重叠的总长度）

对于（$k/2,\ k$]）中的素数:

$$\begin{aligned} & n(1+o_k(1))\frac{k}{\ln k}-(1-o_k(1))\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(\frac{k}{2}\right)^3}{3\ln\left(\frac{k}{2}\right)}-(1-o_k(1))\left(\frac{k^3}{3\ln k}-\frac{\left(\frac{k}{2}\right)^3}{3\ln\left(\frac{k}{2}\right)}\right) \\ = \ & (1-o_k(1))\left(\frac{nk}{\ln k}-\frac{k^3}{\ln k}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{48}\right)\right); \end{aligned}$$

而对于 $k\in[\sqrt{n/2},\sqrt{n}]$——在不超过以下长度的区间内（其中最后两个分量分别估计($k/2,\sqrt{n/2}$]与($\sqrt{n/2},k$]中素数的重叠总长度）：

$$\begin{aligned} & (1+o(1))\left(\frac{nk}{\ln k}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(\frac{k}{2}\right)^3}{3\ln\left(\frac{k}{2}\right)}-\left(\frac{\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}\right)^3}{3\ln\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}\right)}-\frac{\left(\frac{k}{2}\right)^3}{3\ln\left(\frac{k}{2}\right)}\right)-\frac{n}{2}\cdot\left(\frac{k}{\ln k}-\frac{\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}\right)}{\ln\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}\right)}\right)\right) \\ = \ & (1+o(1))\left(\frac{nk}{2\ln k}+\frac{n^{3/2}}{3\sqrt{2}\ln k}+\frac{k^3}{48\ln k}\right). \end{aligned}$$

□

4. 当 $k\leqslant n$时 $M_k(n)$的界

设 n 为固定的正整数。现在我们转而考虑等差数列 $\{B_1,B_2,\ldots,B_k\}$的打包集合，其中每个 B_d 的大小为 n，且形如 $B_d=\{d,2d,\ldots,nd\}$，其中 $d=1,2,\ldots,k$。我们将首先研究 $k\leqslant n$的情形。

我们将需要以下众所周知的数论事实。

引理 4. 对每个整数 $r\geqslant 2$，$\sum_{i=1}^{\infty}n^{-r}=\zeta(r)$，其中 ζ 是黎曼ζ函数。特别地，

$$\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}\approx 1.645,\ \zeta(3)\approx 1.202.$$

回忆一下，$M_k(n)$ 表示上述等差数列集合 B_d 可以装入的区间的最小长度。下面给出函数 $m_k(n)$的定理 4 的一个类似结果。

定理 5. 设 $k\leqslant n$ 为任意正整数。若 $k\ll n$，则

$$\left(\frac{1}{2}-o_k(1)\right)\frac{k^2n}{\ln k}\leqslant M_k(n)\leqslant\left(\frac{\zeta(2)}{2}+o_k(1)\right)\frac{k^2n}{\ln k}<(0.823+o_k(1))\frac{k^2n}{\ln k}.$$

否则，若 $k\leqslant n/2$，则

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{k}{3n}-o(1)\right)\frac{k^2n}{\ln k}\leqslant M_k(n)\leqslant\left(\frac{\zeta(2)}{2}-\frac{\zeta(3)k}{3n}+o(1)\right)\frac{k^2n}{\ln k},$$

而如果 $k\in[n/2,n]$，则

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{k}{3n}-o(1)\right)\frac{k^2n}{\ln k}\leqslant M_k(n)\leqslant\left(\frac{\zeta(2)-0.5}{2}-\frac{(\zeta(3)-1)k}{3n}+\frac{1}{48}\cdot\frac{n^2}{k^2}+o(1)\right)\frac{k^2n}{\ln k}.$$

证明。 该下界可由与定理 1和 4 的证明中相平行的分析得出，但这次我们估计包含所有 B_p 的不相交副本且素数为 $p \leqslant k$ 的区间的最小长度。设 $p_1 < p_2 < \ldots < p_t$ 为所有这样的素数，并设 π 为 $[t]$ 的一个排列，其定义与平移 s_{p_i} 的顺序一致，即所有 B_{p_i} 的平移，从而在最短区间（记为 I）中给出它们的最优装箱。由中国剩余定理，$|s_{\pi(p_{i+1})} - s_{\pi(p_i)}| \geqslant (n-1)p_{\pi(i)} - p_{\pi(i)}p_{\pi(i+1)}$ 对每一个 $i < t$成立。由引理 1，我们由此推断 I的长度至少等于

$$\sum_{i<t}(n-1)p_{\pi(i)} - \sum_{i<t} p_{\pi(i)}p_{\pi(i+1)} \geqslant (1-o_k(1))\left(\frac{nk^2}{2\ln k} - \frac{k^3}{3\ln k}\right).$$

对于上界，我们再次首先注意到，由引理 2，$(\ln k)^2$-光滑正整数 d 中不超过 k 者的个数至多为 $k^{1/2+o(1)}$，因此相应的等差数列 B_d 可以装入一个长度至多为 $k^{1/2+o(1)} \cdot kn = o_k(k^2 n/\ln k)$ 的区间。

如前，我们定义 $D_p^{(k)} = \{d \leqslant k : p|d\}$，并且与方程（3.2）中类似，对于素数$p \in ((\ln k)^2, \sqrt{k}]$我们可以用一个（新的）长度为

$$nk \cdot \sum_{(\ln k)^2 \leqslant p \leqslant \sqrt{k}} \left\lceil \frac{|D_p^{(k)}|}{p} \right\rceil = O\left(\frac{k^2 n}{(\ln k)^2}\right) = o_k\left(\frac{k^2 n}{\ln k}\right).$$

接下来，由素数定理，至多有 $(1+o_k(1))k/(\ln k)^2$ 个素数 $p \in (\sqrt{k}, k/\ln k]$。对于其中每一个，使用长度为 kn 的区间便足以处理任一给定 $D_p^{(k)}$ 中的所有差，因此我们可以留出一个长度至多为 $(1+o_k(1))k^2 n/(\ln k)^2 = o_k(k^2 n/\ln k)$ 的区间来应对这些素数。

令 $\mathbb{P}$ 表示所有素数的集合。我们将剩余的素数 p（其中$k/\ln k < p \leqslant k$）划分为子集 $P_i := \{p \in \mathbb{P} : k/(i+1) < p \leqslant k/i\}$，其中 $i = 1, 2, \ldots, \ell = \lfloor \ln k \rfloor$。对于每个 $i \leqslant \ell$，我们现在将在一个单独的短区间 J_i 中装入所有满足 $d \in \bigcup_{p\in P_i} D_p^{(k)}$ 的 B_d，从而完成将所有满足 $d \leqslant k$ 的 B_d 装箱的构造。

对于 $i = 1$，我们有 $D_p^{(k)} = \{p\}$ 对每个 $p \in P_1$ 都成立；根据中国剩余定理，我们可以将所有满足 $p \in P_1$ 的 B_p 依次贪心装入，使得任意两个在 P_1 中相邻的 $p < q$ 所对应的嵌入副本 B_p 和 B_q 所张成的区间，其交集长度至少为 $(1-o_k(1))\min\{pq, pn/2\}$。因此，我们可以将满足 $p \in P_1$ 的 B_p 装入一个长度为 J_1 的区间中

$$(1+o_k(1))\left(\left(\sum_{p\in P_1 \cap [n/2]} pn - \sum_{p\in P_1\cap[n/2]} p^2\right) + \frac{1}{2}\sum_{p\in(n/2,k]\cap\mathbb{P}} np\right). \tag{4.1}$$

现在固定任意一个 $i \in [2, \ell]$。我们将证明，可以将所有满足 $d \in \bigcup_{p\in P_i} D_p^{(k)}$ 的集合 B_d 装入长度为

$$(1+o_k(1))\left(\sum_{p\in P_i} ipn - \sum_{p\in P_i} ip^2\right). \tag{4.2}$$

为此，我们首先将采用与 $i = 1$ 情形类似的方法，把所有带有 $p \in P_i$ 的 B_{ip} 放入长度符合要求的区间中——请注意，这种方法只会处理带有 B_d 且

对于给定的 i，直径最大的集合。因此，我们必须谨慎行事，以便之后能够完成装填——将我们感兴趣的其余集合彼此不相交地嵌入同一区间内。

任取两个连续素数 $p<q$ in P_i。由于整数 ip and q 互素，我们可以将 B_{ip} and B_{iq} 打包在一个长度至多为 $np+nq-(1-o_k(1))ipq$的区间 $I=[a,b]$ 中，使其与 B_{ip}的一个平移副本 $C_p=\{a=a_1,a_2,\dots,a_n\}$不相交；同时，令其与 B_{iq}的一个平移副本 $C_q=\{b_1,b_2,\dots,b_n=b\}$不相交，从而存在一个由 i 个互不相同的剩余类组成的集合 $R_q\subseteq\{0,1,\dots,q-1\}$，使得对于每个 $a_j\geqslant b_1$ 和每个 $r\in R_q$，都有 $a_j\not\equiv r\pmod q$。（论证与定理 1 证明中步骤 3 所用的方法几乎相同，那里给出了类似的重叠打包，但取 $m=(pi-i^2)q$，并且对 $j'\in[i]$取剩余类 $r=(-j'pi)\pmod q$；此处省略更多细节。）如有必要，再稍作平移，我们还可以假设

$$b_1-a_n<ipq-2p\leqslant(k-2)p\leqslant(n-2)p. \tag{4.3}$$

注意，对于 P_i 中所有连续素数对的此类装填，我们还可以进一步将它们拼接起来（通过识别相同等差数列的副本），从而得到对所有 B_{ip}、$p\in P_i$ 的装填；其中任意两个连续素数 $(1-o_k(1))ipq$、p之间，在 q 中有长度为 P_i的双侧重叠。该装填位于一个长度符合要求的区间内，其长度上界为 (4.2)。

剩下的工作是通过将剩余的集合 B_d 嵌入 J_i 中，并使其与 $d\in\bigcup_{p\in P_i}D_p^{(k)}$ 配合，来完成装填。对于每个 $q\in P_i$，我们按如下方式进行。沿用上面的记号，设 $C_q=\{b_1,b_2,\dots,b_n=b\}$ 是将 B_{iq} 嵌入 J_i 的嵌入（可以理解为对整个 J_i 进行平移，使这一点成立）。接着，我们将 B_q、B_{2q}、……、$B_{(i-1)q}$ 嵌入 J_i：放置每个 B_{mq} 的一个副本，使其从某个点 $c_m\in(b_1,b_1+q)$ 开始，该点模 q 等价于前面给出的另一个不同的 $r_m\in R_q$，即 $c_m\equiv r_m\pmod q$，且当 $m\neq m'$ 时 $r_m\neq r_{m'}$。这样，所有满足 $m\in[i]$ 且位于 J_i 中的 B_{mq} 的嵌入显然两两不相交。此外，由于 R_q 的选取，这些嵌入也与 p 对应的 B_{ip} 的嵌入不相交；该集合在 P_i 中紧邻 q 之前。还要注意，对于每个 $m\in[i-1]$，B_{mq} 的嵌入的最后一个元素小于 $b_1+q+(n-1)(i-1)q=b_n-(n-2)q$，因此条件 (4.3) 保证 B_{mq} 的嵌入与所有满足 $d\in\bigcup_{p\in P_i}D_p^{(k)}$ 且位于 J_i 中的其余集合 B_d 的嵌入均不相交。

因此，对于 $k\leqslant n/2$，通过对（4.1）和（4.2）在 $i\geqslant 2$ 上求和，我们得出结论：所有集合 B_d 在 $d\leqslant k$ 下都可以装入一个长度为

$$(1+o_k(1))\left(\sum_{i\in[\ell]}\sum_{p\in P_i}ipn-\sum_{i\in[\ell]}\sum_{p\in P_i}ip^2\right),$$

而根据引理 1 (其中 $f\sim g$ 表示 $f=(1+o_k(1))g$)，

$$\sum_{i\in[\ell]}\sum_{p\in P_i}ipn\sim n\sum_{i\in[\ell]}i\left(\frac{\left(\frac{k}{i}\right)^2}{2\ln k}-\frac{\left(\frac{k}{i+1}\right)^2}{2\ln k}\right)\sim\frac{nk^2}{2\ln k}\sum_{i\in[\ell]}\frac{1}{i^2}\sim\frac{nk^2}{2\ln k}\cdot\zeta(2)$$

and

$$\sum_{i\in[\ell]}\sum_{p\in P_i}ip^2\sim\sum_{i\in[\ell]}i\left(\frac{\left(\frac{k}{i}\right)^3}{3\ln k}-\frac{\left(\frac{k}{i+1}\right)^3}{3\ln k}\right)\sim\frac{k^3}{3\ln k}\sum_{i\in[\ell]}\frac{1}{i^3}\sim\frac{k^3}{3\ln k}\cdot\zeta(3).$$

最后，对于 $k > n/2$，我们可以用与上文相同的估计，再加上以下项，来界定能够容纳所有公差为 B_d 的 $d \leqslant k$ 等差数列的最短区间长度；以下项用于考虑素数 $k \leqslant n/2$ 时公式（4.1）的变化 $p > n/2$:

$$\begin{aligned}
& (1+o(1))\left(\frac{1}{2}\sum_{p\in(n/2,k]\cap\mathbb{P}} np - \sum_{p\in(n/2,k]\cap\mathbb{P}} (pn-p^2)\right) \\
= \;& (1+o(1))\left(\sum_{p\in(n/2,k]\cap\mathbb{P}} p^2 - \frac{n}{2}\cdot\sum_{p\in(n/2,k]\cap\mathbb{P}} p\right) \\
= \;& (1+o(1))\left(\left(\frac{k^3}{3\ln k} - \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^3}{3\ln k}\right) - \frac{n}{2}\cdot\left(\frac{k^2}{2\ln k} - \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^2}{2\ln k}\right)\right) \\
= \;& (1+o(1))\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{k^3}{\ln k} + \frac{1}{48}\cdot\frac{n^3}{\ln k} - \frac{1}{4}\cdot\frac{nk^2}{\ln k}\right).
\end{aligned}$$

□

看来，要为上述定理 1、4 和5 提供最优乘法常数，关键步骤之一应是理解并设计合适的素数公差等差数列装填方案。

5. 当 $M_k(n)$ 趋于无穷时 $k \to \infty$的界；定理 3 的证明

本节证明定理 3。为此，我们首先将集合 $\{B_1, B_2, \ldots, B_k\}$ 中的几乎所有等差数列装入一个大小为 循环 区间 nk中，从而得到将这些等差数列装入 $[m]$的方案，其中 $m \leqslant 2nk$。其余等差数列则可装入另一个长度为 nk 的区间（事实上，甚至可以装入一个稍短的、长度为$nk - k + o(n^2k)$的区间）。这两部分共同给出了定理 3所述的结果。

我们将使用关于共度较小的近正则均匀超图中近乎完美匹配的已知结果。该结论最初由 Rödl 提出相关思路，并在 [10] 和 [17] 中得到证明 [19]，，现陈述如下引理。回忆一下，超图的最大共度 是指包含某一固定顶点对的边数的最大值。

引理 5 ([10], [17])。 对于任意固定的 t 和 $\mu > 0$，存在 D_0 和 $\delta > 0$，使得任意一个t均匀超图，只要它有 N 个顶点，且每个顶点的度介于$(1-\delta)D$与$(1+\delta)D$之间（其中 $D \geqslant D_0$），并且最大共度至多为 δD，就包含一个匹配，使得除至多 μN 个顶点外的所有顶点都被覆盖。

在下面的结果中，长度为 r 的圈就是循环群 $\mathbb{Z}_r$。令 $\mathcal{G}_n(k) = \{B_1, B_2, \ldots, B_k\}$ 表示由等差数列 $B_d = \{d, 2d, \ldots, nd\}$构成的族，其中 $d \in [k]$。

定理 6。 设 n 为一个固定的正整数。对于每个 $\epsilon > 0$，都存在 k_0，使得对于每个 $k \geqslant k_0$，都存在一个集合，其中至少包含 $(1-\epsilon)k$个来自族$\mathcal{G}_n(k)$ 的互不相同的等差数列，这些等差数列可以装入长度为 nk的环中。

证明。 令 $t = n+1$, $\mu = \epsilon/(n+1)$, $N = nk + k$，并考虑顶点集为 N 个顶点 $[k] \cup \mathbb{Z}_{nk}$ 上的如下 t- 均匀超图。对于每个 $d \in [k]$，都有 kn 条边，其中

每条边的第一个顶点是 $d \in [k]$，其余 n 个顶点则是等差数列 B_d 在 $\mathbb{Z}_{nk}$中的循环平移 $D = kn$-正则。容易验证，该超图中的最大余度小于 n^3。由于 n （因而 t）都是固定的，若 k 足够大，那么根据引理 5，该超图包含一个匹配，覆盖除至多 $\epsilon k(= \mu N)$ 个顶点以外的所有顶点。这就得到了所需的等差数列。□

定理3 的断言可由上一个结果迅速推出。如上所述，循环打包可以将几乎所有等差数列装入 $[m] = [2nk]$。其余等差数列则可利用引理 $nk - k + o(n^2k)$ 装入另一个长度为3的区间。

6. 总结与未解决问题

6.1. **纠错码与费雷尔图形。** 这里讨论的装填问题与离散数学中的许多装填问题在理念上相似。一个突出的例子是编码理论中的主要组合问题。其目标是在汉明立方体m 中装入二进制向量的汉明球平移，给定向量的长度为 n，半径为 r；$\{0,1\}^n$这些平移是在群 $\mathbb{Z}_2^n$中进行的。存在这样一种无重叠的打包，等价于存在一个二进制纠错码，其码字数为 m，长度为 n，且距离至少为 $2r+1$。例如，参见 [16] 以及其中引用的文献，了解许多相关的已知结果和未解决问题。

文献 [1]讨论了另一类此类问题。该文的主要结果是，所有对应于整数n 分拆的 $p(n)$ 费雷尔形状 中，能够无重叠地装入长度为 $n \times p(n)$的矩形的最大比例为 $O(1/\log\ n)$。请注意，这里的平移是二维的。利用这一结果可以证明，能够无重叠地装入所有 $p(n)$形状的平移的 n 乘 t 矩形，其最小长度$t = t(n)$至少为$\Omega(p(n)\log\ n)$。事实上，任意一个 n 乘 $cp(n)\log\ n$ 矩形都可以覆盖为，例如，$c\log\ n+1$ 个子矩形，每个子矩形的高度为 n、长度小于 $p(n)$，并且相邻矩形之间都有一个大小相同的 n 乘 n 正方形重叠。如果原矩形包含所有费雷尔形状，那么每个形状都会完整地包含在某个较小矩形中；而对于适当选取的常数 c，这些较小矩形无法覆盖至少 $1/(c\log\ n+1)$的所有形状。因此，对某个绝对常数 $c>0$，有 $t(n) > cp(n)\log\ n$。

不难证明，这在绝对常数 c的意义下是紧的。事实上，根据关于大小为 n的形状数目的哈代-拉马努金渐近公式，参见例如 [4]，

$$p(n) = (1+o(1))\frac{e^{C\sqrt{n}}}{4n\sqrt{3}}, \tag{6.1}$$

其中 $C = \pi\sqrt{\frac{2}{3}}$。且当 n趋于无穷时，$o(1)$项趋于0。由此容易推出：第一行 x_1 或第一列 y_1 大于$A\sqrt{n}\log\ n$ 的形状数目小于 $p(n)/n$，其中 A为适当的绝对常数。（要看出这一点，注意第一行长度为 x_1 的形状数目为 $p(n-x_1)$，且对第一列有类似公式。）因此，我们可以先略去所有这些例外形状，利用 [1]，最后注记中所述的沿对角线装入方法，将其余形状全部装入一个 n 乘 $O(p(n)\log\ n)$矩形，再为每个剩余的例外形状追加一个 n 乘 n 正方形，从而完成装入。

6.2. **具有素数公差的等差数列**。我们在定理1中的主要结果表明，有些出人意料的是，将所有 n 等差数列 A_d（公差为 $d \in [n]$ ）无重叠装入所需的最小区间长度，在相差一个常数因子的意义下，与所有素数公差$p \leqslant \sqrt{n}$所需的长度相同。此外，仔细审视该证明可知，它蕴含如下结论。

命题 2. 对任意 $\epsilon > 0$ ，存在 $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ ，使得下列结论成立。设 F为所有公差 $d \leqslant \sqrt{n}(\ln n)^3$ 中能被素数 p整除且满足 $\delta\sqrt{n} \leqslant p \leqslant \sqrt{n}$者的集合。则，

$$m_{[n]-F}(n) \leqslant \epsilon \frac{n^{3/2}}{\ln n} (< \epsilon m(n)).$$

因此，$(1-\epsilon)m(n) \leqslant m_F(n) (\leqslant m(n))$。

证明。 为打包步骤 1、2 和 4 中所考虑公差的等差数列所需的总长度，在定理 1 的上界证明中为 $o(n^{3/2}/\ln n) = o(m(n))$。对于公差 d ，若它们在步骤 3 中被考虑且能被素数 $p > \sqrt{n}$整除，则上述结论同样成立。根据我们在步骤 3 中的论证，该步骤中其余能被小于 $\delta\sqrt{n}$ 的素数整除的公差，其贡献至多为 n 乘以这些素数的个数。因此，由素数定理即得所需结果。 □

6.3. **超越具有有界直径的等差数列**。 定理1 中的上界利用了这些等差数列的算术性质，而不仅仅是它们的大小为 $\lfloor n/d \rfloor$（其中 $1 \leqslant d \leqslant n$）这一事实。仅凭这些大小（连同直径约束）就足以推出这些集合可以装入长度为 $\Theta(n^{3/2})$ 的区间，并且在 Θ 记号中隐藏常数的意义下，这一结果是紧的。这一点由下面的简单命题证明，其中我们并不认真尝试优化绝对常数。

命题 3. 设 C_i、 $1 \leqslant i \leqslant n$ 是 $[n]$ 的任意一族子集，其中对所有容许的 i、 $|C_i| = \lfloor \frac{n}{i} \rfloor$。则存在平移 $r_i + C_i$，使得它们可以装入长度至多为 $(1 + 1/e + o(1))n^{3/2}$ 的区间。在常数因子的意义下，这一结果是紧的，也就是说，存在这样的集合 C_i，它们不能装入长度小于 $(1 + o(1))n^{3/2}/2$ 的区间。

证明。 前 $\sqrt{n}$ 个集合 C_i 显然可以通过将每个集合平移到一个长度为 $n^{3/2}$ 的独立区间中，从而装入一个长度为 C_i 的区间。 n然后，我们从一个长度为$bn^{3/2}$ 的空新区间开始，按照顺序逐个装入集合 C_i 的平移版本，其中 $i > \sqrt{n}$ 使用引理 3。尝试嵌入集合 C_x时，此前已嵌入（在这个新区间中）的集合的总大小至多为

$$\sum_{\sqrt{n} < i < x} \frac{n}{i} = (1 + o(1))n(\ln x - \ln \sqrt{n}).$$

（这里我们假设，例如， $x \geqslant 1.1\sqrt{n}$；很容易看出，嵌入先前的集合不存在问题。）

根据引理3 只要对每个相关的 x，就可以进行嵌入。

$$(1 + o(1))n(\ln x - \ln \sqrt{n}) \cdot \frac{n}{x} < bn^{3/2} - n. \tag{6.2}$$

函数 $f(x) = \ln x - \ln_x$ $\sqrt{n}$ 在 $x \geq \sqrt{n}$ 处取最大值 $x = e\sqrt{n}$，其值为 $1/(e\sqrt{n})$。因此，对于任意固定的 6.2 $b > 1/e$ （且当 n充分大时），不等式 () 成立。这就证明了命题的第一部分。

为了说明它在常数因子意义下是紧的，考虑这样一个例子：前$\sqrt{n}/2$ 个集合 C_i 都包含区间 $[\sqrt{n}] = \{1, 2, \ldots, \sqrt{n}\}$ 以及等差数列$\{\sqrt{n}, 2\sqrt{n}, 3\sqrt{n}, \ldots, n\}$ （为简单起见，假设 $\sqrt{n}$ 是整数）。那么，在这些集合 $\sqrt{n}/2$ C_i的平移的任意不相交装箱中，包含平移后的C_i 、长度为 n的任意两个区间都不能有非空交集。这就完成了命题的证明。□

通过稍加仔细处理，可以改进上一个命题中上界和下界的常数。对于上界，可将常数改进为$\frac{2}{\sqrt{e}} + o(1)$。具体做法是：将前 $\lfloor \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{e}} \rfloor$ 个集合 C_i 分别嵌入长度为 n的不同区间中，然后按照顺序，利用引理 3，将其余集合 C_i逐个嵌入另一个长度为（$\frac{1}{\sqrt{e}} + o(1)$）$n^{3/2}$的区间中。下界中的常数可改进为 $\ln 2 + o(1)$。为此，在上述初始集合 C_i（$i \leqslant \sqrt{n}/2$）之外，再加入集合C_j（$\sqrt{n}/2 < j \leqslant \sqrt{n}$），其中对每个这样的 j， C_j都包含区间 $[\sqrt{n}] = \{1, 2, \ldots, \sqrt{n}\}$ 以及等差数列 $\{\sqrt{n}, 2\sqrt{n}, 3\sqrt{n}, \ldots, (n/j - \sqrt{n})\sqrt{n}\}$。

6.4. 猜想。 寻找 $m(n)$的渐近公式，并确定一个常数 b，使得 $m(n) = (1 + o(1))b^{n^{3/2}/\ln n}$，或许会很有意思。这似乎需要一些额外的想法——我们考虑过的其他函数也同样如此。下面列出关于这一问题的一些猜想。

猜想 1. $m(n) \sim \frac{4}{3} \cdot \frac{n^{3/2}}{n \ln n}$ 。

我们还猜想 $1/6$应当是 $M_n(n)$的乘法因子，参见定理 5。

猜想 2. $M(n) \sim \frac{1}{6} \cdot \frac{n^3}{\ln n}$ 。

我们看似弱得多的猜想仅涉及素数集合；对该集合的理解似乎是解决更一般情形的关键目标之一。记 $\mathbb{P}(x)$为不超过 x的素数集合。

猜想 3. $m_{\mathbb{P}(\sqrt{n})}(n) \sim \frac{4}{3} \cdot \frac{n^{3/2}}{n \ln n}$ 。

猜想 4. $M_{\mathbb{P}(n)}(n) \sim \frac{1}{6} \cdot \frac{n^3}{\ln n}$ 。

上文猜想 3和4中的两个问题似乎密切相关。还请注意，这些问题中的下界分别可由定理 1 和定理5中下界的证明推出。

若猜想 1成立，则渐近地也解决了 $m_k(n)$ 对 $k \geqslant \sqrt{n}$的问题。鉴于定理 4，唯一尚未解决的情形将涉及 $k < \sqrt{n}$ 它们不是 $o(\sqrt{n})$。

猜想 5。 对于每个满足 $\Omega(\sqrt{n}) = k < \sqrt{n}$的 k， 我们有

$$m_k(n) \sim \left(1 - \frac{k^2}{3n}\right) \frac{k}{\ln k} \cdot n.$$

以下 根据定理， $k < n$ 的取值似乎也依次使 $M_k(n)$ 中的 g 成立。 5.

猜想 6。如果 $k \ll n$，那么

$$M_k(n) \sim \frac{k^2}{2\ln k} \cdot n,$$

否则，

$$M_k(n) \sim \frac{k^2}{2\ln k} \cdot n - \frac{k^3}{3\ln k}.$$

最后一个猜想涉及对形如 $B_d = \{d, 2d, \ldots, nd\}$ 的 k 等差数列进行打包，其中 $d = 1$, 2，……，k，长度 n 固定。我们怀疑，或许 nk 这一平凡下界在渐近意义上是正确的。

猜想 7。对于每个固定的 n，当 k 趋于无穷时，我们有

$$M_k(n) = (1 + o(1))nk.$$

参考文献

[1] N. Alon、M. Bóna 和 J. Spencer，《Ferrers 图形的装填》，《组合学、概率与计算》9（2000），205–211。6.1，6.1[2] N. Alon 和 J.H. Spencer，《概率方法》第 2 版，Wiley，纽约，2000。[3] E. Amiot，《傅里叶空间中的音乐》，Springer International Publishing Switzerland，2016。1[4] G. Andrews，《分拆理论》，《数学及其应用百科全书》第 2 卷。Addison-Wesley Publishing Co.，雷丁，马萨诸塞州，伦敦，阿姆斯特丹，1976。6.1[5] K. Broughan，《黎曼猜想的等价命题》，第一卷：算术等价命题，《数学及其应用百科全书》第 164 卷，剑桥大学出版社，2017。1[6] N. G. Bruijn，关于正整数的个数 $\leqslant x$ 且不含素因子 $> y$，《荷兰皇家艺术与科学学院》论文集 A 辑 54（1951），50–60。2.1[7] E. R. Canfield、P. Erdős 和 C. Pomerance，关于 Oppenheim 提出的“整数分解”问题，《数论杂志》17（1983），1–28。2.1，2[8] M. Dębski、J. Grytczuk、B. Pawlik、J. Przybyło、M. Śleszyńska-Nowak，建造路障，（未发表手稿）。1[9] P. Erdős，数论的一些评述，《数学季刊》9（1955）45–48（希伯来语，附英文摘要）。1[10] P. Frankl 和 V. Rodl，图与超图中的近乎完美覆盖，《欧洲组合学杂志》6（1985），317–326。5，5[11] K. Ford，具有给定区间内因子的整数的分布，《数学年刊》168（2008），367–433。1[12] R. K. Guy，建造巴里凯德与围栏，载于《巴里凯德与数独；献给 Martin Gardner 和 Tom Rodgers 的论文集》，T. Plambeck 和 T. Rokicki 编，美国数学协会出版社，普罗维登斯，罗得岛州，2020。1[13] G. H. Hardy、J. E. Littlewood 和 G. Pólya，《不等式》，剑桥数学文库（第二版），剑桥大学出版社（1952），剑桥，第 10.2 节，定理 368。2.2[14] T. Johnson，我音乐中的铺砌，《新音乐视角》49.2（2011）：9–21。1[15] N. Katz、T. Tao，算术投影的界及其在 Kakeya 猜想中的应用。《数学研究快报》6（1999），625–630。1[16] F. J. MacWilliams 和 N. J. A. Sloane，《纠错码理论》第一部分，North-Holland 数学文库第 16 卷，North-Holland Publishing Co.，阿姆斯特丹-纽约-牛津，1977。6.1[17] N. Pippenger 和 J. Spencer，超图色指数的渐近行为，《组合学理论杂志》A 辑 51（1989），24–42。5，5

[18] R. Redheffer，《一个可显式求解的优化问题》，载于《优化问题的数值方法》，第 3 卷（会议，数学研究所，奥伯沃尔法赫，1976），国际数值数学系列第 36 卷，第 213–216 页，Birkhäuser，1977。1[19] V. Rödl，关于一个装箱与覆盖问题，《欧洲组合学杂志》5（1985），69–78。5[20]I. Z. Ruzsa，和集，欧洲数学大会，欧洲数学会，苏黎世，（2005），381–389。1[21]N. J. A. Sloane，《在线整数数列百科全书》，电子版发布于 https://oeis.org。（数列 A261516 和 A261517）。1数学系，普林斯顿大学，普林斯顿，新泽西州 08544，美国；以及数学与计算机科学学院，特拉维夫大学，特拉维夫 69978，以色列电子邮箱：nalon@math.princeton.edu数学与信息科学学院，华沙理工大学，00-662 华沙，波兰电子邮箱：michal.debski87@gmail.com数学与信息科学学院，华沙理工大学，00-662 华沙，波兰电子邮箱：jaroslaw.grytczuk@pw.edu.pl

克拉科夫AGH科技大学，波兰克拉科夫A. Mickiewicza大道30号，邮编30-059电子邮件地址：jakubprz@agh.edu.pl