倾斜自动机：聚

集粒子：统一外部控制

SándorP. Fekete 计算机科学系，布伦瑞克工业大学和L3S，德国

JonasFriemel 波鸿应用科学大学电气工程与计算机科学系，德国

Peter Kramer
计算机科学系，布伦瑞克工业大学，德国

Jan-Marc Reinhardt
波鸿应用科学大学电气工程与计算机科学系，德国

Christian Rieck
卡塞尔大学数学研究所，德国

Christian Scheffer
波鸿应用科学大学电气工程与计算机科学系，德国

摘要

受靶向药物递送的启发，我们研究外部控制运动规划的完全倾斜模型中的粒子聚集：一组粒子位于多格骨牌的方格上，所有粒子对外力作出一致反应，沿四个平行于坐标轴的方向之一尽可能远地移动，直至碰到边界。目标是选择一个方向序列，使所有粒子移动到同一位置。我们的结果包括：针对完全填满的多格骨牌中的聚集的多项式时间算法，以及关于近似最短聚集序列、并判定部分填充的多格骨牌中的粒子能否被聚集的困难性归约。我们特别关注受限几何的影响，尤其是无孔多联骨牌。作为推论，我们通过证明在无孔多联骨牌中判定给定位置能否被占据仍然是 NP 困难的，推进了来自 [7] 的一个开放问题，并给出了倾斜问题参数化复杂度的初步结果。我们的结果建立在我们所确立的倾斜模型与同步自动机理论之间的联系之上。

2012年ACM主题分类 计算理论 → 计算几何

K关键词与短语 统一控制、聚集、Full tilt、多格骨牌、同步自动机

资助 *Sándor P. Fekete*、*Jonas Friemel*、*Peter Kramer*、*Christian Scheffer*：由德国研究联合会（DFG，德国研究基金会）资助——530918134。*Christian Rieck*：由德国研究联合会（DFG，德国研究基金会）资助——522790373。

1 引言

我们研究一个受靶向药物递送启发的问题 [50]：如何将最初分散的载药粒子聚集到同一位置？此类问题与微尺度机器人学 [52] 的发展密切相关。然而，环境限制以及微米和纳米尺度机器人代理能力的严重受限，使自主移动无法实现。相反，可以利用全局外力（例如电磁场）来移动和操控简单的机器人粒子。挑战在于，如何通过均匀信号，利用几何学控制处于非均匀环境中的大型粒子群体 [12, 16]。

抽象数学模型 [9, 23], 通常称为倾斜模型，这是因为重力可以作为一种潜在的外力；这些模型从算法角度出发，用于解决这一问题。它们将环境建模为多格骨牌，即正方形铺砌中的有限连通区域，其中粒子位于方格上，并沿轴平行路径向上、向下、向左或向右移动。主要存在两种变体：在单步模型（S1）中，粒子可以通过单位步被精确控制到相邻位置；而完全倾斜模型（FT）则通过仅允许粒子在受阻前移动最大距离，将不精确性纳入考量。

倾斜模型已用于各种应用，并由此发现了算法与复杂度结果 [15, 25, 46, 54] 。为研究靶向药物递送的算法方法，我们考虑位于多格骨牌方格上的粒子，并寻找一个聚集序列，即通过一系列移动将所有粒子移动到同一个方格。已知在单步模型中，长度为$\mathcal{O}(n_c D^2)$ 的聚集序列总是存在，其中 n_c 是多格骨牌的凸角数， D 是其直径，但寻找最短序列是 NP 困难的 [13]。除文献 [55] 中简要指出完全倾斜模型下并非所有多格骨牌都存在聚集序列外，关于完全倾斜模型中的聚集所知甚少。我们通过全面研究完全倾斜模型中的聚集，弥补了这一空白。

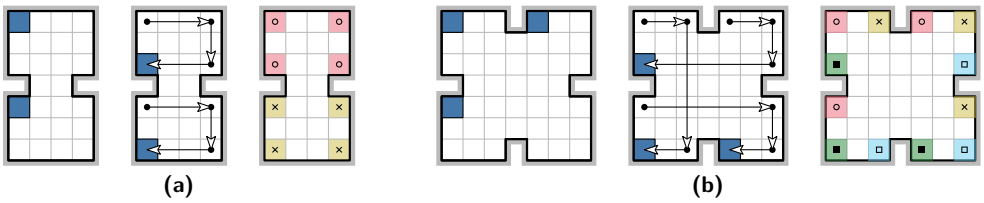

图 1 完全倾斜模型中无法聚集一组粒子的两个示例。两个示例均从左至右展示：多格骨牌中的一组粒子（蓝色正方形）、导向所有可能配置的一系列移动，以及对可达位置进行划分而得到的一个同余。示例**(a)**通过使粒子处于不同的同余类中来阻止聚集，而**(b)** 中的粒子则始终占据同一类中的不同位置。

首先可以观察到，完全倾斜模型存在若干有趣的复杂情况，导致聚集无法实现。 [55] 的作者已经意识到，粒子可能被困在多格骨牌的不同区域中，见图 1(a)。然而，这并非唯一的困难。值得注意的是，即使从粒子的初始位置可到达的所有方格彼此都可达，聚集仍可能无法实现，见图 1(b)。

除了实际应用之外，倾斜模型还因一些简单直观、却展现出惊人复杂度的问题而引人入胜。一个核心问题是，问题的计算复杂度与环境的几何复杂度有何关系。两个基本问题是占用问题（Occupancy）和形状重构问题（ShapeReconfiguration）：前者询问给定的一组粒子中是否有粒子能够被移动到指定方格，后者询问给定的粒子配置能否转变为另一个给定配置。文献 [7]，已证明，对于一般多格骨牌，这两个问题在完全倾斜模型中都是 PSPACE 完全的；作者还将简单多格骨牌（即无孔多联骨牌）的复杂度列为一个开放问题。我们还考虑一类补充的多格骨牌，称为迷宫：由水平线和垂直线组成的集合，这些线只在 T 形和 ＋形交叉处相交，见图 2(b)。

1.1 我们的贡献

我们深入探讨了完全倾斜模型中的粒子聚集问题。设给定的多格骨牌有 n 个角，其中 $n_c \leq n$ 个为凸角。我们证明了以下结果。

- 当粒子初始时位于多格骨牌的每个方格上时，如果聚集序列存在，则可以计算出长度为$\mathcal{O}(n_c n^2)$的聚集序列（定理8和推论 10）。存在最短聚集序列长度为 $\Omega(n^2)$ 的多格骨牌（定理 11）。即使在简单迷宫中，寻找最短聚集序列也是 NP 困难的（定理 22）。在简单迷宫中，可以用多项式时间 4-近似算法来最小化聚集序列的长度（定理25），但对于一般简单多格骨牌，不存在多项式时间常数因子近似算法（除非 P =NP；定理26）。在迷宫中，判定一个方格子集是否存在聚集序列是 PSPACE完全问题（推论 19）；而在简单多格骨牌中，该问题是 NP 困难的（定理 28）。

这些结果中的最后一项使我们能够在 [7] 所提出的关于简单多格骨牌中占用与形状重构之复杂度的开放问题上取得进展。我们证明二者仍然是 NP 困难的（推论 32）。此外，我们通过证明占用与形状重构的一种自然推广——我们称之为倾斜覆盖——即使对于确定性移动序列（即固定移动序列的重复）在简单多格骨牌中也是 NP 困难的，从而对 [6] 中提出的问题作出贡献。最后，我们通过证明一个参数化聚集问题以及占用与形状重构在以给定配置中的粒子数量为参数时是 W[1]-困难的，建立了倾斜问题参数化复杂度的初步结果。在本文中，我们利用了倾斜模型与自动机理论之间迄今被忽视的联系，尤其是同步自动机。由于这一主题不太可能为计算几何界所广泛了解，我们在第 3.1 节中给出简要综述。我们预期，通过进一步探索这一方法，可以为倾斜模型获得更多洞见。反过来，倾斜模型的几何性质也可能为解决自动机理论中的开放问题带来新途径。正如我们将看到的，聚集序列最坏情形长度的上界与下界之间的差距，与一个长期未决的开放问题——Černý 猜想——密切相关。

本文其余部分安排如下。在第 1.2 节讨论相关工作之后，第2节将介绍形式化定义和记号。第3节将阐明倾斜模型与自动机理论之间的联系，并利用这一联系在完全填充的多格骨牌中聚集粒子。反过来，第4节将展示如何利用粒子模拟自动机，并讨论其对聚集任务的影响。随后，我们将聚焦于受限环境，具体来说是简单多连方，以近似最短聚集序列（第5节）并聚集子集（第 6 节）。第7节将探讨我们的方法对相关问题产生的各种影响。最后，第8节将给出总结性评述和开放问题。

1.2 相关工作

除了上述关于单步模型中聚集的研究 [13, 55] ，倾斜模型也因多种目的而得到研究，包括实现带标签的矩形构型的排列 [9, 10, 11, 80], 、模拟双轨逻辑电路 [10, 11, 69],、对多格骨牌进行排序和分类 [46],、绘制未知区域的地图 [54],，以及填充和排空多格骨牌 [33]。值得注意的是，在完全填满的多格骨牌中聚集所有粒子，比排空至任意选定的汇点更困难：聚集要求某个位置 p 可从所有位置到达；这足以确保排空至设置在 p [33]处的汇点，却不足以保证聚集，见图 1(b)。一个重要的研究方向是用能够彼此粘合的粒子组装结构。 [56], 提出了形式化的算法分析 [15] ，随后又引入了

更高效的分阶段组装 [68], 能够构造由移动序列编码的一类形状中任意一种的通用构造器 [7, 8], ，以及在单步模型中通过更精细的控制来进行组装 [20, 48]。组装与通用重配置密切相关；针对通用重配置，已有算法能够在 Full tilt 或单步模型下实现最坏情况下最优的移动次数 [25]。

对基本倾斜问题计算复杂度的研究始于 [9]„ 当时首次证明了后来称为占用和形状重构的问题在完全倾斜模型中是 NP 困难的。之后，研究者证明，寻找带标签重配置的最短移动序列是 PSPACE 难的 [11]„ 并证明在增加 2×2 个粒子后，形状重构是 PSPACE 完全的 [8], ；随后，研究者最终确定，只使用单位粒子时，占用和形状重构问题的复杂度均为 PSPACE 完全 [7]。在单步模型中，占用问题可在多项式时间内求解 [23]„ 但若允许以多米诺骨牌作为粒子，则即使在矩形中，该问题也会变为 PSPACE 完全 [24], ；而在单步模型中，即使只有单位粒子，形状重构仍然是 PSPACE 完全的 [24]。与完全倾斜模型相比，当环境受到限制时，单步模型已知的复杂度结果更多。重新定位问题关注的是能否将某个特定的带标签粒子移动到给定位置；当移动方向限制为三个时，该问题在单调多连方中是 NP 完全的 [23], ；当移动方向限制为两个时，该问题在正方形中是 NP 完全的 [27]。最近， [6] 的作者证明，对于确定性 移动序列（即重复执行固定移动序列），若干倾斜问题是 PSPACE 完全的。

采用完全倾斜模型中的最大移动并加入个体控制，便得到游戏 Ricochet Robots [31, 38]的规则。Holzer 和 Schwoon [41] 在对相关游戏 Atomix 进行 PSPACE 完全性证明时，使用了与我们类似的思路，但我们无法直接使用他们的构造，因为我们需要一种能够分析聚集序列长度的构造。其他相关模型研究了矩形中的统一移动，例如通过扫描线 [2, 5], 或游戏 2048 [1, 3]的规则。

Bose 和 Shermer [22], 研究过多边形内点粒子的聚集，但他们的设定采用的是来自多边形内部某一点的排斥，而倾斜模型可以解释为采用来自无穷远处某一点的排斥。与之更密切相关的是，在能力受到严格限制的情况下对机器人进行定位的问题 [57, 60]。一系列移动指令能够将机器人从多边形环境中的初始未知位置引导至确定位置，这等价于将环境中的所有点粒子聚集到同一个最终位置。

2 预备知识

本节给出第 1 节为便于直观理解而省略的严格定义。每个多格骨牌 P 都关联一个对偶图 $G_P = (V, E)$，见图 2(b)，其中 $V \subset \mathbb{Z}^2$和 $E = \{\{u, v\} : u \in V, v \in V, \|u - v\|_1 = 1\}$，以及一个边界 ∂P，它是一个边长为整数的轴对齐多边形，将 V与 $\mathbb{Z}^2 \setminus V$分隔开。我们将 V的顶点与 P 的方格对应，并称其为像素。本文通用的约定是， n 表示 ∂P的角的数量， $n_c \leq n$ 表示凸角的数量， $N = |V|$ 表示给定多格骨牌的像素数量。像素由两条线段的交点唯一确定，一条是行段，另一条是列线段；它们分别是行和列中最大连续的部分；角像素与 ∂P的两条垂直边相邻，即位于凸角旁，见图 2(a)。形式上，迷宫是细多格骨牌（不包含 2×2 正方形），且其中所有角像素的度均为 1，见图 2(b)。

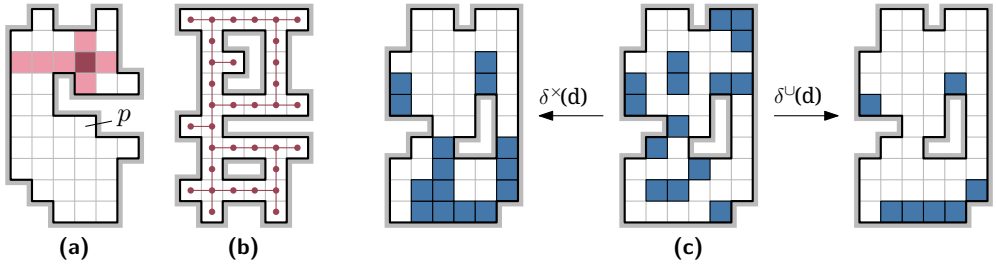

图 2 (a) 一个简单多连方，其中一个深色像素位于两个浅色线段的交点处，并带有一个角像素 p。**(b)** 一个非简单迷宫及其对偶图。**(c)** 完全倾斜模型的阻挡变体和合并变体中，对配置执行的向下移动。

包含粒子的所有像素的集合 $C \subseteq V$ 称为一个**配置**。像素 $p \in C$ 为**占据状态**，$V \setminus C$ 中的像素则为**空闲状态**。我们用集合 $\mathbb{D} = \{\mathrm{u}, \mathrm{d}, \mathrm{l}, \mathrm{r}\}$ 简记上、下、左、右四个方向。形式上，倾斜模型定义了一个函数 $\delta : \mathbb{D} \to (2^V \to 2^V)$，即将方向映射为配置的变换。变换 $\delta(v)$，$v \in \mathbb{D}$，称为一次移动。δ 通过归纳扩展为定义在 $\mathbb{D}^*$ 上的函数；$\mathbb{D}^*$ 是方向序列（可以为空）的集合。具体而言，对于 $v \in \mathbb{D}$ 和 $w \in \mathbb{D}^*$，令 $\delta(wv) = \delta(v) \circ \delta(w)$；并令 $\delta(\varepsilon) = \mathrm{id}$，其中 ε 为空序列，id 为恒等函数。在完全倾斜模型中，粒子通常会在与其他粒子碰撞时受到阻挡；但在聚集过程中，它们会合并，见图 2(c)。方向 l 下阻挡和合并两种变体的形式化定义如下；其他方向的定义类似。

完全倾斜（阻挡）： $p \in \delta^{\times}(\mathrm{L})(C)$ 当且仅当 p 是行段 $|R \cap C|$ 中最左侧的像素之一 R，且该行段 p 包含。**完全倾斜（合并）：** $p \in \delta^{\cup}(\mathrm{L})(C)$ 当且仅当 p 是行段 R 中最左侧的像素 p，且 $R \cap C \neq \varnothing$。

两种变体在单点配置上是一致的，而且单点配置集合在所有移动下都是封闭的。由此得到函数 $\delta^1 : \mathbb{D} \to (V \to V)$，定义为 $\delta^1(v)(p) = q$ 当 $\delta^{\times}(v)(\{p\}) = \delta^{\cup}(v)(\{p\}) = \{q\}$ 时，对 $v \in \mathbb{D}$ 成立。当 δ 的含义可由上下文确定时，我们简化记号，将 $C \cdot w$ 写作 $\delta(w)(C)$，并用 $C \xrightarrow{w} C'$ 表示 $C' = \delta(w)(C)$，同时将移动 $\delta(v)$ 与方向 $v \in \mathbb{D}$ 互换使用。

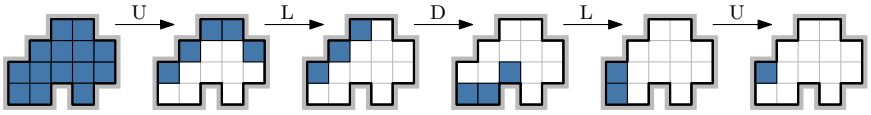

图3 序列 uldlu 是该多格骨牌在完全倾斜模型中的聚集序列。

一个配置的聚集序列 C 是一个方向序列 $w \in \mathbb{D}^*$，使得 $|\delta^{\cup}(w)(C)| = 1$，此时 C 是一个可聚集配置；一个多格骨牌的聚集序列 P 是配置 V 的聚集序列，见图3，从而使 P 成为一个可聚集多格骨牌。我们将 $\mathrm{sgs}(C)$ 定义为可聚集配置 C 的聚集序列的最小长度（即一个最短聚集序列的长度），并对可聚集多格骨牌 P 指定 $\mathrm{sgs}(P) = \mathrm{sgs}(V)$。

粒子的统一移动使我们能够将合并变体中配置的行为归结为单个粒子的运动。

▶ **观察 1.** 对于 $w \in \mathbb{D}^*$ 和 $C \subseteq V$，$\delta^{\cup}(w)(C) = \bigcup_{p \in C} \{\delta^1(w)(p)\} = \bigcup_{p \in C} \delta^{\times}(w)(\{p\})$。

观察 1 的单步类比隐含于 [13] 中。它是第 1.2 节提到的聚集与定位等价关系的核心：我们可以将粒子配置视为通过合并而聚集，也可以考虑一个最初位于若干可能位置之一的单个粒子的移动。由此可得若干简单推论：对于配置 C，聚集序列也适用于每个$C' \subseteq C$。如果 w 是 C的聚集序列，那么对于每个 $w' \in \mathbb{D}^*$， ww' 也同样是聚集序列。前置操作也适用于 V：如果 w 是 V的聚集序列，那么对于每个 $w' \in \mathbb{D}^*$， $w'w$ 也同样是聚集序列。

我们将使用完全倾斜模型的两个代数性质。首先，每一次移动都是幂等的，即对所有 $v \in \mathbb{D}$， $\delta(v) \circ \delta(v) = \delta(v)$。其次，当两个相反方向的移动按序列施加时，第一个会被抵消，例如 $\delta(\mathrm{l}) \circ \delta(\mathrm{r}) = \delta(\mathrm{l})$。因此，我们一般可以假设移动序列在垂直方向之间交替。

我们研究三个迄今尚未在完全倾斜模型中分析过的问题。

▶**问题 2.** 完全聚集。
输入： 一个多格骨牌 P。**目标：** 为 P 寻找一个聚集序列，或判定 P 不可聚集。

▶**问题 3.** 最短聚集序列。**输入：** 一个可聚集多格骨牌 P。**目标：** 为 P 计算一个最小长度为 $\mathrm{sgs}(P)$ 的聚集序列。

▶**问题 4.** 子集聚集。**输入：** 一个多格骨牌 P和一个配置 $C \subseteq V$。**目标：** 判定 C 是否可聚集。

为了研究聚集任务的困难是否仅在粒子数量无界且移动序列很长的渐近条件下才会出现，我们考虑一个一般的参数化聚集问题。我们假设读者熟悉参数化复杂度的基本概念，例如固定参数可处理归约以及复杂度类 FPT、XP 和 W$[i]$、 $i \geq 1$；例如参见 Flum 和 Grohe 的教材 [35]。

▶**问题 5.** ParaGathering。
输入： 一个多格骨牌 P和一个配置 C，其中 $|C| = k$。**问题：** 是否存在一个聚集序列 w，使得 C 满足 $|w| \leq \ell$? **参数：** $k \geq 1$, $\ell \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$。

当 ℓ 固定为一个整数时，ParaGathering 可以通过枚举并检查所有长度为 ℓ 、水平移动和垂直移动交替进行的 $4 \cdot 2^{\ell-1}$ 个可能序列，在 $2^{\ell+1} N^{\mathcal{O}(1)}$ 时间内平凡地求解。因此，以 ℓ为参数时，ParaGathering 属于 FPT。

3 通过同步自动机聚集粒子

第2节引入的记号与既有惯例略有不同，可能会被认为过于繁复。然而，它确实加快了我们想要阐明的一点：倾斜模型是自动机的转移函数。一个半自动机[1] 是一个三元组（Q、 Σ、 δ），其中， Q是有限且非空的状态集合， Σ 是有限且非空的字母表，而 $\delta : \Sigma \to (Q \to Q)$是一个转移函数，它将 Σ 中的字母映射为 Q上的变换。按照惯例， δ 被扩展为定义在字符串 $w \in \Sigma^*$上的函数。一个接受器是一个五元组（Q、 Σ、 δ、 q_0、 F），其中（Q、 Σ、 δ）是

[1] 本文中讨论的所有（半）自动机都是完备的、确定性的有限自动机。

一个半自动机、 $q_0 \in Q$ 一个初始状态以及 $F \subseteq Q$ 一个接受状态集合。接受器所接受的语言 A 是字符串 $L(A) = \{w \in \Sigma^* \colon q_0 \cdot w \in F\}$的集合。为简便起见，我们将半自动机和接受器统称为自动机。现在很容易看出，一个倾斜模型为一个具有对偶图 $G_P = (V、 E)$的多格骨牌 P定义了一个自动机（2^V、 $\mathbb{D}$、 δ）。我们甚至可以用自动机理论的语言重新表述一些既有问题。

▶ 例 6. 假设我们使用某个指定的倾斜模型，并给定一个多格骨牌 P。形状重构问题询问：对于给定的配置 C、 $C' \subseteq V$， $L((2^V, \mathbb{D}, \delta, C, \{C'\}))$ 是否非空。占据问题询问：对于给定的配置 $C \subseteq V$ 和像素 $p \in V$， $L((2^V, \mathbb{D}, \delta, C, \{C' \subseteq V \colon p \in C'\}))$ 是否非空。

尽管这种联系很有趣，但由于状态集的规模呈指数级增长，它并没有直接的用处。事实上，我们不会期待存在多项式规模的描述，因为在完全倾斜模型中，占据问题和形状重构问题都是 PSPACE 完全的 [7], ，而 A [40](A) 的空性则可在多项式时间内判定，其中多项式关于 A [40] 的规模。通过自动机研究的方法，在我们考虑聚集序列的对应概念——同步词时，便显示出其优点。

3.1 同步自动机简述

若存在状态 $q \in Q$ ，使得对于所有 $p \in Q'$， $p \xrightarrow{w} q$ ，则字符串 $w \in \Sigma^*$ 是集合 $Q' \subseteq Q$ 的同步词；此时， Q' 是同步集。同步集 Q' 的同步词的最短长度称为复位阈值 rt(Q')。若同步自动机 $A = (Q, \Sigma, \delta)$具有状态同步集 Q，则定义 rt(A) =rt(Q)。下面简要概述一些重要结果；更多信息可参见几篇优秀的综述 [40, 64, 74, 75]。

如何判断一个自动机是否为同步自动机，并在是的情况下找到长度为$\mathcal{O}(|Q|^3)$的同步词，这一方法已被多次（重新）发现。Eppstein 的工作 [32] 尤为值得关注，因为其中对时间和空间需求进行了细致分析。Černý 猜想指出，对于每个同步自动机 A，rt(A) $\leq (|Q| - 1)^2$ 均成立。该猜想是为纪念 Černý 的奠基性工作而命名的；参见 [29]，其中有该工作的英文译文。该工作通过一系列同步自动机确立了相应的下界。值得注意的是，这个看似简单的猜想数十年来一直未能得到一般性解决，尽管它已在某些特殊的自动机类中得到证明，例如欧拉自动机 [45], 、单调自动机 [32], 等 [75]。由于渐近界$\mathcal{O}(|Q|^3)$一直难以改进，研究人员转而考察三次项的系数 α 。目前最好的值为 $\alpha \leq 0.1654$ ，由 Shitov [70], 给出，他进一步发展了 Szykuła [72]的思路。Kiefer 和 Ryzhikov [49] 近期改进了一种算法的运行时间；该算法针对一个更一般的问题：寻找字符串 w ，使 $|Q \cdot w|$ 最小（称为 w的秩）。

rt(A) 可实现的近似比下界经过数次改进 [18, 19, 37], ，直到 Gawrychowski 和 Straszak [36] 证明，对于任意 $\varepsilon > 0$，在因子 $|Q|^{1-\varepsilon}$ 范围内近似 rt(A) 都是 NP 困难的。实际方面，算法工程方面的努力已催生出能够为拥有 500 多个状态的实例寻找最短同步词的实现 [73]。

判定一个子集 $S \subseteq Q$ 是否为同步的，是 PSPACE完全问题，正如 Natara- jan [59] 所述，并由 Rystsov [63] 正式证明。这个问题与交集非空问题密切相关：给定一组定义在同一字母表上的自动机，判定它们是否接受某个公共单词。Kozen [51] 最初证明了这个问题是 PSPACE完全问题；对于计数自动机 [58, 71],（即定义在一元字母表上的自动机），该问题仍然是 NP 困难的。

3.2 fulltilt 模型中的高效聚集

根据观察 1，多格骨牌 P 的聚集序列恰好对应于自动机 $(V,\ \mathbb{D},\ \delta^1)$ 的同步词。因此，我们可以通过应用 Eppstein 的算法 [32]，判定 $(V,\ \mathbb{D},\ \delta^1)$ 是否同步，从而解决完全聚集问题；该判定用时 $\mathcal{O}(N^2)$，若判定结果为是，还可用时 $\mathcal{O}(N^3)$ 找到 P 的聚集序列。现在我们概述两种算法，其运行时间分别为 $\mathcal{O}(n^2)$ 和 $\mathcal{O}(n_c n^2)$，且仅以 ∂P 作为输入。当像素 N 的数量可能不是角 n 数量的多项式级时，这会带来巨大差异。

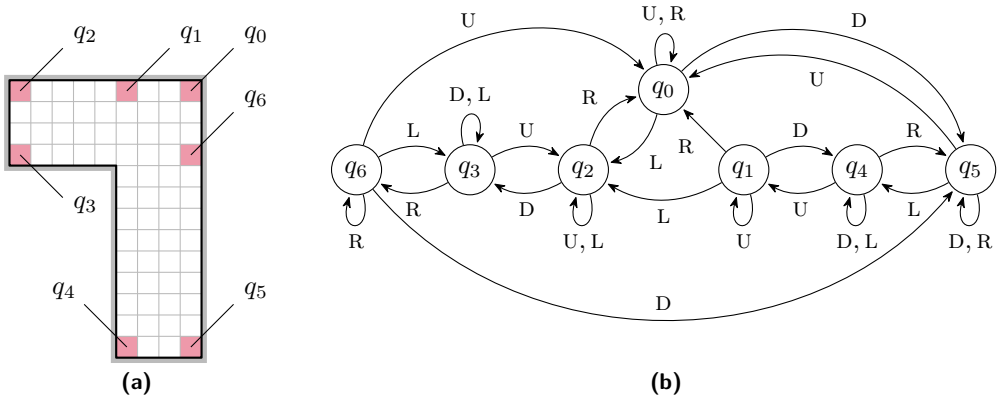

图4 (a) 多格骨牌 P 及其重要像素。**(b)** 完全倾斜自动机 $A(P)$。

关键的观察是，$\delta^{\cup}$ 会非常迅速地将占据像素的集合缩减为一个大小为$\mathcal{O}(n)$的集合。考虑由**重要像素** 构成的集合 $S \subseteq V$，它包含所有角像素，并可能包含**辅助像素**；这些辅助像素可通过将在凹角处相交的 ∂P 的边延长、直至碰到 ∂P的另一条边而得到。图4(a)展示了多格骨牌 P的重要像素，其辅助像素为 q_1 和 q_6。注意到 $|S| \le 2n - n_c$，因为每个凹角至多纳入两个辅助像素。垂直方向上任意两次移动组成的序列，都会将一个粒子的位置从任意像素 $p \in V$改变为 S中的某个像素，例如 $\delta^1(\mathrm{dl})(p) \in S$。 S 在 δ^1下是封闭的，即在移动序列dl之后，我们可以关注限制在 S上的 δ^1 。我们将所得的自动机 $A(P) = (S, \mathbb{D}, \delta^1)$称为 P 的**完全倾斜自动机**，见图4(b)。

▶ **引理7。** 多格骨牌 P 可聚集，当且仅当完全倾斜自动机 $A(P)$ 是同步的；在这种情况下，$\mathrm{rt}(A(P)) \le \mathrm{sgs}(P) \le \mathrm{rt}(A(P)) + 1$ 成立。

证明。 P的聚集序列是 $A(P)$的同步词，因为 $S \subseteq V$。反过来，假设 w 是 S的同步词。若 $w = \varepsilon$，则 P 是单个像素，而 ε是一个聚集序列。否则，不失一般性地假设，对于某个 $w' \in \mathbb{D}^*$，有 $w = \mathrm{l}w'$ （必要时旋转 P）。那么，$\mathrm{dl}w = \mathrm{dll}w'$ 是 P的聚集序列，并且可以缩短为$\mathrm{dl}w' = \mathrm{d}w$，因为完全倾斜模型中的移动是幂等的。◀

众所周知，[59, 75] 一个自动机（Q, Σ, δ），其中 $|Q| > 1$，是同步的，当且仅当每一对状态的无序对 $\{s, t\} \subseteq Q$ 都有一个同步词。这启发了一种反复合并状态对的策略，这也是已知的用于在 S1 [13, 55] 中实现聚集以及进行机器人定位 [57, 60]的策略的基础。为了高效地确定 $A(P)$中各状态对的同步词，我们构造成对自动机 $A(P)^{\le 2} = (S^{\le 2}, \mathbb{D}, \delta^{\le 2})$，其中 $S^{\le 2} = \{\{p, q\} :\ p, q \in S\}$，且 $\delta^{\le 2}(v)(\{p, q\}) = \{\delta^1(v)(p)\} \cup \{\delta^1(v)(q)\}$。注意，$S^{\le 2}$还包含所有单例 $\{p\} \subseteq S$。在 $A(P)$中，一个满足 $p \cdot w = q \cdot w$ 的字符串 w，恰好对应于底层有向图 $A(P)^{\le 2}$中一条从 $\{p, q\}$ 到 $\{p \cdot w\}$、标记为 w 的路径。使用

在该有向图上执行广度优先搜索以构建最短路径森林，可以预先计算出每一对状态通往某个单例的最短路径上的下一步（如果存在这样的路径）。

为减少需要考虑的配对数量，我们首先通过反复执行两次垂直移动（例如 dl），将 S 缩减为仅包含角像素。注意，如果$p \in S$ 是辅助像素，那么按字典序有 $p \cdot \mathrm{dl} < p$，因为至少有一个坐标会减小。因此，执行 $\mathcal{O}(n)$ 次 dl 操作就足以从 S中消除所有辅助像素（以及所有不位于左下角的角像素）。这样，我们最多只需检查 $\mathcal{O}(n_c)$ 个配对，从而缩短含有许多凹角的非简单多格骨牌的运行时间。

算法1 完全倾斜模型中的完全聚集。

输入：多格骨牌 P的边界 ∂P。输出：若存在，则给出 P 在完全倾斜模型中的聚集序列。1 计算完全倾斜自动机 $A(P) = (S, \mathbb{D}, \delta^1_{\mathrm{FT}})$。2 构造成对自动机 $A(P)^{\leq 2}$。3 使用广度优先搜索，在以 $A(P)^{\leq 2}$为底层有向图的图中构建最短路径森林。4 $w \leftarrow$dl5 $X \leftarrow S$6 当 X 包含辅助像素时执行7 $w \leftarrow w$ dl8 $X \leftarrow \bigcup_{p \in X} p \cdot \mathrm{dl}$ 9 当 $|X| > 1$ 时执行 10 选择 $p, q \in X$，满足 $p \neq q$。11 如果存在 $w' \in \mathbb{D}^*$，使得 $|\{p, q\} \cdot w'| = 1$ 在 $A(P)^{\leq 2}$ 中，则 12 $w \leftarrow ww'$13 $X \leftarrow \bigcup_{p \in X} p \cdot w'$14 否则 15 返回 P 不可聚集。

16 **返回**w

▶ **定理8。** 给定具有 $n_c \leq n$ 个凸角的多格骨牌 P 的边界 ∂P，如果存在用于 P的聚集序列，则可以在 $O(n_c n^2)$ 时间内计算出该序列。

证明。若聚集序列存在，计算它的步骤列于算法1。正确性由引理7以及通过反复合并两个状态来计算同步词这一广为人知的策略可得 [59, 75]。至于运行时间，利用 Sarnak 和 Tarjan 的数据结构 [65]，可以在 $O(n \log n)$ 时间内构造 $A(P)$，用于平面点定位；这使我们能够在 $O(n \log n)$ 时间内对 ∂P进行预处理，从而之后可以在 $O(\log n)$ 时间内，针对 P 内的任意点 p，找到与 p 的投影相交且位于其左侧、右侧、上方或下方的 ∂P。因此，我们可以先找到辅助像素，再在每个重要像素上计算函数 $\delta^1(v)$、$v \in \mathbb{D}$，总耗时为 $O(n \log n)$。之后，$A(P)^{\leq 2}$ 可在 $O(n^2)$ 时间内计算。对$A(P)^{\leq 2}$ 执行广度优先搜索，耗时与 $A(P)^{\leq 2}$的大小成线性关系，即 $O(n^2)$ 时间。第6–8行的预处理循环执行 $O(n)$ 次，每次耗时 $O(n)$，并确保之后 $|X| \leq n_c$。因此，从第9行开始的主循环最多执行 $O(n_c)$ 次。有关如何使主循环的每次迭代都在 $O(n^2)$ 时间内运行的技术，请参阅 Eppstein [32]；这样总运行时间为 $O(n_c n^2)$。

◀

如果我们只关心聚集序列是否存在，那么在计算出最短路径森林后即可停止。当且仅当每一对状态都被指定了一个通向某个单例的路径上的后继时，聚集序列才存在 [32]。

▶推论 *9. </style}*给定多格骨牌 P 的边界 ∂P，且其有 n 个角，可以在 i n $O(n^2)$ *</style}*时间内判定 P 是否可聚集。

成对自动机背后的思想，为按粒子数 k作为参数研究 ParaGathering 提供了初步思路。一个广义的 k-子集自动机 $A(P)^{\leq k}$，以所有大小至多为 k 的像素子集作为状态，可用于在 $\mathcal{O}(N^k)$ 时间内找到最短聚集序列。因此，当以 k 为参数且输入给定对偶图时，ParaGathering 属于 XP。

3.3 完全倾斜模型中聚集序列的最坏情况界

已知一个多格骨牌可聚集后，其最短聚集序列在最坏情况下可能有多长？一个上界与该算法的运行时间相匹配。

▶ **推论 10.** 对于每一个可聚集多格骨牌 P，$\mathrm{sgs}(P) \in O(n_c n^2)$。

下界的基本思想如图 5 所示，是将两个粒子放置在长度为 $2m+1$ 的有向环上，彼此相隔 m 个位置。逆着循环方向移动会进入死胡同，但在 p_{2m-1} 处除外。在该处，lu 允许在循环上跳过一步，从而可将粒子之间的距离减少 1。要再次缩短距离，必须遍历整个循环，因此需要 Ω(m) 轮、每轮 Ω(m) 次移动才能聚集这些粒子，总计为 Ω(m^2) =Ω(n^2)。

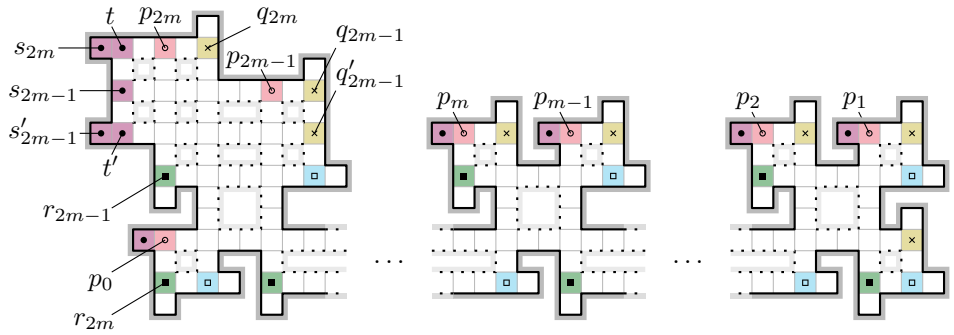

图 5 一族多格骨牌 P_m 在完全倾斜模型中满足 sgs(P_m) ∈ Ω(n^2)。重要的像素类以不同的颜色和符号标出。虚线区域表示可选孔洞，它们可将简单多连方变成迷宫，从而确保该构造对两种特殊情形都有效。

▶ **定理 11。** 存在一个无限的 P_m、 $m \in \mathbb{N}$ 可聚集简单多格骨牌族，使得 $\mathrm{sgs}(P_m)$ ∈Ω(n^2)，其中角的数量 n 会随着 m增加。

证明。 取 $m \in \mathbb{N}$，并令 $M = 2m+1$。图 5 展示了一个多格骨牌 P_m，它由左侧一个独特的构件和其后 $m-1$ 个较简单构件的重复组成，所有构件依次在底部连接。若干像素类以不同的颜色和符号标出；其中最重要的是 V_p、 V_q、 V_r 和 V_s。每个类 V_x 都包含索引从 x_0 到 x_{2m} 的像素，其中 V_q 还包含额外像素 q'_{2m-1}，而 V_s 还包含额外像素s'_{2m-1}、 t 和 t'。容易验证，这些类关于 $\delta^1(v)$ 对所有 $v \in \mathbb{D}$ 构成一个同余，例如， δ^1(u)(r_i) = $p_{(i+1) \bmod M}$，且对所有 $s \in V_s$， δ^1(d)(s) $\in V_s$。此外还有更多

同余类，尤其是其余度为1的像素；它们按照各自唯一邻居的索引方式隐式编号，但为避免杂乱而未作标记。注意，这些类的并集在移动 $\delta^1(v)$ 的作用下封闭。

粒子可以通过序列 rdlu 从 p_i 移动到 $p_{(i+1) \bmod M}$。我们定义像素 x_i（其索引为 i）的循环索引 $\mathrm{idx}(x_i) = i$，并令 $\mathrm{idx}(t) = 2m$、$\mathrm{idx}(t') = 2m-1$，从而将 idx 扩展为相关类中像素上的全函数。两个像素 a, b 的循环距离定义为 $\Delta(a,b) = \min\{|\mathrm{idx}(a) - \mathrm{idx}(b)|, M - |\mathrm{idx}(a) - \mathrm{idx}(b)|\}$。显然，一对像素 $\{a,b\}$ 的聚集序列 $w \in \mathbb{D}^*$ 满足 $\Delta(a \cdot w, b \cdot w) = 0$。现在我们证明，任何满足 $\Delta(p_0 \cdot w, p_m \cdot w) = 0$ 的序列 $w \in \mathbb{D}^*$，其长度均为 $|w| \in \Omega(m^2)$。

考虑两个粒子，最初分别位于 p_0 和 p_m，它们的循环距离为 Δ，也就是说，起初 $\Delta = \Delta(p_0, p_m) = m$。同余保证两个粒子始终属于同一个类。根据构造，所有移动 v 都满足：对于所有像素 a，$\mathrm{idx}(a \cdot v) \in \{\mathrm{idx}(a), (\mathrm{idx}(a) + 1) \bmod M\}$。因此，要改变 Δ，我们需要找到同一类中的两个像素 a、b，使得 $\mathrm{idx}(a \cdot v) = \mathrm{idx}(a)$，而 $\mathrm{idx}(b \cdot v) = (\mathrm{idx}(b) + 1) \bmod M$，其中 $v \in \mathbb{D}$ 取某个值。P_m 中恰好只有一个位置会发生这种情况：一个粒子必须通过 u 移动到 t，另一个则停留在某个 s_i。这会使 Δ 从 $\Delta(a, s_i)$ 变为 $\Delta(t, s_i) = \Delta(a, s_i) \pm 1$，其中 $a \in \{t', s_{2m-1}\}$。每当 Δ 减小后，位于 t 的粒子都必须经由 p_0、p_1、……、p_{2m-1} 遍历整个循环，之后才能再次通过另一次移动将 Δ 减小到 t。因此，要将 Δ 减小到 0，需要进行 m 次遍历，每次包含 $\Omega(m)$ 次移动，总计 $\Omega(m^2)$。

为看出 P_m 是可聚集的，请注意对所有配置 C，均有 $C \cdot \mathrm{rdlu} \subseteq V_p$。此后，我们可以通过沿循环移动到 p_{2m-1}，并经由 $p_{2m-1} \cdot \mathrm{lu} = t$ 减小其循环距离，从而依次合并 V_p 中的对。P_m 的任一聚集序列 w 都必须是 $\{p_0, p_m\}$ 的聚集序列，因而满足 $\Delta(p_0 \cdot w, p_m \cdot w) = 0$。由于该构造保证 $m \in \Omega(n)$，这意味着 $\mathrm{sgs}(P_m) \in \Omega(n^2)$。◀

4 用均匀受控粒子模拟二元自动机

如果 Černý 猜想成立，那么 $\mathrm{sgs}(P)$ 的 $\Omega(n^2)$ 下界实际上是紧的。

▶ **猜想 12.** 对于每个具有 n 个角的可聚集多格骨牌 P，$\mathrm{sgs}(P) \in O(n^2)$。

多格骨牌的几何结构应当使猜想 12 比 Černý 猜想更容易证明。可惜，我们必须抑制这一希望，因为多格骨牌中的粒子可以
用于模拟二元自动机，即字母表为 $\Sigma = \{0, 1\}$ 的自动机。

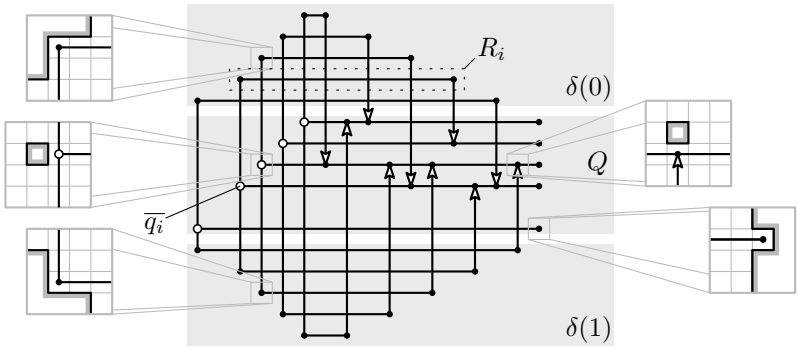

图 6 由二进制自动机 A 构造 $P(A)$ 的示意图。从上到下，三个块分别表示 0 的转移、状态 $q_i \in Q$ 和 1 的转移。我们放大展示了如何通过边界 $\partial P(A)$ 实现该方案。具体示例见图 7。

12 倾斜自动机：统一外部控制下的粒子聚集

为了模拟自动机 $A=(Q,\{0,1\},\delta)$，核心思路是构造一个多格骨牌 $P(A)$，其中每个状态 $q\in Q$ 都由一个像素 q表示，并使用固定移动序列来体现转移。一个粒子被放置在 $P(A)$ 内部，其位于 q 表示A 处于状态 q。我们使用顺时针循环 urdl 和逆时针循环 drul 分别表示 0 和 1 的转移。通过精心构造 $P(A)$ 的边界，我们保证两个像素 q_i 与 q_j 之间的所有最短移动序列都可以分解为 urdl 和 drul 的组合，从而确保表示状态的像素之间的最短移动序列与 A 中的转移相对应。

不失一般性，令 $Q=\{q_0,q_1,\ldots,q_{|Q|-1}\}$，并对集合 $Q'\subseteq Q$设定 $\overline{Q'}=\{\overline{q}\colon q\in Q'\}$。我们对 $P(A)$ 的构造如图 6 示意所示。它由垂直排列的三个块组成，中间的块模拟 Q。每个状态 $q_i\in Q$ 都对应一行，宽度为 $6|Q|$，其中包括代表像素 $\overline{q_i}$。这些行依次堆叠，中间插入左对齐、宽度为 $6|Q|-1$ 的行；各个 q_i 沿向上的对角线对齐，从左下方的 $q_{|Q|-1}$ 延伸至 q_0。除紧邻外边界的 $q_{|Q|-1}$ 外，每个 q_i 的左侧都放置一个 1×1 孔。

顶部和底部的块分别表示 0 和 1 的转移。为在顶部块中实现转移 $\delta(0)(q_i)$，将宽度为 $6i+3$ 的行 R_i 从上到下堆叠，并以 $\overline{q_i}$ 为基准左对齐。当 $q_j=\delta(0)(q_i)$ 时，在 R_i 最右列与 q_j 所在行的交点像素下方放置一个 1×1 孔。这样，我们便可通过移动序列 urdl 模拟 0 的转移。对于底部块中的 $\delta(1)(q_i)$，也以类似方式构造行和孔，但此时行从下到上排列，宽度为 $6(|Q|-i)-1$，因此可以用 drul 模拟 1。另一个细节是，实现 $\delta(1)(q_{|Q|-1})$ 时放置的孔最终会与外部面连通，也就是说，$\delta(1)(q_{|Q|-1})$ 实际上不会增加另一个孔。完整构造需要 $6|Q|$ 个凸角和 $6(3|Q|-2)$ 个凹角，总计 $n=12(2|Q|-1)$，并包含 $N\in\mathcal{O}(|Q|^2)$ 个像素。因此，$\partial P(A)$ 和 $G_{P(A)}$ 都能在多项式时间内计算。

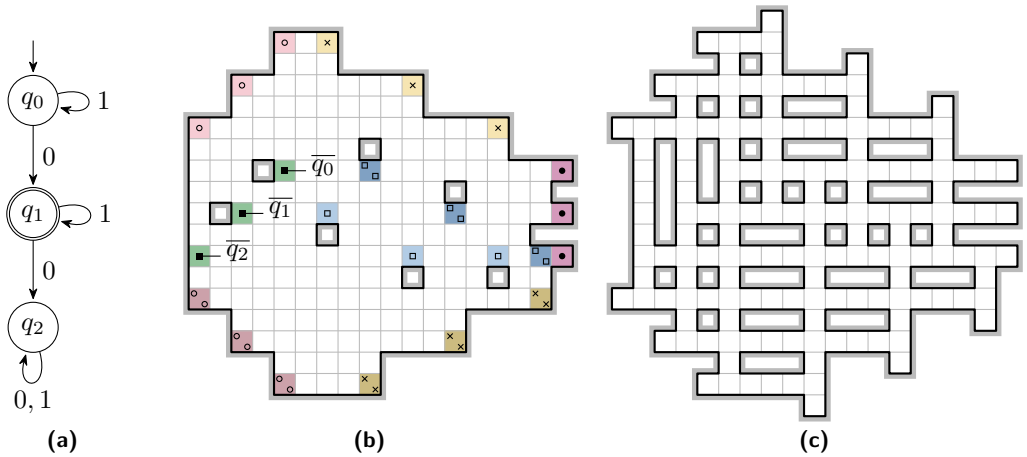

图 7 (a) 接受所有恰好包含一个 0 的字符串的二进制自动机 A_0。**(b)** 多格骨牌 $P(A_0)$。颜色和符号表示从代表元 q_i 可达的像素的同余类。**(c)** $P(A_0)$ 通过添加孔和度为1的像素转变为迷宫 $M(A_0)$。

举一个具体例子，考虑二进制自动机 A_0，它接受恰好包含一个 0 的字符串，见图 7(a)。由我们的构造得到的多格骨牌 $P(A_0)$ 如图 7(b) 所示，其中标记的像素表示从 Q 可达的像素同余类，特别是沿 urdl 和 drul 循环遍历的那些。

▶ **观察 13**。对于所有 p，$q \in Q$，$p \xrightarrow{0} q \Leftrightarrow p \xrightarrow{\text{URDL}} q$ 和 $p \xrightarrow{1} q \Leftrightarrow p \xrightarrow{\text{DRUL}} q$。

▶ **引理 14.** 对于所有 $p \in Q$，其代表像素为 $p \in P(A)$，以及所有满足 $p \cdot w \in Q$ 的 $w \in \mathbb{D}^*$，都存在 $w' \in \{\text{URDL}, \text{DRUL}\}^*$，其中 $|w'| \le |w|$ 满足：对于所有 $q \in Q$，均有 $q \cdot w' = q \cdot w$。

证明。设 $w = w_1 w_2 \dots w_{|w|}$，$w_i \in \mathbb{D}$，使得对某个 $p \in Q$ 有 $p \cdot w \in Q$。此外，设 $p_i = p \cdot (w_1 w_2 \dots w_i)$，并令 $p_0 = p$。对 $\lambda = |\{i : 0 \le i \le |w|, p_i \in Q\}|$ 进行归纳证明。若 $\lambda = 1$，则 $w = \varepsilon$，我们可以选择 $w' = \varepsilon$。否则，在来自 Q 的下一个像素处拆分该序列：选择满足 $\{p_1, p_2, \dots, p_{\ell-1}\} \cap Q = \varnothing$ 的最大 ℓ，并令 $w_{\text{start}} = w_1 w_2 \dots w_\ell$ 和 $w_{\text{rest}} = w_{\ell+1} \dots w_{|w|}$。于是，$\ell \ge 4$，因为 Q 中的像素之间不存在更短的（非空）路径；而 $w_\ell = \text{l}$，因为这是到达 Q 的唯一方式。现在，$p_{\ell-1}$ 必定是 $p \cdot \text{urd}$、$p \cdot \text{dru}$ 或 $p \cdot \text{r}$ 之一。考虑满足 $p_{\ell'} \ne p \cdot \text{r}$ 的最大索引 $\ell' \le \ell$。那么，$p_{\ell'}$ 要么是 $p \cdot \text{urd}$，要么是 $p \cdot \text{dru}$。第一种情况下，令 $w'_{\text{start}} = \text{urdl}$；否则，令 $w'_{\text{start}} = \text{drul}$。将可达像素划分为图 7(b) 所示同余类，确保 w'_{start} 在 Q 上等价于 w_{start}。对 w_{rest} 应用归纳假设，得到一个等价的 $w'_{\text{rest}} \in \{\text{urdl}, \text{drul}\}^*$，满足 $|w'_{\text{rest}}| \le |w_{\text{rest}}|$。现在，拼接 $w' = w'_{\text{start}} w'_{\text{rest}}$ 即满足要求。◀

在确立这些观察后，我们现在可以看出，多格骨牌 $P(A)$ 如何刻画自动机 A 的性质。特别是，对于代表像素子集 S（如果存在的话），最短聚集序列的长度恰好是该状态子集 S 的最短同步词长度的四倍。此外，当且仅当完整代表像素集 Q 存在聚集序列时，$P(A)$ 才存在聚集序列，并且最多只需额外进行五次移动。

▶ **定理15**。字符串 $w \in \{0, 1\}^*$ 被自动机 $A = (Q, \{0, 1\}, \delta, q_0, F)$ 接受，当且仅当存在一个移动序列 $w \in \mathbb{D}^*$，使得 $q_0 \cdot w \subseteq F$ 在 $P(A)$ 中成立。

证明。对于正向，应用观察 13。对于反向，首先应用引理 14 得到 $w' \in \{\text{URDL}, \text{DRUL}\}^*$，然后对 w' 应用观察 13。◀

▶ **定理 16.** 自动机 $A = (Q, \{0,1\}, \delta)$ 的状态集合 $S \subseteq Q$ 是同步的，当且仅当其代表元集合 S 在 $P(A)$ 中可聚集；此时 $\text{sgs}(S) = 4\,\text{rt}(S)$。

证明。对于正向推导，设 $w \in \{0, 1\}^*$ 是 S 的最短同步词。利用观察 13，为 S 构造满足 $|w| = 4|w|$ 的聚集序列 $w \in \{\text{urdl}, \text{drul}\}^*$。反设存在一个满足 $|w'| < |w|$ 的聚集序列 $w' \in \mathbb{D}^*$。先对 w' 应用引理 14，再应用观察 13，得到 S 的一个满足 $|w'| < |w|$ 的同步词 $w' \in \{0, 1\}^*$，这与 w 长度最短的假设矛盾。反向推导非常类似。◀

▶ **推论17.** 自动机 $A = (Q, \{0, 1\}, \delta)$ 是同步的，当且仅当 $P(A)$ 是可聚集的；此时，$4\,\text{rt}(A) \le \text{sgs}(P(A)) \le 4\,\text{rt}(A) + 5$ 成立。

证明。注意到 $V \cdot \text{RDRUL} \subseteq Q$，即 $P(A)$ 是可聚集的，当且仅当 Q 是可聚集的，且 $\text{sgs}(Q) \le \text{sgs}(P(A)) \le \text{sgs}(Q) + 5$。该结论现由关于 $S = Q$ 的定理 16 得出。◀

▶ **推论18.** 若 $\text{sgs}(P) \in O(n^2)$ 对每个具有 n 个角的可聚集多格骨牌 P 成立，则每个同步二进制自动机 $A = (Q, \{0,1\}, \delta)$ 有 $\text{rt}(A) \in O(|Q|^2)$。

证明。设 A 是一个同步二元自动机。根据推论17，$P(A)$ 是可聚集的；根据该断言的假设，$\text{sgs}(P(A)) \in O(n^2)$。现在，$\text{sgs}(P(A)) \in O(|Q|^2)$，因为 $n = 12(2|Q| - 1)$。根据推论17，$4\,\text{rt}(A) \le \text{sgs}(P(A))$，即 $\text{rt}(A) \in O(|Q|^2)$。◀

14 倾斜自动机：在统一外部控制下聚集粒子

尽管同步二元自动机的复位阈值具有二次上界并不能证明 Černý 猜想，但这仍将是重大进展。经过数十年的研究，这样的上界是否存在仍是一个悬而未决的问题，这表明要证明猜想 12 可能并不容易。

通过添加更多的孔以及紧邻角像素的度为1的像素，可以很容易地调整 $P(A)$ 的构造，得到迷宫 $M(A)$，代价是可能需要 $\Omega(|Q|^2)$ 个角；图 7(c) 中的 $M(A_0)$ 就是这样的例子。

▶**推论 19**。 子集聚集 即使在迷宫中也仍是PSPACE完全的。

证明。 不难看出，子集聚集可以由一个非确定性算法在多项式空间内解决，因此该问题属于NPSPACE = PSPACE [67]。

为证明 PSPACE 困难性，我们从子集同步性问题归约：给定一个自动机 $A = (Q, \Sigma, \delta)$ 和一个集合 $S \subseteq Q$，判断 S 是否同步。Rystsov 最初证明了该问题是 PSPACE难的，[63], 而 Vorel [77] 证明了即使对于$\Sigma = \{0, 1\}$，结论依然成立。对于给定的二进制自动机 $A = (Q, \{0, 1\}\ \delta)$，我们在多项式时间内构造 $P(A)$。根据定理 16， $S \subseteq Q$ 同步当且仅当 S 可聚集。当 $P(A)$ 被转化为迷宫 $M(A)$ 时，这一性质仍然成立。◀

值得指出的是，从 [7], 中关于占用问题的 PSPACE 困难性证明，也可以轻易推出一般多格骨牌中的子集聚集问题具有 PSPACE 困难性；不过，我们很乐意提供另一种符合自动机主题的证明。

▶ **推论 20**。 除非 P =NP，否则对于任意 $\varepsilon > 0$，都不存在近似比为 $n^{1-\varepsilon}$ 的最短聚集序列 多项式时间近似算法。

证明。 设 A 是一个同步二进制自动机。根据推论17，一个多项式时间的$n^{1-\varepsilon}$近似算法可用于 $\mathrm{sgs}(P(A))$，从而得到一个多项式时间的 $|Q|^{1-\varepsilon'}$近似算法，用于 $\mathrm{rt}(A)$， $0 < \varepsilon' < \varepsilon$。Gawrychowski 和 Straszak 证明了，存在这样的近似算法意味着 P =NP。◀

注意，由于即使对于 $M(A)$， $N \in \mathcal{O}(|Q|^2)$ 也成立，因此推论 20 中使用的推理同样排除了迷宫存在多项式时间 $N^{1/2-\varepsilon}$-近似算法的可能性（除非 P = NP）。

▶**推论 21.** 存在无穷多个多格骨牌 P，它们具有可聚集配置 C，且满足 $\mathrm{sgs}(C) \in 2^{\Omega(n)}$，其中 n 是 P的角数。

证明. Vorel [77] 证明，存在无穷多个二元自动机 $A = (Q, \{0, 1\}\ \delta)$以及同步集 $S \subseteq Q$，使得 $\mathrm{rt}(S) \geq 2^{\frac{|Q|}{21}}$。因此，根据定理 16，构造$P(A)$可得到多格骨牌（具有 $n < 24|Q|$ 个角）和可聚集配置 S，使得 $\mathrm{sgs}(S) \geq 4\mathrm{rt}(S) > 2^{\frac{n}{21} \cdot 24} = 2^{\frac{n}{504}} \in 2^{\Omega(n)}$。◀

5 在简单多格骨牌中近似聚集序列

我们首先证明，即使是在简单迷宫中，最短聚集序列问题也是 NP 困难的。为此，我们从最短公共超序列问题进行归约：给定字母表 Σ 和一组由 Σ中的符号组成的单词 S，我们要找出一个最短字符串 w，使得对于每个 $w \in S$，都存在一个序列 $i_1 < \cdots < i_{|w|}$，满足对于每个 j都有 $w_j = w_{i_j}$；也就是说， w是每个单词 $w \in S$的超序列。当 $\Sigma = \{0,1\}$ [62] 时，这个问题已经是 NP 困难的。Gerbush 和 Heeringa [37]从一个广义问题进行归约，以证明同步自动机的复位阈值具有不可近似性，这启发了我们的方法。

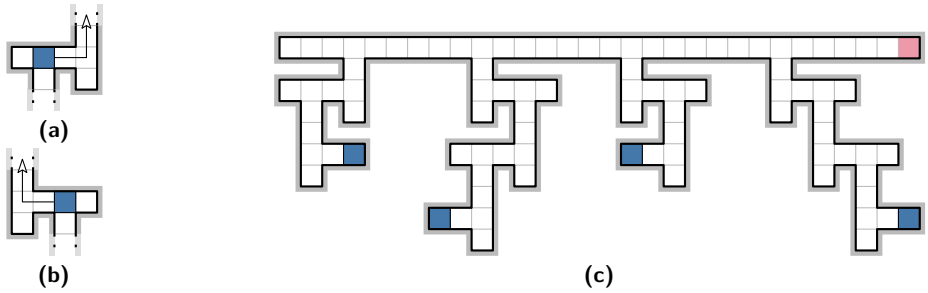

图 8 (a) 0-构件，移动序列 ru。**(b)** 1-构件，移动序列 lu。**(c)** 单词 10、001、01 和 111 的聚集实例。一个最短超序列是 10011，对应的最短聚集序列是 lu ru ru lu lu r。粒子聚集在红色像素中。

▶**定理 22.** 最短聚集序列在NP难的简单迷宫中。

证明。 给定一组 S 由以下符号组成的单词 $\{0,1\}$， $|S| > 1$我们按如下方式构造一个简单迷宫：首先取一段（足够长的）行段 R。对于每个单词 $w \in S$，我们按照 w规定的顺序，依次放置图 8(a) 和图 8(b) 所示的符号构件，从而构成一个垂直路径构件。我们将该构件连接到 R的底部，见图 8(c)。显然，这一构造得到的是一个无洞迷宫。此外，它的规模是多项式级的，因为它由 $|S|$个路径构件组成，每个构件至多包含 $\max_{w\in S} 7|w|$ 个像素。在每个路径构件中，我们关注距离 R 最远的粒子，因为这些粒子的任何聚集序列也都是整个多格骨牌的聚集序列。

我们证明：当且仅当在相应迷宫中存在长度为 $2k+1$ 的聚集序列时，存在 S 的长度为 k 的超序列。设 $w \in \{0,1\}^*$ 是 S 的一个超序列，且满足 $|w| = k$。我们将 w 中的每个 0 替换为移动 ru，将每个 1 替换为 lu。在每个路径构件中，当且仅当 w 中的符号与其当前符号构件对应的移动一致时，粒子才会前进到下一个符号构件；否则，它仍停留在其所在行。因此，经过 $2k$ 次移动后，所有粒子都已前进到行段 R。为了将它们聚集到 R的最右像素，我们再添加最后一次 r 移动。

反过来，设 $w' \in \mathbb{D}^*$ 是一个聚集序列。不失一般性，设 $|w'|$ 是最短的。于是，w' 在水平移动和垂直移动之间交替，且第一次移动是水平移动，因为第一步的垂直移动不会产生任何效果。此外，w' 不包含任何 d移动，因为粒子只能在行段 R 中聚集，而到达 R 中任意像素的所有最短序列都只包含移动 u、l 和 r。最后，由于 $|S| > 1$，最后一次移动是水平移动，因为来自不同路径构件的粒子必须在 R 的最左像素或最右像素聚集。因此，w' 是一个长度为 $2k+1$ 的序列，其中某个 k 由 ru 和 lu 子序列组成，并以一次水平移动结束。我们忽略最后一次移动，并将每个 ru 替换为 0、每个 lu 替换为 1，从而构造一个长度为 k 的字符串 w。和之前一样，当且仅当路径构件中的字符串在粒子所在构件对应的位置包含相应符号时，粒子才会前进到下一个符号构件。因此，由于 w' 是一个聚集序列，且所有粒子最终都位于 R，w 是 S 的一个超序列。◀

注意，根据推论 10，可在多项式时间内猜测并验证可聚集多格骨牌的聚集序列，因此相应的判定问题是 NP 完全的。

定理 22 的证明立即推出 ParaGathering 的 W[1]-困难性。

▶**推论 23.** ParaGathering 在以初始配置的大小 k 为参数时是W[1]-困难的，即使给定的多格骨牌 P 是一个可聚集简单迷宫。

证明。 考虑定理 22 的证明中的归约，但仅在距离 最远的位置放置粒子，如图 8(c) 所示。这是一个固定参数可处理归约，将以给定序列数量为参数、字母表为二元字母表的最短公共超序列问题归约到以PARAGATHERING 中可聚集简单迷宫的k为参数的问题，且两者的参数值相同。Pietrzak 已证明前者是 W[1]-困难的 [61]。◀

另一方面，我们可以在简单迷宫中将最短聚集序列的长度近似到 4 倍以内。为此，我们首先观察到，所有此类实例都恰好有一个行或列线段，粒子可以在其中聚集。在本节剩余部分，我们只考虑由至少两个像素组成的线段。

▶ **引理 24.** 设 P 是一个具有 $N > 1$ 个像素的可聚集简单迷宫。则 P 的所有行或列线段都至少有一个端点是角像素，且恰好有一个线段具有两个角像素端点。

证明。设 P 是一个可聚集简单迷宫，并设 R 是一个线段，其端点 r_1、$r_2 \in R$不是角像素。根据迷宫和线段的定义， r_1 和 r_2 的度数为 3，并且属于与 R垂直的不同线段 S_1 和 S_2 。特别地， r_i 不是 S_i的端点。由于 P 是可聚集的， V 中必定存在一个像素，可从 S_1 和 S_2中的任意像素到达。注意， S_1 和 S_2 仅通过 R 相连，且它们与 R 的唯一连接是经由 r_1 和 r_2 ，因为任何其他路径都意味着 P 不是简单的。然而，位于 S_i 端点处的像素无法到达 r_i 以进入 R，矛盾。

现在，设 P 是一个可聚集简单迷宫，并设 R 和 S 是两条不同的线段，其端点 r_1、$r_2 \in R$ 和 s_1、$s_2 \in S$ 全都是角像素。根据迷宫的定义， r_1、 r_2、s_1 和 s_2 的度均为1。因此，对于任意$v \in \mathbb{D}$，$\{r_1$、 $r_2\} \cdot v \subseteq \{r_1$、 $r_2\}$ 和 $\{s_1$、 $s_2\} \cdot v \subseteq \{s_1$、 $s_2\}$，也就是说，位于 R 或 S 端点上的粒子都无法离开其所在的线段。因此，P 不可聚集，这与假设矛盾。

最后，假设 P 没有一条端点均为角像素的线段，也就是说，所有线段都恰好有一个角像素。考虑任意一条线段 R_1 及其非角端点 r_1，该端点的度数为 3。像素 r_1 属于另一条线段 R_2 ，该线段的另一个非角端点为 r_2。依此类推，线段 R_i 的任意非角端点 r_i 都属于另一条线段 R_{i+1} ，且该线段有一个非角端点 r_{i+1}。由于 P 只有有限条线段，必定存在 $i \neq j$ 使得 $R_i = R_j$。这意味着 P 不是简单迷宫，与假设矛盾。◀

▶**定理 25.** 设 P 是可聚集简单迷宫。那么我们可以在多项式时间内为 P计算一个长度至多为 $4 \cdot \mathrm{sgs}(P)$ 的聚集序列。

证明。假设 $N > 1$。根据引理 24，存在唯一一条线段 R ，其两个端点都是角像素，而其他任何线段恰好有一个角像素。显然，所有粒子都必须在 R 中聚集，因为最初位于 R 角像素上的粒子无法进入任何其他线段。只需关注位于角像素上的粒子，因为在简单迷宫中，其他所有粒子也会随着角像素粒子的聚集序列而聚集。现在考虑一个位于水平线段 $S_1 \neq R$ 的角像素上的粒子 p。为了到达 R， p 必须经过一串交替的水平线段和垂直线段 $S_1, \ldots,$ S_ℓ，其中 $S_\ell = R$。因此，将 p 移动到 R 的最短序列由交替的 {l, r} 和 {u, d} 移动组成。注意， p 在前进到 S_{i+1} 后，如果再沿任意垂直于 S_i 的方向移动，就无法返回 S_i ，因为根据迷宫的定义，任意两个连续线段 S_i, S_{i+1}之间的交点像素的度数为 3。

令 d 为从任意角像素到 R 的最短序列中的最大长度，并考虑序列 urdl。最初位于角像素的任意粒子都能通过四种移动中的至少一种移动到达下一个线段。因此，序列 (urdl) d 的长度至多是将所有粒子移动到 R 所需最短序列的四倍。

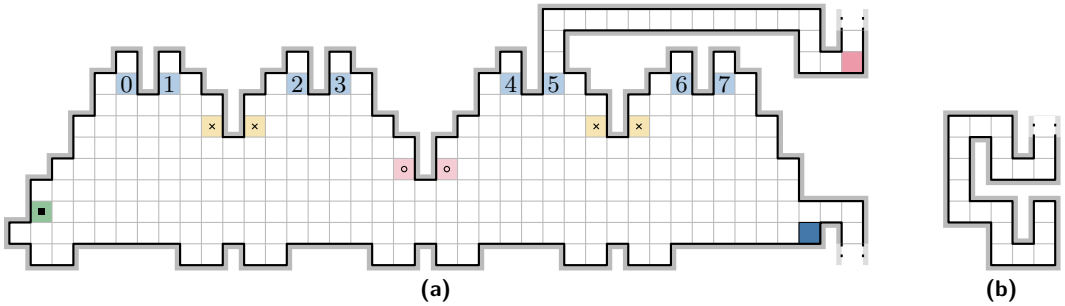

图9（a）字母表为 $\Sigma = \{0, \ldots, 7\}$ 的符号 5 构件。通过八个可能出口中的任意一个，将底部粒子（或其右侧入口处的粒子）移动到顶部红色像素需要 18 步。执行 ul 后，粒子会到达绿色像素。从这里开始，它会反复前进到下一个颜色，每次执行两种可能的四步移动序列之一，直到到达出口或死胡同。如果粒子位于出口处，执行 urdr 后便会到达顶部红色像素。否则，该序列会使粒子返回原点。在此示例中，出口位于符号 5 处，到达顶部红色像素的完整序列为 ul urul drur dlul urdr。**（b）**将此子路径连接到每个路径构件的起点，可确保所有聚集序列都包含移动序列 dlulurdr。该序列会迫使位于路径构件任意位置的所有粒子聚集到符号构件的入口处。

最后，任何聚集序列中的最后一次移动都垂直于 R，以便将所有粒子聚集到 R的某个端点。◀

对于任意简单多连方，可能不存在能以任意常数因子近似 sgs(P) 的多项式时间算法。为此，我们将从最短公共超序列问题出发的归约扩展到无界字母表的情形。如果字母表大小不固定，那么除非 P $=$ NP [43]，否则该问题无法在任意常数因子内近似 $\alpha \geq 1$。

我们采用与定理 22 相同的方法来构造多格骨牌：将由每个给定字符串的符号构件组成的路径构件，连接到粒子聚集的基线线段上。只需将符号构件推广到更大的字母表即可，见图9(a)。

▶ **定理26**。除非P $=$NP，否则在简单多格骨牌中，不存在近似比为 $\alpha \in O(1)$的最短聚集序列多项式时间近似算法。

证明。不失一般性，假设 $|\Sigma| = 2^\ell$ 对于某个 $\ell \in \mathbb{N}$成立；必要时添加虚拟符号。给定一个由 S 中的字符串构成的集合 Σ，$|S| > 1$我们采用与定理 22 相同的思路，通过将由每个 $w \in S$ 对应的符号构件组成的路径构件连接到水平基线 R上来构造多格骨牌，粒子将在此处聚集。图9(a)展示了字母表为5的符号 $\Sigma = \{0, \ldots\ldots, 7\}$构件的构造。在每个路径构件的起始处，我们添加图9(b)所示的构造，以确保初始配置中位于路径构件任意位置的所有粒子，都会聚集到该构件右下角的符号构件入口点。

从每个符号构件的入口点出发，顶部所有可能的出口都能在 $2 + 4\ell$ 次移动内到达。先执行一次 ul 后，会有 ℓ 次连续选择，每次都要在两种不同的四步移动序列之间选择（urul 与 drur，或 ulur 与 dlul）。直观而言，第 i 次选择决定了待模拟符号的第 i 位。若粒子位于出口，它就通过移动序列 urdr 前进到下一个符号构件的入口点；否则，它就通过相同的序列返回当前符号构件的入口点。最后执行一次 ul，将经过所有符号构件的粒子聚集到 R。因此，依据与

定理 22 中相同的论证，当且仅当存在长度为 k 的 S 超序列时，相应的简单多连方中存在长度为 $10 + k \cdot (2 + 4\ell)$ 的聚集序列。

根据构造，该多格骨牌的任何聚集序列都对应于 S 的一个超序列。因此，简单多连方中最短聚集序列问题的任何 c 近似解，都能给出最短公共超序列问题的一个 $\Theta(c)$ 近似解。由于除非 P = NP，否则最短公共超序列问题无法在任何常数因子范围内近似，[43]，简单多连方中的最短聚集序列问题也具有同样的性质。◀

6 简单多格骨牌中的子集聚集

与此前针对完全倾斜模型的归约类似，[7, 9]，我们在推论 19 中证明子集聚集问题为 PSPACE 困难时，需要带孔的多格骨牌。通过从计数自动机的交集非空性问题归约，我们可以为简单多连方保留一个较弱的困难性结果。计数自动机是指在一元字母表 计数自动机上运行的自动机，即字母表为 $\{0\}$ 的自动机：给定一族 $A_i = (Q_i, \{0\}\ \delta_i, q_i, F_i)$ 计数自动机，判断 $\bigcap_i L(A_i) \neq \varnothing$，也就是说，这些自动机是否接受一个公共字符串。该变体的 NP 困难性可追溯至 Stockmeyer 和 Meyer 的开创性工作 [71]。Morawietz、Rehs 和 Weller [58] 给出了一项较新且独立的证明，并强调即使自动机的底层图为环，该变体仍然是 NP 困难的。仔细检查证明可知，我们还可以假设所有环的长度均为大于 1 的奇数，因为这些长度是由大素数相乘得到的。最后，我们可以假设每个自动机至少有一个非接受状态（否则该自动机将接受所有字符串）。下文提到计数自动机时，均默认包含这些限制。

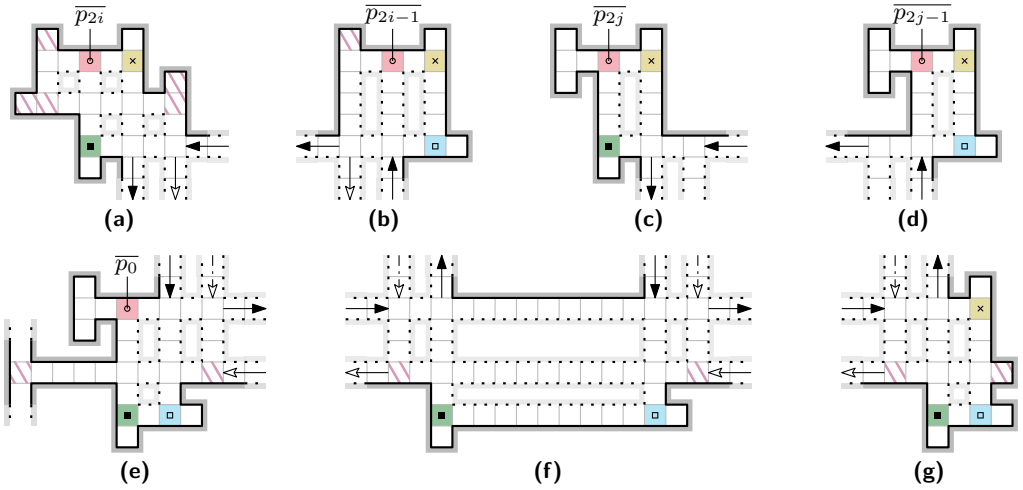

图 10 从计数自动机交集归约中使用的构件。用颜色和符号标记的像素表示状态所对应像素之间的循环 rdlu，该循环通过黑色箭头在构件之间延续。带描边的铺砖图案突出显示了通过白色箭头可沿安全路径到达目标区域的像素。点状区域表示可选孔洞，它们会将简单多连方变成迷宫。**(a)** 索引为偶数的接受状态。**(b)** 索引为奇数的接受状态。**(c)** 索引为偶数的拒绝状态。**(d)** 索引为奇数的拒绝状态。**(e)** 起始构件，包括 p_0 以及通往左侧目标区域的通道。**(f)** 桥接构件。**(g)** 连接 p_0 与 p_1的末端构件。

给定一族 $A_i = (Q_i, \{0\}\ \delta_i,\ q_i,\ F_i)$、$1 \le i \le k$ 个计数自动机，我们按如下方式构造一个简单多连方 $P(A_1, \ldots, A_k)$以及一个初始配置。

考虑一个 A_i 带有 $|Q_i| = 2m + 1$、针对某个 $m \ge 1$的自动机。为其状态编号$p_0, \ldots, p_{2m}$，使得 $p_0 \notin F_i$且对所有 $0 \le j < |Q_i|$均有$p_j \to p_{(j+1) \bmod |Q_i|}$。放置一个起始

构件，其中包含一个代表 $\overline{p_0}$的像素 p_0，其后水平方向依次排列 $m-1$ 桥接构件和一个最终的末端构件；见图 10(e)–10(g)。在部分构造上方，从右向左放置 $2m$ 构件，用于表示剩余状态 $p_j \in \{p_1、\ldots\ldots、p_{2m}\}$，具体取决于两个因素： j 的奇偶性以及 p_j 是否被接受。四种可能组合对应的构件如图 10(a)–10(d)所示，每个构件都包含一个代表像素 p_j。

用于 A_i 的部分构造垂直堆叠，并连接到左侧的 目标区域；该区域只是一个末端为度为 1 的像素的列线段。对于集合 $S \subseteq \bigcup_i Q_i$，我们将 $S = \{q : q \in S\}$ 定义为 S 中各状态对应的代表像素集合。初始配置为 $C_0 = \bigcup_i \{q_i\}$，即初始状态对应的代表像素。归约的基本思路是用移动序列 rdlu 表示状态之间的转移，该序列将粒子从一个代表像素移动到另一个代表像素。从配置 $C \subseteq \bigcup_i Q_i$, $|C| \geq 2$ 出发、以 r 开始的最短聚集序列不会偏离此前缀，因为其他选择都会导向死胡同，也就是度为 1 的像素。另一方面，先向左移动、再垂直移动，会将所有位于非接受状态代表像素上的粒子移入一个无法逃离的列线段；而位于接受状态代表像素上的粒子则会移至能够确保通往目标区域的路径的像素。图 11 展示了一个规模虽小但完整的构造示例，其中包含两个计数自动机。

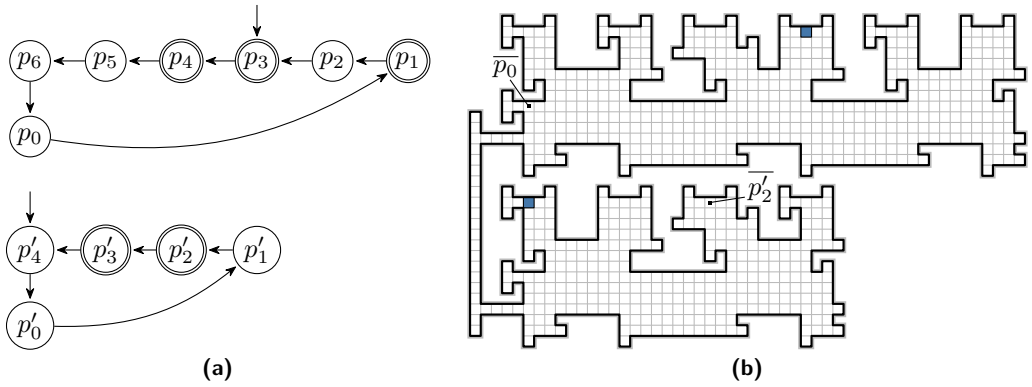

图 11 由计数自动机交集归约得到的子集聚集实例。**(a)** 两个计数自动机， A_1, A_2；二者都接受长度为 8 的字符串。**(b)** 简单多连方 $P(A_1, A_2)$；$(\text{rdlu})^8$ ldrdld 是其初始配置 C_0 的一个聚集序列。

▶ **引理 27.** 设 $A_i = (Q_i, \{0\}, \delta_i, q_i, F_i)$、 $1 \leq i \leq k$ 是一族计数自动机，且 $\ell \geq 0$。那么，$0^\ell \in \bigcap_i L(A_i)$ 当且仅当 $C_0 \cdot (\text{RDLU})^\ell \subseteq \bigcup_i \overline{F_i}$ 属于 $P(A_1, \ldots, A_k)$。

证明。 注意，对于每个 $p_j \in Q_i$ 和 $\ell \geq 0$， $p_j \cdot (\text{RDLU})^\ell = \overline{p_{(j+\ell) \bmod |Q_i|}}$ 根据构造成立。因此， $q_i \cdot 0^\ell \in F_i$ 当且仅当 $q_i \cdot (\text{RDLU})^\ell \in \overline{F_i}$ ◀

我们归约的高层思路是，公共字符串 $0^\ell \in \bigcap_i L(A_i)$ 会为 C_0 in $P(A_1, \ldots, A_k)$ 导出一个聚集序列 $(\text{rdlu})^\ell$ ldrdld。反过来，我们论证：如果 C_0 存在任何聚集序列，那么它必定会先将所有粒子移动到接受状态的代表位置，这可以通过形如 $(\text{rdlu})^{\ell'}$ 的（更短）序列实现，而该序列对应于这些自动机的公共字符串 $0^{\ell'}$ 。

▶**定理 28**。子集聚集在简单多格骨牌中是NP难问题。

证明。 给定一族 $A_1、\ldots\ldots、A_k$ 计数自动机，我们按照上述描述构造 $P(A_1、\ldots\ldots、A_k)$，其初始配置为 C_0 。所有构件的规模都是常数，我们使用 $\mathcal{O}(\sum_i |Q_i|)$

个构件，因此该归约可在多项式时间内完成。现在证明， A_i 接受某个公共字符串，当且仅当存在一个针对 C_0 的聚集序列。由此可得，该类自动机的交集非空性是 NP 困难的 [40, 58, 71]。

首先，令 $0^\ell \in \bigcap_i L(A_i)$。于是，根据引理 27，对每个 $p \in C_0$，都有 $p \cdot (\mathrm{rdlu})^\ell \in \bigcup_i F_i$。根据构造， $|\bigcup_i F_i \cdot \mathrm{ldrdld}| = 1$，因为所有粒子都聚集在目标区域的底部。因此，$(\mathrm{rdlu})^\ell$ ldrdld 是 C_0 的一个聚集序列。

反过来，假设存在一个适用于 C_0 的聚集序列 $w \in \mathbb{D}^*$。不失一般性，假设 w 在水平移动和垂直移动之间交替。取 $i \le k$，考虑最初放置在 q_i 的粒子，并令 w' 为 w 的最长前缀，使得 $q_i \cdot w' \in Q_i$。处于 Q_i 中的状态时使用 lu 或 ld，不会让粒子重新进入 Q_i，因此在 w' 期间没有发生这种情况。另一方面，这是脱离环的唯一方法，并且所有粒子在各自的环上移动时都会同步移动。因此，去除进入死胡同的多余绕行后， w' 可以转换为等价的 $w'' \in \{\mathrm{rdlu}\}^*$，记作 $(\mathrm{rdlu})^{\ell'}$。于是， $C_0 \cdot w'' \subseteq \bigcup_i Q_i$，接下来的移动要么是 lu，要么是 ld。如果 $C_0 \cdot w'' \not\subseteq \bigcup_i F_i$，那么某个粒子就会被困住，这与 w 是一个聚集序列的假设矛盾。因此，根据引理 27， $0^{\ell'} \in \bigcap_i L(A_i)$。◀

▶**推论 29.** 存在无穷多个简单多格骨牌 P 具有可聚集的配置 C，使得 $\mathrm{sgs}(C) \in 2^{\Omega(\sqrt{n \log n})}$，其中 n 是 P 的角数。

证明。我们采用 Lee 和 Yannakakis [53] 先前在验证有限状态机时使用过的一个想法。选取 k 个互不相同的素数， $\rho_1, \dots, \rho_k$，并按如下方式构造 k 个计数自动机。对每个 $1 \le i \le k$，令 $Q_i = \{p_0^i, \dots, p_{\rho_i - 1}^i\}$，$\delta_i(0)(p_j^i) = p_{(j+1)}^i$ 模 ρ_i，对所有 $0 \le j < \rho_i$ 成立，并令 $A_i = (Q_i, \{0\}\ \delta_i, p_0^i, \{p_{\rho_i - 1}^i\})$。根据中国剩余定理，满足条件 0^ℓ 且被所有 A_i 接受的最小数 ℓ 为 $\ell = \prod_{i=1}^k \rho_i - 1$。按前述方法构造 $P(A_1, \dots, A_k)$ 和 C_0。于是， C_0 是可聚集的，且 $\mathrm{sgs}(C_0) > 4\ell = 4\prod_{i=1}^k \rho_i - 1$（否则引理 27 将给出一个更小的 ℓ）。对每个 $\lambda \ge 7387$，都可以选取一个素数集合 S，使得 $\sum_{\rho \in S} \rho \le \lambda$ 且 $\prod_{\rho \in S} \rho \ge e^{\sqrt{\lambda \log \lambda}}$，其计算结果见 Deléglise 和 Nicolas [30]。选取这样的集合（必要时去掉偶素数 2），即可得到 $\mathrm{sgs}(C_0) \ge 2e^{\sqrt{\lambda \log \lambda}}$。由于 $n \in O(\lambda)$，这意味着 $\mathrm{sgs}(C_0) \in 2^{\Omega(\sqrt{n \log n})}$。◀

注意，图 10 中标示的可选孔洞可以将简单多连通方格图形族转变为迷宫族。此外，推论 29 还蕴含 $2^{\Omega(\sqrt{N \log N})}$ 的下界，因为该构造保证了 $n \in \Theta(N)$。这为迷宫给出了比可由第 4 节中的构造导出的 $2^{\Omega(\sqrt{N})}$ 界稍强的结果。

来自计数自动机交集的归约，为在另一种受限设定中证明 ParaGathering 关于参数 k 是 W[1]-难的，提供了推论 23 的一种替代途径。

▶**推论30.** PARAGATHERING 在以初始配置的规模 k 为参数时是W[1]-难的，即使给定的多格骨牌 P 是简单的或是迷宫，且聚集序列长度的限制为 $\ell = \infty$。

证明。 注意到，定理 28 中的归约将自动机的数目映射为粒子的数目 k，即它是一项固定参数可处理归约，归约来源为 交集非空性 （计数自动机的，以自动机数目为参数），该问题是 W[1]-难的 [58]。◀

7 对相关问题的推论

我们的技术导出了若干本身就很有意义的推论，其中包括一种在单步模型中进行聚集的新方法，以及相关问题的困难性结果。

7.1 单步模型

到目前为止，我们关注的是完全倾斜模型，但我们的工作对单步模型也有启示。首先，我们补上单步模型中向左移动的形式化定义；其他方向与此类似。

单步（阻挡）： $p \in \delta^{\times}$ 单步模型（L）（C）当且仅当 p 以及 p 所在行段中位于其左侧的所有像素均已被占据时 C，或者 $p+$（1，0）$^{\mathrm{T}} \in C$。**单步（合并）：** $p \in \delta^{\cup}_{\mathrm{S1}}$（L）（$C$）当且仅当 $p \in C$ 且 p 是其所在行段中最左侧的像素时，或者 $p+$（1，0）$^{\mathrm{T}} \in C$。

与完全倾斜模型一样，单步模型将单点配置映射为单点配置，从而得到一个函数 δ^{1}_{S1}：$\mathbb{D} \to (V \to V)$。单步模型中的聚集序列恰好对应于自动机（V，$\mathbb{D}$，δ^{1}_{S1}）中的同步词。要采用这一方法，还需要说明如何根据给定多格骨牌 P 的表示计算δ^{1}_{S1}。这可以通过修改对偶图 G_P 轻松实现：将每条边 $\{p,\ q\} \in E$ 替换为两条有向且带标签的边 $p \xrightarrow{w} q$和 $q \xrightarrow{w} p$，其中 w $w \in \mathbb{D}$ 是对应于 p 和 q相对位置关系的方向，例如，当 $q = p+$（1, 0）^{T}时为 $w = \mathrm{r}$ 和 $w = \mathrm{l}$。最后，为边界上的像素添加自环，例如，当 $\{p-$（1, 0）$^{\mathrm{T}},\ p\} \notin E$时添加 $p \mathrm{l}\to p$。观察自动机（V，$\mathbb{D}$，δ^{1}_{S1}）的组合结构，并应用自动机理论中的已知结果，我们可以立即得出单步模型中聚集序列长度的新上界。

▶**推论 31**。对于每个具有 N 个像素的多格骨牌 P，在单步模型中都有 $\mathrm{sgs}(P) \in O(N^2)$。

证明。注意，由 G_P 构造的、作为该自动机基础的标号有向图是欧拉有向图，因为每个顶点的入度和出度都是 4。Kari [45] 证明了，底层为欧拉有向图的自动机 $(Q,\ \Sigma,\ \delta)$ 如果是同步的，就具有长度至多为 $(|Q|-2)(|Q|-1)+1$ 的同步词。由于 [55] 表明所有多格骨牌在单步模型中都有聚集序列，因此结论成立。◀

鉴于已知的一般多联骨牌的界 $\mathcal{O}(n_c D^2)$ 以及简单多格骨牌的界 $\mathcal{O}(n_c D)$，推论 31 并不特别令人兴奋；其中 D 是 P 的直径，这一结果通过 [13]，中的几何论证得到，尽管对于具有较大直径 $D \in \Theta(N)$ 的非简单多格骨牌而言，它可能会导出更短的聚集序列。不过，这再次表明，将自动机理论中的结果迁移到倾斜问题中，能够带来新的洞见。如果能将 [45] 中的代数技巧与 [13] 中的几何思想结合起来，以取得更好的结果，那将会很有意思。

7.2 受限环境中的已确立问题

如引言中所述，简单多连方中的占用和形状重构的复杂度仍是一个开放问题。我们针对简单多连方中子集聚集问题的方法表明，这两个问题至少都是 NP 困难的。

▶**推论 32**。占用 和形状重构 在完全倾斜模型的阻挡变体中是NP困难的，即使是在简单多连方或迷宫中也是如此。

证明。取定理 28 中用于 k 自动机的构造，并将目标区域向上延伸，使其上方有 k 个像素高。图 11(b) 展示了一个 $k = 2$ 的示例。$\delta^{\times}$ 与 $\delta^{\cup}$ 之间的区别只在目标区域内才有意义，因为只有这条线段可能同时包含多个粒子。现在，目标区域中自顶向下第 k个像素可以被占据——并且该配置

由目标区域中最上方的 k 个像素组成的配置可以到达，当且仅当这些自动机接受同一个公共字符串。◀

推论 32 表明，在简单多格骨牌中，占用和形状重构问题是 NP 困难的，这引出了一个问题：如果进一步限制几何形状，这些问题是否会变得更容易？事实上，在矩形中，这些问题可以（平凡地）在多项式时间内求解。

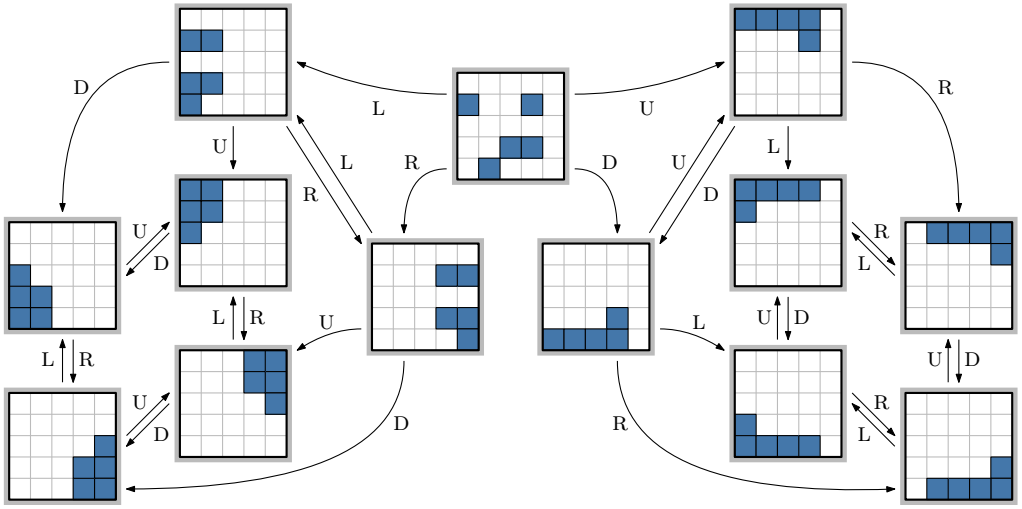

图 12 矩形内从一个初始配置可达的所有配置及其连接移动的穷举概览。为避免图面杂乱，省略了自环。

▶**观察 33.** 占用 和形状重构 在边界为矩形的多格骨牌中，在完全倾斜模型下可于多项式时间内求解。

证明。 经过两次垂直移动后，矩形内的配置完全由两项内容确定：一个数字序列，用于描述非空列中的粒子数量；以及粒子聚集的角落。从这样的状态出发，只有四种配置可达，因此需要考虑的配置总数至多为 13 种，图 12 给出了一个示例。因此，占用 和 形状重构在矩形中的问题可以通过穷举有限数量的配置来求解，并且每种配置都可以在多项式时间内检查。◀

观察 33 中的论证参与了对“不合并的 2048” [3],的分析，它本质上是矩形中带标签粒子的完全倾斜模型。带标签配置展现出更丰富多样的可达配置，其中在两次垂直移动后到达的“典范”配置对应于一个置换群的元素 [3]。

与 ParaGathering 一样，当以移动序列的最大长度作为参数时，占用和形状重构平凡地是固定参数可解的。虽然可以设想，这些问题的基于 SAT 的归约（如来自 [9],的归约）经过一定努力后可被改造以适用于简单多格骨牌，但我们通过计数自动机的方法具有如下优势：在以初始配置的大小作为参数时，能够立即给出关于参数化复杂度的洞见。

▶**推论 34。** 占用 和 形状重构 在 完全倾斜模型 的W[1]-困难阻挡变体中，即使对于简单多连方或迷宫，按初始配置的大小 k 参数化时也是如此。

证明。 该结论可直接由推论30和32的证明得出。 ◀

表 1 形状重构和占用的复杂度结果概览。

		FT		S1	
问题	几何	复杂度	参考文献	复杂度	参考文献
形状重构	一般	PSPACE 完全	[7, 推论 5.2]	PSPACE 完全	[24, 定理 2]
	简单	NP 困难	**推论 32**		
		W[1] 困难，依据 k	**推论 34**		
	平方	P	**观察 33**	NP 困难	[2, 定理 3]
占用	一般	PSPACE 完全	[7,定理 5.1]	P	[23,定理 3.1]
	简单	NP 困难	**推论 32**		
		W[1]-困难（依据 k）	**推论 34**		
	平方	P	**观察 33**		

表 1 概述了形状重构和占用方面新的及此前已知的复杂度结果。完全倾斜模型与单步模型之间的差异颇为有趣。到目前为止，在完全倾斜模型中，占用看起来并不比形状重构更容易：二者都表现出随环境的几何复杂度变化的计算复杂度，从可在多项式时间内求解到 PSPACE完全。另一方面，在单步模型中，占用在所有环境下都很容易（除非考虑更复杂的粒子形状 [24]），而形状重构即使在极度受限的环境中仍然很难。

7.3 确定性倾斜循环广义问题的困难性

在近期的论文 [6], 中，作者研究了确定性 倾斜序列下各种倾斜问题的复杂度，即重复执行指定的序列 $w \in \mathbb{D}^*$。他们证明，若除了单位大小粒子外还允许出现一个多米诺骨牌，则占用和形状重构在确定性倾斜序列下仍为 PSPACE 完全问题；而仅使用 1×1 粒子时的复杂度则留作开放问题。虽然我们尚未解决这个确切问题，但我们的工作表明一个自然推广问题具有困难性。

▶**问题 35.** 倾斜覆盖。
输入： 一个多格骨牌 P、一个初始配置 C以及一个 $S \subseteq V$目标像素集合。**目标：** 判断是否存在一个序列 $w \in \mathbb{D}^*$，使得 $C \cdot w \supseteq S$。

注意，占用问题是 $|S| = 1$条件下的倾斜覆盖问题，而形状重构问题是 $|S| = |C|$条件下的倾斜覆盖问题。

▶**推论 36.** 倾斜覆盖 在NP意义下是困难的，这对完全倾斜模型 和单步模型均成立，即使将问题限制在简单多连方或迷宫中的确定性倾斜序列上也是如此。

证明。 回顾第 6 节中给出的 计数自动机的交集非空性 归约：该归约在多项式时间内构造一个简单多连方（或迷宫） $P(A_1, \ldots, A_k)$和一个配置C_0，由给定的计数自动机 $A_1, \ldots, A_k$构成。考虑确定性倾斜循环 $w = \text{RDLU}$。所有重复执行 $w^\ell \in \{\text{RDLU}\}^*$ 都会使粒子留在多连方的不同区域中——它们不可能最终进入同一条线段。这使我们能够运用 [24]首创并在 [33]进一步发展的思路：单个气泡（空闲像素）在 完全倾斜模型 和 单步模型中的行为相同，并且像 完全倾斜模型中的粒子一样尽可能移动，只是方向相反

。我们选择 $C = V \setminus C_0$ 作为初始配置，选择 $m = \text{lurd}$ 作为确定性倾斜循环，并选择 $S = V \setminus \bigcup_i F_i$ 作为目标像素（即，S 包含除接受状态代表像素以外的所有像素）。因此，对于所有 $\ell \geq 0$，在完全倾斜模型和单步模型中，$C \cdot m^\ell \supseteq S$ 当且仅当 $C_0 \cdot w^\ell \subseteq \bigcup_i F_i$。根据引理 27，这意味着 S 可被覆盖，当且仅当 A_i 接受一个公共字符串；判定这一问题是 NP 困难的 [40, 58, 71]。◀

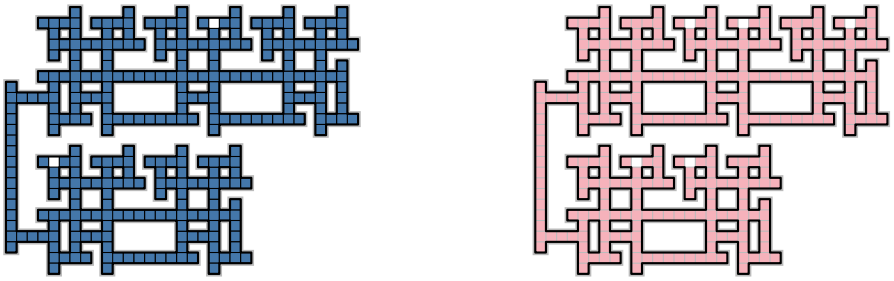

图 13 由图 11(a) 中的计数自动机构造的倾斜覆盖实例。**(a)** 初始配置 C。空闲像素对应于初始状态。**(b)** 必须被覆盖的像素集合 S。对应于接受状态的像素是唯一不必被覆盖的像素。

事实上，与第 6 节中的多格骨牌相比，这里的多格骨牌可以进一步简化，这让人联想到定理 11 中的构造；图 13 展示了一个示例迷宫，它是由图 11(a) 中的计数自动机得到的倾斜覆盖实例。

8 结论

我们研究了若干与完全倾斜模式下的聚集序列相关的问题 1.
表 2 概述了我们的结果以及单步模型中的既有结果 .

第 6 节中的归约可推广到完全倾斜模型阻挡变体中的相关问题：将给定的一组粒子收集 [55] 到一个连通的 配置中。我们的困难性结果也适用于要求将粒子聚集到指定位置的情形，因为如果可行，只需检查所有可能的位置即可。对于完全聚集，仍然可以在多项式时间内找到一个聚集序列 $w \in \mathbb{D}^*$，使得对于给定像素 p，$V \xrightarrow{w} \{p\}$ 成立；也可以判定是否不存在这样的序列：假设存在两个不同的像素 q_1, q_2，使得对于 $w_1, w_2 \in \mathbb{D}^*$，$V \xrightarrow{w_i} \{q_i\}$ 成立。那么，$q_1\} \xrightarrow{w_2} \{q_2\}$ 且 $q_2\} \xrightarrow{w_1} \{q_1\}$，也就是说，所有可以聚集粒子的像素彼此可达。因此，可以运用第 3 节中的技术，找到一个目标像素未指定的聚集序列 q，以此检查是否能将所有粒子聚集到给定像素 p；然后再检查 p 是否可从 q 到达。如果任一步骤失败，就不可能在 p 聚集。

值得再次强调的是，我们的大多数算法结果关于给定多格骨牌的角数 n 为多项式时间，而我们的困难性归约会生成含有 N 个像素的对偶图；也就是说，即使空间采用一元表示，相应问题仍然是困难的。

仍有许多未解问题。由于一般多联骨牌中的 sgs(P) 与 Černý 猜想有关，要缩小其最坏情况界 $\Omega(n^2)$ 和 $\mathcal{O}(n_c n^2)$ 之间的差距似乎非常困难，但在多联骨牌的特殊类中缩小差距或许可行。对于简单多连方，证明上界 sgs(P) $\in \mathcal{O}(n^2)$ 是否更容易?

我们证明了子集聚集、占用和形状重构在简单多格骨牌中的 NP 困难性，但并未明确确定它们的复杂度。这些问题能否证明在简单多格骨牌中仍然是 PSPACE 完全的?

表 2 完全聚集（FG）、最短聚集序列（SGS）、子集聚集（SG）和 ParaGathering（PG）问题在完全倾斜模型（FT）和单步模型（S1）中的复杂度结果概览，除非 P =NP。

		FT		S1	
问题	几何	复杂度	参考文献	复杂度	参考文献
FG	一般	$\mathcal{O}(n_c n^2)$	**定理 8**	$\mathcal{O}(n_c D^2)$	[13,推论 10]
		$\mathcal{O}(n^2)$ 猜想	**猜想 12**	$\mathcal{O}(N^2)$	**推论 31**
	简单	$\Omega(n^2)$	**定理 11**	$\mathcal{O}(n_c D)$	[13, 推论 9]
SGS	一般	不存在 $n^{1-\varepsilon}$-近似。	**推论 20**	NP 困难	[13,定理 1]
	Maze	无 $N^{1/2-\varepsilon}$-近似。	**推论 20**		
	简单	无$\mathcal{O}(1)$-近似。	**定理 26**		
	简单迷宫	NP 困难，4-近似。	**定理 22、25**		
SG	一般	PSPACE 完全。	**推论 19**（以及 [7]）	yes	[55, 第 II.A 节]
	Maze	PSPACE 完全。	**推论 19**		
	简单	NP 困难	**定理 28**		
PG	一般	通过 ℓ 实现 FPT	**第2节**	通过 ℓ 实现 FPT	平凡
	简单迷宫	W[1]-困难，由 k	**推论23**		

此外，我们在推论 23 和 30 中证明，对于两个不同的受限情形，参数为 k W[1] 时，ParaGathering 是困难的。其一般情形很可能更加困难，或许不属于 W层级。可供归约借鉴的起点包括 Wareham [78],研究的交集非空性有界变体，以及 Fernau 和 Bruchertseifer [34] 关于同步自动机参数化复杂度的研究。不过，就我们的目的而言，W[1] 困难性已足以有力表明该问题不是固定参数可处理的。

最后，在简单迷宫中，最短聚集序列可以在常数因子范围内近似；而在一般的简单多格骨牌中，该问题是 NP 困难的。子集聚集在简单迷宫中是否也更容易？我们猜想，在这种情况下它可以在多项式时间内求解。

参考文献

1 Ahmed Abdelkader、Aditya Acharya 和 Philip Dasler。无新方块的 2048 仍然很难。载于 *Fun with Algorithms (FUN)*，第 1:1–1:14 页，2016 年。 doi:10.4230/LIPICS.FUN.2016.1。2 Hugo A. Akitaya、Greg Aloupis、Maarten Löffler 和 Anika Rounds。垃圾压缩。载于 欧洲计算几何研讨会 *(EuroCG)*，第 107–110 页，2016 年。网址：https://www.eurocg2016.usi.ch/sites/default/files/paper_77.pdf。3 Hugo A. Akitaya、Erik D. Demaine、Jason S. Ku、Jayson Lynch 和 Csaba D. Tóth。不合并的 2048。载于加拿大计算几何会议 *(CCCG)*，第 285–291 页，2020 年。网址：http://vga.usask.ca/cccg2020/papers/2048%20Without%20Merging.pdf。4 Hugo A. Akitaya、Maarten Löffler 和 Giovanni Viglietta。通过扫描线推动方块。载于 *Fun with Algorithms (FUN)*，第 1:1–1:21 页，2022 年。 doi:10.4230/LIPIcs.FUN.2022.1。5 Hugo A. Akitaya、Maarten Löffler 和 Giovanni Viglietta。通过扫描线推动方块。几何与拓扑中的计算，2(1):6:1–6:28，2023 年。本文的会议版本曾发表于 FUN 2022 [4]。 doi:10.57717/cgt.v2i1.31。6 Alberto Avila-Jimenez、David Barreda、Sarah-Laurie Evans、Austin Luchsinger、Aiden Massie、Robert Schweller、Evan Tomai 和 Tim Wylie。利用确定性全局力，通过可滑动方格进行通用计算。载于 理论计算机科学创新会议 *(ITCS)*，第 14:1–14:25 页，2026 年。doi:10.4230/LIPICS.ITCS.2026.14。

26 倾斜自动机：通过统一外部控制聚集粒子

7 Jose Balanza-Martinez、Timothy Gomez、David Caballero、Austin Luchsinger、Angel A. Cantu、Rene Reyes、Mauricio Flores、Robert T. Schweller 和 Tim Wylie。在均匀外力作用下，可滑动多格骨牌的层次化形状构造与复杂度。载于离散算法研讨会 (SODA)，第 2625–2641 页，2020 年。 doi:10.1137/1.9781611975994.160。 8 Jose Balanza-Martinez、Austin Luchsinger、David Caballero、Rene Reyes、Angel A. Cantu、Robert T. Schweller、Luis Angel Garcia 和 Tim Wylie。Full tilt：利用均匀外力为一般形状构建通用构造器。载于离散算法研讨会 (SODA)，第 2689–2708 页，2019 年。 doi:10.1137/1.9781611975482.167。 9 Aaron T. Becker、Erik D. Demaine、Sándor P. Fekete、Golnaz Habibi 和 James McLurkin。利用有限的全局控制重新配置大规模粒子群。载于传感器系统、无线网络与分布式机器人算法和实验研讨会 (ALGOSENSORS)，第 51–66 页，2013 年。 doi:10.1007/978-3-642-45346-5_5。 10 Aaron T. Becker、Erik D. Demaine、Sándor P. Fekete、Jarrett Lonsford 和 Rose Morris-Wright。粒子计算：复杂度、算法与逻辑。Natural Computing，18(1):181–201，2019 年。本文相关的会议版本曾发表于 ALGOSENSORS 2013 [9],ICRA 2014 [11], 和 ICRA 2015 [69]。 doi:10.1007/S11047-017-9666-6。 11 Aaron T. Becker、Erik D. Demaine、Sándor P. Fekete 和 James McLurkin。粒子计算：设计世界，仅通过全局信号控制机器人群体。载于国际机器人与自动化会议 (ICRA)，第 6751–6756 页，2014 年。doi:10.1109/ICRA.2014.6907856。 12 Aaron T. Becker、Erik D. Demaine、Sándor P. Fekete、Hamed Mohtasham Shad 和 Rose Morris-Wright。Tilt：视频——设计世界，仅通过全局信号控制机器人群体。载于国际计算几何研讨会 (SoCG)，第 16–18 页，2015 年。doi:10.4230/LIPICS.SOCG.2015.16。 13 Aaron T. Becker、Sándor P. Fekete、Li Huang、Phillip Keldenich、Linda Kleist、Dominik Krupke、Christian Rieck 和 Arne Schmidt。靶向药物递送：利用均匀外力收集粒子群的算法方法。载于国际机器人与自动化会议 (ICRA)，第 2508–2514 页，2020 年。 doi:10.1109/ICRA40945.2020.9196551。 14 Aaron T. Becker、Sándor P. Fekete、Phillip Keldenich、Dominik Krupke、Christian Rieck、Christian Scheffer 和 Arne Schmidt。倾斜装配：利用均匀外力制造物体的微型工厂算法。载于国际算法与计算研讨会 (ISAAC)，第 11:1–11:13 页，2017 年。 doi:10.4230/LIPIcs.ISAAC.2017.11。 15 Aaron T. Becker 、 Sándor P. Fekete 、 Phillip Keldenich 、 Dominik Krupke 、 Christian Rieck、Christian Scheffer 和 Arne Schmidt。倾斜装配：利用均匀外力制造物体的微型工厂算法。Algorithmica，82(2):165–187，2020 年。本文的相关会议版本曾发表于 ISAAC 2017 [14]。 doi:10.1007/S00453-018-0483-9。 16 Aaron T. Becker、Golnaz Habibi、Justin Werfel、Michael Rubenstein 和 James McLurkin。大规模均匀操控：利用共同输入信号控制大量简单机器人。载于智能机器人与系统国际会议 (IROS)，第 520–527 页，2013 年。 doi:10.1109/IROS.2013.6696401。 17 Mikhail V. Berlinkov。近似计算同步词的最小长度是困难的。载于俄罗斯国际计算机科学研讨会 (CSR)，第 37–47 页，2010 年。 doi:10.1007/978-3-642-13182-0_4。 18 Mikhail V. Berlinkov。近似计算同步词的最小长度是困难的。Theory of Computing Systems，54(2):211–223，2014 年。本文的会议版本曾发表于 CSR 2010 [17]。 doi:10.1007/S00224-013-9511-Y。 19 Mikhail V. Berlinkov。关于同步自动机的两个算法问题（短文）。载于语言理论进展 (DLT)，第 61–67 页，2014 年。 doi:10.1007/978-3-319-09698-8 6。_

20 Patrick Blumenberg、Arne Schmidt 和 Aaron T. Becker。通过全局控制计算组装粒子的运动规划。载于智能机器人与系统国际会议（IROS），第 7296–7302 页，2023。doi:10.1109/IROS55552.2023.10341556。 21 Prosenjit Bose 和 Thomas C. Shermer。通过排斥实现聚集。载于斯堪的纳维亚算法理论研讨会及专题讨论会（SWAT），第 13:1–13:12 页，2018。doi:10.4230/LIPIcs.SWAT.2018.13。 22 Prosenjit Bose 和 Thomas C. Shermer。通过排斥实现聚集。《计算几何》，90:101627，2020。本文的会议版本发表于 SWAT 2018 [21]。 doi:10.1016/J.COMGEO.2020.101627。 23 David Caballero、Angel A. Cantu、Timothy Gomez、Austin Luchsinger、Robert T. Schweller 和 Tim Wylie。有限方向下采用统一外部控制的机器人群重构问题的困难性。《信息处理学报》，28:782–790，2020。 doi:10.2197/IPSJJIP.28.782。 24 David Caballero、Angel A. Cantu、Timothy Gomez、Austin Luchsinger、Robert T. Schweller 和 Tim Wylie。采用统一控制信号的机器人群中，重新定位单元是 PSPACE 困难的。载于加拿大计算几何会议（CCCG），第 49–55 页，2020。网址：https://vga.usask.ca/cccg2020/papers/Relocating%20Units%20in%20Robot%20Swarms%20with%20Uniform%20Control%20Signals.pdf。 25 David Caballero、Angel A. Cantu、Timothy Gomez、Austin Luchsinger、Robert T. Schweller 和 Tim Wylie。采用统一控制信号的机器人群快速重构。《Natural Computing》，20(4):659–669，2021。doi:10.1007/S11047-021-09864-0。 26 David Caballero、Angel A. Cantu、Timothy Gomez、Austin Luchsinger、Robert T. Schweller 和 Tim Wylie。即使没有障碍物，仅用两个方向进行统一机器人重新定位也很困难。载于非常规计算与自然计算（UCNC），第 17–31 页，2023。doi:10.1007/978-3-031-34034-5_2。 27 David Caballero、Angel A. Cantu、Timothy Gomez、Austin Luchsinger、Robert T. Schweller 和 Tim Wylie。即使没有障碍物，仅用两个方向进行统一机器人重新定位也很困难。《Natural Computing》，24(1):3–16，2025。本文的会议版本发表于 UCNC 2023 [26]。 doi:10.1007/S11047-024-10007-4。 28 Ján Černý。关于有限自动机齐次实验的注记。Matematicko-fyzikálny časopis，14(3):208–216，1964。网址：https://dml.cz/dmlcz/126647。 29 Ján Černý。关于有限自动机齐次实验的注记。《自动机、语言与组合学期刊》，24(2–4):123–132，2019。原文于 1964 年以斯洛伐克语发表 [28]。英文译者：Markus Holzer 和 Bianca Truthe。 doi:10.25596/jalc-2019-123。 30 Marc Deléglise 和 Jean-Louis Nicolas。关于有界和下的最大素数乘积。《整数数列杂志》，18(2):15.2.8，2015。网址： https://cs.uwaterloo.ca/journals/JIS/VOL18/Deleglise/deleglise3.html。 31 Birgit Engels 和 Tom Kamphans。Randolphs机器人游戏是 NP 困难的！《离散数学电子札记》，25:49–53，2006。 doi:10.1016/J.ENDM.2006.06.062。 32 David Eppstein。单调自动机的复位序列。《SIAM计算杂志》，19(3):500–510，1990。 doi:10.1137/0219033。 33 Sándor P. Fekete、Peter Kramer、Jan-Marc Reinhardt、Christian Rieck 和 Christian Scheffer。多种全局控制模型下多格骨牌的可排空性与可填充性。载于自动机、语言与编程国际研讨会（ICALP），第 74:1–74:19 页，2025。doi:10.4230/LIPICS.ICALP.2025.74。 34 Henning Fernau 和 Jens Bruchertseifer。同步词与幺半群分解，能否由此产生一种新的参数化复杂性类？《计算机科学中的数学结构》，32(2):189–215，2022。 doi:10.1017/S0960129522000184。 35 Jörg Flum 和 Martin Grohe。《参数化复杂性理论》。理论计算机科学丛书：欧洲理论计算机科学协会系列。施普林格，2006。 doi:10.1007/3-540-29953-X。

28 倾斜自动机：通过统一外部控制聚集粒子

36 Paweł Gawrychowski 和 Damian Straszak。最短重置字的强不可近似性。载于计算机科学数学基础（MFCS），第 243–255 页，2015。doi:10.1007/978-3-662-48057-1_19。 37 Michael Gerbush 和 Brent Heeringa。最小复位序列的近似。载于自动机实现与应用会议（CIAA），第 154–162 页，2010。 doi:10.1007/978-3-642-18098-9 17。_38 Adam Hesterberg 和 Justin Kopinsky。Ricochet Robots 的参数化复杂度。《信息处理学报》，25:716–723，2017。 doi:10.2197/IPSJJIP.25.716。 39 Markus Holzer 和 Martin Kutrib。有限自动机的描述复杂度与计算复杂度。载于语言与自动机理论及应用（LATA），第 23–42 页，2009。 doi:10.1007/978-3-642-00982-2_3。 40 Markus Holzer 和 Martin Kutrib。有限自动机的描述复杂度与计算复杂度——综述。《信息与计算》，209(3):456–470，2011。本文的会议版本发表于 LATA 2009 [39]。 doi:10.1016/J.IC.2010.11.013。 41 Markus Holzer 和 Stefan Schwoon。在 ATOMIX 中组装分子是困难的。《理论计算机科学》，313(3):447–462，2004。 doi:10.1016/J.TCS.2002.11.002。 42 Tao Jiang 和 Ming Li。关于最短公共超序列和最长公共子序列的近似。载于自动机、语言与编程国际研讨会（ICALP），第 191–202 页，1994。 doi:10.1007/3-540-58201-0_68。 43 Tao Jiang 和 Ming Li。关于最短公共超序列和最长公共子序列的近似。《SIAM计算杂志》，24(5):1122–1139，1995。本文的会议版本发表于 ICALP 1994 [42]。 doi:10.1137/S009753979223842X。 44 Jarkko Kari。欧拉有向图上有限自动机的同步。载于计算机科学数学基础（MFCS），第 432–438 页，2001。 doi:10.1007/3-540-44683-4_38。 45 Jarkko Kari。欧拉有向图上有限自动机的同步。《理论计算机科学》，295:223–232，2003。本文的会议版本发表于 MFCS 2001 [44]。doi:10.1016/S0304-3975(02)00405-X。 46 Phillip Keldenich、Sheryl Manzoor、Li Huang、Dominik Krupke、Arne Schmidt、Sándor P. Fekete 和 Aaron T. Becker。用于对多格骨牌排序或分类的二维离散工作空间设计。载于智能机器人与系统国际会议（IROS），第 1–9 页，2018。 doi:10.1109/IROS.2018.8594150。 47 Jakob Keller、Christian Rieck、Christian Scheffer 和 Arne Schmidt。利用精确全局控制进行基于粒子的组装。载于算法与数据结构研讨会（WADS），第 513–527 页，2021。 doi:10.1007/978-3-030-83508-8_37。 48 Jakob Keller、Christian Rieck、Christian Scheffer 和 Arne Schmidt。利用精确全局控制进行基于粒子的组装。《Algorithmica》，84(10):2871–2897，2022。本文的会议版本发表于 WADS 2021 [47]。 doi:10.1007/S00453-022-00992-2。 49 Stefan Kiefer 和 Andrew Ryzhikov。在零一矩阵幺半群中高效计算矩阵的最小秩。载于计算机科学理论方面研讨会（STACS），第 61:1–61:22 页，2025。 doi:10.4230/LIPICS.STACS.2025.61。 50 Matthias Konitzny、Yitong Lu、Julien Leclerc、Sándor P. Fekete 和 Aaron T. Becker。利用强化学习和全局磁场聚集物理粒子。载于智能机器人与系统国际会议（IROS），第 10126–10132 页，2022。doi:10.1109/IROS47612.2022.9982256。 51 Dexter Kozen。自然证明系统的下界。载于计算机科学基础研讨会，第 254–266 页，1977。 doi:10.1109/SFCS.1977.16。 52 Fabian C. Landers、Lukas Hertle、Vitaly Pustovalov、Derick Sivakumaran、Cagatay M. Oral、Oliver Brinkmann、Kirstin Meiners、Pascal Theiler、Valentin Gantenbein、Andrea Veciana、Michael Mattmann、Silas Riss、Simone Gervasoni、Christophe Chautems、Hao Ye、Semih Sevim、Andreas D. Flouris、Josep Puigmartí-Luis、Tiago Sotto Mayor、Pedro Alves、Tessa Lühmann、Xiangzhong Chen、Nicole Ochsenbein、Ueli Moehrlen、Tilman Schubert、Zsolt Kulcsar、Philipp Gruber、Miriam Weisskopf、Quentin Boehler、Salvador Pané 和 Bradley J.

Nelson。面向靶向治疗的临床可用磁性微型机器人。《科学》，390(6774):710–715，2025年。 doi:10.1126/science.adx1708。53 David Lee 与 Mihalis Yannakakis。有限状态机测试：状态识别与验证。IEEE计算机汇刊，43(3):306–320，1994。本文的会议版本发表于 STOC 1991 [79]。 doi:10.1109/12.272431。54 Arun Mahadev、Dominik Krupke、Sándor P. Fekete 与 Aaron T. Becker。由统一输入控制的粒子群的测绘与覆盖。载于智能机器人与系统国际会议（IROS），第1097–1104页，2017。 doi:10.1109/IROS.2017.8202280。55 Arun V. Mahadev、Dominik Krupke、Jan-Marc Reinhardt、Sándor P. Fekete 与 Aaron T. Becker。利用共享的全局输入在网格环境中收集群体。载于自动化科学与工程国际会议（CASE），第1231–1236页，2016。 doi:10.1109/COASE.2016.7743547。56 Sheryl Manzoor、Samuel Sheckman、Jarrett Lonsford、Hoyeon Kim、Min Jun Kim 与 Aaron T. Becker。统一控制输入下多格骨牌的并行自组装。机器人与自动化快报，2(4):2040–2047，2017。 doi:10.1109/LRA.2017.2715402。57 Rachel A. Moan、Victor M. Baez、Aaron T. Becker 与 Jason M. O'Kane。弯曲环境中简单机器人的聚集与定位。载于国际机器人与自动化会议（ICRA），第165–171页，2020年。 doi:10.1109/ICRA40945.2020.9197198。58 Nils Morawietz、Carolin Rehs 与 Mathias Weller。时间警察的工作比你想象的更难。载于计算机科学数学基础（MFCS），第71:1–71:14页，2020年。doi:10.4230/LIPICS.MFCS.2020.71。59 Balas K. Natarajan。零件定向器自动化设计的算法方法。载于计算机科学基础研讨会，第132–142页，1986。 doi:10.1109/SFCS.1986.5。60 Jason M. O'Kane 与 Steven M. LaValle。有限感知下的定位。机器人学汇刊，23(4):704–716，2007。 doi:10.1109/TRO.2007.900636。61 Krzysztof Pietrzak。论固定字母表最短公共超序列与最长公共子序列问题的参数化复杂度。计算机与系统科学杂志，67(4):757–771，2003。 doi:10.1016/S0022-0000(03)00078-3。62 Kari-Jouko Räihä 与 Esko Ukkonen。二元字母表上的最短公共超序列问题是 NP 完全的。理论计算机科学，16:187–198，1981。 doi:10.1016/0304-3975(81)90075-X。63 Igor K. Rystsov。自动机理论中的多项式完全问题。信息处理快报，16(3):147–151，1983。 doi:10.1016/0020-0190(83)90067-4。64 Sven Sandberg。归位序列与同步序列。载于反应式系统的基于模型测试，第5–33页，2004。 doi:10.1007/11498490_2。65 Neil Sarnak 与 Robert E. Tarjan。使用持久搜索树进行平面点定位。ACM通讯，29(7):669–679，1986。 doi:10.1145/6138.6151。66 Walter J. Savitch。非确定性图灵机的确定性模拟（详细摘要）。载于计算理论研讨会（STOC），第247–248页，1969。 doi:10.1145/800169.805439。67 Walter J. Savitch。非确定性与确定性带复杂度之间的关系。计算机与系统科学杂志，4(2):177–192，1970。本文的会议版本发表于 STOC 1969 [66]。 doi:10.1016/S0022-0000(70)80006-X。68 Arne Schmidt、Sheryl Manzoor、Li Huang、Aaron T. Becker 与 Sándor P. Fekete。统一控制输入下的高效并行自组装。机器人与自动化快报，3(4):3521–3528，2018。 doi:10.1109/LRA.2018.2853758。69 Hamed Mohtasham Shad、Rose Morris-Wright、Erik D. Demaine、Sándor P. Fekete 与 Aaron T. Becker。粒子计算：器件扇出与二进制存储器。载于国际机器人与自动化会议（ICRA），第5384–5389页，2015。 doi:10.1109/ICRA.2015.7139951。

30 倾斜自动机：通过统一外部控制聚集粒子

70 Yaroslav Shitov。对有限自动机同步词近期上界的改进。自动机、语言与组合学期刊，24(2-4):367–373，2019年。doi:10.25596/JALC-2019-367。71 Larry J. Stockmeyer 与 Albert R. Meyer。需要指数时间的字问题：初步报告。载于计算理论研讨会（STOC），第1–9页，1973。doi:10.1145/800125.804029。72 Marek Szykuła。改进最短重置字长度的上界。载于计算机科学理论方面研讨会（STACS），第56:1–56:13页，2018。doi:10.4230/LIPICS.STACS.2018.56。73 Marek Szykuła 与 Adam Zyzik。一种寻找最短同步词的改进算法。载于欧洲算法研讨会（ESA），第85:1–85:15页，2022年。 doi:10.4230/LIPICS.ESA.2022.85。74 Mikhail V. Volkov。同步自动机与 Černý 猜想。载于语言与自动机理论及应用（LATA），第11–27页，2008。doi:10.1007/978-3-540-88282-4_4。75 Mikhail V. Volkov。有限自动机的同步。俄罗斯数学调查，77(5):819–891，2022年。 doi:10.4213/rm10005e。76 Vojtěch Vorel。传递自动机的子集同步。载于自动机与形式语言（AFL），第370–381页，2014。 doi:10.4204/EPTCS.151.26。77 Vojtěch Vorel。二元有限自动机的子集同步与谨慎同步。国际计算机科学基础杂志，27(5):557–578，2016。本文的会议版本发表于 AFL 2014 [76]。 doi:10.1142/S0129054116500167。78 Todd Wareham。有限状态自动机集合上的交运算与复合运算的参数化复杂度。载于自动机实现与应用会议（CIAA），第302–310页，2000。 doi:10.1007/3-540-44674-5_26。79 Mihalis Yannakakis 与 David Lee。有限状态机测试（扩展摘要）。载于计算理论研讨会（STOC），第476–485页，1991。 doi:10.1145/103418.103468。80 Yinan Zhang、Xiaolei Chen、Hang Qi 与 Devin J. Balkcom。利用全局控制在狭小空间中重排智能体。载于智能机器人与系统国际会议（IROS），第3576–3582页，2017。 doi:10.1109/IROS.2017.8206202。