arXiv:2603.02793v1 [math.PR] 3 Mar 2026

具有 Besov 漂移的 McKean 随机微分方程的欧拉格式：收敛速率与实现

LUIS MARIO CHAPARRO J ´AQUEZ[1], ELENA ISSOGLIO[2], 和 JAN PALCZEWSKI[3]

Abstract. 我们研究一维 McKean-Vlasov 随机微分方程（SDE），其漂移项等于一个依赖于过程状态的分布与一个逐点依赖于解的分布密度的非线性函数的乘积。基于近期的适定性结果，我们为这类随机微分方程提出了首个可实现的数值格式。我们的方法将分布漂移的磨光与 Euler-Maruyama 格式相结合，并通过相应的福克 - 普朗克方程对分布进行基于偏微分方程的近似。我们证明了该格式的强收敛性并推导出显式收敛速率，展示了如何平衡光滑化参数与时间离散化。数值实验验证了该格式的适用性，并表明 McKean 相互作用项对解的分布有显著影响。

1. Introduction

1.1. 问题设定。 本文研究如下形式的 McKean–Vlasov 随机微分方程（SDE）：

$$\begin{cases} X_t = X_0 + \int_0^t F(\rho(s, X_s))b(s, X_s)ds + W_t \\ \rho(t, \cdot) \text{ is the law density of } X_t \text{ with } \rho(0, \cdot) = \rho_0, \end{cases} \tag{1}$$

其中， W 是一个一维布朗运动， ρ_0 是 X_0的给定密度， F 是一个非线性函数，而 b不是函数，而是属于 $C([0,T];\ C^{-\hat{\beta}})$且满足 ˆ $\beta \in (0,12)$的分布。 –

关于奇异情形下（任意维数 d）的 (1) 的理论分析，近期已在 [IR23]，中得到探讨，其假设为 $\rho_0 \in C^\alpha$ 对某个 $\alpha > \beta$ 成立，且 F 是一个˜具有适当正则性的有界函数： F并且 $F(z) = zF(z)$ 具有有界且利普希茨连续的导数。通过鞅问题构造了一个弱解，并证明了存在性和唯一性。在本文考虑的一维情形下，还可以在给定的概率空间上，利用固定的布朗运动和固定的随机初始条件构造解（见定理 3.4）。这使得研究 X 的强近似成为可能。

McKean 随机微分方程的解析解十分罕见，因此在大多数情况下都需要采用数值方法。对 McKean 随机微分方程进行数值求解的一种自然且常见的方法是使用粒子系统近似，即利用混沌传播结果，模拟一群粒子，而不是模拟极限方程。该方向的大多数研究

[1]School of Mathematics University of Leeds Leeds LS2 9JT United Kingdom , ,, , , , , 10123,
[2]Dept. of Mathematics "G. Peano" University of Turin Via Carlo Alberto 10 Torino,Italy[3]Faculty of Mathematics, Wrocław University of Science and Technology, WybrzeżeWyspiańskiego 27, 50-370, Wrocław, Poland*E-mail addresses*: [1]academic@lmcj.xyz, [2] elena.issoglio@unito.it, [3]j.palczewski@pwr.edu.pl.

假设系数至少是局部利普希茨连续的，并且动力学对解的分布具有足够光滑的依赖性，参见例如 [BT97；RST23；RES22；Li+23]。值得注意的例外包括 [BH22] 和 [LRS22]。第一篇论文研究了具有时齐系数的 McKean 随机微分方程：这些系数关于测度变量是利普希茨连续的，但在空间变量上只要求具有 H¨older 连续性。第二篇论文研究一维 McKean 随机微分方程，但其漂移项是不连续的（对漂移项的测度依赖性作出了一定的结构性假设），并且在漂移项的不连续点处，扩散系数为非负。欧拉型粒子近似利用变换消除漂移项中的奇点，从而将原始 McKean 随机微分方程的粒子近似的强收敛阶从 $1/9$ 提高到具有变换后漂移项的方程的粒子近似的强收敛阶 $1/2$ 。我们强调，这些方法均不适用于具有分布型漂移且逐点依赖于分布密度的 McKean 随机微分方程。

1.2. **主要贡献**。 尽管在我们的分布型设定中可以采用粒子近似，但我们选择另一种（相当自然的）方法来模拟 McKean 随机微分方程。具体而言，首先（通过数值方法）求解描述该随机微分方程分布（或其密度）的福克–普朗克方程，然后将其代入 McKean 随机微分方程，使之成为标准随机微分方程。由此得到一种可实现的数值格式，用于求解（1）。我们给出了该格式的理论强收敛速率，并考察了其实测性能。据我们所知，这是首篇研究具有分布型系数的 McKean 随机微分方程数值近似的工作。

我们的格式分为两步。首先，通过卷积平滑对分布漂移 b进行正则化，得到光滑函数 b^N，其中参数 N 与平滑程度成反比。其次，对随机微分方程（1）应用标准的 Euler–Maruyama 格式，其中将 b 替换为 b^N。Euler-Maruyama 格式的收敛速率不依赖于 N，但相应的常数会在 $N \to \infty$时发散，这意味着除非 N 与时间步长进行适当平衡，否则强误差也会发散。我们说明如何耦合 N 与时间离散化，从而使组合数值格式强收敛，并计算相应的收敛速率。

对于具有分布漂移的非 McKean 随机微分方程，即 $F \equiv 1$，文献中已经采用了类似的两步方法来进行数值近似。由于无法逐点计算分布漂移，Euler–Maruyama 等数值格式无法直接应用，因此这种方法很自然。据我们所知，只有三篇论文研究了这类近似： [DGI22；CIP25], 研究由布朗运动驱动的一维随机微分方程，而 [GHR25], 研究由分数布朗运动驱动的 d 维随机微分方程。在 [DGI22] 中，漂移是一个关于时间的 ($\frac{1}{2}$+)-H¨older 连续函数，其取值于负阶分数阶 Sobolev 空间 $H_{q\tilde{q}}^{-\beta}$ ，其中 $\beta \in (0, 1/4)$。在 [CIP25] 中，漂移关于时间是 1 2-H¨older 连续的，取值于负阶 H¨older 空间 $C^{-\beta}$，其中 $\beta \in (0, 1/2)$。论文 [GHR25] 考虑了负阶 Besov 空间 $B_\infty^{-\beta}$ 中的时间齐次漂移 b ，其中 $0 < \beta \leq 1/(2H) - 1$ ，Hurst 系数为 $H < 1/2$；也就是说，该文未涵盖由标准布朗运动驱动的随机微分方程。由于 $H \uparrow 1/2$， β 的可取范围会缩小至零，这进一步凸显了我们的设定与他们的不同。

虽然我们的正则化方法在概念上与 [DGI22；CIP25],中使用的方法相似，但关键区别在于漂移项中的 McKean 相互作用项 $F(\rho)$，它带来了额外的复杂性。特别是，分布密度 ρ 并非先验已知，而必须在计算过程中求得

与过程同步计算。文献 [IR23]证明了该密度的存在性，且它满足福克-普朗克方程。然而，这个偏微分方程包含分布型系数，无法通过数值方法求解。因此，我们围绕方程（1）的解 b 构建数值格式，其中 b^N由其磨光结果替代。函数 ρ^N 的 X^N 密度满足具有光滑系数的福克-普朗克方程。该偏微分方程可以使用标准方法求解。

首先假设 ρ^N 已知其精确值，我们确定为确保强收敛所需的正则化级别 N 与欧拉时间步长之间的关系，并计算相应的收敛速率。实际中，我们只能获得福克–普朗克方程的近似解 $\hat{}\rho^N$ 。因此，我们量化 $\hat{}\rho^N$ 中的数值误差（作为N的函数）必须控制在何种程度，才能使该格式的收敛速率不受影响。这种解耦的动机在于， ρ^N 只需计算一次，不受为 X^N模拟的轨迹数量影响。因此，不宜在计算 ρ^N 的计算成本与模拟一条欧拉样本路径的成本之间进行权衡。这凸显了我们方法的关键特点：解的密度 ρ^N 并非通过蒙特卡罗抽样估计，而是通过直接数值求解偏微分方程得到——在一维情形下，这通常是更高效的策略。在更高维度下，尚不知是否存在具有分布意义漂移项的方程（1）的强解，因此，在当前设定下，通过蒙特卡罗方法近似 X^N的概率律这一主要动机并不适用。

本文最后通过详细的数值研究作结。漂移 b 取为时间齐次的。在空间变量 x 中，它被给定为 $\mathbb{R}$ 上具有Hurst指数 $H \in (1/2,1)$ 的分数布朗运动轨迹的导数，从而在 C^{H-1}中构成一种奇异但时间齐次的分布。我们计算了该数值格式的经验收敛速率，并观察到其显著优于理论上的最坏情况界，尽管这一观察应谨慎解读。由于精确解不可得，我们使用高度精细的近似作为参考。我们还利用Kolmogorov-Smirnov拟合优度检验，将X^N 的经验分布与数值计算得到的$\hat{}\rho^N$ 进行比较，从而为该方法的准确性提供证据。最后，我们研究了McKean项 F（ρ）对 X 分布的影响，并表明 F 的选择可能会显著影响所得密度。

总结而言，本文的主要贡献包括：（i）针对具有分布漂移的McKean 随机微分方程，提出首个数值近似格式；（ii）推导理论强收敛速率；（iii）通过基于偏微分方程的密度近似实现该方法；以及（iv）进行详细的经验验证。

1.3. **文献综述**。 最后，我们将更详细地综述与 McKean 随机微分方程相关的研究工作，以此结束引言。

McKean 随机微分方程由 Sznitman 在圣弗卢尔讲座中推广开来 [Szn89]。其系数通常取决于未知过程的整体分布，例如通过其均值来体现。当粒子数量趋于无穷时，它们可作为相互作用粒子的极限而出现。每个粒子的动力学由一个随机微分方程描述，其漂移和／或扩散项取决于粒子群的经验分布。通常可以证明混沌传播，即当粒子数量趋于无穷时，每个粒子变得相互独立，其动力学由自身的分布而非经验测度所决定。其他类型的相互作用也已得到研究。我们尤其关注这样一种情形：粒子的动力学不直接依赖经验测度，而依赖于经验测度与光滑核的卷积（称为中等相互作用）。 [Oel85] 证明，对于足够光滑的系数，混沌传播成立，并导出漂移对过程分布密度具有逐点依赖性的 McKean 随机微分方程

对过程分布密度的逐点依赖。这种逐点依赖正是本文所研究的情形：时刻 t 的漂移取决于过程在当前位置 X_t处的密度 $\rho(t, \cdot)$。

数值求解 McKean 随机微分方程的一种自然且常见的方法是采用粒子系统近似，即利用混沌传播结果，模拟一群粒子，而非极限方程。这种方法在高维情形下尤其有用，因为它在一定程度上避免了维数灾难，参见 [Ben+24，第 2 节。1]在该领域早期的一项研究中——[BT97]——作者研究了一个系数（足够光滑）且对概率律呈线性依赖的 McKean 方程。他们模拟了一个包含 N 个粒子的系统，并证明其收敛速率在时间维度上为 $1/2$ ，在粒子数维度上为 $\sqrt{N}$ 。在[RST23] 中，作者放宽了系数假设，允许其在空间上呈超线性增长，同时保留关于 Wasserstein度量的利普希茨条件。作者基于粒子系统近似，开发了重要性抽样算法，用于计算随机微分方程解的泛函期望。在空间上超线性增长、关于测度变量满足利普希茨连续性且关于时间满足 1/2-H¨older 连续性的假设下， [RES22] 提出了一种基于相互作用粒子系统的显式欧拉格式；并证明该近似在时间维度上以 $1/2$ 的速率强收敛。本文还给出了一种隐式欧拉格式，但未能获得其收敛速率。 [BH22] 研究了系数时齐的 McKean 随机微分方程：系数关于测度变量满足利普希茨连续性，但在空间上仅要求满足 H¨older 连续性（但漂移系数和扩散系数的空间光滑性不能同时放宽）。作者针对粒子系统考虑了一种欧拉格式，并证明其收敛到原 McKean 随机微分方程的解，同时给出了明确的收敛速率。对于漂移系数和扩散系数在空间上仅满足局部利普希茨条件的情形， [Li+23] 进行了研究，其中假设系数关于测度变量满足全局利普希茨条件，且关于时间一致地呈线性增长。作者证明了一种欧拉型格式收敛，但未给出收敛速率。

粒子系统近似中也研究了高阶格式。两项研究 [Bao+21；KN21] 同期发表，研究了漂移项在空间中呈超线性增长的情形。在一定的正则性假设下，他们证明了 Milstein 格式的收敛速率为 1。

另一种扩展思路见 [LRS22]，其中 McKean 随机微分方程是一维的，但漂移项不连续（对漂移项关于测度的依赖作了某些结构性假设），且扩散系数在漂移项的不连续点处非负。作者设计了一种欧拉型粒子近似，通过变换消除漂移项中的奇点。该格式具有强收敛速率 $1/2$；而研究表明，若不采用平滑变换，直接对粒子系统进行时间离散，则其收敛阶为 $1/9$。

1.4. **论文结构**。 本文结构如下。在第2 节中，我们介绍所使用的记号和函数空间。第3 节给出假设，详细说明两步数值格式，并陈述关于收敛速率及其解释的主要结果。在第4 节中，我们汇总辅助性的（已有及新的）分析结果；而密度的正则性 ρ^N 则在第5节中推导。主要结果（定理7.4）的证明在第7 节中给出，适用于解 ρ^N 福克-普朗克方程的情形；随后在第8节中扩展到福克-普朗克方程的解通过数值方法近似的情形（定理8.1）。

两项证明均基于对光滑化漂移 B^N的界：$= F(\rho^N)b^N$这些界在第6节中得到。最后，第9 节介绍该数值格式的数值实现，并探讨其性质。

2. Preliminaries

给定一个函数 f (t,x)，我们分别用 $\partial_x f$ 和 $\partial_{xx} f$ 表示其关于 x 的一阶和二阶导数；即使 f 仅依赖于 x，也采用相同的记号。

我们用 $\mathcal{S} := \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 表示施瓦茨函数空间，用 $\mathcal{S}' := \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ 表示 $\mathbb{R}$上的施瓦茨分布空间；用 $\hat{\cdot}$ 和 $\cdot^\vee$ 表示 $\mathcal{S}$上的傅里叶变换和逆傅里叶变换，并通过对偶性将其扩展到 $\mathcal{S}'$。上确界范数的记号为 $\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$ 和$\|f\|_{L^\infty} = \operatorname{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$。令 $C^\gamma := C^\gamma(\mathbb{R})$ 表示 $\mathbb{R}$上的函数（或当 $\gamma < 0$时的施瓦茨分布）的 Hölder 空间（当$\gamma < 0$时亦称 Besov 空间），其定义如下，对任意$\gamma \in \mathbb{R}$，

$$C^\gamma := \{f \in \mathcal{S}' : \|f\|_{C^\gamma} := \sup_{j\geq -1} 2^{j\gamma} \|(\phi_j \hat{f})^\vee\|_{L^\infty} < \infty\},$$

其中 $(\phi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ 是一个二进分割统一；更多详情请参见 [Tri06第 5] 章和[BCD11第 2 节。7]。当 $\gamma \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$时，这些空间与经典的 Hölder 空间一致。特别地，对于 $\gamma \in (0,1)$，记 Hölder γ-半范数为

$$[f]_\gamma := \sup_{x\neq y, |x-y|<1} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\gamma}, \tag{2}$$

则 Hölder γ-范数

$$\|f\|_\gamma := \|f\|_\infty + [f]_\gamma \tag{3}$$

等价于$\|f\|_{C^\gamma}$。因此，以下我们将把$\|\cdot\|_{C^\gamma}$与 $\|\cdot\|_\gamma$在$\gamma \in (0,1)$上的情形视为相同。

对于巴拿赫空间 $(E, \|\cdot\|_E)$，我们用 $C_T E$表示连续函数空间 $C([0,T]; E)$，该空间中的函数定义在 $[0,T]$ 上、取值于 E，其范数为

$$\|f\|_{C_T E} := \sup_{t\in[0,T]} \|f\|_E.$$

类似地，对于 $\kappa \in (0,1)$，我们用 $C_T^\kappa E$表示 κ-Hölder 连续函数空间 $C^\kappa([0,T]; E)$，该空间中的函数定义在 $[0,T]$ 上、取值于 E，其范数如下

$$\|f\|_{C_T^\kappa E} := \|f\|_{C_T E} + [f]_{\kappa,E},$$

其中

$$[f]_{\kappa,E} := \sup_{t\in[0,T], t\neq s} \frac{\|f(t)-f(s)\|_E}{|t-s|^\kappa}.$$

最后，我们用 $L_T^\infty E$ 表示定义在 $[0,T]$ 上、取值于 E 的本质有界函数空间，其范数为 $\|\cdot\|_{L_T^\infty E}$。

设(P_t) 表示与算子 $\frac{1}{2}\partial_{xx}$ 相关的半群，该算子作用于 $\mathcal{S}$ 上，也就是说，对每个 $t > 0$ 我们有

$$\begin{aligned} P_t : \ \mathcal{S} &\to \mathcal{S} \\ \phi &\mapsto \int_{\mathbb{R}} p_t(\cdot - z)\phi(z)dz \end{aligned}$$

其中，p_t 是由 $p_t(z) = (2\pi t)^{-1/2} e^{-\frac{z^2}{2t}}$ 给出的热核。半群(P_t) 按照通常方式通过对偶配对扩展到 $\mathcal{S}'$，并仍记为 (P_t)。热半群在上述引入的整个 Besov 空间尺度上都有良好的作用，并提供平滑效应，如下文的 Schauder 估计（引理 4.1）所示。

3. Problem statement

我们首先作出以下假设，这些假设将在全文中始终适用。

假设 1。 令 $\rho_0 \in C^{1+\nu}$，其中某个 $\nu > 0$ 和 $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \rho_0(dx) < \infty$成立。

假设 2。 令 $\beta \in (0, 1/2)$，并令 $b \in C_T^{1/2} C^{-\hat{\beta}}$，其中某个 $\hat{\beta} \in (0, \beta)$ 满足 $\beta - \hat{\beta} < \nu$。

假设 3。 令 F为非线性函数，且令 $x \mapsto F(x) := xF(x)$ 满足

- F 有界且可微，且 $\partial_x F$ 利普希茨连续且有界，
- F 可微，且 $\partial_x F$ 是利普希茨连续且有界的。

注 3.1。 收敛速率将用 β 来表示，且该参数越小，数值格式的收敛速度就越快。读者应当 $\hat{}$ 将 β 视为接近 β。出于技术上的考虑，我们要求 $\beta - \beta < \nu \wedge (1-\beta)$，这 $\hat{}$ 由假设 2 保证：事实上 $\beta - \beta < 1/2 < 1 - \beta$，而 ν 给出的界是明确假设的。

我们指出，假设2 常以一种等价的形式表述： $b \in C_T^{1/2} C^{(-\beta)+}$，其中 $C_T^{1/2} C^{(-\beta)+} := \bigcup_{-\beta' > -\beta} C_T^{1/2} C^{-\beta'}$。

假设 1 中的平方可积条件是必要的，以确保解的可积性，从而使我们的欧拉近似的强误差定义良好。

为了 求解 McKean-Vlasov 随机微分方程（1），一个关键工具是相应的福克-普朗克方程

$$\begin{cases} \partial_t \rho = \frac{1}{2} \Delta \rho - \partial_x [\tilde{F}(\rho) b], \\ \rho(0) = \rho_0. \end{cases} \tag{4}$$

本文通过其温和形式来理解福克-普朗克方程（4），即函数 ρ 是（4）的一个解，当且仅当 $\rho \in C_T C^\alpha$ 对于某个 $\alpha > \beta$，并且它满足积分方程

$$\rho(t) = P_t \rho_0 - \int_0^t P_{t-s} \left[\partial_x \left[\tilde{F}(\rho(s)) b(s) \right] \right] ds, \qquad t \geq 0. \tag{5}$$

我们注意到，也可以研究偏微分方程（4）的弱形式。然而， [IR23，命题 3.2] 表明，温和形式与弱形式是等价的。

命题 3.2 （[IR23，命题 3.6]）。 在假设 1、2 和 3下，偏微分方程 （4）在空间 $C_T C^\alpha$ 中对任意 $\alpha \in （\beta， 1 - \beta）$都有唯一的温和解。

上述结果在 [IR23] 中，在较弱的假设下得到证明，即 $\rho_0 \in C^\alpha$ 和 $b \in C_T C^{-\beta}$，因为漂移 b 在时间上无需满足 H¨older 正则性。

现在我们可以正式定义什么是方程 (1) 的解，定义遵循[IR23，定义 6。2]。三元组 $(X, \rho, (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P}))$，简写为 $(X, \rho, \mathbb{P})$，称为 McKean-Vlasov 随机微分方程 (1) 的解，若满足

- X 是滤过概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ 上的随机过程，
- $(X, \mathbb{P})$ 是下述具有分布漂移的 鞅问题 的解： $B := F(\rho) b$且 $X_0 \sim \rho_0(x)dx$，其意义遵循 [IR24b，定义 3。1]，
- $\rho \in C_T C^\beta$，且 $\rho(t)$ 是 X_t 的密度，对所有 $t \in [0, T]$ 均成立。

当任意两个解 $(X, \rho, \mathbb{P})$ 和 $(X', \rho', \mathbb{P}')$ 的密度ρ，ρ' 作为 $C_T C^\beta$ 的元素相一致，且 $(X, \mathbb{P})$ 和 $(X', \mathbb{P}')$ 的分布相同时，该问题具有 唯一性 。

定理 3.3 （[IR23，定理 6.3 和定理 4.2]）。 设假设 *1*、 *2* 和 *3* 成立。*McKean-Vlasov* 随机微分方程 （1） 存在唯一解，且 ρ 是偏微分方程 （4） 的温和解。

为了研究数值近似 X的强误差，我们必须能够构造一个解 X，使其定义在给定的概率空间上（即用于运行数值格式并承载随机初始条件的空间上）。如下定理所示，在一维情形下这是可行的。限制在一维是因为 [IW81，第 IV 章，定理 3。2]这是因为我们的构造涉及一个具有 Hölder 连续扩散系数的随机微分方程。我们强调，经典意义下的强唯一性在此并不适用，因为随机微分方程（1）的解仅在弱意义下定义。

定理 *3.4.* 设 $(\Omega\ \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)\ \mathbb{P})$ 为一个滤过概率空间，其上承载布朗运动 (W_t)，以及一个与之独立的、 $\mathcal{F}_0$-可测的随机变量 ξ，其密度为 ρ_0。在定理 *3.3* 的假设下，存在一个适应于滤过 $(\mathcal{F}_t)$ 的随机过程 X，使得 $(X, \rho, \mathbb{P})$ 是 *McKean-Vlasov* 随机微分方程 *(1)* 的解，且 $X_0 = \xi$ $\mathbb{P}$-几乎处处成立。此外，对于任意 $t \in [0, T]$，都有$\mathbb{E}X_t^2 < \infty$。

证明。 我们将构造 X 作为所谓的虚拟解。对于 $\lambda > 0$，考虑一个偏微分方程

$$\begin{cases} u_t + \frac{1}{2}u_{xx} + F(\rho)bu_x = \lambda u - F(\rho)b \\ u(T) = 0 \end{cases} \tag{6}$$

ˆ，其解在温和意义下理解。由于 $b \in C_T C^{-\beta}$，$\rho \in C_T C^{\alpha}$，$\alpha > \beta$和ˆ$F \in C^1$，我们有 $F(\rho)b \in C_T C^{-\beta}$，其中我们使用了函数与分布之间的逐点乘积性质，该乘积由 Bony 旁乘积定义 [Bon81]，另见[IR23，式（2.9）]，其中给出了 Bony 旁乘积在当前情形下的具体应用。 [IR24a，定理 4.7] 证明了解 u 属于 $C_T C^{(2-\beta)-}$ 且在$C_T C^{(1+\hat{\beta})+}$中唯一。因此，对于任意 $\alpha < 1 - \hat{}\beta$， u_x是 α-H¨older 连续的。根据 [IR24a，命题 4.13]，，当 λ 足够大时，我们有 $|u_x|_\infty < 1/2$，且该映射

$$\phi(t, x) := x + u(t, x) \tag{7}$$

在空间维数上可逆。我们将这个空间逆映射记为 $\psi(t, \cdot)$。由于 u_x 的有界性， ψ 关于空间变量是利普希茨连续的，其常数为 $1/(1 - 1/2) = 2$，且关于 t 一致。现在考虑一个随机微分方程

$$Y_t = Y_0 + \lambda \int_0^t u(s, \psi(s, Y_s))ds + \int_0^t (u_x(s, \psi(s, Y_t)) + 1)dW_s \tag{8}$$

满足 $Y_0 = \phi(0, \xi)$。漂移关于 y 是利普希茨的，且对 t 一致；波动率关于 y 是 α-H¨older 连续的，且对 t 一致。这使我们可以运用 [IW81, Ch. IV, Thm. 3.2] 证明中的论证（另见其后的推论），从而断言强解的存在性与唯一性。根据 [IR24b, Thm. 3.9]，，过程 $X_t := \psi(t, Y_t)$（我们称之为虚拟解）是鞅问题 (1) 的一个解，其分布漂移为 $B = F(\rho)b$，初始条件为 $X_0 = \psi(0, Y_0) = \psi(0, \phi(0, \xi)) = \xi$。[1]

[1]“虚拟解”这一术语源自 [FIR17]，，其中作者使用了一个类似的方程来定义 Y 的解，该随机微分方程具有取值于分数阶 Sobolev 空间的分布漂移 b。这一解与 [IR24b] 中通过鞅问题定义的解等价，这可由他们的定理 3.9 得出。我们还注意到，虚拟解不依赖于 λ，这得益于虚拟解与鞅问题之间的联系；关于这些联系的完整介绍，请读者参阅 [IR24b]。

我们转而证明 Y_t的平方可积性。由$x \mapsto \phi(0,x)$ 的利普希茨性质， $\mathbb{E}Y_0^2 < \infty$ 以及 $Y_0 = \phi(0,\xi)$ 和 $\mathbb{E}\xi^2 < \infty$，我们推得 $\mathbb{E}Y_t^2 < 0$ 只要满足以下条件，便可将 [IW81, Ch. IV, Thm. 2.4] 的证明简单改编至时非齐次情形：

$$(u_x(s,\psi(s,y))+1)^2 + u(s,\psi(s,Y_s))^2 \le K(1+x^2)$$

对于某个与 $s \in [0,T]$ 无关的常数 $K > 0$。这直接由 u 和 u_x 在 $u \in C_T C^{2-\beta}$ 时的有界性得出。为了将这种平方可积性转移到 X，我们证明映射 ψ 关于 y 具有线性增长，且关于 $t \in [0,T]$ 一致。为此，我们写出

$$|\psi(t,y)| \le |\psi(t,y)-\psi(t,\phi(t,0))| + |\psi(t,\phi(t,0))| \le 2|y-\phi(t,0)| \le 2|y| + \sup_{t\in[0,T]} 2|\phi(t,0)|,$$

其中 $\sup_{t\in[0,T]} 2|\phi(t,0)| = \sup_{t\in[0,T]} 2|u(t,0)| < \infty$，这由 u 的有界性得出。 □

Our 一种数值方法是通过将 1 式中的 McKean-Vlasov 随机微分方程替换为 b wit h

$$b^N := P_{\frac{1}{N}} b \tag{9}$$

然后应用欧拉格式求解所得的随机微分方程。由于方程中出现了解的密度，我们首先研究以下正则化 Fokker-Planck 方程的解

$$\begin{cases} \partial_t \rho^N = \frac{1}{2}\Delta \rho^N - \partial_x[\tilde{F}(\rho^N) b^N], \\ \rho^N(0) = \rho_0. \end{cases} \tag{10}$$

与前面一样，命题 3.2 保证存在唯一的温和解：

$$\rho^N(t) = P_t\rho_0 - \int_0^t P_{t-s}\left[\partial_x\left[\tilde{F}(\rho^N(s))b^N(s)\right]\right] ds, \qquad t \in [0,T]. \tag{11}$$

此外 [IR23，命题 4.4]确保

$$\lim_{N\to\infty} \|\rho^N - \rho\|_{C_T C^\alpha} = 0 \quad \text{for any } \alpha \in (\beta, 1-\beta). \tag{12}$$

我们将 McKean-Vlasov 随机微分方程（1）的漂移系数记为 $B := F(\rho)b$ ，并将其光滑近似记为 $B^N := F(\rho^N)b^N$。设 $(\Omega\ \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)\ \mathbb{P})$ 是一个支持布朗运动 (W_t) 的滤过概率空间，并令 X 为定理3.4 中的“强解”，使得 $(X,\rho,\mathbb{P})$ 是方程 (1) 的解。在同一概率空间上，我们考虑正则化 McKean-Vlasov 随机微分方程：

$$X_t^N = X_0 + \int_0^t B^N(s, X_s^N) ds + W_t. \tag{13}$$

我们强调， X_0 是解 X的初始值。方程（13）存在唯一的强解 X^N ，其密度为 ρ^N。

我们将时间区间 $[0,T]$ 划分为 m 个等长子区间，并设 $t_i := i\frac{T}{m}$ 对于$i = 0, \ldots, m$。随机微分方程（13）在时刻 $t \in (t_i, t_{i+1}]$ 的 Euler-Maruyama 近似为

$$X_t^{N,m} = X_{t_i}^{N,m} + B^N(t_i, X_{t_i}^{N,m})(t-t_i) + W_t - W_{t_i}. \tag{14}$$

我们的目标是量化 $X^{N、m}$ 与 McKean 随机微分方程（1）的解 X 之间的逼近误差。误差来源有两个。第一，漂移 F（ρ）b用 F（ρ^N）b^N近似所带来的误差。第二，Euler-Maruyama 近似 X^N所引入的误差。 N越大， X用 X^N近似 X的效果就越好，但由于漂移的波动性更强（即函数本身及其导数的振幅更大），Euler-Maruyama 解的误差也会越大。

因此，我们的策略是确定 N 与 m 之间的最优依赖关系，从而最大化 $X^{N,m}$ 到 X的强收敛速率。

本文有两个主要的理论结果。第一个结果假设ρ^N 如上所述是已知的。第二个结果则给出了数值求解器在 ρ^N 中必须满足的条件，以便在ρ^N 被其在（13）和（14）中的近似替代时，保持收敛速率不变。具体细节和证明分别见定理7.4和定理 8.1。这两个定理的一般表述如下。

定理。 记 $\hat{X}^{N,m}$ 为 *Euler-Maruyama* 解 (14)，其中 ρ^N 或其近似为$\hat{\rho}^N$。对于任意 $\lambda \in (0, 1/2-\beta)$，令 $N(m) = m^\kappa$，其中

$$\kappa = \frac{1}{(1+\beta) + 2(\frac{1}{2} - \beta - \lambda)^2},$$

可得收敛速率

$$\sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}|\hat{X}_t^{N(m),m} - X_t| \le c m^{-\frac{1}{2} + \frac{(1+\beta)/2}{(1+\beta)+2(\frac{1}{2}-\beta-\lambda)^2}}$$

其中某个常数为 $c > 0$，且对任意充分大的 m，使得 $\|B^{N(m)} - B\|_{C_T C^{-(1/2-\lambda)}} < 1$。

注 3.5. 该收敛速率与不含 *McKean* 因子的随机微分方程 $F(\rho)$ 在 *[CIP25]* 中得到的速率相同，仅符号表示有所不同。特别地，以下结论成立。函数 $\lambda \mapsto \frac{1}{2} - \frac{(1+\beta)/2}{(1+\beta)+2(\frac{1}{2}-\beta-\lambda)^2}$ 在 λ上单调递减，其中 $\lambda \in (0, 1/2-\beta)$，因此其上界为

$$r(\beta) = \frac{1}{2} - \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{(1+\beta)/2}{(1+\beta)+2(\frac{1}{2}-\beta-\lambda)^2} = \frac{1}{2} - \frac{(1+\beta)/2}{1+\beta+2(\frac{1}{2}-\beta)^2}.$$

这意味着，我们的数值格式可以达到任何严格小于 $r(\beta)$ 的速率。 $r(\beta)$ 在极端情形下的极限行为，即当 $\beta \downarrow 0$ 和 $\beta \uparrow 1/2$ 时，如下所示

$$\lim_{\beta\downarrow 0} r(\beta) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}, \qquad \lim_{\beta\uparrow 1/2} r(\beta) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0.$$

建议读者参阅文献 $r(\beta)$ 中关于我们的速率 *[CIP25*，注 *10]*，以了解更深入的讨论。我们仅指出，尽管当 $\beta \downarrow 0$ 时，与可测漂移下 $1/2$ 的收敛速率相比，我们的速率似乎并非最优，但它仍优于现有结果，例如文献 *[DGI22]*。第 *9* 节给出的数值结果表明，该速率确实并非最优；不过，要得到更强的结果，需要采用不同于我们的方法。

我们简要说明主要结果关于收敛速率的证明策略。其思路是将误差拆分为三项

$$\sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}|\hat{X}_t^{N,m} - X_t| \le \sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}|\hat{X}_t^{N,m} - \hat{X}_t^N| + \sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}|\hat{X}_t^N - X_t^N| + \sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}|X_t^N - X_t|, \quad (15)$$

其中第一项是将 Euler-Maruyama 格式应用于光滑化随机微分方程所产生的误差（即欧拉误差），第二项是对偏微分方程（10）的解用 $\hat{\rho}^N$ 进行近似所产生的误差（该项在第7 节中消失，因为那里使用精确的 ρ^N），而第三项则借助稳定性估计对随机微分方程加以控制。显然，由于漂移 B^N 所属的随机微分方程（13）是光滑的，因此可将关于欧拉格式收敛性的标准结果应用于

控制欧拉误差。然而，问题在于，速率前面的常数会以指数方式依赖于漂移的性质，例如其范数或其导数的范数，并随 $N \to \infty$而爆炸。为控制该常数，我们必须得到欧拉格式误差的新估计，使其以多项式方式而非指数方式依赖于范数与半范数$[B^N]_{\frac{1}{2},L^\infty}$、$\|B^N\|_{C_T L^\infty}$和 $\|B_x^N\|_{C_T L^\infty}$。

4. Analytical results

引理 4.1（Schauder 估计）。

(i) 对于任意 $\xi \in \mathbb{R}$、$\zeta \geq 0$ 和 $t' > 0$，存在一个常数 $c_S^1 = c_S^1(\xi、\zeta、t')$，使得对于任意$f \in C^{\xi-2\zeta}$

$$\|P_t f\|_{C^\xi} \leq c_S^1 t^{-\zeta} \|f\|_{C^{\xi-2\zeta}}, \qquad t \in (0, t'].$$

(ii) 对于 $\xi \in \mathbb{R}$、$\zeta \in (0，1)$和 $t' > 0$，存在一个常数 $c_S^2 = c_S^2(\xi、\zeta、t')$，使得 $f \in C^{\xi+2\zeta}$,

$$\|P_t f - P_s f\|_{C^\xi} \leq c_S^2 (t-s)^\zeta \|f\|_{C^{\xi+2\zeta}}, \qquad 0 \leq s < t \leq t'.$$

特别地，当 $s = 0$ 时，我们得到

$$\|P_t f - f\|_{C^\xi} \leq c_S^2 t^\zeta \|f\|_{C^{\xi+2\zeta}}, \qquad 0 < t \leq t'.$$

对于一个 上述引理的证明见 [Iss+24，定理 2。10] 及 $d = 0$ 和 $N = 1$ 其中 .

注 4.2。 在本文中，我们取 $t = 1/N$ 为 $N \geq 1$，因此只需考虑上述估计在 $t' = 1$下的情形。因此，提及常数 c_S^1 和 c_S^2时，我们将省略其对 t' 的依赖。

下面回顾伯恩斯坦不等式，它在适当的 Besov空间中，用函数本身的范数界定函数（分布）导数的范数。这是 [BCD11，引理 21]的一个简单推论。

引理 4.3 (伯恩斯坦不等式)。 对于任意 $\xi \in \mathbb{R}$，存在 $c_B = c_B(\xi)$ 使得

$$\|\partial_x f\|_{C^\xi} \leq c_B \|f\|_{C^{\xi+1}} \tag{16}$$

对所有 $f \in C^{\xi+1}$均成立。

~我们可以将假设 3 中的函数 F 视为 C^α 上的一个算子，定义于 $\alpha \in (0,1)$；对于 ~ ~ ~清晰起见，我们用 F表示该算子，因此 $F(f) := F(f(\cdot))$ 对于 $f \in C^\alpha$。以下引理给出了这类算子的一些有用性质。

引理 *4.4*（[*Iss19*，命题 *3.1*]）。设 $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是一个函数，使得 φ_x 是利普希茨且有界的。对于 $\alpha \in (0, 1)$，定义算子 $\varphi\colon C^\alpha \to C^\alpha$如下： $\varphi(f)(\cdot) := \varphi(f(\cdot))$，对任意$f \in C^\alpha$成立。于是存在常数 $c_\varphi > 0$，使得对所有 $f, g \in C^\alpha$

$$\|\varphi(f) - \varphi(g)\|_{C^\alpha} \leq c_\varphi (1 + \|f\|_{C^\alpha}^2 + \|g\|_{C^\alpha}^2)^{1/2} \|f - g\|_{C^\alpha}$$

and

$$\|\varphi(f)\|_{C^\alpha} \leq c_\varphi (1 + \|f\|_{C^\alpha}).$$

现在我们转而讨论一系列技术性估计。

引理 4.5. 对于 $f \in C_T C^\xi$，取某个 $\xi \in \mathbb{R}$，定义

$$g(t) := \int_0^t P_{t-s} f(s) ds. \tag{17}$$

那么，对于任意 $g \in C_T^{1/2} C^\zeta$，$\zeta < \xi + 1$。此外，$\|g\|_{C_T^{1/2} C^\zeta} \le c_2 \|f\|_{C_T C^\xi}$，其中

$$c_2 = c_2(T, \xi, \zeta) = \left(\frac{T^{1-\frac{\zeta-\xi}{2}}}{1-\frac{\zeta-\xi}{2}} + 2 + c_S^2 \frac{T^{1-\frac{1+\zeta-\xi}{2}}}{1-\frac{1+\zeta-\xi}{2}} \right) c_S^1.$$

证明。为清晰起见，我们回顾用于界定该范数的定义：

$$\|g\|_{C_T^{1/2} C^\zeta} = \|g\|_{C_T C^\zeta} + [g]_{1/2, C^\zeta} = \sup_{t \in [0,T]} \|g(t)\|_{C^\zeta} + \sup_{t \ne r \in [0,T]} \frac{\|g(t) - g(r)\|_{C^\zeta}}{|t-r|^{1/2}}. \tag{18}$$

我们将分别估计每一项。对于 (18) 中的第一项，利用詹森不等式可得

$$\|g(t)\|_{C^\zeta} = \left\| \int_0^t P_{t-s} f(s) ds \right\|_{C^\zeta} \le \int_0^t \|P_{t-s} f(s)\|_{C^\zeta} \, ds.$$

应用引理 4.1(i) 可得

$$\|g(t)\|_{C^\zeta} \le c_S^1 \int_0^t (t-s)^{-\left(\frac{\zeta-\xi}{2}\right)} \|f(s)\|_{C^\xi} ds \le c_S^1 \frac{t^{1-\frac{\zeta-\xi}{2}}}{1-\frac{\zeta-\xi}{2}} \|f\|_{C_T C^\xi},$$

其中 c_S^1 是 Schauder 估计中的常数；在最后一个不等式中，我们使用 $\zeta < \xi + 1$ 和 $\|f(s)\|_{C^\xi} \le \|f\|_{C_T C^\xi}$。对 t 取上确界，得到

$$\|g\|_{C_T C^\zeta} \le c_S^1 \frac{T^{1-\frac{\zeta-\xi}{2}}}{1-\frac{\zeta-\xi}{2}} \|f\|_{C_T C^\xi}. \tag{19}$$

对于（18）中的第二项，我们固定 $0 \le r < t \le T$。我们有

$$\begin{aligned} \|g(t) - g(r)\|_{C^\zeta} &= \left\| \int_0^t P_{t-s} f(s) ds - \int_0^r P_{r-s} f(s) ds \right\|_{C^\zeta} \\ &= \left\| \int_r^t P_{t-s} f(s) ds + \int_0^r \left[P_{t-s} f(s) - P_{r-s} f(s) \right] ds \right\|_{C^\zeta} \\ &\le \int_r^t \|P_{t-s} f(s)\|_{C^\zeta} \, ds + \int_0^r \|P_{r-s} \left[P_{t-r} f(s) - f(s) \right]\|_{C^\zeta} \, ds, \end{aligned} \tag{20}$$

其中最后一个不等式来自半群性质和詹森不等式。对于右端第一项，我们应用引理4.1(i)得到

$$\int_r^t \|P_{t-s} f(s)\|_{C^\zeta} \, ds \le \int_r^t c_S^1 (t-s)^{-1/2} \|f(s)\|_{C^{\zeta-1}} \, ds.$$

N注意到 $\xi > \zeta - 1$，对 s 取上确界并计算积分，我们得到 t

$$\int_r^t \|P_{t-s} f(s)\|_{C^\zeta} \, ds \le \int_r^t c_S^1 (t-s)^{-1/2} \|f(s)\|_{C^\xi} \, ds \le c_S^1 \, 2 (t-r)^{1/2} \|f\|_{C_T C^\xi}. \tag{21}$$

对于（20）中的第二项，我们对某个稍后指定的 $\eta \in$ （0，1）应用引理 4.1（i）和（ii）

$$\begin{aligned}\int_0^r \|P_{r-s}\left[P_{t-r}f(s)-f(s)\right]\|_{C^\zeta}\,ds &\le \int_0^r c_S^1(r-s)^{-\eta}\|P_{t-r}f(s)-f(s)\|_{C^{\zeta-2\eta}}\,ds\\ &\le \int_0^r c_S^1(r-s)^{-\eta}c_S^2(t-r)^{1/2}\|f(s)\|_{C^{\zeta-2\eta+1}}\,ds\\ &= c_S^1c_S^2(t-r)^{1/2}\|f\|_{C_TC^{\zeta-2\eta+1}}\int_0^r(r-s)^{-\eta}ds\\ &= c_S^1c_S^2\frac{r^{1-\eta}}{1-\eta}(t-r)^{1/2}\|f\|_{C_TC^{\zeta-2\eta+1}},\end{aligned}$$

其中，最后一个不等式是通过对 s 取上确界得到的。令 $\eta = \frac{1+\zeta-\xi}{2}$，使得$\zeta - 2\eta + 1 = \xi$，我们得到

$$\int_0^r \|P_{r-s}\left[P_{t-r}f(s)-f(s)\right]\|_{C^\zeta}\,ds \le c_S^1c_S^2\frac{r^{1-\frac{1+\zeta-\xi}{2}}}{1-\frac{1+\zeta-\xi}{2}}(t-r)^{1/2}\|f\|_{C_TC^\xi}. \tag{22}$$

将式（21）与式（22结合起来，得到

$$\|g(t)-g(r)\|_{C^\zeta} \le 2c_S^1(t-r)^{1/2}\|f\|_{C_TC^\xi} + c_S^1c_S^2\frac{r^{1-\frac{1+\zeta-\xi}{2}}}{1-\frac{1+\zeta-\xi}{2}}(t-r)^{1/2}\|f\|_{C_TC^\xi}.$$

Thus

$$[g]_{1/2,C^\zeta} \le \left(2c_S^1 + c_S^1c_S^2\frac{T^{1-\frac{1+\zeta-\xi}{2}}}{1-\frac{1+\zeta-\xi}{2}}\right)\|f\|_{C_TC^\xi}. \tag{23}$$

结合式（19）与式（23），可得结论。 □

上述结果使我们能够以降低空间正则性为代价提高时间正则性，并将用于求得涉及正则化 Fokker-Planck 方程解 ρ^N 的界。

引理 4.6。对于 $f \in L_T^\infty C^\xi$ 对于某个 $\xi \in \mathbb{R}$ 定义 g 为 (17)。那么 $g \in L_T^\infty C^\zeta$ 对于任意 $\zeta < \xi + 2$，且 $\|g\|_{L_T^\infty C^\zeta} \le c_3\|f\|_{L_T^\infty C^\xi}$，其中

$$c_3 = c_3(T,\xi,\zeta) = c_S^1\frac{T^{1-\frac{\zeta-\xi}{2}}}{1-\frac{\zeta-\xi}{2}}.$$

证明。我们只需推导一个关于 $\|g(t)\|_{C^\zeta}$ 的界，且该界对于 $t \in [0,T]$ 是一致的。我们有

$$\begin{aligned}\|g(t)\|_{C^\zeta} &= \left\|\int_0^t P_{t-s}f(s)ds\right\|_{C^\zeta} \le \int_0^t \|P_{t-s}f(s)\|_{C^\zeta}\,ds\\ &\le \int_0^t c_S^1(t-s)^{-\frac{\zeta-\xi}{2}}\|f\|_{C^\xi}ds = c_S^1\frac{t^{1-\frac{\zeta-\xi}{2}}}{1-\frac{\zeta-\xi}{2}}\|f\|_{C^\xi} \le c_S^1\frac{T^{1-\frac{\zeta-\xi}{2}}}{1-\frac{\zeta-\xi}{2}}\|f\|_{C^\xi},\end{aligned}$$

其中 c_S^1 是引理4.1中的常数。 □

5. Regularity properties of ρ^N

本节中，我们将推导 ρ^N 的 $1/2$-H¨older（时间）范数以及 ρ^N 的空间导数的估计，这些估计将在后续各节中用到。

我们首先引用已知结果。在 [CIP25，式 (26)、(27) 和 (28)] 中经由 Schauder 估计建立的界，在我们的设定下如下：对任意 $\epsilon > 0$，我们有

$$[b^N]_{\frac{1}{2},L^\infty} \le c_b N^{\frac{\epsilon+\hat{\beta}}{2}} \|b\|_{C_T^{1/2}C^{-\hat{\beta}}} \tag{24}$$

$$\|b^N\|_{C_T L^\infty} \le c_b N^{\frac{\epsilon+\hat{\beta}}{2}} \|b\|_{C_T C^{-\hat{\beta}}} \tag{25}$$

$$\|b^N_x\|_{C_T L^\infty} \le c_b N^{\frac{\epsilon+\hat{\beta}+1}{2}} \|b\|_{C_T C^{-\hat{\beta}}}, \tag{26}$$

ˆ 其中常数 c_b 依赖于 ϵ、β 和 T。在下文中，ϵ 将出现在本文的主要结果以及许多中间估计中。我们不知道 c_b 当 $\epsilon \to 0$时的极限，因此不能在上述估计中令 $\epsilon = 0$。然而，ϵ 意指任意小但固定。

下面我们将得到关于 ρ^N 的界，这将使我们能够在下一节中推导出与 (24)-(26) 类似的估计，但针对 $F(\rho^N)b^N$。由命题 3.2 我们知道 ρ和ρ^N 关于时间连续，取值于 L^∞，但我们还需要时间 H¨older 范数的估计，以及空间导数的 L^∞ 范数估计，且对 N具有显式依赖。

引理 5.1. 记 $H^N = \tilde{F}(\rho^N)b^N$，其空间导数记为 H^N_x，则对于$\eta \in (0, 1-\beta)$

$$H^N \in C_T C^\eta \quad and \quad H^N_x \in C_T C^{\eta-1}. \tag{27}$$

此外，

$$\|H^N_x\|_{L^\infty_T C^{\eta-1}} \le c_4 N^{\frac{\eta+\hat{\beta}}{2}}, \tag{28}$$

其中，常数 c_4取决于 T、$\|\rho_0\|_{C^{\frac{1}{2}\vee\eta}}$、$\sup_N \|b^N\|_{C_T C^{-\beta}}$以及 $\|b\|_{C_T C^{-\hat{\beta}}}$。

证明。首先证明，对每个 $t \in [0,T]$，都有 $H^N(t) \in C^\eta$，并对其范数关于 t作一致估计。回想 $\|H^N(t)\|_{C^\eta} = \|H^N(t)\|_{L^\infty} + [H^N(t)]_\eta$，我们将第一项估计为 $\|H^N(t)\|_{L^\infty} \le \|(\tilde{F}(\rho^N))(t)\|_{L^\infty}\|b^N(t)\|_{L^\infty}$，第二项则估计为

$$[H^N(t)]_\eta = [(\tilde{F}(\rho^N)b^N)(t)]_\eta \le \|b^N(t)\|_{L^\infty}[\tilde{F}(\rho^N)(t)]_\eta + [b^N(t)]_\eta \|\tilde{F}(\rho^N)(t)\|_{L^\infty}. \tag{29}$$

因此我们有

$$\begin{aligned}
\|H^N(t)\|_{C^\eta} &\le \|(\tilde{F}(\rho^N))(t)\|_{L^\infty}\|b^N(t)\|_{L^\infty} + \|b^N(t)\|_{L^\infty}[\tilde{F}(\rho^N)(t)]_\eta + [b^N(t)]_\eta\|\tilde{F}(\rho^N)(t)\|_{L^\infty} \\
&= \|b^N(t)\|_{L^\infty}(\|(\tilde{F}(\rho^N))(t)\|_{L^\infty} + [\tilde{F}(\rho^N)(t)]_\eta) + [b^N(t)]_\eta\|\tilde{F}(\rho^N)(t)\|_{L^\infty} \\
&\le \|b^N(t)\|_{L^\infty}\|(\tilde{F}(\rho^N))(t)\|_{C^\eta} + [b^N(t)]_\eta\|\tilde{F}(\rho^N)(t)\|_{C^\eta} \\
&= \|(\tilde{F}(\rho^N))(t)\|_{C^\eta}\|b^N(t)\|_{C^\eta}.
\end{aligned} \tag{30}$$

Schauder 估计（引理4.1）得出

$$\|b^N(t)\|_{C^\eta} \le c_S^1 N^{\frac{\hat{\beta}+\eta}{2}} \|b(t)\|_{C^{-\hat{\beta}}} \le c_S^1 N^{\frac{\hat{\beta}+\eta}{2}} \|b\|_{C_T C^{-\hat{\beta}}}.$$

˜我们应用引理4.4 于 F，并取 $\alpha = \eta$，从而得到

$$\|\tilde{F}(\rho^N(t))\|_{C^\eta} \le c_\varphi(1 + \|\rho^N(t)\|_{C^\eta}).$$

根据 [IR23，命题 3。3]（取 $\alpha = \frac{1}{2} \vee \eta$，并利用 $b^N \in C_T C^{-\beta}$和 $\rho_0 \in C^{\frac{1}{2}\vee\eta}$），存在一个递增函数 κ（还依赖于 T，$\|\rho_0\|_{C^{\frac{1}{2}\vee\eta}}$），使得

$$\sup_{t\in[0,T]} \|\rho^N(t)\|_{C^\eta} = \|\rho^N\|_{C_T C^\eta} \le \|\rho^N\|_{C_T C^{\frac{1}{2}\vee\eta}} \le \kappa\left(\|b^N\|_{C_T C^{-\beta}}\right) \le \kappa\left(\sup_N \|b^N\|_{C_T C^{-\beta}}\right),$$

而后者是有限的，因为 $b^N \to b$ 在 $C_T C^{-\beta}$ 时 $N \to \infty$。将所有结果代入（30），并对 t 取上确界，可得

$$\|H^N\|_{L_T^\infty C^\eta} = \|\tilde{F}(\rho^N)b^N\|_{L_T^\infty C^\eta} \le c_\varphi\Big(1 + \kappa\big(\sup_N \|b^N\|_{C_T C^{-\beta}}\big)\Big) c_S^1 N^{\frac{\hat{\beta}+\eta}{2}} \|b\|_{C_T C^{-\hat{\beta}}} = C N^{\frac{\hat{\beta}+\eta}{2}},$$

其中常数 C 取决于 Schauder常数c_S^1、常数c_φ、终止时刻T以及范数 $\|\rho_0\|_{C^{\frac{1}{2}\vee\eta}}$、上确界 $_N \|b^N\|_{C_T C^{-\beta}}$和 $\|b\|_{C_T C^{-\hat{\beta}}}$，但关键是，它不依赖于 N。现在只需利用伯恩斯坦不等式（引理4.3）即可得到（28），其中 $c_4 \colon = C c_B$。

现在证明 t 中 H^N的连续性。取 t，$s \in [0,T]$。我们知道 H^N（s）和H^N（t）属于 C^η，并且通过与（30）中类似的计算可得

$$\begin{aligned}
&\|H^N(t) - H^N(s)\|_{C^\eta} \\
&= \|(\tilde{F}(\rho^N)b^N)(t) - (\tilde{F}(\rho^N)b^N)(s)\|_{C^\eta} \\
&\le \|((\tilde{F}(\rho^N))(t) - (\tilde{F}(\rho^N))(s))b^N(t)\|_{C^\eta} + \|(\tilde{F}(\rho^N))(s)(b^N(t) - b^N(s))\|_{C^\eta} \\
&\le \|(\tilde{F}(\rho^N))(t) - (\tilde{F}(\rho^N))(s)\|_{C^\eta}\|b^N(t)\|_{C^\eta} + \|(\tilde{F}(\rho^N))(s)\|_{C^\eta}\|b^N(t) - b^N(s)\|_{C^\eta}.
\end{aligned} \tag{31}$$

式（31）中的第二项在 $t \to s$时趋于零，因为 $b^N \in C_T C^\eta$且 $\|(\tilde{F}(\rho^N))(s)\|_{C^\eta} \le \|\tilde{F}(\rho^N)\|_{L_T^\infty C^\eta} < \infty$，由上述计算可知。现在考虑式（31）中的第一项。对于固定的 t，s我们知道 $\rho^N(t)$ 和 $\rho^N(s)$ 都是 C^η的元素，因此由引理 4.4可得如下界

$$\begin{aligned}
&\|(\tilde{F}(\rho^N))(t) - (\tilde{F}(\rho^N))(s)\|_{C^\eta} \\
&\le c_\varphi\big(1 + \|\rho^N(t)\|_{C^\eta}^2 + \|\rho^N(s)\|_{C^\eta}^2\big)^{1/2}\|\rho^N(t) - \rho^N(s)\|_{C^\eta} \\
&\le c_\varphi\big(1 + \|\rho^N(t)\|_{C^{\eta\vee\frac{1}{2}}}^2 + \|\rho^N(s)\|_{C^{\eta\vee\frac{1}{2}}}^2\big)^{1/2}\|\rho^N(t) - \rho^N(s)\|_{C^\eta} \\
&\le c_\varphi(1 + 2\sup_N \|\rho^N\|_{C_T C^{\eta\vee\frac{1}{2}}})\|\rho^N(t) - \rho^N(s)\|_{C^\eta},
\end{aligned}$$

其中 $\sup_N \|\rho^N\|_{C_T C^{\eta\vee\frac{1}{2}-}}$有限，因为当 $\hat{}\beta < \eta \vee \frac{1}{2} < 1 - \hat{}\beta$ 时，$\rho^N \to \rho$属于 $C^{\eta\vee\frac{1}{2}}$。利用 $\rho^N \in C_T C^\eta$，右端在 $t \to s$时趋于 0。这就证明了 $H^N \in C_T C^\eta$。根据伯恩斯坦不等式，对于每个 s，$t \in [0,T]$ 我们有

$$\|H_x^N(t) - H_x^N(s)\|_{C^{\eta-1}} = \|\partial_x(H^N(t) - H^N(s))\|_{C^{\eta-1}} \le c_B\|H^N(t) - H^N(s)\|_{C^\eta},$$

因此，导数 H_x^N 关于 $C^{\eta-1}$ 的时间连续性由 C^η 中 H^N 的时间连续性保证。□

利用引理 4.5，我们将证明 ρ^N 在 t 中是 $_1{}_2$-H¨older 连续的。

引理5.2. 我们有 $\rho^N \in C_T^{1/2} L^\infty$，并且对于任意 $\eta \in (0,\ (1-\beta) \wedge \nu)$

$$[\rho^N]_{1/2,L^\infty} \le c_5 + c_6 N^{\frac{\eta+\hat{\beta}}{2}},$$

其中$c_5 = c_S^2\|\rho_0\|_{C^{1+\nu}}$ 且 $c_6 = c_2c_4$。

证明。 我们注意到 $\rho^N \in C_TC^\alpha$ 对某个 $\alpha > 0$ 成立（见命题 3.2），因此 $\rho^N \in C_TL^\infty$。我们只需证明 H¨older 时间连续性，即需要估计半范数$[\rho^N]_{\frac{1}{2},\ L^\infty}$。回顾由（11）可知， $\rho^N(t)$ $= P_t\rho_0 - \int_0^t P_{t-s}\partial_x H^N(t)ds$。在不增加复杂性的前提下，我们将给出一个更强的界：对任意 $\delta \in (0, \eta)$, 我们有

$$\begin{aligned}
[\rho^N]_{\frac{1}{2},C^{\eta-\delta}} &= \sup_{t\neq s}\frac{\|\rho^N(t) - \rho^N(s)\|_{C^{\eta-\delta}}}{|t-s|^{1/2}} \\
&= \sup_{t\neq s}\frac{\left\|P_t\rho_0 - P_s\rho_0 + \int_0^t P_{t-u}H_x^N(u)du - \int_0^s P_{s-u}H_x^N(u)du\right\|_{C^{\eta-\delta}}}{|t-s|^{1/2}} \\
&\le \sup_{t\neq s}\frac{\|P_t\rho_0 - P_s\rho_0\|_{C^{\eta-\delta}}}{|t-s|^{1/2}} + \sup_{t\neq s}\frac{\left\|\int_0^t P_{t-u}H_x^N(u)du - \int_0^s P_{s-u}H_x^N(u)du\right\|_{C^{\eta-\delta}}}{|t-s|^{1/2}}.
\end{aligned} \tag{32}$$

对于第一项，我们使用 Schauder 估计（引理 4.1(ii)，取 $\zeta = 1/2$）：

$$\|P_t\rho_0 - P_s\rho_0\|_{C^{\eta-\delta}} \le c_S^2|t-s|^{1/2}\|\rho_0\|_{C^{\eta-\delta+1}} \le c_S^2|t-s|^{1/2}\|\rho_0\|_{C^{1+\nu}} = c_5|t-s|^{1/2},$$

其中用到了 $\eta - \delta + 1 < \eta + 1 < 1 + \nu$。

对于（32）的第二项，我们首先注意到 $H_x^N \in C_TC^{\eta-1}$ 可由引理 5.1得到。应用引理 4.5 于 $f = H_x^N$与 $\zeta = \eta - \delta$ 可得

$$t \mapsto \int_0^t P_{t-u}H_x^N(u)du \in C_T^{1/2}C^{\eta-\delta}$$

关于该范数

$$\left\|\int_0^\cdot P_{\cdot-u}H_x^N(u)du\right\|_{C_T^{1/2}C^{\eta-\delta}} \le c_2\|H_x^N\|_{C_TC^{\eta-1}} \le c_2c_4N^{\frac{\eta+\hat\beta}{2}},$$

其中，最后一个不等式由（28）得到。还需注意，$[\cdot]_{1/2,\ L^\infty} \le \|\cdot\|_{C_T^{1/2}L^\infty} \lesssim \|\cdot\|_{C_T^{1/2}C^{\eta-\delta}}$。
□

推论5.3。 对于任意 $\eta \in (0,(1-\beta)\wedge\nu)$，均有 $\rho^N \in C_T^{1/2}C^\eta$，其中

$$[\rho^N]_{1/2,C^\eta} \le c_5 + c_6N^{\frac{\eta+\hat\beta+\delta}{2}}, \tag{33}$$

其中 $\delta > 0$ 是任意的，但常数 c_5， c_6 来自引理 5.2，并依赖于它。

证明。首先假设 δ 满足 $\eta + \delta < (1-\beta)\wedge\nu$。取 $\eta = \eta + \delta$后，H¨older 半范数$[\rho^N]_{1/2,C^\eta}$ 的估计可直接由引理 5.2 证明中的估计得到。若陈述中的 δ 不满足条件 $\eta + \delta < (1-\beta)\wedge\nu$，则我们可对满足该条件的任意 δ' 得到结论；随后注意到（33）的右端关于 δ递增，因此该结论对所有 $\delta \ge \delta'$均成立。H¨older 半范数的有限性以及 $[0,T]$ 的紧性意味着 $\rho^N \in C_T^{1/2}C^\eta$。□

引理5.4。 我们有 $\rho_x^N \in L_T^\infty L^\infty$，并且对于任意 $\eta \in (0,\ \nu)$,

$$\|\rho_x^N\|_{L_T^\infty L^\infty} \le c_7 + c_8N^{\frac{\eta+\hat\beta}{2}},$$

其中 $c_7 = c_7(\|\rho_0\|_{C_T C^{1+\nu}})$，且 $c_8 = c_3 c_4$ 取决于 η、T、$\|\rho_0\|_{C^{\frac{1}{2}\vee\eta}}$、上确界 $_N \|b^N\|_{C_T C^{-\beta}}$ 以及 $\|b\|_{C_T C^{-\hat{\beta}}}$。

证明。固定 $\eta \in (0,\nu)$ 和 $\delta \in (0,\eta)$。回顾由 (11) 可知，$\rho^N(t) = P_t\rho_0 - \int_0^t P_{t-s}\partial_x H^N(t)ds$。我们将通过估计其范数来证明 $\rho^N \in L^\infty C^{\eta+1-\delta}$。我们有

$$\|\rho^N\|_{L_T^\infty C^{\eta+1-\delta}} \le \|P_\cdot\rho_0\|_{L_T^\infty C^{\eta+1-\delta}} + \left\|\int_0^\cdot P_{\cdot-s}H_x^N(s)ds\right\|_{L_T^\infty C^{\eta+1-\delta}}. \tag{34}$$

该连续性算子 P_t 在 $C^{\eta+1-\delta}$ 上的连续性意味着 $\|P_t\rho_0\|_{C^{\eta+1-\delta}} \le C\|\rho_0\|_{C^{\eta+1-\delta}}$，对于某个常数 $C>0$，因此

$$\|P_\cdot\rho_0\|_{L_T^\infty C^{\eta+1-\delta}} \le C\|\rho_0\|_{C^{\eta+1-\delta}} \le C\|\rho_0\|_{C^{1+\nu}}, \tag{35}$$

其中右端有如下界：$\eta-\delta \le \nu$ 并且由假设1可知。对于（34）的第二项，我们应用引理4.6，取 $\zeta = \eta+1-\delta$ 可得

$$\left\|\int_0^\cdot P_{\cdot-s}H_x^N(s)ds\right\|_{L_T^\infty C^{\eta+1-\delta}} \le c_3\|H_x^N\|_{L_T^\infty C^{\eta-1}} \le c_3c_4N^{\frac{\eta+\hat{\beta}}{2}},$$

其中我们利用常数 c_4 依赖于 η 和 δ。将这些界入 (34) 可得

$$\|\rho^N\|_{L_T^\infty C^{\eta+1-\delta}} \le C\|\rho_0\|_{C^{1+\nu}} + c_3c_4N^{\frac{\eta+\hat{\beta}}{2}}.$$

对每个时刻 t 应用伯恩斯坦不等式（引理4.3），可得

$$\|\rho_x^N\|_{L_T^\infty C^{\eta-\delta}} \le c_B\|\rho^N\|_{L_T^\infty C^{\eta+1-\delta}}.$$

由于 $\eta-\delta>0$，界 $\|\rho_x^N\|_{L_T^\infty L^\infty} \le \|\rho_x^N\|_{L_T^\infty C^{\eta-\delta}}$ 成立。由于我们不希望引理中的估计依赖于 δ，因此需要将 δ 指定为 η 的函数，例如 $\delta = \eta/2$。常数 η 和 δ 会影响常数 c_3。□

6. Three key bounds for B^N

本节的主要目的是推导平滑漂移 B^N 的正则性结果，以便应用 [CIP25]中的类似论证。更确切地说，我们旨在获得与 [CIP25、命题 4 和推论 5]中结果类似的结论。特别是，我们需要证明 $B^N \in C_T^{1/2}L^\infty \cap L_T^\infty C_b^1$，其中，$B^N = F(\rho^N)b^N$。本节中，我们固定 $\epsilon \in (0,(1-\beta)\wedge\nu)$，并考虑界 (24)–(26)，其中常数 c_b 依赖于 ϵ。我们提醒读者，ϵ 应当足够小，但不能令其趋于 0，因为上述界中的常数 c_b 可能会爆炸。我们还将使用上一节中 $\eta=\epsilon$ 对应的界，而其中的常数在 $\eta\to 0$ 时会爆炸。

引理 6.1。我们有 $B^N \in C_T^{1/2}L^\infty$ 且

$$\|B^N\|_{L_T^\infty L^\infty} \le c_9N^{\frac{\epsilon+\hat{\beta}}{2}},$$
$$[B^N]_{\frac{1}{2},L^\infty} \le c_{10}N^{\frac{\epsilon+\hat{\beta}}{2}} + c_{11}N^{\epsilon+\hat{\beta}},$$

其中

$$c_9 = \|F\|_\infty c_b\|b\|_{C_TC^{-\hat{\beta}}},$$
$$c_{10} = c_b\|b\|_{C_TC^{-\hat{\beta}}}\big(\|F\|_\infty + \|F_x\|_\infty c_5\big),$$

$$c_{11} = c_b\|b\|_{C_TC^{-\hat{\beta}}}\|F_x\|_\infty c_6.$$

证明。 由于 F 有界，我们写作

$$\|B^N\|_{L_T^\infty L^\infty} = \|F(\rho^N)b^N\|_{L_T^\infty L^\infty} \le \|F\|_\infty\|b^N\|_{L_T^\infty L^\infty} \le \|F\|_\infty c_b N^{\frac{\epsilon+\hat{\beta}}{2}}\|b\|_{C_TC^{-\hat{\beta}}},$$

其中，最后一个不等式中用到了（25）。这证明了引理中的第一个界。

要证明 $B^N \in C_T^{1/2}L^\infty$，只需对以下半范数给出一个界

$$[B^N]_{1/2,L^\infty} = \sup_{t\neq s}\frac{\|B^N(t,\cdot)-B^N(s,\cdot)\|_{L^\infty}}{|t-s|^{1/2}}.$$

记

$$\begin{aligned}
&\|B^N(t,\cdot)-B^N(s,\cdot)\|_{L^\infty}\\
&= \|F(\rho^N(t,\cdot))b^N(t,\cdot) - F(\rho^N(t,\cdot))b^N(s,\cdot) + F(\rho^N(t,\cdot))b^N(s,\cdot) - F(\rho^N(s,\cdot))b^N(s,\cdot)\|_{L^\infty}\\
&\le \|F(\rho^N(t,\cdot))[b^N(t,\cdot)-b^N(s,\cdot)]\|_{L^\infty} + \|b^N(s,\cdot)[F(\rho^N(t,\cdot)) - F(\rho^N(s,\cdot))]\|_{L^\infty}.
\end{aligned} \tag{36}$$

对于第一项， F 的有界性以及（24）可得

$$\begin{aligned}
\|F(\rho^N(t,\cdot))[b^N(t,\cdot)-b^N(s,\cdot)]\|_{L^\infty} &\le \|F\|_\infty\|b^N(t,\cdot)-b^N(s,\cdot)\|_{L^\infty}\\
&\le \|F\|_\infty[b^N]_{1/2,L^\infty}|t-s|^{1/2}\\
&\le \|F\|_\infty c_b N^{\frac{\epsilon+\hat{\beta}}{2}}\|b\|_{C_TC^{-\hat{\beta}}}|t-s|^{1/2}.
\end{aligned}$$

为了给（36）中的第二项作界，我们注意到导数 F_x 有界，且b^N 有界，因此

$$\begin{aligned}
&\|b^N(s,\cdot)[F(\rho^N(t,\cdot)) - F(\rho^N(s,\cdot))]\|_{L^\infty}\\
&\le \|b^N\|_{C_TL^\infty}\|F(\rho^N(t,\cdot)) - F(\rho^N(s,\cdot))\|_{L^\infty}\\
&\le \|b^N\|_{C_TL^\infty}\|F_x\|_\infty\|\rho^N(t,\cdot)-\rho^N(s,\cdot)\|_{L^\infty}.
\end{aligned}$$

代入估计式（25）以及引理 5.2在 $\eta = \epsilon$下对$\|\rho^N(t,\cdot)-\rho^N(s,\cdot)\|_{L^\infty}$给出的界 $\|b^N\|_{C_TL^\infty}$，得到

$$\|b^N(s,\cdot)[F(\rho^N(t,\cdot)) - F(\rho^N(s,\cdot))]\|_{L^\infty} \le c_b N^{\frac{\epsilon+\hat{\beta}}{2}}\|b\|_{C_TC^{-\hat{\beta}}}\|F_x\|_\infty(c_5 + c_6N^{\frac{\epsilon+\hat{\beta}}{2}})|t-s|^{1/2}.$$

将上述估计代入（36），并除以 $|t-s|^{1/2}$，即可得到$[B^N]_{1/2\text{的界}, L^\infty}$ 从而完成证明。

□

引理 6.2。我们有 $B^N \in L_T^\infty C_b^1$ 以及

$$\|B_x^N\|_{L_T^\infty L^\infty} \le c_{12}N^{\frac{\epsilon+\hat{\beta}}{2}} + c_{13}N^{\epsilon+\hat{\beta}} + c_{14}N^{\frac{\epsilon+\hat{\beta}+1}{2}}, \tag{37}$$

其中

$$\begin{aligned}
c_{12} &= \|F_x\|_\infty c_7 c_b\|b\|_{C_TC^{-\hat{\beta}}},\\
c_{13} &= \|F_x\|_\infty c_8 c_b\|b\|_{C_TC^{-\hat{\beta}}},\\
c_{14} &= \|F\|_\infty c_b\|b\|_{C_TC^{-\hat{\beta}}}.
\end{aligned}$$

证明。 对于任意 $t \in [0,T]$，显然 $B^N(t)$ 在 x 上可微，因为根据假设，F也是如此，$\rho^N(t,\cdot)$ 根据引理 5.4 以及 $b^N(t,\cdot)$ 根据（ 26 ）。为证明（ {v?}

$$B_x^N(t,\cdot) = \frac{d}{dx}[F(\rho^N(t,\cdot))b^N(t,\cdot)] = F_x(\rho^N(t,\cdot))\rho_x^N(t,\cdot)b^N(t,\cdot) + F(\rho^N(t,\cdot))b_x^N(t,\cdot), \tag{38}$$

并如下界定其 L^∞-范数

$$\begin{aligned}\|B_x^N\|_{L_T^\infty L^\infty} &\le \|F_x(\rho^N)\rho_x^N b^N\|_{L_T^\infty L^\infty} + \|F(\rho^N)b_x^N\|_{L_T^\infty L^\infty} \\ &\le \|F_x(\rho^N)\|_{L_T^\infty L^\infty}\|\rho_x^N\|_{L_T^\infty L^\infty}\|b^N\|_{L_T^\infty L^\infty} + \|F(\rho^N)\|_{L_T^\infty L^\infty}\|b_x^N\|_{L_T^\infty L^\infty}.\end{aligned} \tag{39}$$

回顾 F 和 F_x 由假设 3 有界，并利用方程（25）、（26）以及引理 5.4 和 $\eta = \epsilon$ 可得

$$\begin{aligned}\|B_x^N\|_{L_T^\infty L^\infty} &\le \|F_x\|_\infty(c_7 + c_8 N^{\frac{\epsilon+\hat\beta}{2}})c_b N^{\frac{\epsilon+\hat\beta}{2}}\|b\|_{C_T C^{-\hat\beta}} + \|F\|_\infty c_b N^{\frac{\epsilon+\hat\beta+1}{2}}\|b\|_{C_T C^{-\hat\beta}} \\ &\le \|F_x\|_\infty c_7 c_b N^{\frac{\epsilon+\hat\beta}{2}}\|b\|_{C_T C^{-\hat\beta}} + \|F_x\|_\infty c_8 c_b N^{\epsilon+\hat\beta}\|b\|_{C_T C^{-\hat\beta}} \\ &\quad + \|F\|_\infty c_b N^{\frac{\epsilon+\hat\beta+1}{2}}\|b\|_{C_T C^{-\hat\beta}},\end{aligned}$$

由此完成证明。 □

7. Convergence rate with an exact solution to PDE

本节总结我们对方程（1）的欧拉格式收敛误差的分析，假设 ρ^N是已知的精确解，它满足正则化Fokker–Planck偏微分方程（10）。第 8 节将放宽这一假设。

回顾（15），由于此处假设精确解ρ^N 已知，偏微分方程（10）中的第二项便消失。逼近误差分为两项：平滑解 X^N 的欧拉逼近误差（欧拉误差），以及由将 X 近似为 X^N 所产生的误差（稳定性估计）。前几节得到的估计使我们能够运用 [CIP25]中的结果来界定这两项误差。

[1]关于欧拉误差，由引理6.1 和6.2 可得 $B^N \in C_T^2 L^\infty \cap L^\infty C_b^1$。利用 [CIP25, 命题 4] ，我们可以如下界定 X^N 的欧拉格式强误差：

$$\sup_t \mathbb{E}|X^{N,m} - X^N| \le d_1(N)m^{-1} + d_2(N)m^{-\frac{1}{2}}, \tag{40}$$

其中

$$\begin{aligned}d_1(N) &= c_9 N^{\frac{\epsilon+\hat\beta}{2}}\left(1 + c_{12}N^{\frac{\epsilon+\hat\beta}{2}} + c_{13}N^{\epsilon+\hat\beta} + c_{14}N^{\frac{\epsilon+\hat\beta+1}{2}}\right), \\ d_2(N) &= (c_{10}+c_{12})N^{\frac{\epsilon+\hat\beta}{2}} + (c_{11}+c_{13})N^{\epsilon+\hat\beta} + c_{14}N^{\frac{\epsilon+\hat\beta+1}{2}},\end{aligned}$$

并且 $\epsilon > 0$ 是（24）–（26）中出现的参数。

界定 $\sup_t \mathbb{E}|X_t^N - X_t|$ 并不那么直接。我们需要将 [CIP25, 命题 6] 调整到我们的情形（命题7.1），并在适当的空间中估计 $B^N - B$ 的范数（命题7.2）。

命题7.1. 对于任意 $\alpha \in (1/2, 1-\beta)$ 以及任意 $\gamma \in (\beta, 1/2)$，存在一个常数 $c_{15} > 0$，它依赖于 T 和 γ，但不依赖于 α，使得

$$\sup_t \mathbb{E}|X_t^N - X_t| \le c_{15}\|B^N - B\|^{2\alpha-1}_{C_T C^{-\gamma}} \tag{41}$$

对所有 N 都成立，其中 $\|B^N - B\|_{C_T C^{-\gamma}} < 1$ 足够大。此外，对于 $t \in [0,T]$, $\mathbb{E}|X_t^N|^2 + \mathbb{E}|X_t|^2 < \infty$。

证明。我们的设定与 [CIP25，命题 6] 的设定之间的差异在于初始条件。在那里，初始条件是确定性的；而在这里，它是随机的。 [CIP25]中命题6的证明占据了第4节。初始条件会在多个地方出现，下面我们将逐一讨论。我们将使用 [CIP25] 中的记号而不再赘述，因为读者需要查阅该论文才能理解下面的论证。

我们以类似于 $Y_t^N = \psi^N(t, X_t^N)$ 对应解 X^N 的方式 Y，定义过程 X；在定理 ψ 3.4 的证明中，映射 将 $\mathbb{E}(Y_t^N)^2 < \infty$ 对应起来。使用相同的论证可得，对所有 $t \in [0,T]$, 均有 [。 CIP25第节中的论证需要可积性。初始条件唯一产生实质影响之处，是 [CIP25命题 6]的证明。在那里，人们计算得

$$\mathbb{E}\left[|Y_t^N - Y_t|\right] = \mathbb{E}|Y_0^N - Y_0| + \mathbb{E}\left[\frac{1}{2}L_t^0(Y^N - Y)\right] + \lambda\mathbb{E}\left[\int_0^t \operatorname{sgn}(Y^N - Y)(u^N(s,\psi^N(s,Y_s^N)) - u(s,\psi(s,Y_s)))ds\right].$$

只有第一项需要与确定性初始条件的情形区别处理。我们有

$$\begin{aligned} Y_0^N - Y_0 &= \psi^N(0,X_0) - \psi(0,X_0) = (X_0 + u^N(0,X_0)) - (X_0 + u(0,X_0)) \\ &\le \|u^N(0) - u(0)\|_\infty \le \|u^N - u\|_{C_T C^{1+\alpha}} \le o\Big(\|B^N - B\|_{C^T C^{-\gamma}}^{2\alpha-1}\Big), \end{aligned}$$

其中，最后一个不等式的证明方式与 [CIP25]相同，参见其引理11及假设 $\|B^N - B\|_{C_T C^{-\gamma}} < 1$。证明本命题所需的 [CIP25第 4]节中的其余论证仍然成立。□

ˆˆ命题7.2 （稳定性估计）。对于任意 $\alpha \in (1/2, 1-\beta)$以及任意 $\gamma \in (\beta, 1/2)$，我们有

$$\sup_t \mathbb{E}|X_t^N - X_t| \le c_{15}\left(c_{16}N^{-\frac{\gamma-\beta}{2}}\right)^{2\alpha-1}, \tag{42}$$

当 N 足够大，使得$\|B^N - B\|_{C_T C^{-\gamma}} < 1$时，其中常数 c_{15} 与 α 无关，而常数 c_{16} 的明确表达式为

$$c_{16} = c_\varphi\big(1 + \sup_N \|\rho^N\|_{C_T C^{1/2}} + c_l\|b\|_{C_T C^{-\gamma}}(1 + \sup_N \|\rho^N\|_{C_T C^{1/2}}^2 + \|\rho\|_{C_T C^{1/2}}^2)^{1/2}\big)c_S^2\|b\|_{C_T C^{-\gamma}},$$

其中常数 c_l 仅依赖于ˆ$\gamma \in (\gamma,1) \cap (\beta, 1-\beta)$ 在证明中固定的值。

证明。令 ˆ$\gamma \in (\gamma,1) \cap (\beta, 1-\beta)$。我们将右端（41）估计如下：

$$\begin{aligned} \|B^N - B\|_{C_T C^{-\gamma}} &= \|F(\rho^N)b^N - F(\rho)b\|_{C_T C^{-\gamma}} \\ &= \|F(\rho^N)b^N - F(\rho^N)b + F(\rho^N)b - F(\rho)b\|_{C_T C^{-\gamma}} \\ &\le \|F(\rho^N)b^N - F(\rho^N)b\|_{C_T C^{-\gamma}} + \|F(\rho^N)b - F(\rho)b\|_{C_T C^{-\gamma}} \\ &\le \|F(\rho^N)\|_{C_T C^{\hat\gamma}}\|b^N - b\|_{C_T C^{-\gamma}} + \|b\|_{C_T C^{-\gamma}}\|F(\rho^N) - F(\rho)\|_{C_T C^{\hat\gamma}}, \end{aligned}$$

其中在最后一个不等式中，我们使用了基于 Bony 旁乘积定义的函数与分布之间的逐点乘积的性质 [Bon81], 另请参见 [IR23，式 (2.9)] 关于

Bony 旁乘积在当前情形下的具体应用。这里至关重要的是 $\hat{\gamma} \in (\gamma, \infty)$。

项 $\|F(\rho^N)\|_{C_T C^{\hat{\gamma}}}$ 利用引理 4.4有界

$$\|F(\rho^N)\|_{C_T C^{\hat{\gamma}}} \le c_\varphi(1 + \|\rho^N\|_{C_T C^{\hat{\gamma}}}) \le c_\varphi(1 + \sup_N \|\rho^N\|_{C_T C^{\hat{\gamma}}}),$$

其中 $\sup_N \|\rho^N\|_{C_T C^{\hat{\gamma}}} < \infty$ 由 $\rho^N \to \rho$ 在 $C_T C^{\hat{\gamma}}$ 中的收敛性（见式 12）以及 $\hat{\gamma} \in (\beta, 1-\beta)$ 的选取可得。为界定项 $\|F(\rho^N) - F(\rho)\|_{C_T C^{\hat{\gamma}}}$，我们再次使用引理 4.4。

$$\begin{aligned}\|F(\rho^N) - F(\rho)\|_{C_T C^{\hat{\gamma}}} &\le c_\varphi\big(1 + \|\rho^N\|^2_{C_T C^{\hat{\gamma}}} + \|\rho\|^2_{C_T C^{\hat{\gamma}}}\big)^{1/2}\|\rho^N - \rho\|_{C_T C^{\hat{\gamma}}} \\ &\le c_\varphi\big(1 + \sup_N \|\rho^N\|^2_{C_T C^{\hat{\gamma}}} + \|\rho\|^2_{C_T C^{\hat{\gamma}}}\big)^{1/2}\|\rho^N - \rho\|_{C_T C^{\hat{\gamma}}}.\end{aligned}$$

根据 [IR23，命题 4。4]，我们得到 $\|\rho^N - \rho\|_{C_T C^{\hat{\gamma}}} \le c_l \|b^N - b\|_{C_T C^{-\beta}}$，其中常数 c_l 取决于 $\hat{\gamma}$，$\|\rho_0\|_{C^{\hat{\gamma}}} \le \|\rho_0\|_{C^{1+\nu}}$ 以及 $\sup_N \|b^N\|_{C_T C^{-\beta}}$；后者有限，因为 $b^N \to b$ 在 $C_T C^{-\beta}$ 中。

结合上述估计可得

$$\begin{aligned}&\|B^N - B\|_{C_T C^{-\beta}} \\ &\le c_\varphi\big(1 + \sup_N \|\rho^N\|_{C_T C^{\hat{\gamma}}} + c_l\|b\|_{C_T C^{-\gamma}}(1 + \sup_N \|\rho^N\|^2_{C_T C^{\hat{\gamma}}} + \|\rho\|^2_{C_T C^{\hat{\gamma}}})^{1/2}\big)\|b^N - b\|_{C_T C^{-\beta}}.\end{aligned}$$

最后，由 Schauder 估计（引理 4.1(ii)），我们得到

$$\|b^N - b\|_{C_T C^{-\beta}} \le c_S^2 \left(\frac{1}{N}\right)^{\frac{\gamma-\beta}{2}} \|b\|_{C_T C^{-\gamma}},$$

综合以上结果，即可完成证明。由于 $\hat{\gamma}$ 的选择不会影响收敛速率，只会影响常数，因此我们选择 $\hat{\gamma} = 1/2$。□

结合界（40）和命题 7.2，即可得到数值格式强误差的最终界。

命题 7.3。 假设命题 7.2的条件成立，则数值误差有如下界：

$$\sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}|X_t^{N,m} - X_t| \le d_1(N)m^{-1} + d_2(N)m^{-\frac{1}{2}} + c_{15}\left(c_{16}N^{-\frac{\gamma-\beta}{2}}\right)^{2\alpha-1}, \tag{43}$$

其中 $d_1(N)$ $d_2(N)$ 来自 (40)，常数 c_{15} 和 c_{16} 来自命题 7.2，且与 $\alpha \in (1/2, 1-\beta)$ 无关，但取决于 $\gamma \in (\beta, 1/2)$。

上述技术命题给出了逼近误差的界，该界由光滑化参数 N、时间步长 $\frac{1}{m}$ 以及若干辅助参数 ϵ、α 和 γ 表示。我们的目标是设定这些参数，并确定 N 应如何依赖于 m，从而得到以 β 和 m 表示的误差界。首先，我们设

$$\epsilon := \beta - \hat{\beta},$$

它出现在前几节从（24）–（26）开始的估计中，也出现在$d_1(N)$ $d_2(N)$ 中的前两项里，即（43）中的前两项。注意，ϵ必须小于 $\nu \wedge (1-\beta)$，参见第6节开头；由假设2可保证这一点，详见备注3.1。

将上述 ϵ代入 $d_1(N)$ 和 $d_2(N)$ 的公式后，可简化为

$$d_1(N) = c_9 N^{\frac{\beta}{2}} \left(1 + c_{12} N^{\frac{\beta}{2}} + c_{13} N^{\beta} + c_{14} N^{\frac{\beta+1}{2}}\right),$$
$$d_2(N) = (c_{10} + c_{12}) N^{\frac{\beta}{2}} + (c_{11} + c_{13}) N^{\beta} + c_{14} N^{\frac{\beta+1}{2}}.$$

$d_1(N)$ 和 $d_2(N)$ 中增长最快的项分别是 $c_9 c_{14} N^{\beta+\frac{1}{2}}$和 $c_{14} N^{\frac{\beta}{2}+\frac{1}{2}}$。

现在我们继续确定 N 与 m 之间的关系，以平衡 X^N 的 Euler-Maruyama 格式误差以及用 X^N逼近 X 的误差。我们假设，对于某个 $\kappa > 0$，有 $N = m^{\kappa}$，并选择它以使收敛速率最大化。界（43）中前两项的渐近行为由增长最快的项决定：

$$\begin{aligned} & c_9 c_{14} N^{\beta+\frac{1}{2}} m^{-1} + c_{14} N^{\frac{\beta+1}{2}} m^{-\frac{1}{2}} \\ &= c_9 c_{14} m^{\kappa(\beta+\frac{1}{2})} m^{-1} + c_{14} m^{\kappa\frac{\beta+1}{2}} m^{-\frac{1}{2}} \\ &= c_9 c_{14} m^{\kappa(\beta+\frac{1}{2})-1} + c_{14} m^{\kappa\frac{\beta+1}{2}-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{44}$$

对于（43）中的第三项，我们需要选择 α 和 γ。用 m 表示并忽略常数后，该项的形式为

$$m^{-\frac{\kappa(\gamma-\beta)(2\alpha-1)}{2}}.$$

通过选择尽可能大的 γ 和 α，可以使速率达到最优。它们必须满足 $\gamma < 1/2$ˆ 和 $\alpha < 1-\beta$，但由于相关常数可能会发散，无法达到上界。ˆ 因此，我们取一个较小的 $\lambda > 0$，并令 $\alpha = 1-\beta-\lambda$和 $\gamma = 1/2-\lambda$。注意，根据假设 $1-\beta < 1-\beta$ˆ，2，因此 $\alpha < 1-\beta$。这就得到

$$m^{-\frac{\kappa(\gamma-\beta)(2\alpha-1)}{2}} = m^{-\frac{\kappa(1/2-\lambda-\beta)(1-2\beta-2\lambda)}{2}} = m^{-\kappa(1/2-\beta-\lambda)^2}.$$

最后，让我们找出 κ的最优选择。为了保证收敛，(44) 中的指数必须为负，即

$$\kappa(\beta + \frac{1}{2}) - 1 < 0, \qquad \text{and} \qquad \kappa\frac{\beta+1}{2} - \frac{1}{2} < 0,$$

化简后得到 $\kappa < \frac{1}{\beta+\frac{1}{2}}$和 $\kappa < \frac{1}{\beta+1}$。第二个约束更严格，因此我们在 $\kappa \in (0, \frac{1}{\beta+1})$ 上进行优化。于是，(44) 的渐近行为由下式决定

$$m^{\kappa\frac{\beta+1}{2}-\frac{1}{2}};$$

事实上，只要 $\kappa < 1/\beta$ 成立，这就是主导项。

总之，(43) 的渐近行为由以下总和决定

$$C_1 m^{\kappa\frac{\beta+1}{2}-\frac{1}{2}} + C_2 m^{-\kappa(1/2-\beta-\lambda)^2}$$

对某些常数 C_1，$C_2 > 0$。由于第一项随 κ 增大而增大，而第二项随 κ 增大而减小，因此当两个指数相等时，随着 $m \to \infty$ 变化，该总和下降得最快：

$$\kappa\frac{\beta+1}{2} - \frac{1}{2} = -\kappa(1/2-\beta-\lambda)^2$$

从而得到 $\kappa = \frac{1}{(1+\beta)+2(1/2-\beta-\lambda)^2}$。我们在下面的定理中总结这一结果。

The定理 7.4（收敛速率）。对于任意 $\lambda \in (0,\ 1/2-\beta)$，令 $N(m) = m^{\kappa}$，其中

$$\kappa = \frac{1}{(1+\beta)+2(\frac{1}{2}-\beta-\lambda)^2},$$

得到收敛速率

$$\sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}|X_t^{N(m),m} - X_t| \le cm^{-\frac{1}{2}+\frac{(1+\beta)/2}{(1+\beta)+2(\frac{1}{2}-\beta-\lambda)^2}}$$

对于 某个常数 $c>0$ 以及任意充分大的 m，使得 $\|B^{N(m)} - B\|_{C_T C^{-(1/2-\lambda)}} <$ 1.
s

8. Convergence rate with an approximate solution to PDE

到目前为止，我们的分析假设偏微分方程的解 ρ^N 是已知的精确解。这使我们能够提炼数值模拟中的概率方面，并推导出逼近误差的界。然而，在实践中 ρ^N 必须通过数值计算得出，我们将说明如何进行这种数值近似，才能在采用相同的 7.4 选择时保留定理中的收敛速率 $N(m)$。在该定理中，m 表示计算随机微分方程（1）近似解的一条轨迹所需的成本；事实上，实际计算成本与 m成正比。生成多条轨迹的成本，是生成一条轨迹成本的相应倍数。然而，ρ^N 只需计算一次，因此其成本与随后模拟的（X_t）轨迹数量无关，也不能纳入以 m 表示的界中。

记 $\hat{}\rho^N$ 为 ρ^N 的数值近似，记 $\hat{}X^N$ 为随机微分方程 (13) 的解，其中 B^N 被替换为 $\hat{}B^N(x) := F(\hat{}\rho(x))b^N(x)$，并记 $\hat{}X^{N,m}$ 为 $\hat{}X^N$ 的欧拉近似。在下面的推论中，我们给出偏微分方程解 $\hat{}\rho^N$ 所需满足的条件，使得界 (43) 对 m 和 N 以不同的常数但相同的指数成立。这将使我们能够得出与定理 7.4 相同的收敛速率，因为该定理之前的推导完全基于 (43) 中 N 和 m 的指数。

$\hat{}$**定理8.1.** 选取 $\gamma \in (\beta, 1/2)$ 如命题 7.2 以及 $\hat{}\gamma \in (\gamma,1) \cap (\beta, 1-\beta)$ 如其证明中那样。假设对于 ρ^N 的数值求解器可用，且近似 $\hat{}\rho^N$满足以下性质：存在常数 $C>0$ 使得

- *(性质保持)*

$$[\hat{\rho}^N]_{1/2,L^\infty} \le C[\rho^N]_{1/2,L^\infty}, \tag{45}$$
$$\|\hat{\rho}_x^N\|_{L_T^\infty L^\infty} \le C\|\rho_x^N\|_{L_T^\infty L^\infty}, \tag{46}$$
$$\|\hat{\rho}^N\|_{C_T C^{\hat{\gamma}}} \le C\|\rho^N\|_{C_T C^{\hat{\gamma}}}, \tag{47}$$

- *(收敛)*

$$\|\hat{\rho}^N - \rho^N\|_{C_T C^{\hat{\gamma}}} \le CN^{-\frac{\gamma-\beta}{2}}. \tag{48}$$

取 λ 和 $N(m) = m^{\kappa}$ 与定理 7.4中相同，我们有

$$\sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}|\hat{X}_t^{N(m),m} - X_t| \le cm^{-\frac{1}{2}+\frac{(1+\beta)/2}{(1+\beta)+2(\frac{1}{2}-\beta-\lambda)^2}}$$

对于某个常数 $c>0$。

注记8.2。 在命题 *7.2* 的证明中，我们任意选取了 $\hat{}\gamma = 1/2$ ，因为这一选择不会影响收敛速率，只会改变常数。然而，在定理 $\hat{}\gamma$ 中，*8.1* 选择 (47)和 (48)所需的最方便取值时，这种额外的灵活性使得我们能够建立相应的界。

定理 *8.1* 的证明。我们将逼近误差分解为

$$\mathbb{E}|\hat{X}_t^{N,m} - X_t| \le \mathbb{E}|\hat{X}_t^{N,m} - \hat{X}_t^N| + \mathbb{E}|\hat{X}_t^N - X_t^N| + \mathbb{E}|X_t^N - X_t|. \tag{49}$$

第一项与 $E|X^N$ 类似，$_t{}^m - X_t^N|$ 但将 ρ^N 替换为 $\hat{}\rho^N$。第二项是新增项，其界将利用收敛假设。最后一项由命题 7.2 给出界。

我们将证明，式（49）中的第一项满足形如式（40）的界，其 N 指数相同，但常数不同。利用 [CIP25，由命题 4] 可得

$$\sup_t \mathbb{E}|\hat{X}^{N,m} - \hat{X}^N| \le \hat{d}_1(N)m^{-1} + \hat{d}_2(N)m^{-\frac{1}{2}}$$

with

$$\hat{d}_1(N) = \|\hat{B}^N\|_{L_T^\infty L^\infty}\big(1 + \|\hat{B}_x^N\|_{L_T^\infty L^\infty}\big), \qquad \hat{d}_2(N) = \|\hat{B}_x^N\|_{L_T^\infty L^\infty} + [\hat{B}^N]_{\frac{1}{2},L^\infty}.$$

$\hat{}\hat{}\hat{}$ 我们只需证明存在一个常数 $C > 0$ ，使得 $d_1(N) \le Cd_1(N)$ 且 $\hat{}\hat{}d_2(N) \le Cd_2(N)$，也就是说，我们需要为三个项 $\|\hat{}B^N\|_{L_T^\infty L^\infty}$、$[\hat{}B^N]_{\frac{1}{2}、L^\infty}$ 和 $\|\hat{}B_x^N\|_{L_T^\infty L^\infty}$ 找到与引理 6.1和 6.2中类似的界。首先注意，引理 6.1 中对 $\|\hat{}B^N\|_{L_T^\infty L^\infty}$ 的估计仅使用了 F 的有界性，且不依赖于其自变量，因此 $\|\hat{}B^N\|_{L_T^\infty L^\infty} = \|B^N\|_{L_T^\infty L^\infty}$。对于第二项，注意在引理 6.1 的证明中，估计 $[\hat{}B^N]_{\frac{1}{2}、L^\infty}$ 而非 $[B^N]_{\frac{1}{2}、L^\infty}$ 所产生的唯一差异在于

$$\begin{aligned}\|b^N(s,\cdot)[F(\hat{\rho}^N(t,\cdot)) - F(\hat{\rho}^N(s,\cdot))]\|_{L^\infty} &\le \|b^N\|_{C_TL^\infty}\|F_x\|_\infty\|\hat{\rho}^N(t,\cdot) - \hat{\rho}^N(s,\cdot)\|_{L^\infty}\\ &\le \|b^N\|_{C_TL^\infty}\|F_x\|_\infty[\hat{\rho}^N]_{\frac{1}{2},L^\infty}|t-s|^{1/2}\\ &\le \|b^N\|_{C_TL^\infty}\|F_x\|_\infty C[\rho^N]_{\frac{1}{2},L^\infty}|t-s|^{1/2},\end{aligned}$$

其中最后一个不等式由（45）得到。这意味着

$$[\hat{B}^N]_{\frac{1}{2},L^\infty} \le c_{10}N^{\frac{\epsilon+\hat{\beta}}{2}} + Cc_{11}N^{\epsilon+\hat{\beta}}$$

按照引理 6.1 的术语，区别在于常数 c_{11} 乘以C。需要估计的最后一个范数是 $\|\hat{}B_x^N\|_{L_T^\infty L^\infty}$，证明见引理 6.2。仿照针对 $\hat{}B^N$写出的（39），我们根据（ $\|\hat{}\rho_x^N\|_{L_T^\infty L^\infty}$）用 $C\|\rho_x^N\|_{L_T^\infty L^\infty}$估计46），得到

$$\|\hat{B}_x^N\|_{L_T^\infty L^\infty} \le \|F_x(\hat{\rho}^N)\|_{L_T^\infty L^\infty}C\|\rho_x^N\|_{L_T^\infty L^\infty}\|b^N\|_{L_T^\infty L^\infty} + \|F(\hat{\rho}^N)\|_{L_T^\infty L^\infty}\|b_x^N\|_{L_T^\infty L^\infty}.$$

在引理 6.2的证明中，$\|F_x(\hat{}\rho^N)\|_{L_T^\infty L^\infty}$由 $\|F_x\|_\infty$估计，而其余项不涉及 $\hat{}\rho$。因此，$\|\hat{}B_x^N\|_{L_T^\infty L^\infty}$ 可仿照（37）进行类似估计

$$\|\hat{B}_x^N\|_{L_T^\infty L^\infty} \le Cc_{12}N^{\frac{\epsilon+\hat{\beta}}{2}} + Cc_{13}N^{\epsilon+\hat{\beta}} + c_{14}N^{\frac{\epsilon+\hat{\beta}+1}{2}},$$

其中常数 C 乘在与（37）相比的第一项和第二项上。因此，我们得出结论：存在一个常数 C使得 $d_1(N) \le Cd_1(N)$ 且 $d_2(N) \le Cd_2(N)$。

对于（49）的第二项，我们使用命题 7.2 证明中的记号和论证，应用（41）的类似界：

$$\sup_t \mathbb{E}|\hat{X}_t^N - X_t^N| \le c_{15}\|\hat{B}^N - B^N\|_{C_T C^{-\gamma}}^{2\alpha-1},$$

其中

$$\|\hat{B}^N - B^N\|_{C_T C^{-\gamma}} = \|F(\hat{\rho}^N)b^N - F(\rho^N)b^N\|_{C_T C^{-\gamma}} \le \|b^N\|_{C_T C^{-\gamma}}\|F(\hat{\rho}^N) - F(\rho^N)\|_{C_T C^{\hat{\gamma}}}.$$

此外，我们有

$$\begin{aligned}\|F(\hat{\rho}^N) - F(\rho^N)\|_{C_T C^{\hat{\gamma}}} &\le c_\varphi\big(1 + \sup_N \|\hat{\rho}^N\|_{C_T C^{\hat{\gamma}}}^2 + \sup_N \|\rho^N\|_{C_T C^{\hat{\gamma}}}^2\big)^{1/2}\|\hat{\rho}^N - \rho^N\|_{C_T C^{\hat{\gamma}}} \\ &\le c_\varphi\big(1 + (C+1)\sup_N \|\rho^N\|_{C_T C^{\hat{\gamma}}}^2\big)^{1/2}\|\hat{\rho}^N - \rho^N\|_{C_T C^{\hat{\gamma}}} \\ &\le c_\varphi\big(1 + (C+1)\sup_N \|\rho^N\|_{C_T C^{\hat{\gamma}}}^2\big)^{1/2} C N^{-\frac{\gamma-\beta}{2}},\end{aligned}$$

其中第二个不等式由式（47）得出，最后一个不等式则由式（48）得出。总之，我们得到一个与式（43）类似的结果，其形式为

$$\begin{aligned}&\sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}|\hat{X}_t^{N,m} - X_t| \\ &\le \hat{C}d_1(N)m^{-1} + \hat{C}d_2(N)m^{-\frac{1}{2}} + c_{15}\left(\hat{c}_{16}N^{-\frac{\gamma-\beta}{2}}\right)^{2\alpha-1} + c_{15}\left(c_{16}N^{-\frac{\gamma-\beta}{2}}\right)^{2\alpha-1},\end{aligned}$$

其中 $\hat{c}_{16} = c_\varphi\big(1+(C+1)\sup_N \|\rho^N\|_{C_T C^{\hat{\gamma}}}^2\big)^{1/2} C$取决于 $\hat{\gamma}$的选取。该上界在相差常数因子的意义下与式（43）相同，因此，定理7.4 之前的论证无需任何改动即可适用，定理7.4 的结论成立。□

9. Numerical illustration

本节将展示所提出的数值格式具有可实施性，并能达到与理论结果一致（甚至更好）的经验收敛速率。我们针对不同的 b 和 F 量化经验收敛速率，以观察解 X 在不同漂移情形 $F(\rho)b$ 下的表现。最后，我们比较 $\hat{X}^N$ 的 Euler-Maruyama 解的经验密度与通过数值求解福克-普朗克偏微分方程得到的密度$\hat{\rho}^N$，以检验该格式给出的近似是否与理论一致。

为了实现，我们需要选择一个分布 b作为例子。对于数值实现，我们将范围限定在时齐情形。 $b$in $C^{(-\beta)+}$ 中元素的典型例子是不可微函数的导数。更确切地说，若考虑函数 $h \in C^{(-\beta+1)+}$，那么形式上它们的导数 h' 属于 $C^{(-\beta)+}$，因此 h' 起到 b的作用。由于 b 是一个Schwartz分布，我们无法直接对其求值，因此需要对其进行适当的近似；这一近似通过将 b 与热核$p_{1/N}$卷积得到。特别地，我们有近似 b^N，其由 $h' * p_{1/N}$给出。请注意，由于 h' 是一个分布，因此仍无法在机器上实现 b^N。为了解决这个问题，我们利用卷积与导数的交换性，即使用等式 $b^N = h' * p_{1/N} = h * p'_{1/N}$，从而得到 b^N 的可操作定义，因为 h 和 $p'_{1/N}$ 都是函数。现在，对于 h的选择，它需要是某个 $\gamma \in$ 所对应的 $C^{\gamma+}$ 中的元素（1/2,1），并且其正则性最好不要高于此。于是，我们选择一条分数

具有Hurst指数 $H \in (1/2, 1)$ 的布朗运动（分数布朗运动）。关于更多细节，建议读者参阅[CIP25，第 5] 节。

我们使用 Python 软件包 `py-pde` [Zwi20] 来求解福克-普朗克方程。我们使用的求解器基于用于常微分方程组的四阶（5）阶龙格-库塔方法，并针对求解偏微分方程进行了改造。为简便起见，我们选择 $T = 1$，只求解一次偏微分方程，使用2^{11} 个时间步和 4×10^3 个空间点，并对解进行插值，得到定义在 ρ^N 上的函数 $\hat{} [0, 1] \times \mathbb{R}$。时间步数与计算精确解近似值时所用的相同。

福克-普朗克方程的数值解 $\hat{}\rho^N$ 被用来代替未知 X^N的分布密度。事实上，在 [IR23], 中，作者证明了 X^N 的分布密度是相应福克-普朗克偏微分方程的解（10）。因此，McKean–Vlasov 方程可化为一个漂移已知的随机微分方程，其漂移为 $B^N = F(\hat{}\rho^N)b^N$。图 2 中绘出了 B^N

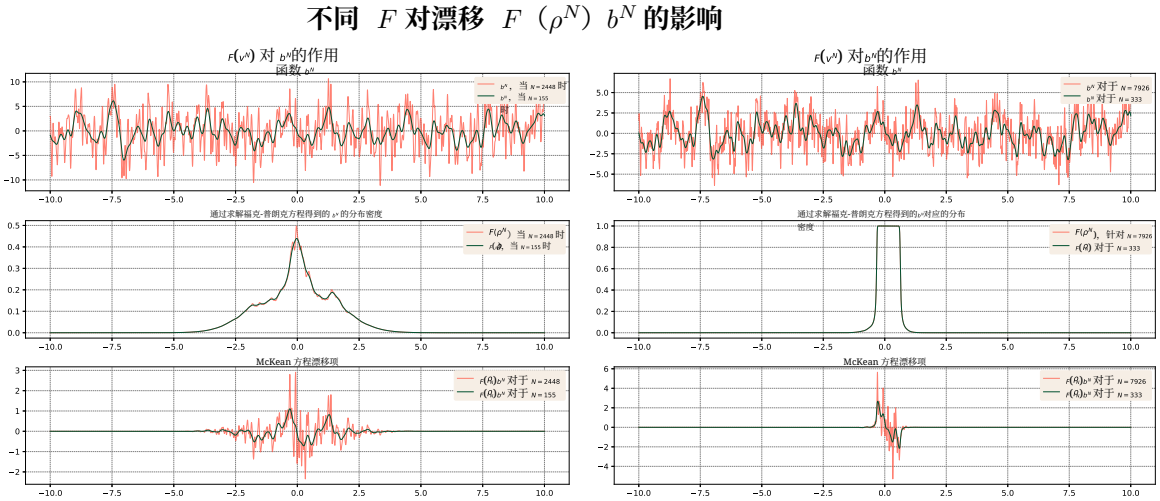

FIGURE 1. 左图：$F(x) = \sin(x)$。右图：$F(x) = 1/(1 + \exp(-100(x - 0.2)))$。

上：b^N 在 $b \in C^{-\beta}$ 且 $\beta = 0.49$ 时，取 N 的两个不同值的图像（绿色曲线对应“较小”的 N，红色曲线对应“较大”的 N）。中：$F(\rho^N)$ 在 N 的两个不同取值下的图像。通过在网格上求解偏微分方程，得到 ρ^N 的近似，其中包含 2^{11} 个时间步长，且 x 中有 4×10^3 个点。下：乘积 $F(\rho^N)b^N$ 在 N 的两个不同取值下的图像。

（下方图像）对应于 N 的两个不同取值（绿色和红色曲线）以及 F 的两个不同取值（左、右图）。漂移项 b 属于 $C^{-\beta}$，其中 $\beta = 0.49$，其近似b^N显示在上方，而项 $F(\rho^N)$ 绘于中间。左图中函数 F 的选取旨在使其近似恒等函数（至少在零点附近）；右图中 F 的选取则是对示性函数的近似。请注意，由于 $\hat{} B^N$ 的主要质量集中在一个有界区间内，漂移项 ρ^N 在有界区间之外几乎为零（在数值计算中为零）（另见图3）。这与 b^N 不同，后者的支撑集覆盖整个实数轴。漂移项 B^N的整体粗糙程度与 b^N相同，因为 $F(\rho^N)$ 是光滑的。不过，漂移项实际上具有紧支撑，因此当路径离开 B^N的支撑集时，数值求解该随机微分方程会非常容易。我们认为这或许在一定程度上

解释了为何我们观察到 McKean 随机微分方程的收敛率略高于非 McKean 随机微分方程，参见 [CIP25]（在形式上等价于 $F \equiv 1$），尽管它们的漂移项 B^N 和 b^N 具有相同的正则性。

一旦得到漂移项 $B^N = F(\hat{\rho}^N)b^N$，欧拉格式的实现方式与 [CIP25], 中给出的线性随机微分方程实现方式相同，唯一的其他区别在于初始条件。事实上，对于 McKean–Vlasov 方程，我们不能使用狄拉克δ函数，而必须选择一个具有合适密度的分布。为简单起见，我们采用标准正态分布。我们求解随机微分方程，并且只存储终端时刻的值，因为我们将用这些值计算该格式的误差。我们使用 10^4 条样本路径。我们进行一次计算量很大的计算（$m = 2^{11}$ 个时间步），以获得随机微分方程的最精细近似，并将其视为真实解，再与每个较粗的近似进行比较（$m = 2^7, 2^8, 2^9$），这些近似使用的时间步更少。我们比较这些值以计算强误差，然后以时间步数的以 10 为底的对数作为解释变量、误差作为响应变量进行线性回归，因此线性回归所得的斜率就是收敛速率。对于我们考虑的不同 $\beta \in (0, 1/2)$ 值，我们都执行这一过程，所得收敛率如图 2 所示。

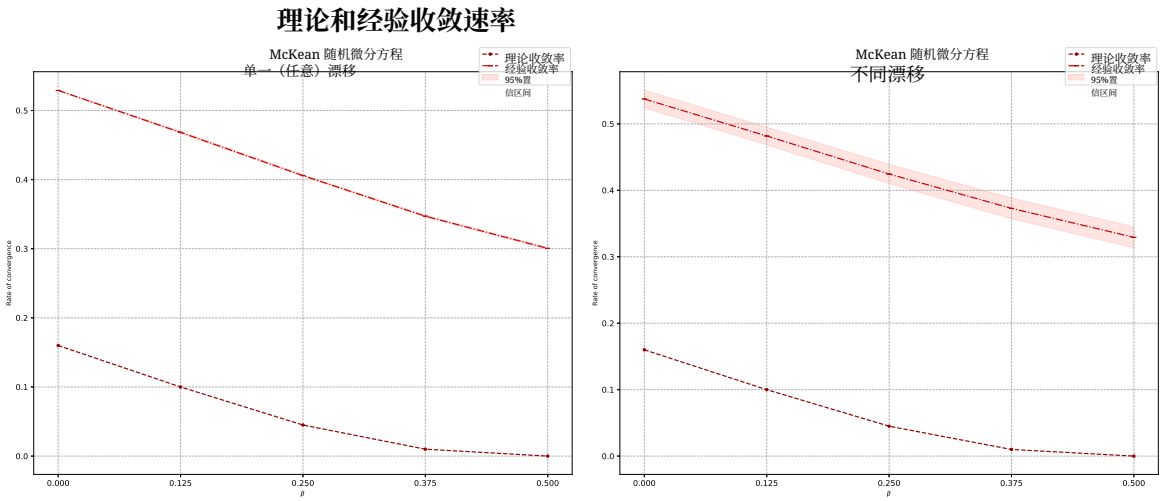

FIGURE 2. 使用 $F(\hat{\rho}^N)b^N$、$b \in \mathcal{C}^{-\beta}$、$X_0 \sim \mathcal{N}(0, 1)$ 和 $F(x) = \sin(x)$ 得到的理论收敛速率（虚线）和经验收敛速率（点划线）随参数 β 变化的图（纵轴为收敛速率，横轴为参数）。左图：采用奇异固定漂移和 10,000 条布朗运动样本路径，运行 40 次以获得经验收敛速率及其 95% 置信区间（经验收敛速率周围的阴影区域）。右图：设置同上，但采用多个漂移，具体而言，共使用 40 个漂移（每次运行采用不同的漂移）。

我们指出，使用分数布朗运动来生成近似 b^N 会使漂移本质上具有随机性；实际上，每次生成新的分数布朗运动时，我们使用的都是不同的漂移，而我们认为这些漂移属于同一个空间 $C^{-\beta}$，其中 $-\beta < H - 1$ 且 H 为赫斯特参数。然而，必须注意的是，这种方法并非没有缺陷，因为分布漂移的近似过程使用了尺度参数 $1/N$，这可能产生“正则化”效应，影响分布近似 b^N 的波动程度。我们可以通过查看图2来观察这一点。图2左图给出了一个例子，其中

我们运行 Euler-Maruyama 格式 40 次（即运行 40 轮），每轮有 10^4 条样本路径，并且对 $\beta = 0.01$、$0。125$、$0。25$、$0。375$、$0。49$ 这些取值分别固定一个漂移。固定漂移并运行欧拉格式，意味着对每个 β使用一条分数布朗运动轨迹，将其转换为漂移 b，并在每轮运行中使用不同的布朗运动驱动项。图2左图中，95% 置信区间几乎不可见，这意味着对于同一个漂移，考虑不同布朗运动时得到的数值收敛率相差不大。另一方面，图2右图中，我们不固定漂移，而是为 40 轮运行分别选取 40 个不同的漂移 b；我们注意到，在 β 取值相同的情况下，数值收敛率仍有一定变化。由于我们生成漂移的方法本身具有随机性，这当然是意料之中的，因为实际上用于计算误差的是漂移各不相同的随机微分方程。尽管如此，置信区间仍然很小，这表明我们生成漂移的方法是有意义的。

将分数布朗运动用作漂移项的基础，为我们提供了一种研究不同正则性漂移项的有效方法；生成随机过程路径时所涉及的随机性，则使我们能够构造任意多个正则性相同的漂移项示例。这让我们得以深入探究算法的行为。另一种自然的选择是取 $b = h'$，其中 h 是一个确定性的 H¨older 连续函数，例如魏尔斯特拉斯函数。然而，我们的平滑过程（即与热核进行卷积）似乎会生成过于平滑的近似漂移项 b^N，以至于无法通过数值方法辨识 b 粗糙性的影响。关于这一方向的进一步实验留待今后研究。

我们将注意力转向终端时刻的福克-普朗克方程解 $\hat{\rho}_T^N$与 $\hat{X}^{N,m}_T$ 的经验密度之间的比较。在图 3 中，我们比较了 $\hat{\rho}_T^N$（实线）与 $\hat{X}^{N,m}_T$ 的密度直方图（直方柱）；其中考察了 4 个不同的非线性项示例 F 以及 β 的两个不同取值。这使我们能够在同一近似实例 b^N 中，探究改变 F 对解的分布密度的影响。每个示例中，McKean–Vlasov 方程的解均通过包含 2^{11} 个时间步和 10^4 条样本路径的 Euler-Maruyama 格式获得，而福克-普朗克方程则采用 2^{11} 个时间步求解。变量 x 的取值点数为 4×10^3。从图中可以直观看出，福克-普朗克偏微分方程的解与直方图拟合良好。为检验拟合效果，我们进行了柯尔莫哥洛夫-斯米尔诺夫拟合优度检验，结果见表 1。如我们所见，柯尔莫哥洛夫-

	$\beta = 0.49$		$\beta = 0.01$	
时间步 m	K-S统计量	p-值	K-S统计量	p-值
2^7	0.0065	0.7861	0.0055	0.9186
2^9	0.0059	0.8772	0.0057	0.9001
2^{11}	0.0061	0.8514	0.0057	0.8964

TABLE 1. 漂移属于空间 $C^{-\beta}$ 的 McKean-Vlasov随机微分方程的分布密度偏微分方程近似相对于经验密度的拟合优度柯尔莫哥洛夫-斯米尔诺夫检验结果，其中 $\beta = 0.49$，0.01，时间步长为 $2^7, 2^9, 2^{11}$ 和 $F(x) = \cos(x)$。

Smirnov 检验不允许拒绝这样的假设：解的样本具有由福克-普朗克偏微分方程的解给出的密度。请注意，p-值对于 $\beta = 0.01$而言高于对于 $\beta = 0.49$而言，这可能是因为原始的 b

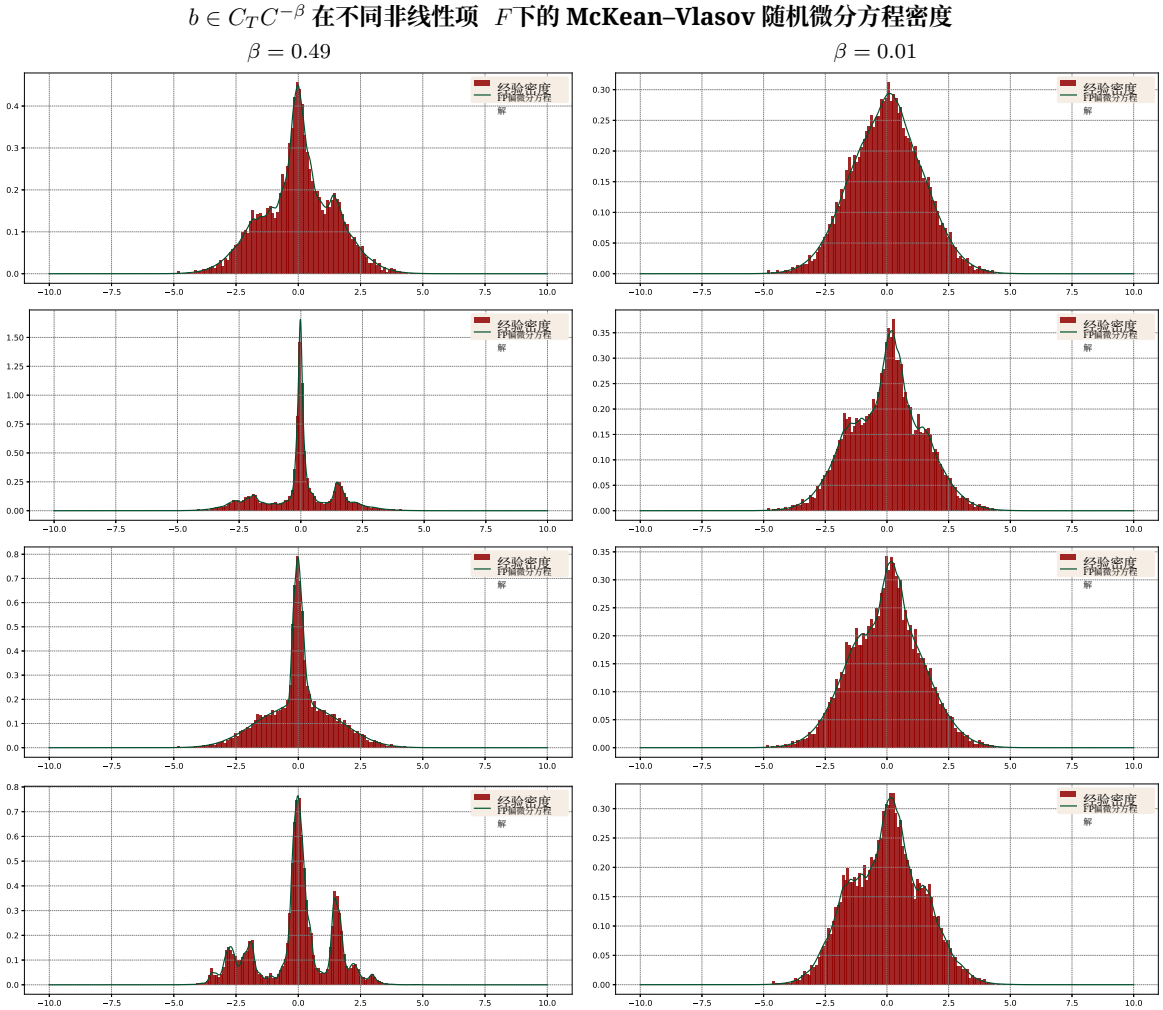

FIGURE 3. $\hat{}\rho^N$ 的表示，其中 $b^N \in C^{-\beta}$ 取不同的 F 值和 β值。左侧图为 $\beta = 0.49$，右侧图为 $\beta = 0.01$。从上到下依次为 $F(x)$ =sin(x)、 $F(x)$ $= 5\sin(x)$、 $F(x)$ $= 1/(1 + \exp($ $-100(x - 0.2)))$、 $F(x)$ $=\cos(x)$。随机微分方程使用 2^{11} 个时间步长和 10^4 条样本路径求解。偏微分方程在一个网格上求解，使用 2^{11} 个时间步长，并在 $x \in [-10, 10]$中取 4×10^3 个点。

漂移在这种情况下更平滑。此外请注意，随着时间步数增加， p-值似乎略有下降，这乍看之下似乎与以下事实相矛盾：增加时间步数应使随机微分方程和偏微分方程的近似都更准确。然而，必须记住，随着迭代方法中时间步数 m 的增加，方程将更难求解，因为近似 $b^{N(m)}$ 会变得更粗糙。因此，随着 m 增加，可能还需要提高网格的空间分辨率，而在我们的实现中，空间分辨率却保持不变。

致谢： 作者 E. Issoglio 感谢 PRIN-PNRR2022 (P20224TM7Z) CUP：D53D23018780001 以及 EU - 下一代欧盟 - PRIN2022 (202277N5H9)CUP：D53D23005670006 提供的部分经费支持。

References

[Bao+21] Jianhai Bao、Christoph Reisinger、Panpan Ren 和 Wolfgang Stockinger。“McKean–Vlasov方程与相互作用粒子系统的 Milstein格式一阶收敛”。英国皇家学会A辑：数学、物理与工程科学 477.2245 (2021)，第 20200258 页。[BCD11] Hajer Bahouri、Jean-Yves Chemin 和 Rapha¨el Danchin。傅里叶分析与非线性偏微分方程。第 343 卷。数学科学基础丛书。柏林，海德堡：施普林格柏林海德堡，2011。[Ben+24] Nadhir Ben Rached、Abdul-Lateef Haji-Ali、Shyam Mohan Subbiah Pillai 和 Ra´ul Tempone。“McKean–Vlasov随机微分方程的双循环重要性抽样”。统计与计算 34.6 (2024年10月12日)，第 197 页。[BH22] Jianhai Bao 和 Xing Huang。“不规则系数 McKean–Vlasov 随机微分方程的近似”。理论概率学杂志 35.2 (2022)，第 1187–1215 页。[Bon81] Jean-Michel Bony。“非线性偏微分方程的符号演算与奇点传播”。《高等师范学校科学年刊》2 (1981)，第 209–246 页。[BT97] Mireille Bossy 和 Denis Talay。“用于 McKean–Vlasov 方程与 Burgers方程的随机粒子方法”。计算数学 66.217 (1997)，第 157–192 页。[CIP25] Luis Mario Chaparro J´aquez、Elena Issoglio 和 Jan Palczewski。“Besov空间中具有分布漂移的随机微分方程数值格式的收敛速率”。ESAIM：数学建模与数值分析 59.5 (2025)，第 2717–2738 页。[DGI22] Tiziano De Angelis、Maximilien Germain 和 Elena Issoglio。“具有分布漂移的随机微分方程数值格式”。随机过程及其应用 154 (2022)，第 55–90 页。[FIR17] Franco Flandoli、Elena Issoglio 和 Francesco Russo。“具有分布漂移的多维随机微分方程”。美国数学会汇刊 369.3 (2017)，第 1665–1688 页。[GHR25] Ludovic Gouden`ege、El Mehdi Haress 和 Alexandre Richard。“具有分数噪声和分布漂移的随机微分方程数值近似”。随机过程及其应用 181 (2025)，第 104533 页。[IR23] Elena Issoglio 和 Francesco Russo。“具有奇异系数的 McKean 随机微分方程”。《亨利·庞加莱研究所概率与统计年刊》59.3 (2023)，第 1530–1548 页。[IR24a] Elena Issoglio 和 Francesco Russo。“具有负Besov指标漂移与线性增长解的偏微分方程”。微分与积分方程 37 (2024)，第 585–622 页。[IR24b] Elena Issoglio 和 Francesco Russo。“具有奇异系数的随机微分方程：鞅问题视角与随机动力学视角”。理论概率学杂志 37.3 (2024)，第 2352–2393 页。[Iss+24] Elena Issoglio、Stefano Pagliarani、Francesco Russo 和 Davide Trevisani。“漂移属于各向异性负Besov空间的退化 McKean–Vlasov 方程”。arXiv：2401.09165 (2024)。

[Iss19] Elena Issoglio. “具有分布系数的非线性抛物型偏微分方程及其在随机分析中的应用”。微分方程杂志 267.10 (2019)，第 5976–6003 页。[IW81] Nobuyuki Ikeda 和 Shinzo Watanabe。《随机微分方程与扩散过程》。第 24 卷。北荷兰数学文库。阿姆斯特丹：北荷兰出版公司，1981 年。[KN21] Chaman Kumar 和 Neelima。“具有超线性漂移系数的 McKean–Vlasov 随机微分方程的显式 Milstein 型格式”。《电子概率杂志》26 (2021)，第 1–32 页。[Li+23] Yun Li 等。“状态变量满足局部 Lipschitz 条件时 McKean–Vlasov 随机微分方程 Euler–Maruyama 格式的强收敛”。IMA 数值分析杂志 43.2 (2023)，第 1001–1035 页。[LRS22] Gunther Leobacher、Christoph Reisinger 和 Wolfgang Stockinger。“一维 McKean–Vlasov 方程及具有不连续漂移的相互作用粒子系统的适定性与数值格式”。BIT 数值数学 (2022)。[Oel85] Karl Oelschl¨ager。“中度相互作用扩散过程的大数定律”。《概率论及相关领域杂志》69.2 (1985)，第 279–322 页。[RES22] Gonˌçalo dos Reis、Stefan Engelhardt 和 Greig Smith。“超线性增长 McKean–Vlasov 随机微分方程的模拟”。IMA 数值分析杂志 42.1 (2022)，第 874–922 页。[RST23] Gonˌçalo dos Reis、Greig Smith 和 Peter Tankov。“McKean-Vlasov 随机微分方程的重要性抽样”。应用数学与计算 453 (2023)。[Szn89] A. Sznitman。《混沌传播专题》。第 1464 卷。圣弗卢尔概率暑期学校 XIX—1989。施普林格，1989 年，第 165–251 页。[Tri06] Hans Triebel。《函数空间理论 III》。数学专著。Birkhäuser Basel，2006 年。[Zwi20] David Zwicker。“Py-Pde：用于求解偏微分方程的 Python 软件包”。开源软件杂志 5.48 (2020)，第 2158 页。