收缩理论：作为基于集合的李雅普诺夫函数的豪斯多夫–黎曼测度

A. Matveev[1,2,a] 和 A. Pogromsky[3,b] 1)*Department of Mathematics and Mechanics, Saint Petersburg University, St. Petersburg,Russia*2)*Department of Information Technologies and Artificial Intelligence, Sirius University of Science and Technology, Sirius Russia* ,)*Department of Mechanical Engineering, Eindhoven University of Technology, Eindhoven, The Netherlands*
3

（日期：2026年3月4日）

我们提出了对 k-收缩概念及其理论的测度论扩展，包括其在分数维上的推广 d。相应的收缩性质通过非线性流输运的紧集的 d维体积的指数衰减来定义。对于正向不变紧集上的自治系统，我们以两种互补形式推导出d-收缩性的全面条件，即必要且充分条件。第一种条件以有限时间李雅普诺夫特征指数表述，其理念与第一李雅普诺夫方法相近。第二种条件与第二李雅普诺夫方法相契合，并依赖于黎曼度量的存在性，该度量可确保由其诱导的 d维豪斯多夫测度呈指数衰减。

为构造基于测度论的单调李雅普诺夫函数，我们引入一族豪斯多夫–黎曼测度。这类测度是椭圆型、依赖度量的 d-测度，沿轨迹严格递减，因此可用作李雅普诺夫函数。这些测度不仅能够随时刻刻画收缩率，还为稳定性分析和反馈设计提供了构造性工具。为展示该方法的适用性，我们推导出自治常微分方程周期解轨道稳定性的易处理判据，并采用若干典型的具体例子，包括具有耗散和恒定力矩的刚体、R¨ossler 系统以及 Langford 系统。

关键词：非线性　　系统；收缩；　k-收缩；一致 d-收缩；豪斯多夫–黎曼测度；基于集合的李雅普诺夫函数

arXiv:2603.02797v1 [math.DS] 3 Mar 2026

引言段落

收缩理论研究动力系统的轨迹彼此趋近的条件。这一性质是系统具有鲁棒行为的基础，也简化了对其非线性模型的分析。传统的收缩判据关注长度、面积或体积的缩减，通常采用整数维度以及标准欧几里得度量下的大小概念。本文通过引入豪斯多夫–黎曼d-测度，将这一观点扩展到非整数维度 d；这种测度结合了豪斯多夫型缩放与状态依赖度量的使用。我们证明，一个非线性系统一致地 d收缩（也就是说，在动态流的作用下，任意紧集的普通豪斯多夫 d-测度最终会严格小于其初始值）当且仅当存在一种豪斯多夫–黎曼 d-测度，且该测度在任意时刻都呈指数递减。从这个意义上说，紧集的后一种测度可以发挥李雅普诺夫函数的作用，提供一种“随时可用”的收缩证书，将维数理论与非线性动力学联系起来，并使得能够在传统整数维框架之外提出新的收缩检验。

一、引言

收缩理论[1–5]及其相关概念，如增量稳定性[6] 和收敛系统[7,8]，已被证明是分析非线性系统和设计自动控制器的强大框架；例如，参见综述[9]。其核心是系统收缩性的概念，即无论初始状态如何，所有轨迹都会随时间彼此趋近。

这种对收缩的理解与一种称为 k-收缩的较弱概念密切相关。遵循 V. I. Arnold 的表述，若一个映射 k-收缩，则称其在[10]（第 3.1 节）中成立，当它能减小任意 k 维平面的体积元素时。

最近，Wu 及其合作者[11] 将 k-收缩的概念扩展到能够收缩每个 k维平行多面体的系统。这种方法在研究 2-收缩系统方面尤其有效。对于这类系统，文献[12] 中的一个优雅论证可用于排除极限环的存在。

具体而言，假设一个极限环位于一个单连通的正向不变区域内。此时存在

a)电子邮箱：almat1712@yahoo.comb)电子邮箱：A.Pogromsky@tue.nl

一个以该闭环为边界的最小面积曲面[1]，这会导致矛盾：在 2-收缩作用下，该曲面会映射为另一个面积严格更小的曲面，这不可能发生，因为所得曲面仍以同一闭环为边界。

因此，没有极限环再加上闭合引理，意味着 $\mathbb{R}^n$ 上的任何 2-收缩系统都表现出非振荡行为，且所有轨迹最终都会趋近某个平衡点。尽管这一组性质弱于传统的全局渐近稳定性，但事实证明，它在许多应用中都非常有用；综述请参见[13]。

此前所有关于 k-收缩的研究都涉及整数k以及经典体积/测度。本文将 k-收缩的概念推广到非整数维度 k 和更灵活的几何测度。我们的研究动机源于维数和基于体积的工具在非线性动力学中众所周知的有效性，尤其体现在 Hausdorff 维数理论和李雅普诺夫维数理论中[14–21]。

在我们的分析中，一族依赖度量的测度发挥着核心作用，我们称之为***Hausdorff***-黎曼椭圆 d-测度。这些测度通过引入依赖于状态的黎曼度量，扩展了经典的 Hausdorff d-测度，因此为描述紧集沿轨迹的体积演化提供了一种自然的几何工具。在这一框架下，可以通过适当构造的测度单调递减来研究集合的收缩，而不必依赖经典的整数维体积。这一更广义的概念称为一致 d-收缩；简言之，它意味着在动力流的作用下，从某个有限时刻开始，任意紧集的 Hausdorff-黎曼 d-测度都会相对于其初始值减小。

我们的分析依托两种互补视角：基于特征指数的第一李雅普诺夫方法，以及基于李雅普诺夫函数的第二李雅普诺夫方法。在这两种框架下，我们分别推导出均匀 d-收缩的充要条件。此外，我们证明，均匀d-收缩等价于存在一种适当的状态依赖度量张量，使相应的 Hausdorff–Riemann d-测度随时间单调递减。从这个意义上说，所提出的测度可作为紧集的李雅普诺夫函数，从而能够随时刻刻画收缩。与基于复合矩阵对数范数[11–13]的标准方法不同，我们的框架能够适应可变度量。此外，我们还引入了 Hausdorff–Riemann 椭圆 d-测度，将 Douady 和 Oesterl'e[17] 提出的椭圆 d-测度构造与黎曼度量结构相结合。

主要理论结果由三个例子加以支持，分别涉及受外力矩作用的刚体、R¨ossler 系统和 Langford 系统；在这些例子中，我们推导出确保一致收缩的界。正如这些例子所示，对于简单系统，手工计算或许就足够了；然而，对于更复杂的应用，可能需要借助数值工具（例如文献[22,23] 中讨论的工具）来计算合适的度量。在第一个例子中，雅可比矩阵与控制输入无关，这限制了文献[11]中所述技术的适用性。为展示所开发方法在理论分析领域的优势，我们得到了自治常微分方程周期解轨道稳定性的可处理判据。

从技术角度来看，本文所给出的关键结果的证明大量借鉴了[24–27]中的论证；该文重点讨论所谓恢复熵的上下界，而这一概念出现在与远程状态估计问题相关的研究中。

论文结构。第二节简要讨论研究动机。第三节介绍一致 d-收缩系统这一类系统。第四节以李雅普诺夫特征指数为依据，给出一致 d-收缩的充要条件。第五节通过依赖于状态的（黎曼）度量刻画一致d-收缩。随后，我们基于测度的存在性给出 d-收缩的充要条件；这些测度称为豪斯多夫-黎曼椭圆 d-测度，沿轨迹单调递减，因而发挥基于集合的李雅普诺夫函数的作用。针对 $d = 2$这一特例，我们推导出新的、易于应用的判据，用于验证周期解的轨道稳定性。第十节 A、第十节 B 和第十节 C 给出了说明性示例。补充结果的技术性证明见附录。

本文采用以下记号：

- S_x^r 和 B_x^r 分别是以 x为中心、半径为 r 的球面和开欧几里得球；
- :=表示“定义为”、“用来表示”；
- **距离** $[x; O]$ 是点 x 到集合 O的距离；
- N_ε^O:= $\{x : \textbf{距离}\ [x;\ O] < \varepsilon\}$ 是集合 O的 ε-邻域；
- I_n 是 $n \times n$ 单位矩阵；
- $Df(x)$ 是函数 f 在点 x 处的雅可比矩阵；
- **int** O 是集合 O 的内部；
- $\lfloor d \rfloor$ 是实数 d 的整数下取整，即不大于 d的最大整数；

[1] 经典普拉托问题关注的是具有指定边界的极小曲面的存在性。该问题最初由 J.L. Lagrange 于1760年提出。尽管如此，这一问题仍以 Joseph Plateau 命名，他曾对肥皂膜进行实验。J. Douglas 和 T. Rad´o 于20世纪30年代分别独立证明了解的存在性。

- $\|\cdot\|_2$ 是来自 $\mathbb{R}^n$ 的向量的标准欧几里得范数，或矩阵的谱范数;
- $\langle\cdot;\ \cdot\rangle$ 是 $\mathbb{R}^n$中的标准欧几里得内积;
- **对角**$(a_1,\ldots,a_n)$是对角线元素为所列数值的对角矩阵。

II. 一些动机问题

Liouville提出的一条经典结果指出，对于任意具有时变系数的线性常微分方程

$$\dot{\xi} = A(t)\xi, \quad \xi \in \mathbb{R}^n \tag{1}$$

基本矩阵 $X(t)$的行列式满足以下关系:

$$\det X(t) = \exp\left[\int_0^t \operatorname{tr} A(s)\, ds\right] \det X(0).$$

因此，如果 $\operatorname{tr} A(t) < 0\ \forall t$，那么 $\det X(t)$会随时间减小;此外，如果 $\sup_t \operatorname{tr} A(t) < 0$，那么 $\det X(t)$会随时间呈指数趋于零。与此同时，在动力流（1）的作用下，从 E 映射到其像 $X(t)E$ 时，任意可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 的 n维体积（即Lebesgue测度）会乘以 $|\det X(t)|$。因此，如果 E 的体积有限，那么在相应的条件下，其像的体积也会相应减小并趋于零。

这一结果在非线性动力学理论中的一个重要应用，涉及这样的情形： $A(t)$ 是向量非线性微分方程的雅可比矩阵:

$$\dot{x} = f(x) \in \mathbb{R}^n \tag{2}$$

沿其某些解 $x_\star(t)$ 求值:

$$A(t) := Df\big[x_\star(t)\big].$$

在这种情况下，Liouville公式表明，如果 $\operatorname{div} f(x) < 0\ \forall x$，则任意无穷小的 n 维体积元都会随着时间的推移而收缩，并在 $t \to \infty$ 时趋于零;此外，若 $\sup_{t\geq 0} \operatorname{div} f[x_\star(t)] < 0$。这种情形称为 n-收缩。

最近，Wu等人[11] 运用乘法与加法复合矩阵理论（例如参见[18]（第3章）），以及对数矩阵范数（例如参见[18] （第4章）），提出了 k-收缩的概念。宽泛地说，这种收缩意味着，无穷小的 k维体积元素会随着时间推移而消失，其中 k 是一个不超过 n的整数。此外，他们还根据与 k阶复合变分方程相关的基本矩阵的对数范数所满足的不等式，推导出了 k-收缩的充分条件。除了普遍的理论贡献外，[11] 还探讨了 k-收缩系统中的若干引人注目的控制应用，从而凸显了收缩性质的重要性及其实际意义。

这些见解促使人们进一步拓展这一主题，也自然引出了更多问题。首先，能否为 k-收缩性提供全面且具有一定构造性的判据？另一个自然的问题出现在这样的情形中：由于某种原因，系统的参数逐渐变化，使系统连续地从例如4-收缩转变为3-收缩。在此过程中，系统是否会保留某些收缩性质？如果会，这些性质体现在哪种意义上？能否利用它们分析系统的动力学？这种意义能否用 k维欧几里得空间中的普通体积元素来表达，还是需要采用其他方式？本文将回应这些及其他问题。

为此，我们将 k-收缩的概念扩展到 k 为非整数的情形，并针对非线性系统的这种收缩性提出两个互补的充要判据。这一组判据包括以下内容:

i) 使用系统特征指数的判据，因此其精神与第一李雅普诺夫方法相近;

ii）一种判据，其思路与将第二李雅普诺夫方法应用于系统的变分方程时相近。

这些判据所阐述的性质意味着，只要实验持续时间足够长，豪斯多夫 d测度的收缩就会发生。与此同时，我们还证明，只要该性质成立，动力流在任意时刻都会使另一种相似的 d测度减小。该测度通过在 $\mathbb{R}^n$ 上适当地引入黎曼度量来定义，并被上述豪斯多夫测度的两个副本夹在中间，每个副本都带有各自的缩放因子。由于这种新测度可在研究 d收缩时用作李雅普诺夫函数，因此对控制设计可能尤其有价值。

III. 一致 d收缩系统

A. 豪斯多夫测度：k测量体积的推广

本节介绍一种背景知识：如何将整数d 的 d 维体积推广到可能为分数的 $d \geq 0$。为此，我们考虑紧子集 $K \subset \mathbb{R}^n$，以及 $d \in [0,\infty)$、 $\varepsilon > 0$，还有用有限多个半径为 $r_i \leq \varepsilon$ 的开球$B^{r_i}_{x_i}$ 对 K 进行的各种覆盖。豪斯多夫 (d,ε)-预测度定义为 K

$$\mu_{d,\varepsilon}(K) = \inf \sum_i r_i^d, \tag{3}$$

其中，下确界取遍上述所有覆盖。集合 K 的豪斯多夫 d-测度 为极限

$$\mu_d(K) = \lim_{\varepsilon\to 0} \mu_{d,\varepsilon}(K) = \sup_{\varepsilon>0} \mu_{d,\varepsilon}(K).$$

以下事实众所周知（例如，参见[28]中的第 4.1、4.2 和 4.7 节），并将在下文中用到。

命题 III.1. 对于任意 $d \in [0,\infty)$，以下陈述成立：

i) $\mu_{d,\varepsilon}(\cdot)$ 和 $\mu_d(\cdot)$ 均定义良好，且都是 $\mathbb{R}^n$ 上的外测度；*ii)* 将 $\mu_d(\cdot)$ 限制在博雷尔 σ-代数上，所得的是完备博雷尔测度；*iii)* 若 $\mu_d(K) > 0$，则对任意 $d' < d$，$\mu_{d'}(K) = \infty$；且对任意 $d' > d$，$\mu_{d'}(K) = 0$；*iv)* 对所有 $x \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}$，$\mu_d(x+cK) = |c|^d \mu_d(K)$，其中求和是在闵可夫斯基意义下进行的。

豪斯多夫 d-测度将 Lebesgue测度推广到了可能为分数的数值 d。若$d = n$，二者仅相差一个标量因子。对于整数$d \in [0,n)$以及 $\mathbb{R}^n$ 中 d 维流形的博雷尔子集（甚至更一般的集合，详情例如参见[29]），豪斯多夫 d-测度等于黎曼 d-体积，二者相差一个归一化常数[29]。事实上，文献中对豪斯多夫 d-测度有多种定义，例如，可以使用直径小于 ε 的任意开集覆盖，而不是用球。不过，由此得到的测度与 μ_d 仅相差一个缩放因子。本文的结果不受这一点影响。

根据命题 III.1 中的 iii)，下确界和上确界相等

$$\dim_H(K) := \inf_{d\ge 0}\{\mu_d(K) = 0\} = \sup_{d\ge 0}\{\mu_d(K) = \infty\}, \quad (4)$$

这称为集合 K 的豪斯多夫维数 。这一概念在非线性动力学理论中有许多富有成效的应用[14–18,20,21]。

B. 一致 d-收缩的定义

我们考虑一个由自治向量常微分方程 (2) 描述的动力系统，其中 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是连续可微函数。方程 (2) 在初始状态 $x_\circ$ 下的解在时间 t 处的取值记为 $x(t, x_\circ)$，沿解的移位映射记为 φ^t，因此 $\varphi^t(x_\circ) = x(t, x_\circ)$。

本文始终在某个集合 $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}^n$ 上研究系统 (2)，并作如下假设。

假设 III.1. 若 $x_\circ$ 位于包含 $\mathbb{X}$ 的某个开集 O 中，则解 $x(t, x_\circ)$ 对所有 $t \ge 0$ 均有定义。

假设 III.2. 集合 $\mathbb{X}$ 等于其内部**int** $\mathbb{X}$的闭包，是紧致且正向不变的$\varphi^t(\mathbb{X}) \subset \mathbb{X}\ \forall t > 0$。

根据假设 III.1，对于任意 $t \ge 0$，映射 φ^t 在 O 上都有定义。在此假设下，我们引入以下定义，其中 $d \in [0,n]$。.

定义 III.1。 称系统为

i)一致地 d-收缩于 $\mathbb{X}$，如果对于任意 $\varepsilon \in (0,1)$，都存在 $\mathfrak{T}(\varepsilon) > 0$，使得对于任意紧集 $K \subset \mathbb{X}$，只要满足 $\mu_d(K) < \infty$，就有：

$$\mu_d\big[\varphi^T(K)\big] \le \varepsilon \mu_d(K) \qquad \forall T \ge \mathfrak{T}(\varepsilon); \qquad (5)$$

ii) 指数 d-收缩于 $\mathbb{X}$，如果存在正数 κ 和 λ，使得对于每个满足 $\mu_d(K) < \infty$的紧集$K \subset \mathbb{X}$，都有：

$$\mu_d\big[\varphi^t(K)\big] \le \kappa e^{-\lambda t} \mu_d(K) \qquad \forall t \ge 0. \qquad (6)$$

我们强调，$\mathfrak{T}(\varepsilon)$ 对所有紧集$K \subset \mathbb{X}$都是相同的。“一致地”这一属性恰恰表达了这一事实。为了使定义 III.1 在逻辑上自洽，集合 $\mathbb{X}$ 无需满足假设 III.2。

尽管定义 III.1 中 i) 和 ii) 的性质表面上有所不同，但实际上它们是相同的。

定理 III.1。 如果假设 III.1 和 III.2成立，那么定义 III.1 中引入的两个性质等价。

该定理的证明在第 VIIA 节中给出，此前在第 VI 节引入了必要的技术工具。

推论 III.1. 若系统(2)在 $\mathbb{X}$上一致 d-收缩，则任意紧致正不变集 $K \subset \mathbb{X}, \varphi^t(K) = K\ \forall t \ge 0$ （满足 $\mu_d(K) < \infty$）的豪斯多夫维数(4)不超过 d。

事实上，不等式(6)只留下一种可能 $\mu_d(K)$ =0，因此由(4)得$\dim_H(K) \le d$ 。

这表明，估计不变集的豪斯多夫维数这一任务可以纳入一致 d-收缩系统的框架之中。

C. 复合矩阵以及一个关于自然 k的 k-收缩的相关充分判据

本节的目的是将定义 III.1 中引入的d-收缩概念与近期研究[11]的结果联系起来。该研究讨论自然 d，并以不同方式定义 d-收缩（详情请读者参阅[11]）。与此同时，[11] 中的基本充分判据不仅在[11] 的意义下、而且在定义 III.1 的意义下保证 d-收缩。（严格地说，若在(5)与(6)中考虑“不太坏”的集合 K，则后者成立；该陈述将在后文加以具体说明。）在本节其余部分，我们解释这一事实，但由于其对当前论文的重要性次要，故不提供形式证明。一个很好的参考文献

就本节所用的大部分代数事实与构造而言是[30]。

首先，我们引入与系统 (2) 相关的流的雅可比矩阵 $X(t,\xi) := D\varphi^t(\xi)$。一个有用的观察是，$X(t,\xi)$是如下常微分方程线性时变系统的基本矩阵

$$\begin{aligned}\dot{X}(t,\xi) &= A(t,\xi)X(t,\xi), \quad X(0,\xi) = I_n, \qquad (7)\\ A(t,\xi) &:= Df[x(t,\xi)].\end{aligned}$$

给定线性映射 $\mathcal{A}:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ （以及用同一符号表示的关联矩阵），其第k次外幂 $\wedge^k\mathcal{A}$ 是欧几里得空间的外幂 $\wedge^k\mathbb{R}^n$ （交错多重线性形式的空间）中的线性算子，该算子由以下对其在任意简单k–向量（“k–刃”）上的取值规定唯一确定:

$$(\wedge^k\mathcal{A})(v_1\wedge\cdots\wedge v_k) := (\mathcal{A}v_1)\wedge\cdots\wedge(\mathcal{A}v_k) \quad \forall v_j\in\mathbb{R}^n.$$

与该算子相关的矩阵 $\wedge^k\mathcal{A}$的维数为 $\binom{n}{k}\times\binom{n}{k}$，并平行地记为 $\mathcal{A}^{(k)}$，称为 $\mathcal{A}$的乘法复合矩阵。

令 $e_1,\dots,e_n$ 表示 $\mathbb{R}^n$ k $e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_k}$ $i_1<i_2<\ldots<i_k$ 的标准正交基。则所有形如 $\wedge^k\mathcal{A}$ 的一叶构成的一组基。矩阵在此基下实际上是矩阵 $\mathcal{A}$ 的所有 $k\times k$ 子式构成的二维数组。此外，空间 $\wedge^k\mathbb{R}^n$ 可赋予一个唯一确定的内积，使所考虑的基成为正交归一基。$\mathcal{A}^{(k)}$ 的相应谱范数与 $\mathcal{A}$ 的奇异值 $\sigma_1(\mathcal{A})\ge\cdots\ge\sigma_n(\mathcal{A})$ 由以下公式联系起来

$$\|\mathcal{A}^{(k)}\|_2 = \sigma_1(\mathcal{A})\cdots\sigma_k(\mathcal{A}) =: \omega_k(\mathcal{A}). \qquad (8)$$

对于式 (1) 的基本矩阵 $X(t)$，矩阵 $X(t)^{(k)}$ 是以下常微分方程[18] 的基本矩阵（命题 3.3.1）：

$$\dot{\Xi} = A(t)^{[k]}\Xi, \quad \Xi\in\wedge^k\mathbb{R}^n. \qquad (9)$$

这里，符号 $B^{[k]}$ 表示 $B\in\mathbb{R}^{m\times m}$ 的所谓 k 阶加法复合矩阵，其定义如下

$$B^{[k]} := \frac{d}{d\varepsilon}(I_m+\varepsilon B)^{(k)}|_{\varepsilon=0}.$$

来自[11] 的一个重要结果指出，对于自然数 k，当满足以下条件时，系统 (2) 按[11] 的意义是 k-收缩的

$$\exists c>0 \text{ s.t.} \quad \nu\Big[Df(x)^{[k]}\Big]\le -c<0 \quad \forall x\in\mathbb{R}^n, \qquad (10)$$
$$\text{where } \nu(A) := \lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{\|I_N+\varepsilon A\|_2-1}{\varepsilon}$$

即为对数范数。众所周知，在满足一些次要技术假设的条件下，对于任意线性常微分方程 (1)，$\|X(t)X(\tau)^{-1}\|_2 \le \exp\int_\tau^t \nu[A(s)]\,ds\ \forall\tau\le t$[31]。将这一事实应用于常微分方程 (9)，其中 $A(t) := A(t,\xi)$ 由 (7) 给出，可得 $\Big\|X(t,\xi)^{(k)}\Big\|_2 \le e^{-ct}$，进而由 (8) 得到 $\omega_k[X(t,\xi)]\le e^{-ct}$。

现在考虑一个集合 $K\subset\mathbb{R}^n$，它是紧致的，并且（不同于定义 III.1）还是可数的 (μ_d,d)-可求 rectifiable 集（定义见[29] (第 3.2.14 节)）。那么，根据经典的面积公式（例如参见[29] (定理 3.2.22)中的 (3)），

$$\begin{aligned}\mu_k[\varphi^t(K)] &= \int_{\varphi^t(K)}\mu_k(dy) = \int_K \omega_k\big[D\varphi^t(\xi)\big]\mu_k(d\xi)\\ &= \int_K \omega_k\big[X(t,\xi)\big]\mu_k(d\xi) \le e^{-ct}\mu_k(K).\end{aligned}$$

因此可见，来自[11] 的判据 (10) 保证了按定义 III.1 意义下的指数收缩性，但需注意，(6)（其中 $d:=k,\kappa:=1,\lambda:=c$）仅对具有上述额外性质的紧集 K 成立。

与[11], 不同，我们不依赖复合矩阵[18,32] 的工具，而基本上在经典 Lyapunov 方法的框架内进行。

IV. 利用 Lyapunov 指数刻画一致d-收缩性

有限时间 *Lyapunov* 指数定义为以下量

$$\Lambda_i(t,x) = t^{-1}\ln\alpha_i(t,x),$$

其中，$\alpha_1(t,x)$ 和 $\ge\ldots\ge\alpha_n(t,x)$ 是流的雅可比矩阵 $X(t,x) := D\varphi^t(x)$ 的奇异值。一个有用的观察是，映射 $(t,x)\mapsto X(t,x)\in GL(\mathbb{R}^n)$ 是流 $\{\varphi^t(\cdot)\}_{t\ge0}$ 上的余循环，即，

$$X(0,x)=I_n, \quad X[t+\tau,x]=X[\tau,\varphi^t(x)]X[t,x]. \qquad (11)$$

人们长期以来对 Lyapunov 指数的关注，与对动力系统流的扩张与收缩性质的研究密切相关。对于无穷小体积，人们预期流 φ^t 及其线性化具有几乎相同的这些性质。对于后者，这些性质体现在单位球在该线性算子 $X(t,\xi)$作用下的像上。这是一个椭球，其半轴等于 $X(t,\xi)$ 的奇异值$\alpha_i(t,\xi)$。因此，它们及其时间平均对数 $\Lambda_i(t,x)$ 为上述研究提供了一种工具。

为了将这一思路应用于 d-收缩的分析，我们将 $d\in[0,n]$ 写成整数部分和小数部分之和:

$$d = d_0+s, \quad d_0=\lfloor d\rfloor, \quad s=d-d_0\in[0,1). \qquad (12)$$

对于任意具有奇异值 $\sigma_1(A)\ge\cdots\ge\sigma_n(A)\ge0$，我们定义

$$\omega_d(A) := \sigma_1(A)\cdots\sigma_{d_0}(A)\,\sigma_{d_0+1}(A)^s, \qquad (13)$$

其中，如果 $d=n$，则省略乘数 $\sigma_{d_0+1}(A)^s$。假设 $a^0:=1\ \forall a\ge0$。（We）最后，我们记

$$\Sigma_d(t,x) = \frac{1}{t}\ln\left[\omega_d(X(t,x))\right] = \sum_{i=1}^{d_0}\Lambda_i(t,x) + s\Lambda_{d_0+1}(t,x). \quad (14)$$

下面的引理引入了流的一个参数 $\mathbf{\Sigma_d}$，它将在我们的分析中发挥关键作用。

引理 IV.1. 设假设III.1与III.2成立。则

$$\mathbf{\Sigma_d} := \sup_{x\in\mathbb{X}}\overline{\lim_{t\to\infty}}\,\Sigma_d(t,x) = \lim_{t\to\infty}\max_{x\in\mathbb{X}}\Sigma_d(t,x) = \inf_{t>0}\max_{x\in\mathbb{X}}\Sigma_d(t,x). \quad (15)$$

证明 通过应用Horn不等式[18]（命题 2.3.1）

$$\omega_d(AB) \le \omega_d(A)\omega_d(B) \qquad \forall A, B \in \mathbb{R}^{n\times n} \quad (16)$$

到(11)，可知 $\psi_{t+\tau}(x) \le \psi_t(x) + \psi_\tau(\varphi^t x)$，其中$\psi_t(x) := \log \omega_d[X(t,x)]$。这意味着余循环 $\frac{1}{t}\psi_t(x)$是次可加的。证明由[33]（定理 1）完成（另见[34]中的附录B.4）。 □

下述命题是第IV节的主要结果。

定理IV.1. 设假设III.1 与III.2成立。则系统(2) 在 $\mathbb{X}$ 上是一致 d-收缩的，当且仅当$\mathbf{\Sigma_d} < 0$。

该定理的证明见第 VIIB 节，介绍第 VI 节所需的技术工具之后。

注 IV.1。 即使省略假设 III.2 中的第一个要求，不等式 $\mathbf{\Sigma_d} < 0$ 仍足以保证一致 d收缩性，这将在定理 IV.1的证明中说明。

V. 第二李雅普诺夫方法框架下的一致 d收缩性刻画

尽管定理 IV.1 提供了有用且富有启发性的见解，但其直接应用主要局限于数值分析。本节旨在提供易于操作的分析工具，以确立一致 d收缩性。为此，我们采用李雅普诺夫函数方法（第二李雅普诺夫方法）。

对于从 $x \in \mathbb{X}$ 映射到有限维实向量空间 V 的映射 $g(x)$，点 $a \in \mathbb{X}$ 处的轨道导数 $\dot{g}(a)$ 定义为 $\dot{g}(a) := \frac{d}{dt}g\big[x(t,a)\big]|_{t=0}$。如果 g 在 a 的某个邻域内有定义且连续可微，则该导数存在，并且等于 $[Dg(a)]f(a)$。

本节中，我们考虑具有以下性质的矩阵函数 $P(\cdot)$。

假设 V.1。 映射 $P(\cdot)$ 在 $\mathbb{X}$ 上有定义且连续，取值于对称正定 $n\times n$ 矩阵集合，并且在任意点 $a \in \mathbb{X}$ 处都存在轨道导数 $P(a)$ 。此外，该导数是轨道连续的，即，对于任意 $a \in \mathbb{X}$，函数 $t \mapsto P[x(t,a)]$ 都是连续的。

对于任意 $x \in \mathbb{X}$，以下 n 次多项式方程的根均为实数（参见，例如，[24,27]）

$$\det\left[A^\top(x)P(x) + P(x)A(x) + \dot{P}(x) - \lambda P(x)\right] = 0. \quad (17)$$

我们按降序排列它们

$$\lambda_1(x) \ge \lambda_2(x) \ge \ldots \ge \lambda_n(x) \quad (18)$$

并令

$$\Xi_d^{P(\cdot)}(x) = \lambda_1(x) + \lambda_2(x) + \lambda_{d_0}(x) + s\lambda_{d_0+1}(x). \quad (19)$$

量 $\lambda_i(x)$ 已在若干场景中出现。它们曾用于获得系统在[24] 中的拓扑熵以及[27]中所谓恢复熵的易处理上界。这些熵的上界分别由 $\mathbb{X}$上前若干个根 $\lambda_i(x)$ 之和所能达到的最大值给出。此外，在此框架下，可以从两侧逼近恢复熵：对于任意函数 $P(x)$，其关联的根给出一个上界；反过来，对于任意精度 $\varepsilon > 0$，都存在一种 $P(x)$ 的选择，使所得上界与真实值相差不超过 ε，见[27]。

本节以下主要结果表明，以某种相似的方式，可以用 P 和 λ_i全面刻画 d-收缩性。

定理 V.1. 假设条件III.1 和III.2 成立。则以下陈述等价：

i) The system (2) *is uniformly* d*-contractive on* $\mathbb{X}$*;*

ii) There is a function $P(\cdot)$ *such that it satisfies Asm.* V.1 *and* $\Lambda := \sup_{x\in\mathbb{X}}\Xi_d^{P(\cdot)}(x) < 0$.

该定理的证明见第 VIIC 节；第 VI 节将先介绍必要的技术工具。

注 V.1. 如果从假设 III.2 中删除第一项要求，则定理 V.1 中的蕴含关系 ii) ⇒i) 仍然成立，这将在定理 V.1的证明中说明。

VI. 豪斯多夫–黎曼椭圆 d-测度

定义 III.1 表明，只有经过无限长的“足够长”时间后，豪斯多夫 d-测度的收缩才会显现出来。然而，对于任何特定的预先指定时间，无论该时间多长，都无法保证发生收缩。在第 VIII 节中，我们将证明，此时动态流会持续减小另一种相似但不同的 d-测度。此外，这种测度被上述豪斯多夫测度的两个副本所夹，且各自具有不同的缩放因子。因此，这种新的 d-测度可作为研究 d-收缩时的李雅普诺夫函数。这一点对控制设计尤其重要，因为它为在综合反馈规则时运用基于李雅普诺夫的方法打开了大门，从而使

系统 d-收缩。在本研究中，这一思路实际上用于定理 V.1 的证明。

上述新颖的 d-测度在定理 III.1、IV.1 和 V.1 的证明中发挥着关键作用。其定义结合了所谓椭圆 *Hausdorff* d-测度 的核心思想（参见例如[18,35]）以及黎曼度量的使用；黎曼度量为状态空间中不同的点 x 定义了各自的距离和椭球概念。不过，我们先从一个更简单但相关的情形入手。

A. 椭圆 d-测度

设 $d \in (0,\ n]$ 。对于任意具有按序排列的半轴 $\varsigma_1(E) \geq \cdots \geq \varsigma_n(E) > 0$的椭球 $E \subset \mathbb{R}^n$，记

$$\mathrm{ecc}(E) = \frac{\varsigma_1(E)}{\varsigma_n(E)} \geq 1, \tag{20}$$

$$\varpi_d(E) \ := \ \varsigma_1(E)\cdots\varsigma_{d_0}(E)\,\varsigma_{d_0+1}(E)^{\,s}, \tag{21}$$
$$\text{where } d_0 := \lfloor d \rfloor, s := d - d_0 \in [0,1)$$

是 d的整数部分和小数部分。若 d 是整数，则此处省略乘数 $\sigma_{d_0+1}(E)^{\,s}$ 。量 $\mathrm{ecc}(E)$ 称为椭球 E的偏心率。

为便于查阅，我们先指出以下显然的事实，其中用到了式（13）中定义的量 $\omega_d(A)$。

引理 VI.1. 对于任意满足 $\det A \neq 0$ 且$x \in \mathbb{R}^n$的 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$，椭球 $E := x + A(B_0^1)$的参数如下： $\varpi_d(E) = \omega_d(A)\ \varsigma_i(E) = \sigma_i(A)$。

以下概念主要归功于 Douady 和 Oesterl´e[17]。

定义 VI.1（椭圆 d-测度）。 对于任意 $\varepsilon > 0$、$\alpha \geq 1$ 和紧集 $K \subset \mathbb{R}^n$，定义

$$\chi_{d,\varepsilon}^{\langle\alpha\rangle}(K) := \inf\Big\{ \sum_i \varpi_d(E_i) \ : \ K \subset \bigcup_i E_i,\ \varsigma_1(E_i) < \varepsilon,\ \mathrm{ecc}(E_i) \leq \alpha \Big\}, \tag{22}$$

$$\chi_d^{\langle\alpha\rangle}(K) := \sup_{\varepsilon>0} \chi_{d,\varepsilon}^{\langle\alpha\rangle}(K) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \chi_{d,\varepsilon}^{\langle\alpha\rangle}(K), \tag{23}$$

其中，inf 取遍 K 由满足式(22)所规定性质的椭球组成的所有有限覆盖 $\{E_i\}$ 。 K 的椭圆d-测度 定义为以下极限

$$\chi_d(K) := \lim_{\alpha\to\infty} \chi_d^{\langle\alpha\rangle}(K). \tag{24}$$

（23）中的极限（有限或无限）存在，且（23）成立，因为当 $\varepsilon \downarrow$时，（22）中采用的覆盖集合会减少，因此（22）中的下确界会增大。（24）中的极限存在，因为当 $\alpha \uparrow$时，具有固定 ε 的覆盖集合会扩展，因此 $\chi_{d\,\varepsilon}^{\langle\alpha\rangle}(K)$ 会减小。对于 $\alpha = 1$，量 $\chi_d^{\langle\alpha\rangle}(K)$ 等于 Hausdorff d-测度 $\mu_d(K)$。与定义 5.3.3 相比在[17]，中，以不等式 $\sigma_1(E_i) < \varepsilon$ 代替 $[\varpi_d(E_i)]^{1/d} < \varepsilon^d$ ，并添加了对偏心率的界限。由于这些修改，我们对“椭圆 Hausdorff d-测度”一词作了（截断）修订，该词出自[17]（定义 5.3.3），并用于定义 VI.1 的表述中。

引理 VI.2（豪斯多夫测度夹逼）。 对于任意紧集 $K \subset \mathbb{R}^n$，以下结论成立：

$$\mu_d(K) \ \leq \ 2^n\,\chi_d(K), \qquad \chi_d(K) \ \leq \ \mu_d(K). \tag{25}$$

证明。 [2] 在 (25) 中，第二个不等式显然成立，因为任意一个球都是单位偏心率的椭球，因此在 (3) 中，inf 所取的集合比在 (22) 中更小。

要证明第一个不等式，只需证明：对于任意紧集 $K \subset \mathbb{R}^n$ 和 $\varepsilon > 0, \alpha \geq 1$，$\mu_{d,\sqrt{n}\varepsilon}(K) \ \leq \ 2^n\chi_{d\,\varepsilon}^{\langle\alpha\rangle}(K)$。这里，$\chi_{d\,\varepsilon}^{\langle\alpha\rangle}(K)$ 可以用 (22) 中的一个和任意逼近。因此，根据命题 III.1 中的 i)，只需证明

$$\mu_{d,\sqrt{n}\varepsilon}(E) \leq 2^n \varpi_d(E)\ \forall E \quad \text{with} \quad \varsigma_1(E) < \varepsilon. \tag{26}$$

为此，我们考虑 $\mathbb{R}^n$的一个标准正交基，使得在相关坐标 x_i 中，椭球 E 由不等式 $\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{\varsigma_i\ E}() \leq 1$描述。我们令

$$E_* := \{y = \{y_i\}_{i=0}^{d_0} : (y_1,\ldots,y_{d_0},0,\ldots,0) \in E\} \subset \Pi$$
$$:= \bigtimes_{i=1}^{d_0} [-\varsigma_i(E), \varsigma_i(E)], \quad \varrho := \varsigma_{d_0+1}(E) \geq \varsigma_n(E).$$

平行六面体 Π 至多可由以下数量的$= \prod_{i=1}^{d_0} \left\lceil \frac{\varsigma_i(E}{\varrho} \right\rceil)$ 维立方体覆盖，其边长为 2ϱ：k。将每个立方体扩展为 n-立方体后，我们得到对 E的覆盖。每个由此得到的立方体都可以由半径为 $\sqrt{n}\varrho < \sqrt{n}\varepsilon$的 n-球覆盖。总之，所得的球覆盖了 Π，因此 E。由此可得

$$\mu_{d,\sqrt{n}\varepsilon}(E) \leq \varrho^d k = \varrho^d \prod_{i=1}^{d_0} \left\lceil \frac{\sigma_i(E)}{\varrho} \right\rceil = \varrho^s \prod_{i=1}^{d_0} \varrho \left\lceil \frac{\sigma_i(E)}{\varrho} \right\rceil$$
$$\leq \varrho^s \prod_{i=1}^{d_0} (\sigma_i(E) + \varrho) \overset{\sigma_i(E)\geq\varrho\, i\leq d_0}{\leq} 2^{d_0}\sigma_{d_0+1}(E)^s \prod_{i=1}^{d_0} \sigma_i(E).$$

这就完成了式 (26) 中第一个不等式的证明，因为最后一个表达式不超过其右端。 □

由引理 VI.2 可直接得出，任意紧集 K 的豪斯多夫维数都可根据 χ_d 轻松确定，因为 $\chi_d(K) = 0 \Leftrightarrow \mu_d(K) = 0$ 且 $\chi_d(K) = \infty \Leftrightarrow \mu_d(K) = \infty$。通过追溯例如[28], 中第 4.1、4.2 和 4.7 节的相关论证，可以看出，若将命题 III.1 表述中的豪斯多夫 d-测度替换为椭圆 d-测度，该命题仍然成立。

[2] 引理 VI.2 与[17]中的引理 5.3.1 非常相似。同时，正如前文所讨论的，引理 VI.2 处理的是另一类 d-测度。此外，引理 VI.2 随后的证明还表明，在 (25) 中，缩放因子不取决于 $\mathbb{R}^n$中内积的选取。与此同时，该证明在很大程度上重述了[17]中引理 5.3.1 证明里的论证。

B. P-椭圆 d-测度

到目前为止，我们一直默认 $\mathbb{R}^n$ 配备标准内积 $\langle\cdot;\cdot\rangle$。因此，线性算子（包括表示 $n\times n$ 矩阵的算子）的奇异值、 $\mathbb{R}^n$中椭球的半轴以及球，都是相对于该内积及其诱导范数定义的。同时，上述所有构造和结果都可直接推广到 $\mathbb{R}^n$中的任意内积$\cdot,\ \cdot\succ$。这些内积与正定 $n\times n$矩阵 P一一对应；具体而言，$\cdot,\ \cdot\succ= \ x,\ y\succ^P:=\langle Px;\ y\rangle\ \forall x,\ y$。因此，相关构造（球、奇异值等）都带有额外的下标 P，而“椭圆 d-测度”一词则加上前缀 P，从而形成 P-椭圆 d-测度。若没有这样的下标，就表示该构造对应于标准内积。

下面的引理分别联系了若干普通量和以人名命名的 P-相关量。

引理 VI.3. 设 $P_1, P_2\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 为对称正定矩阵，$A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 为非奇异矩阵，$S_i:=\sqrt{P_i}$ 表示 P_i 的对称正定平方根，且 $E\subset\mathbb{R}^n$ 为一个椭球。

则以下陈述成立：

- **i)** *The ball* ${}^{P_2}B_x^r = S_2^{-1}B_0^r + x = S_{2\to1}^{-1}\,{}^{P_1}B_0^r + x$, *where* $S_{2\to1}:=S_2^{-1}S_1$;
- **ii)** $\sigma_i^{P_2}(A)=\sigma_i(S_2AS_2^{-1})=\sigma_i^{P_1}(S_{1\to2}AS_{1\to2}^{-1})$ *and* $\omega_d^{P_2}(A)=\omega_d(S_2AS_2^{-1})=\omega_d^{P_1}(S_{1\to2}AS_{1\to2}^{-1})$;
- **iii)** $\varpi_d^{P_2}(E)=\varpi_d(S_2E)=\varpi_d^{P_1}(S_{1\to2}E)$, $\varsigma_i^{P_2}(E)=\varsigma_i(S_2E)=\varsigma_i^{P_1}(S_{1\to2}E)$;
- **iv)** $\frac{1}{\omega_d(S_1S_2^{-1})}\varpi_d^{P_1}(E)\le\varpi_d^{P_2}(E)\le\omega_d(S_2S_1^{-1})\varpi_d^{P_1}(E)$;
- **v)** $\frac{\sigma_n(S_2)}{\sigma_1(S_1)}\varsigma_1^{P_1}(E)\le\varsigma_1^{P_2}(E)\le\frac{\sigma_1(S_2)}{\sigma_n(S_1)}\varsigma_1^{P_1}(E)$, $\frac{\sigma_n(S_2)}{\sigma_1(S_1)}\varsigma_n^{P_1}(E)\le\varsigma_n^{P_2}(E)\le\frac{\sigma_1(S_2)}{\sigma_n(S_1)}\varsigma_n^{P_1}(E)$;
- **vi)** $\frac{\sigma_n(S_2)}{\sigma_1(S_2)}\frac{\sigma_n(S_1)}{\sigma_1(S_1)}\operatorname{ecc}^{P_1}(E)\le\operatorname{ecc}^{P_2}(E)\le\frac{\sigma_1(S_2)}{\sigma_n(S_2)}\frac{\sigma_1(S_1)}{\sigma_n(S_1)}\operatorname{ecc}^{P_1}(E)$;
- **vii)** $\varpi_d^{P_2}(AE)\le\omega_d(S_2AS_1^{-1})\varpi_d^{P_1}(E)$.

证明见附录。

C. Hausdorff-Riemann 椭圆 d-测度

这是将上一节中的 P-椭圆 d-测度直接扩展到矩阵 P 随空间变化的情形。因此，每个位置都对应其自身的、与 P 相关的内积、度量，以及对奇异值、椭球半轴、偏心率和量（21）的定量解释。本节所做的主要调整是，在椭圆 d-测度的定义（22）中，量$\varpi_d(E_i)$ $\varsigma_1(E_i)$和 $\operatorname{ecc}(E_i)$均在与所处理椭球中心 E_i 相关的度量下进行局部评估。

本节中，我们假设映射 $P(\cdot)$ 满足以下条件。

假设 VI.1. 映射 $P(\cdot)$ 定义在 $\mathbb{R}^n$ 上，其取值为对称正定矩阵，并且

$$M_{P(\cdot)}:=\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\sqrt{\sigma_1[P(x)]}<\infty,\qquad m_{P(\cdot)}:=\inf_{x\in\mathbb{R}^n}\sqrt{\sigma_n[P(x)]}>0. \tag{27}$$

从现在起，符号$\mathbf{c}(E)$ 表示椭球 E 的中心，而 $P(x)$ 的对称正定平方根记作 $\sqrt{P}(x)$ 或 $S(x)$。下面是对定义 VI.1 的直接推广。

定义 VI.2（Hausdorff-Riemann 椭圆d-测度）。对于任意 $\varepsilon>0$，$\alpha\ge1$以及紧集 $K\subset O$，令

$${}^{P(\cdot)}\pi_{d,\varepsilon}^{\langle\alpha\rangle}(K):=\inf\Big\{\sum_i\varpi_d^{P[\mathbf{c}(E_i)]}(E_i)\ :\ K\subset\bigcup\nolimits_i E_i,\ \varsigma_1^{P[\mathbf{c}(E_i)]}(E_i)<\varepsilon,\ \operatorname{ecc}^{P[\mathbf{c}(E_i)]}(E_i)\le\alpha\Big\}, \tag{28}$$

$${}^{P(\cdot)}\pi_d^{\langle\alpha\rangle}(K):=\lim_{\varepsilon\downarrow0}{}^{P(\cdot)}\pi_{d,\varepsilon}^{\langle\alpha\rangle}(K). \tag{29}$$

这里，inf 取遍由满足(28)中所述性质的椭球对 K 的所有有限覆盖。K 的Hausdorff-Riemann 椭圆 d-测度为极限

$$\pi_d^{P(\cdot)}(K):=\lim_{\alpha\to\infty}{}^{P(\cdot)}\pi_d^{\langle\alpha\rangle}(K)=\sup_{\alpha>1}{}^{P(\cdot)}\pi_d^{\langle\alpha\rangle}(K). \tag{30}$$

(29) 和 (30) 中极限的存在性以及公式 (30)，可仿照第 VIA 节中类似的事实和关系加以证明。如果矩阵函数 $P(\cdot)$ 为常数，则定义 VI.1 和 VI.2 中引入的概念显然一致。若此常数为单位矩阵，则 Hausdorff-Riemann 椭圆 d-测度与第 VIA 节中的椭圆 d-测度相同。

以下引理表明，由各种矩阵函数生成的 Hausdorff-Riemann 椭圆 d-测度彼此相互作用。

引理 VI.4。设函数 $P_i:\ \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{n\times n}, i=1,2$ 满足假设 VI.1。那么对于任意紧集 $K\subset\mathbb{R}^n$,

$$\pi_d^{P_1(\cdot)}(K)\le\left[m_{P_2(\cdot)}\right]^{-d}\left[M_{P_1(\cdot)}\right]^d\pi_d^{P_2(\cdot)}(K). \tag{31}$$

证明。利用引理 VI.3 中的 iv)–vi)，可得

$$\varsigma_1^{P_1}(E)\overset{\text{v)}}{\le}\frac{\sigma_1(S_1)}{\sigma_n(S_2)}\varsigma_1^{P_2}(E)\overset{(27)}{\le}\frac{M_{P_1(\cdot)}}{m_{P_2(\cdot)}}\varsigma_1^{P_2}(E),$$

$$\begin{aligned}\operatorname{ecc}^{P_1}(E) &\overset{\text{vi)}}{\le} \frac{\sigma_1(S_1)}{\sigma_n(S_1)}\frac{\sigma_1(S_2)}{\sigma_n(S_2)}\operatorname{ecc}^{P_2}(E)\\ &\overset{(27)}{\le} \frac{M_{P_1(\cdot)}}{m_{P_1(\cdot)}}\frac{M_{P_2(\cdot)}}{m_{P_2(\cdot)}}\operatorname{ecc}^{P_2}(E),\\ \varpi_d^{P_1}(E) &\overset{\text{iv)}}{\le} \omega_d\left[P_1(x)^{1/2}P_2(x)^{-1/2}\right]\varpi_d^{P_2}(E)\\ &\overset{(16)}{\le} \omega_d\left[P_1(x)^{1/2}\right]\omega_d\left[P_2(x)^{-1/2}\right]\varpi_d^{P_2}(E)\\ &\overset{(13)}{\le} \frac{\left[M_{P_1(\cdot)}\right]^d}{\left[m_{P_2(\cdot)}\right]^d}\varpi_d^{P_2}(E). \end{aligned} \tag{32}$$

令 $\Upsilon_i(\alpha,\ \varepsilon)$ 表示覆盖的集合 $\mathfrak{E}=\{E_j\}$，其中的下确界取自式 (28)，且 $P(\cdot):=P_i(\cdot)$。根据前述内容，

$\Upsilon_1[\alpha,\varepsilon]\ \supset\ \Upsilon_2\left[\alpha_{1\to2},\varepsilon_{1\to2}\right]$，其中 $\alpha_{1\to2}:=\frac{m_{P_2(\cdot)}}{M_{P_2(\cdot)}}\frac{m_{P_1(\cdot)}}{M_{P_1(\cdot)}}\alpha$ 且 $\varepsilon_{1\to2}:=\frac{m_{P_1(\cdot)}}{M_{P_2(\cdot)}}\varepsilon$。因此

$$\begin{aligned}{}^{P_1(\cdot)}\pi_{d,\varepsilon}^{\langle\alpha\rangle}(K) &\overset{(28)}{=} \inf_{\mathfrak{E}\in\Upsilon_1(\alpha,\varepsilon)}\sum_i \varpi_d^{P_1[\mathfrak{c}(E_i)]}(E_i)\\ &\overset{(32)}{\le} \frac{\left[M_{P_1(\cdot)}\right]^d}{\left[m_{P_2(\cdot)}\right]^d}\inf_{\mathfrak{E}\in\Upsilon_1(\alpha,\varepsilon)}\sum_i \varpi_d^{P_2[\mathfrak{c}(E_i)]}(E_i)\\ &\le \frac{\left[M_{P_1(\cdot)}\right]^d}{\left[m_{P_2(\cdot)}\right]^d}\inf_{\mathfrak{E}\in\Upsilon_2[\alpha_{1\to2},\varepsilon_{1\to2}]}\sum_i \varpi_d^{P_2[\mathfrak{c}(E_i)]}(E_i).\end{aligned}$$

接下来令 $\varepsilon\to0+$ 趋于极限，再令$\alpha\to\infty$ 趋于极限，并应用 (29) 和 (30)。 □

根据引理 VI.4，豪斯多夫-黎曼椭圆测度夹在豪斯多夫 μ_d 测度和椭圆 χ_d测度之间。

推论 VI.1。设函数 $P\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{n\times n}, i=1,2$满足假设 *VI.1*。则对任意紧集 $K\subset\mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}&[m_{P(\cdot)}]^d\,\chi_d(K)\le\pi_d^{P(\cdot)}(K)\le[M_{P(\cdot)}]^d\,\chi_d(K),\\ &2^{-n}[m_{P(\cdot)}]^d\,\mu_d(K)\le\pi_d^{P(\cdot)}(K)\le[M_{P(\cdot)}]^d\,\mu_d(K).\end{aligned} \tag{33}$$

事实上，第一个和第二个不等式分别通过在 (31) 中先取 $P_1(\cdot):=P(\cdot)\ P_2(\cdot):=I_n$，再取 $P_2(\cdot):=P(\cdot)\ P_1(\cdot):=I_n$ 得到。第三个和第四个不等式由前两个不等式及 (25) 推出。

D. 豪斯多夫-黎曼测度的面积型不等式

著名的面积公式（例如参见[29]中的（定理 3.2.22）式（3））适用于自然 d以及可数（μ_d,d）可整流、μ_d 可测的集合（定义见[29]（第 3.2.14 节）） $K,Z\subset\mathbb{R}^n$。该公式指出，若 $g(\cdot)$ 是连续可微映射，且 $g(K)\subset Z$，则（在满足一些次要技术假设的条件下）

$$\int_K \omega_d\big[Dg(x)\big]\mu_d(dx)=\int_Z N(y)\mu_d(dy). \tag{34}$$

这里，$N(y)$ 是集合 $\{x:g(x)=y\}$ ($N(y):=0$（若此集合为空）中的元素个数，而 μ_d 是通常的 Hausdorff d-测度。令 $Z:=g(K)$，则（34）可直接推出以下面积型不等式:

$$\begin{aligned}\mu_d[g(K)]&\le\int_{g(K)}\underbrace{N(y)}_{\ge1}\mu_d(dy)=\int_K\omega_d\big[Dg(x)\big]\mu_d(dx)\\ &\le\mu_d(K)\sup_{x\in K}\omega_d\big[Dg(x)\big].\end{aligned}$$

本节中，我们将这一不等式推广到分数阶 d 和豪斯多夫-黎曼椭圆 d测度。（据作者所知，迄今尚无此类推广。）

在本节中，我们处理满足以下条件的映射 $g(\cdot)$。

假设 VI.2。函数 $g:\ O\to\mathbb{R}^n$ 在开集 $O\subset\mathbb{R}^n$上有定义且连续可微。

本节的主要结果如下。

定理 VI.1。设 *Asm.*VI.2 成立，矩阵函数 $P:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{n\times n}$ 满足 *Asm.* VI.1，且雅可比矩阵 $Dg(x)$ 对紧集 $K\subset O$中的任意点均为非奇异 $\sigma_n\big[Dg(x)\big]>0$。

则以下不等式成立:

$$\pi_d^{P(\cdot)}\big[g(K)\big]\ \le\ \Omega_K\pi_d^{P(\cdot)}\ (K),\quad \text{其中} \tag{35}$$

$$\Omega_K:=\max_{x\in K}\omega_d\big\{S[g(x)]\,Dg(x)\,S(x)^{-1}\big\},\quad S(x):=\sqrt{P(x)}.$$

第六节 D 的其余部分用于证明定理 VI.1，该定理的证明分解为一系列引理。根据定理 VI.1 的第三个假设，存在 $\gamma_\star>0$，使得 $\gamma_\star$-邻域 $N_{\gamma_\star}^K:=\{x\in\mathbb{R}^n:\textbf{距离}\ [x;\ K]\le\gamma_\star\}$ 的 K 包含于 O 中，且雅可比矩阵 $Dg(\cdot)$ 在其中非奇异。对于任意 $\gamma\in[0,\gamma^\star)$，我们引入导数 $Dg(\cdot)$ 的连续模:

$$\begin{aligned}\delta_{g,\gamma}(r):=\max\Big\{&\|Dg(x_1)-Dg(x_2)\|:x_1,x_2\in N_\gamma^K,\\ &\|x_2-x_1\|\le r\Big\}.\end{aligned} \tag{36}$$

根据假设 VI.2，$\delta_{g,\ \gamma}(r)\ \searrow\ 0$当 $r\ \to\ 0+$时。在下一个引理中，**直径** $M:=\sup_{x,\ y\in M}\|x-y\|\ \forall M\subset\mathbb{R}^n$。

引理 VI.5。设 $\gamma\in(0,\ \gamma_\star)$，且 $M\subset\mathbb{R}^n$ 是一个紧集，使得 $M\cap K\ne\emptyset$ 且 $r:=\textbf{直径}\ M<\gamma$。那么 $M\subset N_\gamma^K\subset O$，并且对于任意 $x_*\in M$，以下包含关系成立:

$$\begin{aligned}&g(M)\subset g(x_*)+Dg(x_*)[M-x_*]+B_0^{r\delta_{g,\gamma}(r)},\\ &g(x_*)+Dg(x_*)[M-x_*]\subset g(M)+B_0^{r\delta_{g,\gamma}(r)}.\end{aligned} \tag{37}$$

证明。我们选取 $x_*\in M\cap K$，考虑任意的 $x\in M$，并令 $x(\theta):=(1-\theta)x_*+\theta x$。那么对于任意的 $\theta\in[0,1]$,

$$\|x(\theta)-x_*\|_2=\theta\|x-x_*\|_2\le\mathbf{diam}\,M<\gamma.$$

因此，连接 x_* 和 x 的线段包含于$N_\gamma^K \subset O$中；特别地， $x \in N_\gamma^K$，从而 $M \subset N_\gamma^K$。对于 $\Delta := x - x_*$，我们有 $\|\Delta\|_2 \le$**直径**$M = r$。因此

$$\begin{aligned} &g(x) - g(x_*) - Dg(x_*)\Delta = \\ &\qquad \int_0^1 [Dg(x_* + \theta\Delta) - Dg(x_*)]\,\Delta\, d\theta, \\ &\qquad \Rightarrow \|g(x) - g(x_*) - Dg(x_*)\Delta\|_2 \\ &\le \|\Delta\| \int_0^1 \|Dg(x_* + \theta\Delta) - Dg(x_*)\|_2 \; d\theta \overset{(36)}{\le} r\delta_{g,\gamma}(r). \end{aligned}$$

还需指出，该不等式蕴含式 (37)。 □

下面列出另外一些技术性事实。

引理 VI.6. 设 $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 为正定矩阵， $E \subset \mathbb{R}^n$ 为椭球，$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 为非奇异矩阵，且 $x \in \mathbb{R}^n$。则以下关系成立：

i) $\varsigma_i^P(x + cE) = c\varsigma_i^P(E)$, $\mathrm{ecc}^P(x + cE) = \mathrm{ecc}^P(E)$, $\varpi_d^P(x + cE) = c^d\varpi_d^P(E)$ $\forall c > 0$;

ii) $\varpi_d^P(AE) \le \omega_d^P(A)\,\varpi_d^P(E)$;

iii) $E + B_0^\lambda \subset E_\lambda^+ := \mathbf{c}(E) + \left[1 + \frac{\lambda}{\varsigma_n(E)}\right][E - \mathbf{c}(E)]$, $\varpi_d(E_\lambda^+) \le \left(1 + \frac{\lambda}{\varsigma_n(E)}\right)^d \varpi_d(E)\ \forall \lambda > 0$;

iv) $\varsigma_1^P(x + AE) \le \sigma_1^P(A)\varsigma_1^P(E)$, $\varsigma_n^P(x + AE) \ge \sigma_n^P(A)\varsigma_n^P(E)$, $\mathrm{ecc}^P(x + AE) \le \frac{\sigma_1^P(A)}{\sigma_n^P(A)}\,\mathrm{ecc}^P(E)$.

该引理的证明见附录。

接下来，我们需要以下记号：

$$\sigma_\gamma^+ := \max_{x\in N_\gamma^K} \sigma_1\big[Dg(x)\big] \overset{\text{Asm. VI.2}}{<} \infty, \tag{38}$$

$$\sigma_\gamma^- := \min_{x\in N_\gamma^K} \sigma_n\big[Dg(x)\big] \overset{\text{Asm. VI.2}}{>} 0, \tag{39}$$

$$\Omega_\gamma := \max_{x\in N_\gamma^K} \omega_d\big[S(g(x))Dg(x)S(x)^{-1}\big] \overset{\text{Asm. VI.2}}{<} \infty, \tag{40}$$

$$e_{P(\cdot)} := \frac{M_{P(\cdot)}}{m_{P(\cdot)}},\ \xi_{\varepsilon,\alpha,\gamma} := 2\frac{e_{P(\cdot)}}{\sigma_\gamma^-}\alpha\delta_{g,\gamma}\left(\frac{2\varepsilon}{m_{P(\cdot)}}\right), \tag{41}$$

$$\epsilon_\gamma(\varepsilon,\alpha) := e_{P(\cdot)}M_{P(\cdot)}\sigma_\gamma^+(1 + \xi_{\varepsilon,\alpha,\gamma})\varepsilon, \tag{42}$$

$$a(\alpha) := \big[e_{P(\cdot)}\big]^4\frac{\sigma_\gamma^+}{\sigma_\gamma^-}\alpha. \tag{43}$$

引理 VI.7. 对于任意 $\gamma \in (0, \gamma_\star)$、 $\varepsilon \in \big(0, \frac{\gamma m_{P(\cdot)}}{2}\big)$、$\alpha \ge 1$以及紧集 $K \subset O$，以下不等式成立：

$$^{P(\cdot)}\pi^{\langle a(\alpha)\rangle}_{d,\epsilon_\gamma(\varepsilon,\alpha)}[g(K)] \le {}^{P(\cdot)}\pi^{\langle\alpha\rangle}_{d,\varepsilon}(K)(1 + \xi_{\varepsilon,\alpha,\gamma})^d\Omega_\gamma. \tag{44}$$

该引理在附录中得到证明。

定理 VI.1 的证明： 只需在 (A2) 中依次令 $\varepsilon \to 0+, \alpha \to \infty$ 和 $\gamma \to 0+$ ，并注意到根据 (35) 和 (40)，$\Omega_\gamma \to \Omega$ 与 $\gamma \to 0+$ 相同。

VII. 定理 III.1、IV.1 和 V.1 的证明

现在我们可以证明这些定理了。

A. 定理 III.1 的证明

由于蕴含关系**ii)** $\Rightarrow$ **i)** 是平凡的，因此只需证明**i)** $\Rightarrow$ **ii)**。为此，我们选取 $\varepsilon \in [0, 1)$，考虑定义 III.1 中**i)** 的 $\mathcal{T}(\varepsilon)$，然后选取 $T > \mathcal{T}(\varepsilon)$。设 $K \subset \mathbb{X}$为一个紧集。则由假设 III.1 和 III.2，有 $\varphi^t(K) \subset \mathbb{X}\ \forall t \ge 0$。得益于映射 φ^T的连续性，集合 $\varphi^T(K)$也是紧致的。因此可以对(5)进行迭代，从而得到

$$\mu_d\big[\varphi^{kT}(K)\big] \le \varepsilon^k\mu_d\big[K\big] \quad k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{45}$$

将任意 $t \ge 0$ 写成形式 $t = kT + \tau$，其中 $\tau \in [0, T)$且 $k \ge 0$为整数，可见

$$\mu_d\big[\varphi^t(K)\big] \overset{(25)}{\le} 2^n\chi_d\Big\{\varphi^\tau\big[\varphi^{kT}(K)\big]\Big\}.$$

将定理 VI.1 与 $P(x) := I_n\ \forall x, g(\cdot) := \varphi^\tau(\cdot)$ 应用于紧集 $\mathcal{K} := \varphi^{kT}(K)$， $\subset \mathbb{X}$ 可得

$$\chi_d\big[\varphi^\tau(\mathcal{K})\big] \le \Omega_\tau\chi_d(\mathcal{K}) \le \Omega\chi_d(\mathcal{K}), \tag{46}$$

其中 $\Omega_\tau := \max_{x\in\mathbb{X}} \omega_d\big\{D\varphi^\tau(x)\big\}, \Omega := \max^{\tau\in[0,T]}\Omega_\tau < \infty$.

因此

$$\begin{aligned} \mu_d\big[\varphi^t(K)\big] &\le 2^n\Omega\chi_d\big[\varphi^{kT}(K)\big] \overset{(25)}{\le} 2^n\Omega\mu_d\big[\varphi^{kT}(K)\big] \\ &\overset{(45)}{\le} 2^n\Omega\varepsilon^k\mu_d\big[K\big] = \frac{\Omega 2^n}{\varepsilon^{\tau/T}}\big(\varepsilon^{1/T}\big)^{kT+\tau}\mu_d\big[K\big] \\ &\overset{\varepsilon<1,\tau\le T}{\le} \frac{\Omega 2^n}{\varepsilon}\big(\varepsilon^{1/T}\big)^t\mu_d\big[K\big] = \frac{\Omega 2^n}{\varepsilon}e^{t\frac{1}{T}\ln\varepsilon}\mu_d\big[K\big]. \end{aligned}$$

由于 $\ln\varepsilon < 0$，这就完成了 **ii)** 的证明。

B. 定理IV.1与注记IV的证明。 1

这些证明之前先给出两个技术引理。

引理 VII.1。对于任意 $d \in (0,\ n]$，存在 $c_d > 0$，使得任意矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 都有一个紧集 $K \subset\mathbb{R}^n$ ，满足

$$0 < \mu_d(K) < \infty \quad \text{and} \quad \mu_d(AK) \ge c_d\omega_d(A)\mu_d(K).$$

证明： 若 $d = n$，则显然取$K := B_0^1$即可满足该断言。令 $d < n$。我们考虑 A的奇异值分解 $A = U_+\Sigma U_-$ 。其中 $U_\pm \in \mathbb{R}^{n\times n}$是正交矩阵，而 Σ 是对角矩阵**diag** $\big[\sigma_1(A)\ldots,$ $\sigma_n(A)\big]$。由于对于任意紧集 $K \subset \mathbb{R}^n$， $\mu_d(U_\pm K) = \mu_d(K)$，因此只需在假设 A 为对角 $A = \Sigma$的情况下证明该引理。

我们使用式（12）中的 $d_0 \le n-1$和 s，以及豪斯多夫维数为 s 的自相似康托集 $C \subset [0, 1]$ （其

存在性可参见例如 [28]（第4.10节）的证明），并令 $K := [0,1]^{d_0} \times C \subset \mathbb{R}^{d_0+1} \subset \mathbb{R}^n$，其中 $\mathbb{R}^{d_0+1}$ 通过在 $x \in \mathbb{R}^{d_0+1}$ 缺失的（右侧）项中补零嵌入到 $\mathbb{R}^n$。通过检查很容易看出，这种嵌入不会影响 $\mu_d(K)$。

根据[28]（第4.10节）），$0 < \mu_s(C) < \infty$。因此$\mu_d(K) > 0$由[36]（命题7.1），而定理C（其中$q := 0$，$E := [0,1]^{d_0}$，$\xi[B_x^r] := r^{d_0}$，$F := C$，$\xi'[B_x^r] := r^s$）来自[37] 保证

$$\mu_d(K) \le \mu_{d_0}\big([0,1]^{d_0}\big) \times \mu_s(C) = \mu_s(C) < \infty. \tag{47}$$

同时，$AK = [0,\sigma_1(A)] \times [0,\sigma_2(A)] \times \cdots \times [0,\sigma_{d_0}(A)] \times \sigma_{d_0+1}(A)\, C \subset \mathbb{R}^{d_0+1} \subset \mathbb{R}^n$。证明由[36]（命题7.1）完成，据此存在一个常数 c_d（仅依赖于 d），使得

$$\begin{aligned}\mu_d(K) &\ge c_d \mu_{d_0}\left([0,\sigma_1(A)] \times [0,\sigma_2(A)] \times \cdots [0,\sigma_{d_0}(A)]\right) \\ &\quad \times \mu_s(\sigma_{d_0+1}(A) C) \\ &= c_d \sigma_1(A) \times \cdots \times \sigma_{d_0}(A) \sigma_{d_0+1}(A)^s \mu_s(C) \\ &= \omega_d(A)\mu_s(C) \overset{(47)}{\ge} c_d \omega_d(A) \mu_d(K).\end{aligned}$$

定理IV.1的证明： 充分性。设 $\mathbf{\Sigma_d} < 0$。由（15），$\lim_{t\to\infty} \max_{x\in\mathbb{X}} \Sigma_d(t,x) < 0$。因此存在 $T > 0$，$\lambda > 0$，使得对 $t \ge T$，下列不等式成立

$$\max_{x\in\mathbb{X}} \Sigma_d(t,x) \le -\lambda \overset{(14)}{\Rightarrow} \omega_d\big[X(t,x)\big] \le e^{-t\lambda} \quad \forall x \in \mathbb{X}.$$

因此，对于任意紧集 $K \subset \mathbb{X}$，我们有

$$\begin{aligned}t \ge T \Rightarrow \mu_d\big[\varphi^t(K)\big] &\overset{(25)}{\le} 2^n \chi_d\big[\varphi^t(K)\big] \\ &\overset{(40),(46)}{\le} 2^n \max_{x\in\mathbb{X}} \omega_d\big[X(t,x)\big] \chi_d\big[K\big] \le 2^n e^{-t\lambda} \chi_d\big[K\big] \\ &\overset{(25)}{\le} 2^n e^{-t\lambda} \mu_d\big[K\big].\end{aligned}$$

我们记 $c := \max_{t\in[0,T]} \max_{x\in\mathbb{X}} \omega_d\big[X(t,x)\big] < \infty$。对于 $t \in [0,T]$，类似的论证表明

$$\mu_d\big[\varphi^t(K)\big] \le 2^n c \mu_d\big[K\big] = 2^n c e^{\lambda T} e^{-\lambda t} \mu_d\big[K\big].$$

因此，(6) 确实成立，其中 $\kappa := 2^n \max\{c 2^n e^{\lambda T};\ 1\}$。

必要性。设系统在 $\mathbb{X}$ 上是一致 d-收缩的。由定理 III.1，存在 $\kappa > 0$ 和 $\lambda > 0$，使得对于任意紧集 $K \subset \mathbb{X}$，(6) 均成立。我们选取$x_* \in$ **内点** $\mathbb{X}$和 $\varepsilon_* > 0$，使得 $B_{x_*}^{\varepsilon_*} \subset \mathbb{X}$。对于任意 $t > 0$，将引理 VII.1 应用于 $A := D\varphi^t(x_*) = X(t, x_*)$，可知存在一个紧集 K_t，使得

$$\begin{aligned}&0 < \mu_d(K_t) < \infty \qquad \text{and} \\ &\mu_d\big[X(t,x_*)K_t\big] \ge c_d \omega_d\big[X(t,x_*)\big] \mu_d(K_t),\end{aligned} \tag{48}$$

其中常数 $c_d > 0$ 不依赖于 t 和 ε_*。

每当 $0 < \varepsilon < \varepsilon_\dagger := \varepsilon_*/(2\text{**距离**}\,[x_*; K_t] + 1)$ 时，紧集 $K_{\varepsilon,t} := x_* + \varepsilon\big[K_t - x_*\big]$ 满足

$$\mathbf{dist}\,[x_*; K_{\varepsilon,t}] \le \varepsilon \mathbf{dist}\,[x_*; K_t] < \varepsilon_* \Rightarrow K_{\varepsilon,t} \subset B_{x_*}^{\varepsilon_*} \subset \mathbb{X},$$

$$\begin{aligned}\mu_d\big[X(t,x_*)K_{\varepsilon,t}\big] &= \varepsilon^d \mu_d\big[X(t,x_*)K_t\big] \\ &\overset{(48)}{\ge} \varepsilon^d c_d \omega_d\big[X(t,x_*)\big] \mu_d(K_t).\end{aligned} \tag{49}$$

现在我们引入光滑映射 $\psi_t(\cdot) = \mathcal{K}_{\varepsilon,t}) : 0\,0 : (,\ )$ $\varphi^t \cdot\ g \cdot = X\ t\ x_*\ \psi_t^{-1} \cdot$ 0 以及紧集 $:\varphi^t(K_{\varepsilon,\ t}) \subset \mathbb{X}$。由 (6) 可知，

$$\begin{aligned}\mu_d\big[\mathcal{K}_{\varepsilon,t}\big] &= \mu_d\big[\varphi^t(K_{\varepsilon,t})\big] \\ &\le \kappa e^{-\lambda t} \mu_d(K_{\varepsilon,t}) = \kappa \varepsilon^d e^{-\lambda t} \mu_d(K_t).\end{aligned} \tag{50}$$

与此同时，

$$\begin{aligned}&g\big[\mathcal{K}_{\varepsilon,t}\big] = X(t,x_*)\psi_t^{-1}\big[\varphi^t(K_{\varepsilon,t})\big] = X(t,x_*)K_{\varepsilon,t} \Rightarrow \\ &\mu_d\big[X(t,x_*)K_{\varepsilon,t}\big] = \mu_d\big[g(\mathcal{K}_{\varepsilon,t})\big] \overset{(25)}{\le} 2^n \chi_d\big[g(\mathcal{K}_{\varepsilon,t})\big].\end{aligned} \tag{51}$$

将定理 VI.1 应用于 $P(\cdot) := I_n$, $K := \mathcal{K}_{\varepsilon,t}$ 可得

$$\chi_d\big[g(\mathcal{K}_{\varepsilon,t})\big] \le \Omega_{\varepsilon,t} \chi_d(\mathcal{K}_{\varepsilon,t}) \overset{(25)}{\le} \Omega_{\varepsilon,t} \mu_d(\mathcal{K}_{\varepsilon,t}),$$ 其中 $\Omega_{\varepsilon,t} := \max_{y\in\mathcal{K}_{\varepsilon,t}} \omega_d\big[Dg(y)\big] = \max_{y\in\mathcal{K}_{\varepsilon,t}} \omega_d\big[X(t,x_*) D\psi_t^{-1}(y)\big]$

$$\begin{aligned}&= \max_{y\in\mathcal{K}_{\varepsilon,t}} \omega_d\Big\{X(t,x_*)X\big[t,\psi_t(y)\big]^{-1}\Big\} \\ &\overset{x:=\psi_t(y)}{=\!=} \max_{x\in K_{\varepsilon,t}} \omega_d\big[X(t,x_*)X(t,x)^{-1}\big].\end{aligned} \tag{52}$$

利用（49）和（51），我们于是得到

$$\begin{aligned}&\varepsilon^d c_d \omega_d\big[X(t,x_*)\big]\mu_d(K_t) \le \mu_d\big[X(t,x_*)K_{\varepsilon,t}\big] \\ &\le 2^n \chi_d\big[g(\mathcal{K}_{\varepsilon,t})\big] \le 2^n \Omega_{\varepsilon,t} \mu_d(\mathcal{K}_{\varepsilon,t}) \overset{(50)}{\le} 2^n \Omega_{\varepsilon,t} \kappa \varepsilon^d e^{-\lambda t} \mu_d(K_t) \\ &\Rightarrow \omega_d\big[X(t,x_*)\big] \le 2^n \Omega_{\varepsilon,t} \frac{\kappa}{c_d} e^{-\lambda t} \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_\dagger).\end{aligned}$$

由于奇异值是矩阵元素的 Lipschitz 连续函数，映射 $A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mapsto \omega_d(A)$ 是连续的。因此，根据（52），$\Omega_{\varepsilon,t} \to 1$ 当 $\varepsilon \to 0+$时。于是令 $\varepsilon \to 0+$ 取到目前为止所得的最后一个不等式中，可得对所有 $t > 0$ 和 $x_* \in \mathbf{int}\,\mathbb{X}$，

$$\begin{aligned}&\omega_d\big[X(t,x_*)\big] \le 2^n \frac{\kappa}{c_d} e^{-\lambda t} \\ &\overset{(14)}{\Rightarrow} \Sigma_d(t,x_*) \le -\lambda + \frac{\ln\kappa - \ln c_d + n\ln 2}{t}.\end{aligned}$$

证明通过援引(15)以及由假设 III.2 可知$\mathbb{X}$ 是**内部** $\mathbb{X}$ 的闭包而完成，因此$\sup_{x_*\in\text{内部}\,X} \Sigma_d(t,x_*) = \max_{x_*\in X} \Sigma_d(t,x_*)$，因为 $\Sigma_d(t,x_*)$连续依赖于 x_*。

注记 IV.1 的证明： 此证明系通过检视定理 IV.1 之证明中的充分性部分而得。

C. 定理 V.1 与注记 V.1 的证明

前面先介绍一些预备事实。第一个预备事实使用记号 $w'(\tau+) := \lim_{t\to\tau+} {}^{w(t)-w(\tau)}\,{}_{t-\tau}$ 表示函数 w~~(·) 在点 τ~~处的右导数。我们从经典微积分中的一个简单事实开始。

引理 VII.2. 设函数 $w(\cdot):[a,b]\to\mathbb{R}$ 连续，且在任意 $t\in[a,b)$ 处都存在右导数。则对任意 $\lambda\in\mathbb{R}$，以下陈述均成立：

i) 若 $w'(t+)\le\lambda\ \forall t\in[a,b)$，则 $w(\beta)\le w(\alpha)+\lambda(\beta-\alpha)$ 当 $b\ge\beta\ge\alpha\ge a$ 时成立；ii) 若 $w'\ t+\ \le\lambda w\ t\ \ w\ t\ >0\ \forall t\in[a,b\qquad w\ \beta\ \le()\,()()\,),$ $w\ \alpha\ e^{\lambda(\beta-\alpha)}$ 则 $()\,()$当 $b\ge\beta\ge\alpha\ge a$ 时成立。

证明。 i) 对于任意 $\varepsilon>0$，集合 $E:=\{t\in[\alpha,\beta]:\ w(t)\le w(\alpha)+(\lambda+\varepsilon)(t-\alpha)\}\ni\alpha$ 非空且是闭集，这是因为 $w(\cdot)$ 的连续性。因此 $\tau:=\sup\{t:\ t\in E\}\in E$。我们将证明 $\tau=\beta$。反设 $\tau<\beta$。那么对于 $t\in(\tau,\ \beta],\ t\approx\tau$，有

$$w(t)=w(\tau)+\frac{w(t)-w(\tau)}{t-\tau}(t-\tau)\overset{t\approx\tau,w'(\tau+)\le\lambda}{\le}$$
$$w(\alpha)+(\lambda+\varepsilon)(\tau-\alpha)+(\lambda+\varepsilon)(t-\tau)$$
$$=w(\alpha)+(\lambda+\varepsilon)(t-\alpha)\Rightarrow t\in E,$$

这违反了 $\tau(<t)$ 的定义。因此 $\beta\in E$。令 $\varepsilon\to0+$，证明即告完成。

ii) 只需将 i) 应用于函数 $t\mapsto\ln w(t)$。 □

另一个技术性事实来自矩阵代数。

引理 VII.3. 对于任意 $A,\ B,\ C\in\mathbb{R}^{n\times n}$,

$$\sigma_i(ABC)\le\sigma_1(A)\sigma_i(B)\sigma_1(C)\ \forall i=1,\dots,n,$$
$$\omega_d(ABC)\le\sigma_1(A)\sigma_1(C)\omega_d(B)\ \forall d\in[0,n].$$

证明。 注意到 $\|M\|_2=\sigma_1(M)\ \forall M\in\mathbb{R}^{n\times n}$，并将 $\mathbb{R}^n$ 的所有线性子空间构成的集合记为 $\mathfrak{L}$。根据奇异值的极小极大刻画，

$$\sigma_i(AB)=\min_{L\in\mathfrak{L}:\dim L=n-i+1}\max_{x\in L,\|x\|_2=1}\|ABx\|_2$$
$$\le\sigma_1(A)\min_{L\in\mathfrak{L}:\dim L=n-i+1}\max_{x\in L,\|x\|_2=1}\|Bx\|_2=\sigma_1(A)\sigma_i(B);$$
$$\sigma_i(BC)=\sigma_i(C^\top B^\top)\le\sigma_1(C^\top)\sigma_i(B^\top)=\sigma_1(C)\sigma_i(B).$$

结合刚刚确立的两个事实，我们得到引理陈述中的第一个不等式。第二个不等式由第一个不等式和 (13) 得出。□

下一个引理引自[15]。

引理 VII.4. 对于线性常微分方程 $\dot z=F(t)z$的基本矩阵 $X(t)$ $t\ge0$，若满足 $F(t)\in\mathbb{R}^{n\times n}$，且 $X(0)=I_n$，则对于任意 $t\ge0$, $d=1,\dots,n$，有

$$\omega_d\big[X(t)\big]\le\ \exp\left\{\frac12\int_0^t\sum_{i=1}^d\nu_i(\tau)\,d\tau\right\},$$

其中 $\nu_1(\tau)\ \ge\ \cdots\ \ge\ \nu_n(\tau)$ 是对称矩阵 $F(\tau)+F(\tau)^\top$的特征值。

引理 VII.5. 设引理 VII.4 中的常微分方程定义在 $t\in[-\delta,\infty)$上，其中某个 $\delta>0$，且令 $d\in[0,n]$。利用式 (12)中的 d_0 和 s，记

$$\aleph_d^+(t):=\nu_1(t)+\cdots+\nu_{d_0}(t)+s\nu_{d_0+1}(t),\tag{53}$$
$$\aleph_d^-(t):=\nu_n(t)+\cdots+\nu_{n-d_0+1}(t)+s\nu_{n-d_0}(t).$$

于是，以下不等式成立：

$$\omega_d[X(t)]\le\exp\left\{\frac12\int_0^t\aleph_d^+(\tau)\,d\tau\right\}\quad\forall t\ge0,\tag{54}$$
$$\omega_d[X(t)]\le\exp\left\{\frac12\int_0^t\aleph_d^-(\tau)\,d\tau\right\}\quad\forall t\in[-\delta,0].$$

证明. 为证明第一个不等式，记 $X:=X(t)$，并在 $i=d_0$, d_0+1 的条件下应用引理 VII.4，可得

$$\ln\big\{\sigma_1\big[X(t)\big]\cdots\sigma_{d_0}\big[X(t)\big]\big\}\le\ \frac12\int_0^t\sum_{i=1}^{d_0}\nu_i(\tau)\,d\tau,$$
$$\ln\big\{\sigma_1\big[X(t)\big]\cdots\sigma_{d_0+1}\big[X(t)\big]\big\}\le\ \frac12\int_0^t\sum_{i=1}^{d_0+1}\nu_i(\tau)\,d\tau.$$

最后，分别将第一个和第二个不等式乘以 $1-s$ 和 s，再将结果相加，同时考虑 (13) 和 (53)。

为说明 (54) 中的第二个不等式，注意到$\mathfrak{X}(\theta):=X(-\theta)$ $\theta\in[0,\delta]$ 是常微分方程 $\dot z=\mathcal{F}(\theta)z,\theta\in[0,\delta]$的基本矩阵，其中 $\mathcal{F}(\theta):=-F(-\theta)$。 $\mathcal{F}(\theta)+\mathcal{F}(\theta)^\top=-\big[F(-\theta)+F(-\theta)^\top\big]$的特征值为 $-\nu_n(-\theta)\ge\cdots\ge-\nu_1(-\theta)$。因此，由引理 VII.4可知，对于任意 $i=1,\dots,n$和 $t\in[-\delta,0]$,

$$\sigma_1\big[X(t)\big]\cdots\sigma_i\big[X(t)\big]=\sigma_1\big[\mathfrak{X}(-t)\big]\cdots\sigma_i\big[\mathfrak{X}(-t)\big]$$
$$\le\ \exp\left\{\frac12\int_0^{-t}-\big[\nu_n(-\tau)+\cdots+\nu_{n-i+1}(-\tau)\big]\,d\tau\right\}$$
$$\overset{\theta:=-\tau}{=\!=}\exp\left\{\frac12\int_0^t\big[\nu_n(\theta)+\cdots+\nu_{n-i+1}(\theta)\big]\,d\theta\right\}.$$

证明过程与式（54）中的第一个不等式的情形类似。

□

给定满足假设 V.1 以及 $t\ge0$、 $x\in\mathbb{X}$ 的映射 $P(\cdot):\mathbb{X}\to\mathbb{R}^{n\times n}$，我们引入以下记号：

$$A(x):=Df(x),X_x(t):=D\varphi^t(x),S(x):=\sqrt{P(x)},\tag{55}$$
$$Y_x(t)\ :=\ S\big[\varphi^t(x)\big]\,X_x(t)\,S(x)^{-1}.\tag{56}$$

我们还要指出，符号 $S(x)$ 和 $P(x)$ 表示轨道导数。

引理 VII.6。 如果 $x\in\mathbb{X}$，矩阵函数 $t\mapsto Y_x(t)$ 是以下常微分方程的基本解，并且 $Y_x(0)=I_n$

$$\dot z=F\big[\varphi^t(x)\big]\,z,\quad\text{where}$$
$$F(y):=S(y)A(y)S(y)^{-1}+\dot S(y)S(y)^{-1}.\tag{57}$$

证明： 公式（56）表明 $Y_x(0) = I_n$。对公式（56）求导即可完成证明：

$$\begin{aligned}\dot{Y}_x(t) &= \dot{S}\big[\varphi^t(x)\big]\, D\varphi^t(x)\, S(x)^{-1}\\ &+S\big[\varphi^t(x)\big]\, Df\big[\varphi^t(x)\big] D\varphi^t(x)\, S(x)^{-1}\\ &= \dot{S}\big[\varphi^t(x)\big] S\big[\varphi^t(x)\big]^{-1} S\big[\varphi^t(x)\big]\, D\varphi^t(x)\, S(x)^{-1}\\ &+S\big[\varphi^t(x)\big]\, AS\big[\varphi^t(x)\big]^{-1} S\big[\varphi^t(x)\big] D\varphi^t(x)\, S(x)^{-1}\\ &= F\big[\varphi^t(x)\big] Y_x(t).\end{aligned}$$

引理 VII.7. 对于任意 $x \in \mathbb{X}$，方程 (17) 的根 $\lambda_1(x) \geq \lambda_2(x) \geq \ldots \geq \lambda_n(x) \geq 0$ 构成对称矩阵 $F(x) + F(x)^\top$ 的特征值序列，并按降序排列。

证明： 注意到 $P = SS \Rightarrow P = SS + SS$。接下来只需利用式 (57) 中 $F(\cdot)$ 的定义即可得到

$$\begin{aligned}F + F^\top &= SAS^{-1} + \dot{S}S^{-1} + S^{-1}A^\top S + S^{-1}\dot{S}\\ &= S^{-1}\big[S^2A + S\dot{S} + A^\top S^2 + \dot{S}S\big]S^{-1}\\ &= S^{-1}\big[PA + A^\top P + \dot{P}\big]S^{-1} \qquad \text{and hence}\\ &\det\big[(F + F^\top) - \nu I_n\big] = 0\\ \Leftrightarrow \det\big[S^{-1}(PA + A^\top P + \dot{P})S^{-1} - \nu I_n\big] &= 0\\ \Leftrightarrow \det\big[PA + A^\top P + \dot{P} - \nu P\big] &= 0.\end{aligned}$$

下一个引理使用来自 Λ 的量 $\Xi_d^{P(\cdot)}(x) := \sup_{x\in\mathbb{X}} \Xi_d^{P(\cdot)}(x)$，其依据是定理 V.1。 (19)

引理 VII.8. 若 $\Lambda < \infty$，则以下不等式成立：

$$\omega_d[Y_x(t)] \leq e^{\frac{\Lambda}{2}t} \qquad \forall t \geq 0. \tag{58}$$

证明： 对于 $x \in \mathbb{X}$，引理 VII.5 和 VII.6 表明

$$\begin{aligned}\omega_d[Y_x(t)] &\leq \exp\Big\{\frac{1}{2}\int_0^t \Big[\sum_{i=1}^{d_0} \lambda_i[\varphi^\tau(x)] + s\lambda_{d_0+1}[\varphi^\tau(x)]\Big], d\tau\Big\}\\ &\overset{(19)}{=} \exp\Big\{\frac{1}{2}\int_0^t \Xi_d^{P(\cdot)}[\varphi^\tau(x)]\, d\tau\Big\} \overset{\varphi^\tau(x)\in\mathbb{X}}{\leq} e^{\frac{\Lambda}{2}t}.\end{aligned}$$

以下最后一个预备事实是 [27] 中命题 27 的一个直接推论。

引理 VII.9. 对于任意 $t > 0$，存在一个映射 $P(\cdot) : \mathbb{X} \to \mathbb{R}^{n\times n}$，它满足假设 *V.1*，并且满足

$$\frac{1}{2}\Xi_d^{P(\cdot)}(x) \leq \frac{1}{t}\ln\omega_d\big[X(t,x)\big] \overset{(14)}{=} \Sigma_d(t,x) \quad \forall x \in \mathbb{X}. \tag{59}$$

定理 V.1 的证明：ii）$\Rightarrow$ i）： 根据假设 III.2 和 V.1，存在 $q_\pm \in (0,\ \infty)$，使得 $\sigma_1[S(x)] \leq q_+$，$\sigma_1[S(x)^{-1}] \leq q_- \ \forall x \in \mathbb{X}$。引理 VII.3 保证

$$\begin{aligned}\omega_d\big[Y_x(t)\big] &\leq q_-q_+\omega_d\big[X_x(t)\big],\\ \omega_d\big[X_x(t)\big] &\overset{(56)}{=} \omega_d\Big\{S\big[\varphi^t(x)\big]^{-1} Y_x(t)\, S(x)\Big\}\\ &\leq q_-q_+\omega_d\big[Y_x(t)\big]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \varlimsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\ln\omega_d\big[Y_x(t)\big] &\leq \varlimsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\ln\omega_d\big[X_x(t)\big]\\ &+ \varlimsup_{t\to\infty} \frac{\ln q_-q_+}{t} = \varlimsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\ln\omega_d\big[X_x(t)\big].\end{aligned}$$

通过相同的论证，反向不等式同样成立，因此总体而言，

$$\varlimsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\ln\omega_d\big[Y_x(t)\big] = \varlimsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\ln\omega_d\big[X_x(t)\big].$$

由于 $Y_x(t+\tau) = Y_{\varphi^\tau}(t)Y_x(\tau)$，不等式 (16) 表明映射 $(t,x) \mapsto \frac{1}{t}\ln\omega_d[Y_x(t)]$ 是一个次可加余循环。因此，根据[34] 中的附录 B.6（另见[33]（定理 1）），引理 IV.1 的结论也适用于它。因此

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Sigma_d} &\overset{(14),(15)}{=\!=} \sup_{x\in\mathbb{X}} \varlimsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\ln\omega_d\big[X_x(t)\big]\\ &= \sup_{x\in\mathbb{X}} \varlimsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\ln\omega_d\big[Y_x(t)\big] \overset{(58)}{\leq} \Lambda/2 \overset{(a)}{<} 0,\end{aligned}$$

其中 (a) 根据定理 V.1 中的 ii) 成立。定理 V.1 中 i) 的证明由定理 IV.1 完成。

i) $\Rightarrow$ ii): 对于任意 $t > 0$，引理 VII.9 保证存在一个映射 $P(\cdot)$，它满足假设 V.1 和 (59)。对于任意 $\varepsilon > 0$，由 (15) 可知，只要 t 足够大，$\max_{x\in\mathbb{X}} \Sigma_d(t,x) \leq \boldsymbol{\Sigma_d} + \varepsilon$，其中 $\boldsymbol{\Sigma_d} < 0$ 根据定理 IV.1 得出。取 $\varepsilon < -\boldsymbol{\Sigma_d}/2$ 即完成证明。

注 V.1 的证明： 关于注 IV.1，只需查看定理 V.1 中 ii) $\Rightarrow$ i) 部分的证明。

VIII. 任意时刻收缩

本节讨论由满足假设 V.1 的函数 $P : \mathbb{X} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ 所产生的 Hausdorff-Riemann 椭圆 d-测度 (30)。然而，要使该测度定义正确，映射 $P(\cdot)$ 应满足假设 VI.1，尤其应定义在整个 $\mathbb{R}^n$ 上。我们进一步假设，$P(\cdot)$ 已预先从 $\mathbb{X}$ 扩展到 $\mathbb{R}^n$，以满足假设 VI.1。根据以下结果，这是可行的。

引理 VIII.1。 若 $P : \mathbb{X} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ 满足假设 V.1，则存在其到 $\mathbb{R}^n$ 的扩展，使其满足假设 VI.1。

证明。逐项应用经典的蒂策延拓定理[38] 到 $P(\cdot)$，我们首先将 $P(\cdot)$ 延拓为 $\mathbb{R}^n$ 上的连续矩阵函数 $P_1(\cdot)$，其取值为对称 $n \times n$-矩阵（不一定是正定矩阵）。随后，我们将 $P_1(\cdot)$ 变换为不仅连续而且有界的延拓 $P_2(x) := P_1(x)\,(1+\|P_1(x)\|_2)$ 距离$[x;\ \mathbb{X}]$。众所周知，距离函数 $\operatorname{dist}[x;\ \mathbb{X}] := \min_{y\in\mathbb{X}} \|x - y\|$ 是 Lipschitz 的。由于矩阵 $P_2(x) = P(x)$ 在 $\mathbb{X}$ 上是正定的，根据连续性，在 $\mathbb{X}$ 的某个邻域内同样如此：存在 $\gamma > 0$、$\alpha > 0$ 使得 $P_2(x) \geq \alpha I_n \ \forall x \in N_\gamma^{\mathbb{X}}$。记 $p := \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \|P_2(x)\|_2$，容易看出函数 $P(x) := P_2(x) + 2p^{1+\gamma}$ 距离$[x\ \mathbb{X}]^{1+\gamma} I_n$ 距离$[x;\ \mathbb{X}]$ 满足假设 VI.1，并延拓了 $P(\cdot)$。 □

按照定义 III.2 的含义，均匀 d-压缩性意味着，只有经过一段可能很长的时间后，才能观察到 d-测度的收缩。本节将说明，在对 Hausdorff-Riemann 椭圆型 d-测度进行特殊选择的情况下，这种收缩会在无穷小的时间内开始生效，并且在任意时刻都可观察到。此外， d-测度还会以下文引入的增强意义衰减。

定义 VIII.1. 设 $z_\mathfrak{z}(\cdot):\ [0,\infty)\ \to\mathbb{R}$ 是一个依赖于参数 $\mathfrak{z}\in\mathfrak{Z}$的函数。若存在 $\varepsilon>0$ 使得 $z_\mathfrak{z}(t)\ \le e^{-\varepsilon(t-\tau)}z_\mathfrak{z}(\tau)$ $\forall t\ge\tau\ge 0,\mathfrak{z}\in\mathfrak{Z}$，则称该函数以指数强度一致衰减。

若 $z_\mathfrak{z}(\cdot)$ 是关于 t 的绝对连续函数，则定义 VIII.1 中的性质成立，当且仅当对于几乎所有 t ，只要 $\mathfrak{z}\in\mathfrak{Z}$，就有 $\dot z_\mathfrak{z}(t)\le-\varepsilon z_\mathfrak{z}(t)$。

事实上，以下结果是本文的关键结论。

定理 VIII.1. 假设条件 III.1 和III.2成立。则以下命题等价:

i) *The system* (2) *is uniformly d-contractive on* $\mathbb{X}$*;*

ii)存在一个矩阵函数 $P:\ \mathbb{X}\ \to\ \mathbb{R}^{n\times n}$，使得条件 V.1 成立，且相应的 ***Hausdorff-Riemann*** 椭圆 d-测度 $\pi_d^{P(\cdot)}\big[\varphi^t(K)\big]$在紧子集 $K\subset\mathbb{X}$ 上一致地以指数强度衰减，其中 $\pi_d^{P(\cdot)}\big[K\big]<\infty$。

正如将要证明的那样，该定理几乎可直接由以下推论得出。

命题 VIII.1. 设假设III.1 和III.2 成立，映射 $P(\cdot):\mathbb{X}\ \to\ \mathbb{R}^{n\times n}$ 满足假设V.1，且 $\Lambda:=\sup_{x\in\mathbb{X}}\Xi_d^{P(\cdot)}(x)\ <\ \infty$，其中 $\Xi_d^{P(\cdot)}(x)$ 由 (19)定义。那么，对于任意具有有限 ***Hausdorff–Riemann*** 椭圆 d-测度且满足 $t\ge\tau\ge0$ 的紧集 $K\subset\mathbb{X}$ ，

$$\pi_d^{P(\cdot)}\big[\varphi^t(K)\big]\ \le\ e^{\Lambda(t-\tau)/2}\ \pi_d^{P(\cdot)}\big[\varphi^\tau(K)\big]. \tag{60}$$

此外，若$\inf_{x\in\mathbb{X}}\lambda_n\ x\ >\ -\infty$ $\Upsilon\ t\ =\ \pi_d^{P(\cdot)}\big[\varphi^t\ K\ \big]$ $\dot\Upsilon\ t\ \le\ ()$，则函数$():()$绝对连续，且对几乎所有 $t\ge0$，都有$()\ \Lambda\Upsilon(t)/2$ 。

为证明这一点，我们采用记号 (55)、(56)，并通过例如 [39] （第二章，推论 2.1），将流 $\varphi^t(x)\ x\in O$ 从 $t\in[0,\infty)$ 延拓至 $[-\delta,\infty)$，其中某个 $\delta>0$ （可能需要缩小假设 III.1 中的开集 O ）。我们还假设 $e^{-\infty}:=0$，引用 (12) 中的 d_0 和 s ，令 $d_0^{\leftarrow}:=n-d_0+1$，并引入以下记号:

$$\Xi_{d,\leftarrow}^{P(\cdot)}(x)=\lambda_n(x)+\cdots+\lambda_{d_0^{\leftarrow}}(x)+s\lambda_{n-d_0}(x), \tag{61}$$

$$\Lambda_-\ :=\ \inf_{x\in\mathbb{X}}\Xi_{d,\leftarrow}^{P(\cdot)}(x). \tag{62}$$

引理 VIII.2. 对于任意具有有限 ***Hausdorff-Riemann*** 椭圆 d-测度的紧集 $K\subset\mathbb{X}$ 以及 $t\ge\tau\ge0$，不等式 (60) 成立，并且当另外还有 $t-\tau\le\delta$ 时，

$$e^{\Lambda_-(t-\tau)/2}\ \pi_d^{P(\cdot)}\big[\varphi^\tau(K)\big]\le\pi_d^{P(\cdot)}\big[\varphi^t(K)\big]. \tag{63}$$

证明: 我们引入 $\mathbb{X}$ 的依赖于 θ 的 ($\theta\ge0$) 紧致子集 $\mathcal{K}_\theta:=\varphi^\theta(K)$，并注意到

$$\mathcal{K}_0=K,\quad \mathcal{K}_t=\varphi^{t-\tau}(\mathcal{K}_\tau)\quad\text{if}\quad t-\tau\ge-\delta,t\ge0,\tau\ge0.$$

设 $t\ge\tau\ge0$ 。利用定理 VI.1 以及关系 $\mathcal{K}_t=\varphi^{t-\tau}[\varphi^\tau($ $K)],$，我们推得

$$\pi_d^{P(\cdot)}\big[\mathcal{K}_t\big]\le\Omega_{t-\tau,\tau}\times\pi_d^{P(\cdot)}\big[\mathcal{K}_\tau\big],\qquad\text{where}\tag{64}$$

$$\Omega_{\theta,\eta}:=\max_{x\in\mathcal{K}_\eta}\omega_d\big\{S[\varphi^\theta(x)]\,D\varphi^\theta(x)\,S(x)^{-1}\big\}$$

$$\overset{(56)}{=}\max_{x\in\mathcal{K}_\eta}\omega_d\big[Y_x(\theta)\big]\ \overset{(58)}{\le}\ e^{\frac{\Lambda}{2}\theta}\ \Rightarrow\ (60).$$

假设 $t-\tau\le\delta$。若 $\Lambda_-=-\infty$，则 (63) 显然成立。设 $\Lambda_->-\infty$。与 (64) 类似，由定理 VI.1 和关系 $\mathcal{K}_\tau=\varphi^{\tau-t}(\mathcal{K}_t)$ 可得

$$\pi_d^{P(\cdot)}[\mathcal{K}_\tau]\le\Omega_{\tau-t,t}\times\pi_d^{P(\cdot)}\big[\mathcal{K}_t\big],$$

$$\Omega_{\tau-t,t}=\max_{x\in\mathcal{K}_t}\omega_d\big[Y_x(\tau-t)\big]\overset{(61),\ \text{Lem. VII.5–VII.7}}{\le}$$

$$\max_{x\in\mathcal{K}_t}\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^{t-\tau}\Xi_{d,\leftarrow}^{P(\cdot)}[\varphi^{-\theta}(x)]\,d\theta\right\},$$

其中 $\varphi^{-\theta}(x)\ \in\mathbb{X}\ \forall x\in\mathcal{K}_t,\ \ \theta\in[0,(t-\tau)]$。由 (62),

$$\pi_d^{P(\cdot)}[\mathcal{K}_\tau]\le e^{-\Lambda_-(t-\tau)}\pi_d^{P(\cdot)}\big[\mathcal{K}_t\big]\Rightarrow(63).$$

命题 VIII.1 的证明: 由引理 VIII.2 可得 (60)。

令 $\inf_{x\in\mathbb{X}}\lambda_n(x)\ >-\infty$。则由 (18)、(61) 和 (62) 可得 $\Lambda_->-\infty$。我们还注意到 $e^z-1\le e^zz,\ \ e^{-z}-1\ge -z\ \forall z\ge0$。对于任意 $T>0$，以及来自 $[0,T]$ 的两个点，按升序分别记为 τ 和 t ，有

$$(63)\Rightarrow\Upsilon(t)-\Upsilon(\tau)\le\left[e^{\Lambda(t-\tau)/2}-1\right]\Upsilon(\tau)\tag{65}$$

$$\le\frac{\Lambda}{2}e^{\Lambda(t-\tau)/2}(t-\tau)\le\frac{\Lambda}{2}e^{\Lambda T/2}(t-\tau),$$

$$\Upsilon(t)-\Upsilon(\tau)\ge\left[e^{\Lambda_-(t-\tau)/2}-1\right]\Upsilon(\tau)$$

$$\ge\left[e^{-|\Lambda_-|(t-\tau)/2}-1\right]\Upsilon(\tau)\ge-|\Lambda_-|(t-\tau)/2,$$

$$|\Upsilon(t)-\Upsilon(\tau)|\le|t-\tau|\max\left\{\frac{\Lambda}{2}e^{\Lambda T/2};|\Lambda_-|\right\}.$$

由此可见，函数 $\Upsilon(\cdot)$是 Lipschitz 的，因而绝对连续[29] （定理 2.9.19）。不等式$\Upsilon(t)\ \le\Lambda\Upsilon(t)/2$ 可由(65)中的不等式直接得出。

定理 VIII.1 的证明：i) $\Rightarrow$ ii) 这可由定理 V.1、定义 VIII.1 和命题 VIII.1 直接得出。反之，蕴含关系**ii)** $\Rightarrow$ **i)**可由定义 5 与 VIII.1 以及 (33) 直接得到。

IX. 双收缩与轨道稳定性

本节有两个目的。首先，说明可以通过一个构造性判据验证自治常微分方程的周期解的

轨道稳定性。该判据类似于定理 V.1 中 ii) 的条件，并涉及代数方程（17）的根。更具体地说，本文采用定理 V.1 中取特定值 $d = 2$ 时的判据，并证明它等价于著名的轨道稳定性安德罗诺夫–维特条件。其次，本文证明，该条件实际上是系统在周期轨道的一个足够窄的管状邻域上一致 2-收缩性的判据。本节主要结果的易处理性将在第 X 节 C 中展示。

我们仍考虑自治常微分方程 (2)，使用记号 (55)，并进一步假设常微分方程 (2) 存在一个 T-周期解 $x_\star(t) = x_\star(t+T) = x(t,\ x^o)$，其中 $T > 0$ 是最小周期。令 $M := X_{x^0}(T)$ 表示单值矩阵，并令 $\varrho_1,\ \ldots,\ \varrho_n$ 为弗洛凯乘子，即 M 的特征值（按各自的代数重数重复计数），并按模的非增顺序排列：

$$|\varrho_1| \geq |\varrho_2| \geq \cdots \geq |\varrho_n|.$$

众所周知，1 是这些特征值之一，这是由所讨论的解的周期性推得的。安德罗诺夫–维特条件 由 $|\varrho_2| < 1$构成，并保证 $x_\star(\cdot)$ 渐近轨道稳定且存在渐近相位。

由于 T 是最小周期，$t \mapsto x := x_\star(t)$ 是圆 $[0, T]$（其中 T 与 0 粘合）到（紧致）像 $\Gamma := x_\star\big([0, T]\big)$（即周期轨道）的同胚。这使我们可以将 $x \in \Gamma$ 的任意连续函数视为关于 t 的连续且 T-周期函数，反之亦然。特别地，我们将满足假设 V.1 且 $\mathbb{X} := \Gamma$ 的映射 $P(\cdot)$，以及方程 (17) 的相关根，都视为关于时间的 T-周期函数。

IX.1 定义。周期轨道 Γ 的一个正则管状邻域 是任何满足假设III.2且其内部包含轨道 Γ的集合 $\mathbb{X}$。

现在我们可以陈述第九节的主要结果了。

定理 IX.1。以下陈述等价：

i) $x_\star(\cdot)$满足安德罗诺夫–维特条件；

ii) 存在一个 T-周期的连续正定分段连续可微函数$P(\cdot) \in \mathbb{R}^{n\times n}$，使得 $\lambda_1(t)+\lambda_2(t) < 0 \forall t \geq 0$；

iii)存在一个 Γ 的正则管状邻域，在该邻域上系统(2)是一致2-收缩的。

该定理在第九节A节中得到证明，并推广了[18] (定理 3.2.2，第 117 页)、[35](推论 2.12，第 72 页) 以及 [32] 中的一些结果。

周期解的轨道稳定性传统上通过庞加莱 ′截面法来验证：周期轨道对应于庞加莱 ′映射的一个不动点，而渐近轨道稳定性则由该映射在不动点附近、沿庞加莱 ′截面以及通常意义下的局部收缩性质保证，且在通常意义下，该映射在不动点附近的局部收缩性质也能保证这一点。与此相反，定理 IX.1 给出了一个与时间连续且与截面无关的判据。我们认为，该定理在稳定自治系统的周期轨道时尤其有用。事实上，此时构造并分析庞加莱 ′映射可能相当繁琐；而定理 IX.1 的条件一方面与标准连续时间设计方法的理念一致，另一方面也显示出其有望具备构造性、易于处理且便于实现的特点。第 X 节 C 给出了一个示例。

注 IX.1. 设定理IX.1 中的等价陈述i)–iii) 成立。那么在 ii)中，可以选择函数 $P(\cdot)$，使得根 $\lambda_i(t)$ 不随时间变化。

该注释的证明见第九节 A。

最后，我们指出，定理 VIII.1 与定理 IX.1 中的 iii) 蕴含如下事实。在安德罗诺夫–维特条件下，周期轨道的某个正则管状邻域可以配备一个黎曼度量，使得在动力流的作用下，该邻域中任意紧致子集的豪斯多夫–黎曼椭圆 2-测度以指数强度持续衰减，并且这种衰减对所有此类子集是一致的。

A. 定理 IX.1 与注记 IX.1 的证明。

这些证明以若干技术引理开篇，并在其间穿插这些引理。

引理 IX.1. 对任意矩阵 $G \in \mathbb{R}^{n\times n}$，存在一个相似的实矩阵 E，其奇异值可以任意接近 G的特征值 η_i 的模：对任意$\varepsilon > 0$，存在 E，使得 $|\sigma_i(E) - |\eta_{j_i}|| < \varepsilon$ 对每一个 i 成立，其中置换 $\{j_i\}$ 是对$1, \ldots, n$适当选取的。

证明。为清晰起见，我们先假设 $\eta_j \in \mathbb{R}\ \forall j$。在 $\mathbb{R}^n$的基 e_1、.....、 e_n下， G具有标准若尔当形；若有必要，对 η_i重新编号后，我们有 $Ge_1 = \eta_1 e_1, Ge_i = \eta_i e_i + \alpha_i e_{i-1}\ \forall i \geq 2$，其中 $\alpha_i = 0$ 或 α_i=1。现在取$\kappa \in (0, 1)$，并考虑 $\mathbb{R}^n$的基ζ_1，$\ldots \zeta_n$下 G 的矩阵 E_κ，其定义为 $\zeta_i := \kappa^i e_i$。该矩阵与 G 相似。此外，$G\zeta_1 = \eta_1\zeta_1, G\zeta_i = \eta_i\zeta_i + \alpha_i\kappa\zeta_{i-1}\ \forall i \geq 2$，因此 $E_\kappa = D + \Delta_\kappa$，其中 $D := \mathrm{diag}(\eta_1, \ldots, \eta_n)$，而 Δ_κ 的所有元素均为零，某些位置上对角线以上的κ除外。同时，随着 $\kappa \to 0+$，$E_\kappa^\top E_\kappa = \mathrm{diag}(|\eta_1|^2, \ldots, |\eta_n|^2)$ $+ \Delta_\kappa^\top D + D\Delta_\kappa + \Delta_\kappa^\top\Delta_\kappa \to \mathrm{diag}(|\eta_1|^2, \ldots, |\eta_n|^2)$。由于对称矩阵的特征值随其元素连续变化[40]（第109页，定理5.2），只需根据奇异值的定义，取足够小的 $\kappa > 0$ 即可。

一般情形 $\eta_j \in \mathbb{C}$也可类似地处理，方法是使用 G 的实分块对角若尔当标准形。 □

下面的引理讨论系数 $A(t)$ 为 T-周期的线性常微分方程（1）。

引理 *IX.2.* 设 $P(\cdot)$ 是一个 T-周期、连续且正定的 $n\times n$ 矩阵函数，并且 $\lambda_1(t)\geq\lambda_2(t)\geq\ldots\geq\lambda_n(t)\geq 0$ 是相关代数方程（*17*）的根，其中 $x:=t$。对于任意非奇异矩阵 $Q\in\mathbb{R}^{n\times n}$，它们同时也是为 $\mathcal{A}(t)$ 写出的相似代数方程的根：$=QA(t)Q^{-1}$并且 $\mathcal{P}(t):=Q^{-\top}P(t)Q^{-1}$。此外，函数 $\mathcal{P}(\cdot)$ 是 T-周期且连续、正定的；此外，若 $P(\cdot)$ 是分段连续可微的，则它也是分段连续可微的。

证明。最后一句中列出的性质显而易见。后一个代数方程如下

$$\begin{aligned}0&=\det\left[\mathcal{A}(t)^\top\mathcal{P}(t)+\mathcal{P}(t)\mathcal{A}(t)+\dot{\mathcal{P}}(t)-\lambda\mathcal{P}(t)\right]\\&=\det\left[\left(QAQ^{-1}\right)^\top Q^{-\top}PQ^{-1}+Q^{-\top}PQ^{-1}\left(QAQ^{-1}\right)\right.\\&\qquad\left.+Q^{-\top}\dot{P}Q^{-1}-\lambda Q^{-\top}PQ^{-1}\right]\\&=\det\left[Q^{-\top}A^\top PQ^{-1}+Q^{-\top}PAQ^{-1}+Q^{-\top}\dot{P}Q^{-1}\right.\\&\qquad\left.-\lambda Q^{-\top}PQ^{-1}\right]\\&=\det Q^{-\top}\det\left[A^\top P+PA+\dot{P}-\lambda P\right]\det Q^{-1}.\end{aligned}$$

因此，引理中提到的两个代数方程显然等价，证明完毕。□

IX.3 引理。 蕴含关系 **i**) ⇒**ii**) 成立。

证明。在证明中，根据引理 IX.2，可以将 (55) 中的函数 $A(t)$ 替换为任意相似矩阵函数 $QA(t)Q^{-1}$。这将 (55) 中的线性化流 $X_{x^0}(t)$ 变为共轭流 $QX_{x^0}(t)Q^{-1}$，并将单值矩阵 $M=X_{x^0}(T)$ 变为相似矩阵$\mathcal{M}:=QMQ^{-1}$。除 1 以外，M 的谱根据 Andronov-Witt 条件位于球 $B_0^\rho\subset\mathbb{C}$ 中（其中 $\rho:=|\varrho_2|<1$）。我们选取足够小的 $\kappa>0$，使得 $(1+\kappa)(\varrho+\kappa)<1$。然后利用引理 IX.1，选取 Q，使得$|\sigma_1(\mathcal{M})-1|<\kappa$，并且 $\sigma_i(\mathcal{M})<\varrho+\kappa\ \forall i\geq 2$，从而对于这样的 i，$\sigma_1(\mathcal{M})\sigma_i(\mathcal{M})<(1+\kappa)(\varrho+\kappa)<1$。综上并恢复初始记号，可得不失一般性地，证明可以在假设 $\sigma_1(M)\sigma_2(M)<1$ 的条件下进行。

令$\mathbf{Ln}\,R$ 表示正定矩阵 $R=R^\top\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 的主对数。我们定义

$$\Xi:=T^{-1}\mathbf{Ln}\,(M^\top M),\quad P(t)=X_{x^0}(t)^{-\top}e^{\Xi t}X_{x^0}(t)^{-1}.$$

Ξ 的特征值 $\eta_1\geq\eta_2\geq\ldots\geq\eta_n$ 等于 $\eta_i=\frac{2}{T}\ln\sigma_i(M)$，因此

$$\eta_1+\eta_2<0. \tag{66}$$

函数 $P(\cdot)$ 是 C^1 光滑的，$P(0)=I_n$，且

$$\begin{aligned}P(T)&=X_{x^0}(T)^{-\top}e^{\Xi T}X_{x^0}(T)^{-1}\\&=M^{-\top}(M^\top M)M^{-1}=I_n=P(0),\\\dot{P}(t)&=-X_{x^0}(t)^{-\top}e^{\Xi t}X_{x^0}(t)^{-1}\dot{X}_{x^0}(t)X_{x^0}(t)^{-1}\\&\quad-X_{x^0}(t)^{-\top}\dot{X}_{x^0}(t)^\top X_{x^0}(t)^{-\top}e^{\Xi t}X_{x^0}(t)^{-1}\\&\quad+X_{x^0}(t)^{-\top}e^{\Xi t}\Xi X_{x^0}(t)^{-1}\end{aligned}\tag{67}$$

$$\begin{aligned}&=-X_{x^0}(t)^{-\top}e^{\Xi t}X_{x^0}(t)^{-1}A(t)X_{x^0}(t)X_{x^0}(t)^{-1}\\&\quad-X_{x^0}(t)^{-\top}X_{x^0}(t)^\top A(t)^\top X_{x^0}(t)^{-\top}e^{\Xi t}X_{x^0}(t)^{-1}\\&\quad+X_{x^0}(t)^{-\top}e^{\Xi t/2}\Xi e^{\Xi t/2}X_{x^0}(t)^{-1}\\&=-P(t)A(t)-A(t)^\top P(t)+Z(t)^{-\top}\Xi Z(t)^{-1},\\&\text{where } Z(t):=X_{x^0}(t)e^{-\Xi t/2}.\end{aligned}\tag{68}$$

我们接下来注意到，$P(t):=Z(t)^{-\top}Z(t)^{-1}$。因此

$$\begin{aligned}&\det\left[P(t)A(t)+A(t)^\top P(t)+\dot{P}(t)-\lambda P(t)\right]\\&\quad=\det\left[Z(t)^{-\top}\Xi Z(t)^{-1}-\lambda Z(t)^{-\top}Z(t)^{-1}\right]\\&\quad=\det Z(t)^{-\top}\det\left[\Xi-\lambda I_n\right]\det Z(t)^{-1}.\end{aligned}\tag{69}$$

由 (66) 并将$P(\cdot)$从 $[0,T]$ 延拓至 $\mathbb{R}$，使其成为连续的 T-周期函数，即可完成证明；根据 (67)，这是可行的。□

注 IX.1 的证明： 由 (69) 可立即得到此注，其中表明根 $\lambda_i(t)$ 同时也是时不变矩阵 Ξ 的特征值。

IX.4 引理。 蕴含关系 **ii**) ⇒**i**) 成立。

证明： 应用引理 VII.8，其中取 $d=2$ 和$\mathbb{X}:=x_\star([0,T])$（并注意到，假设 III.2 对 $\mathbb{X}$ 内部的要求，以及导数 $P(\cdot)$ 的连续性，在引理 VII.8 的证明中均未用到），可推得 $\omega_2[Y_x(t)]\leq e^{\frac{\Lambda}{2}t}\ \forall t\geq 0$，其中$\Lambda:=\max_{x\in\mathbb{X}}[\lambda_1(x)+\lambda_2(x)]=\max_{t\in[0,T]}[\lambda_1(t)+\lambda_2(t)]<0$。因此 $\omega_2[Y_{x^0}(t)]\xrightarrow{t\to\infty}0$，并且

$$\begin{aligned}\omega_2[X_{x^0}(t)]&\overset{(56)}{=}\omega_2\Big\{S\big[\varphi^t(x^0)\big]^{-1}Y_{x^0}(t)\,S(x^0)\Big\}\\&\overset{(16)}{\leq}\omega_2[Y_{x^0}(t)]\times\sup_{t\geq 0}\omega_2\Big\{S\big[\varphi^t(x^0)\big]^{-1}\Big\}\times\omega_2\Big\{S(x^0)\Big\}.\end{aligned}$$

Here

$$\sup_{t\geq 0}\omega_2\Big\{S\big[\varphi^t(x^0)\big]^{-1}\Big\}=\max_{t\in[0,T]}\omega_2\Big\{S\big[\varphi^t(x^0)\big]^{-1}\Big\}<0$$

由于函数 $t\mapsto\varphi^t(x^0)$的周期性，因此 $\omega_2[X_{x^0}(t)]\xrightarrow{t\to\infty}0$。对于单值矩阵$M:=X_{x^0}(T)$，这意味着 $\omega_2(M^k)\to 0$当 $k\to\infty$时成立。同时，M^k 的特征值的模由 $|\varrho_1|^k=1\geq|\varrho_2|^k\geq\ldots\geq\|\varrho_n|^k$给出。因此，根据 Weyl 不等式[30] (第 171 页)，

$$|\varrho_2|^k=|\varrho_1|^k|\varrho_2|^k\leq\omega_2(M^k)\xrightarrow{k\to\infty}0\Rightarrow|\varrho_2|<1.$$

由于最小周期 $T>0$，导数 $\dot{x}_\star(t)\neq 0\ \forall t$，因此 $t\mapsto x_*(t)$ 是一个正则的 C^2 光滑 Jordan 闭曲线 $\Gamma:=x_\star([0,T])$（周期轨道）的参数表示。我们将 t 视为点 $x\in\Gamma$ 的循环坐标。由于 Γ 的正则性，存在 $\gamma^\dagger>0$，使得对于 $x\in N_{\gamma^\dagger}^\Gamma:=\{x:\ \textbf{距离}\ [x;\ \Gamma]<\gamma^\dagger\}$，最短距离点 $q(x)\in\Gamma,\|q(x)-x\|=\textbf{距离}\ [x;\ \Gamma]$是唯一的，且映射 $x\mapsto q(x)$是 C^1-光滑的[41,42]。

引理 IX.5. 如果 $\gamma^\dagger > 0$ 足够小，则映射

$\circ x \in N_{\gamma^\dagger}^\Gamma \mapsto \mathcal{T}(x) := t[q(x)]$ 是 C^1-光滑的，并且

$$D\mathcal{T}(x)v = \frac{\langle v; f(y)\rangle}{\|f(y)\|_2^2 + \langle y - x; Df(y)f(y)\rangle}, \tag{70}$$

其中 $y := q(x)$ 且分母非零。

$\circ$证明。当 $\gamma^\dagger > 0$ 足够小时，映射 $x \in N_{\gamma^\dagger}^\Gamma \mapsto q(x)$ 的 C^1-光滑性是一个经典结论；例如参见[41–43]。这意味着 $\mathcal{T}(\cdot)$ 的光滑性。

由于 $\min_t \|x(t,x^0) - x\|^2$ 在 $t = \mathcal{T}(x)$ 处取到最小值，费马定理给出

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt}\|x(t,x^0) - x\|^2|_{t=\mathcal{T}(x)} = 2\langle q(x) - x; f[q(x)]\rangle \\ &= \big\langle x\big[\mathcal{T}(x), x^0\big] - x; f\big\{x\big[\mathcal{T}(x), x^0\big]\big\}\big\rangle \qquad \forall x. \end{aligned}$$

通过求导可知，对于任意 $v \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} 0 = &\big\langle \dot{x}\big[\mathcal{T}(x), x^0\big]; f\big\{x\big[\mathcal{T}(x), x^0\big]\big\}\big\rangle\, D\mathcal{T}(x)v \\ &- \big\langle v; f\big\{x\big[\mathcal{T}(x), x^0\big]\big\}\big\rangle \\ + \big\langle x\big[\mathcal{T}(x), x^0\big] - x; &Df\big\{x\big[\mathcal{T}(x), x^0\big]\big\}\dot{x}\big[\mathcal{T}(x), x^0\big]\big\rangle\, D\mathcal{T}(x)v \\ = &\Big\{\|f[q(x)]\|_2^2 + \langle q(x) - x; Df[q(x)]f[q(x)]\rangle\Big\} D\mathcal{T}(x)v \\ &- \langle v; f[q(x)]]\rangle\,. \end{aligned}$$

要完成证明，还需指出

$$\begin{aligned} &\inf_{x \in \overset{\circ}{N}_{\gamma^\dagger}^\Gamma} \|f[q(x)]\|_2^2 = \min_{x\in\Gamma} \|f[x]\|_2^2 > 0, \\ &\sup_{x \in \overset{\circ}{N}_{\gamma^\dagger}^\Gamma} \Big\| \langle q(x) - x; Df[q(x)]f[q(x)]\rangle \Big\| \\ &\qquad \le \gamma^\dagger \max_{x\in\Gamma} \|Df(x)f(x)\| < \infty \end{aligned}$$

因此，当 $\gamma^\dagger \approx 0$ 时，(70) 中的分母非零。 □

除了假设 V.1，我们还将考虑其一种放宽形式：将对轨道导数的轨道连续性要求替换为较弱的性质，即该导数的轨道分段连续性。通过检查证明不难看出，在对假设 V.1 作此放宽后，定理 V.1 仍然成立。

IX.6 引理。 设 $\mathcal{P}(\cdot)$ 是一个 T-周期的、连续的、正定的且分段连续可微的$n \times n$矩阵函数。对于足够小的 $\gamma \in (0, \gamma^\dagger)$,

$\circ$函数 $x \in N_\gamma^\Gamma \mapsto P(x) := \mathcal{P}[\mathcal{T}(x)]$ 满足放宽后的假设 V.1，并且对所有 $x \in \overset{\circ}{N}_\gamma^\Gamma$，其轨道导数 $\dot{P}(x)$都可以任意接近 $\mathcal{P}[\mathcal{T}(x)]$。

$\circ$证明。令 $\gamma \to 0+$。则对 $\xi \in N_\gamma^\Gamma$ 一致地，首先，$\|x(t,\xi) - q[x(t,\xi)]\| \to 0$；其次，对于 $t \approx 0$,

$$\frac{d\mathcal{T}[x(t,\xi)]}{dt} = D\mathcal{T}[x(t,\xi)]\dot{x}(t,\xi)$$

$$\overset{(70)}{=} \frac{\langle f[x(t,\xi)]; f[q(x(t,\xi))]\rangle}{\|f[q(x(t,\xi))]\|_2^2 + \mathcal{R}} \to 1, \quad \text{where} \tag{71}$$

$$\mathcal{R} := \langle q(x(t,\xi)) - x(t,\xi); Df[q(x(t,\xi))]f[q(x(t,\xi))]\rangle\,.$$

如果 $\gamma > 0$ 足够小，则函数 $t \mapsto \mathcal{T}[x(t,\xi)]$ 因此是单调的。因此，函数 $t \mapsto P[x(t,\xi)] = \mathcal{P}\big\{\mathcal{T}[x(t,\xi)]\big\}$ 是分段连续可微的；所以它满足放宽后的假设 V.1。此外，

$$\begin{aligned} \dot{P}(\xi) = \frac{d}{dt}P[x(t,\xi)]|_{t=0} &= \frac{d}{dt}\mathcal{P}\big\{\mathcal{T}[x(t,\xi)]\big\}\Big|_{t=0} \\ &= \dot{\mathcal{P}}[\mathcal{T}(\xi)]\,\frac{d}{dt}\frac{d\mathcal{T}[x(t,\xi)]}{dt}\Big|_{t=0} \\ &= \dot{\mathcal{P}}[\mathcal{T}(\xi)]\frac{\langle f(\xi); f[q(\xi)]\rangle}{\|f(\xi)\|_2^2 + \langle q(\xi) - \xi; Df(\xi)f(\xi)\rangle}. \end{aligned}$$

通过调用 (71)，证明即告完成。 □

定理 IX.1 的证明： 引理 IX.3 和 IX.4 证明了i) $\Leftrightarrow$ ii)之间的等价性。

iii) $\Rightarrow$ii)： 将定理 V.1 的 i) $\Rightarrow$ ii) 部分应用于所考虑的周期解 $x_\star(\cdot)$ 的管状邻域，再将定理 V.1 中 ii) 的矩阵函数 $P(\cdot)$ 与 $x_\star(\cdot)$ 叠加，即可得到这一结论。

i) $\Rightarrow$ iii)： 根据上述内容，ii) 中的陈述也成立。设 $\mathcal{P}(\cdot)$ 是具有 ii) 中所述性质的矩阵函数。将引理 IX.6 应用于 $\mathcal{P}(\cdot)$，我们

$\circ$引入函数 $P(x) = \mathcal{P}[\mathcal{T}(x)]$，其定义于 $x \in N_\gamma^\Gamma$和$\gamma_* \in (0, \gamma^\dagger)$ 上，使得 $P(\cdot)$ 满足关于 $\gamma := \gamma_*$的宽松假设 V.1。引理 IX.6 的最后一条陈述意味着

$\circ$对于所有 $x \in N_{\gamma_*}^\Gamma$，与 $P(x)$ 相关的代数方程（17）的系数都可以任意接近与 $\mathcal{P}[\mathcal{T}(x)$ 相关的类似方程中对应的系数，] 前提是适当减小 $\gamma_* > 0$ 。由于根随系数连续变化（例如参见 [44]），对应的根也可以任意接近。这样一来，条件

$\circ\lambda_1(x) + \lambda_2(x) < 0\ \forall x \in x \in N_{\gamma_*}^\Gamma$ 可通过从 ii) 中关于 $\mathcal{P}(\cdot)$ 的类似条件继承而得到保证。

根据安德罗诺夫–维特定理，$x_\star(\cdot)$ 是渐近轨道稳定的。因此，存在 $\varepsilon > 0$ 使得

$$\begin{aligned} x(t,\xi) \in \overset{\circ}{N}_{\gamma_*}^\Gamma\ \forall t \ge 0, \xi \in N_\varepsilon^\Gamma := \{x : \mathbf{dist}\,[x;\Gamma] \le \varepsilon\} \text{ and} \\ \max_{\xi\in N_\varepsilon^\Gamma} \mathbf{dist}\,[x(t,\xi);\Gamma] \to 0 \text{ as } t \to \infty. \end{aligned} \tag{72}$$

接下来，我们将证明集合 $\mathbb{X}_\star := \{y = x(t,\ \xi) : t \ge 0,\ \xi \in N_\varepsilon^\Gamma\}$ 是周期轨道 Γ 的一个正则管状邻域，其含义见定义 IX.1。

为了证明 $\mathbb{X}_\star$ 是紧致的，我们考虑任意序列 $\{y_i\}_{i=1}^\infty \subset \mathbb{X}_\star$。它与两个序列 $\{t_i\}_{i=1}^\infty \subset [0,\infty)$和$\{\xi_i\}_{i=1}^\infty \in N_\varepsilon^\Gamma$相关联，使得 $y_i = x(t_i,\ \xi_i)\ \forall i$。如果其中第一个无界，则存在收敛到 $+\infty$ 的子序列 $\{t_{i_k}\}_{k=1}^\infty$ 。于是**距离** $[y_{i_k};\ \Gamma] =$**距离** $[x(t_{i_k},\ \xi_{i_k});\ \Gamma] \to 0$当 $k \to \infty$时由(72)成立，因此存在第三个序列 $\{z_k\}_{k=1}^\infty \subset \Gamma$

使得 $\|y_{i_k} - z_k\|_2 \to 0$ 当 $k \to \infty$时。由于集合 Γ 是紧致的，$\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$存在一个收敛子序列。$\{y_i\} \subset \mathbb{X}_\star$ 的相应子序列也收敛。

反之，若序列 $\{t_i\}$ 有界，则存在相应的子序列 $\{t_{i_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 和 $\{\xi_{i_k}\}_{k=1}^{\infty}$，分别收敛到有限极限 $t_\infty \in [0,\infty)$ 和 $\xi_\infty \in N_\varepsilon^\Gamma$；第二个子序列之所以存在，是因为集合 N_ε^Γ 是紧致的。于是 $y_{i_k} = x[t_{i_k}, \xi_{i_k}] \to x(t_\infty, \xi_\infty) \in \mathbb{X}_\star$当 $k \to \infty$[39] 时（第五章，定理 2.1）。因此，任意序列 $\{y_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathbb{X}_\star$都有一个子序列收敛到 $\mathbb{X}_\star$中的某个元素，这意味着 $\mathbb{X}_\star$ 是紧致的。

∘最后，集合 N_ε^Γ是开集，且其闭包等于 N_ε^Γ。对于任意 $t \geq 0$，映射 $\xi \mapsto x(t,\xi)$ 是一个微分同胚——∘ ∘态。因此，集合 $\mathbb{X}_\star$: $= \{y = x(t,\ \xi) :\ t \geq 0,\ \xi \in N_\varepsilon^\Gamma\}$是开集，覆盖 Γ，且其闭包包含 $\mathbb{X}_\star$。根据构造，$\mathbb{X}_\star$ 是正向不变的，因此依据定义 IX.1，它是 Γ 的正则管状邻域。定理 V.1 以及引理 IX.6 前的说明完成了 iii) 的证明。

X. 说明性示例

本节旨在说明上述方法的有效性。

A. 耗散环境中的刚体运动

我们从经典的欧拉转动方程所描述的系统开始：

$$\begin{aligned} J_1\dot{\omega}_1 &= (J_2 - J_3)\omega_2\omega_3 - J_1\delta\omega_1, \\ J_2\dot{\omega}_2 &= (J_3 - J_1)\omega_1\omega_3 - J_2\delta\omega_2 + \tau, \\ J_3\dot{\omega}_3 &= (J_1 - J_2)\omega_1\omega_2 - J_3\delta\omega_3, \end{aligned} \tag{73}$$

其中，$0 < J_1 < J_2 < J_3$ 为转动惯量。此外，τ为外力矩，$\delta > 0$为摩擦系数。系统 (73) 描述了刚体在由惯性轴构成的体固定坐标系中的转动运动；ω_1，ω_2，ω_3 分别为角速度。该刚体受到力矩 τ 的驱动，该力矩作用于第二主轴周围。

系统(73)不仅因其基础性而备受关注，也因相关的有趣现象而引人注目。其中之一由网球拍定理（又称中间轴定理）所阐述。该定理指出，若不存在外部驱动 $\tau = 0$，也没有能量耗散 $\delta = 0$，则绕第一轴和第三轴的旋转是稳定的，而绕中间轴的旋转是不稳定的。这一现象的实验表现被称为贾尼别科夫效应，以宇航员弗拉基米尔·贾尼别科夫命名。1985年，他在太空中意外地观察到了这一令人惊讶的定理结果。

将定理 V.1 应用于系统 (73)，可得到本节的主要结果如下。

定理 X.1。 系统 (73)在施加恒定力矩τ 时，在其相空间的任意紧正不变子集 $\mathbb{X}$ 上是一致 *2*-收缩的，当且仅当

$$|\tau| < 2\delta^2 J_2 \sqrt{\frac{J_1 J_3}{(J_3 - J_2)(J_2 - J_1)}}. \tag{74}$$

如果系统 (73) 在至少一个与 *Asm* 相交且包含平衡点 $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{eq}} =$ 的紧集 $\mathbb{X}$ 上一致地 *2*-收缩，那么这一不等式必然成立。III.2

$\left(0, \frac{\tau}{J_2\delta}, 0\right)$ *in its interior.*

证明。**充分性：** 设 (74) 成立。我们先沿着系统 (73) 的轨迹，对 $\boldsymbol{\omega} := (\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3)$ 的二次类能量函数 $W(\boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{2}\left(J_1\omega_1^2 + J_2\omega_2^2 + J_3\omega_3^2\right)$ 求导

$$\dot{W} = -J_1\delta\omega_1^2 - J_2\delta\omega_2^2 - J_3\delta\omega_3^2 + \tau\omega_2. \tag{75}$$

对右端进行简单的上界估计可得 $\dot{W} \leq -\delta W + \beta_\star$，其中 $\beta_\star = \tau^2/(2\delta J_2)$。因此，对于任意$\beta > \beta_\star$，所有解最终都会进入该椭球

$$\mathbb{X}_\beta := \{\boldsymbol{\omega} \mid W(\boldsymbol{\omega}) \leq \beta/\alpha\} \tag{76}$$

并从此留在其中。此外，假设 III.1 和 III.2 对 $\mathbb{X} := \mathbb{X}_\beta$ 也成立。

下一步基于定理 V.1。为使用该定理，我们首先求出式 (73) 右端的雅可比矩阵：

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{\omega}) = \begin{bmatrix} -\delta & \frac{(J_2-J_3)}{J_1}\omega_3 & \frac{(J_2-J_3)}{J_1}\omega_2 \\ \frac{(J_3-J_1)}{J_2}\omega_3 & -\delta & \frac{(J_3-J_1)}{J_2}\omega_1 \\ \frac{(J_1-J_2)}{J_3}\omega_2 & \frac{(J_1-J_2)}{J_3}\omega_1 & -\delta \end{bmatrix} \tag{77}$$

并令 $P_0 := \mathbf{diag}\left[1,\ \frac{J_2}{J_1(J_3-J_2)(J_3-J_1)}\quad \frac{J_2}{J_1(J_3-J_2)(J_2-J_1)}\right]$。由于 $0 < J_1 < J_2 < J_3$，该矩阵是正定的。直接计算可得

$$\mathcal{A}^\top P_0 + P_0\mathcal{A} = 2\begin{bmatrix} -\delta & 0 & \frac{J_2-J_3}{J_1}\omega_2 \\ 0 & -\frac{\delta J_2(J_3-J_2)}{J_1(J_3-J_1)} & 0 \\ \frac{J_2-J_3}{J_1}\omega_2 & 0 & -\frac{\delta J_3(J_3-J_2)}{J_1(J_2-J_1)} \end{bmatrix}.$$

对于任意 $\chi \in \mathbb{C}$，行列式 $\Delta(\chi) := \det(P_0\mathcal{A} + \mathcal{A}^\top P_0 - \chi P_0)$ 可化简为 $(\chi + 2\delta)\left[(\chi + 2\delta)^2 - 4\omega_2^2\varrho^2\right]$，相差一个常数因子，其中

$$\varrho := \sqrt{\frac{(J_3-J_2)(J_2-J_1)}{J_1 J_3}}.$$

方程的根 $\Delta(\chi) = 0$ 如下 $\chi_{1,\ 3} = -2\delta \pm 2|\omega_2|\varrho, \chi_2 = -2\delta.$

现在，我们引入一个状态依赖度量，由以下正定矩阵 $P(\boldsymbol{\omega}) = P_0 e^{\gamma W(\boldsymbol{\omega})}$，给出，其中 $\gamma > 0$ 是稍后指定的参数。根据前面的计算，可直接得出方程 $\det(\mathcal{A}^\top P + P\mathcal{A} + P - \lambda P) = 0$ 的解为 $\lambda_i = \chi_i + \gamma\dot{W}$，$i = 1,\ 2,\ 3$。因此，$\lambda_1 + \lambda_2 = 2\left(-2\delta + |\omega_2|\varrho + \gamma\dot{W}\right)$.

根据定理 V.1 和 (75)，只要存在 $\gamma > 0$ 使得对于任意 ω_2，$-\gamma J_2\delta\omega_2^2 + \omega_2(\varrho\operatorname{sign}\omega_2 + \gamma\tau) - 2\delta < 0$，系统 (73) 就在 $\mathbb{X}_\beta$ 上一致 2-收缩。反过来，这在左侧的判别式为负时成立，即 $(\varrho\operatorname{sign}\omega_2 + \gamma\tau)^2 - 8\delta^2\gamma J_2 < 0$，或等价地，$\gamma^2\tau^2 + 2\gamma(\tau\varrho\operatorname{sign}\omega_2 - 4\delta^2 J_2) + \varrho^2 < 0$。这是关于 γ 的二次多项式，其首项系数非负（$\tau^2 \geq 0$）。因此，当且仅当满足以下条件时，存在可行的 $\gamma > 0$：1）一次项系数严格为负，即 $\tau\varrho\operatorname{sign}\omega_2 - 4\delta^2 J_2 < 0$，且 2）判别式为正，即 $(\tau\varrho\operatorname{sign}\omega_2 - 4\delta^2 J_2)^2 - \tau^2\varrho^2 > 0$.。第一个条件等价于 $|\tau| < 4\delta^2 J_2/\varrho$，而第二个条件给出的界限相同，但相差一个因子 $1/2$。综合两者可得 (74)。

因此，根据定理 V.1，系统 (73) 在椭球 (76) 上是一致 2-收缩的。还需指出，任意紧集 $\mathbb{X}$ 都可以被椭球 (76) 覆盖，只要 $\beta > \beta_\star$ 足够大，因此根据定义 III.1，该集合继承了 $\mathbb{X}_\beta$ 的一致 2-收缩性。

必要性。只需证明定理 X.1 第二句所述的结论。反设 (74) 不成立，但系统 (73) 在满足假设 III.2 且包含内部平衡点 $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{eq}} = \left(0, \frac{\tau}{J_2\delta}, 0\right)$ 的紧集 $\mathbb{X}$ 上是一致 2-收缩的。由于 (74) 不成立，$u := \frac{|\tau|}{\tau_c} \geq 1$，其中$\tau_c := 2J_2\delta^2/\varrho$。在平衡点 $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{eq}}$ 处对 (73) 进行线性化，得到特征多项式 $(\lambda + \delta)\left[(\lambda + \delta)^2 - (2u\delta)^2\right]$。其根为 $\lambda_1 = \delta(2u - 1)$ $\lambda_2 = -\delta$，$\lambda_3 = -\delta(1 + 2u)$，因此 $\lambda_1 + \lambda_2 = 2\delta(u - 1) > 0$。右端项 $\mathcal{A}(\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{eq}})$ 的雅可比矩阵可以通过相似变换对角化，因为其特征值均为实数且互不相同。令 $\Lambda_{\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{eq}}}$ 表示 $\mathcal{A}(\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{eq}})$ 的特征值对角矩阵，且$S =$ 为常数，$\det S \neq 0$ 为将 $\mathcal{A}(\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{eq}})$变换为 $\Lambda_{\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{eq}}}$的相似变换。于是，引理 IV.1 意味着

$$\boldsymbol{\Sigma}_2 \overset{\text{Lem.IV.1}}{\geq} \limsup_{t\to\infty} \Sigma_2(t, \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{eq}}) \overset{(14)}{=} \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln \omega_2\left(S e^{\Lambda_{\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{eq}}} t} S^{-1}\right) \overset{S=\text{const},\det S\neq 0}{=\!=\!=} \lambda_1 + \lambda_2 > 0.$$

因此，根据定理 IV.1，该系统并非一致 2-收缩。这一矛盾证明了必要性。 □

注 X.1. 由于雅可比矩阵 (77) 不显式依赖于 τ，因此，[11] 中的方法并不直接适用于本节所考虑的问题。

B. R¨ossler 系统

下一个例子说明如何数值计算一致 d-收缩的界，其中 d 不一定是整数。

以下带参数的系统 a，$b > 0$ 传统上归于 R¨ossler[45]:

$$\dot{x} = -y - z, \qquad \dot{y} = x, \qquad \dot{z} = -bz + a(y - y^2). \quad (78)$$

该系统与其他若干系统一样，也归于 R¨ossler；其中大多数都表现出 Shilnikov 型混沌吸引子。作者不了解针对系统 (78) 这一事实的形式证明；对于其他一些 R¨ossler 系统，这一事实已通过半解析方法得到确立，参见例如[46,47]。支持系统 (78) 具有一个围绕原点螺旋的 Shilnikov 型混沌吸引子的主要论据，通常是证明零平衡点存在同宿轨道。这可以通过级数展开来近似同宿解，参见例如[46]。

我们将说明如何估计使该系统一致 d-收缩的 d 值。首先注意到，该系统有两个平衡点 $E_0 = (0,0,0)^\top$ 和 $E_1 = (0, e, -e)^\top$，其中$e := 1 + b/a$。(78) 中，右端项的雅可比矩阵仅依赖于 y，如下所示：

$$A(y) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & a - 2ay & -b \end{bmatrix}.$$

因此，矩阵 $A(0)$ 的特征方程为

$$\lambda^3 + b\lambda^2 + \lambda + (a + b) = 0. \quad (79)$$

由此可知，矩阵 $A(0)$ 满足 Shilnikov 鞍焦条件：它有一个负特征值 $-\gamma$，其中 $\gamma > 0$；还有一对共轭复特征值 $\sigma \pm \imath\delta$，其中 $\sigma > 0$ 和 $\delta \in \mathbb{R}$。事实上，由于 a，$b > 0$，方程 (79) 的任一实根均为负，而方程次数为奇数，因此至少存在一个实根。根据与常数项相关的韦达公式，另外两个根的乘积为正，因此若它们为实数，则必然同号。然而，根据维什涅格拉德斯基判据，左端的多项式不是 Hurwitz 多项式，因此这两个根为正，这与前述结论矛盾。因此，另外两个根构成一对共轭根 $\sigma \pm \imath\delta$，且 $\sigma > 0$。根据与 λ^2 前系数相关的韦达公式，由于 $-\gamma + 2\sigma = -b < 0$，我们可推知 $\gamma > 2\sigma$。

因此，沿平衡解 E_0 的特征指数的组合（14）对于 $d \leq 2$ 为正。对于 $d > 2$,

$$\Sigma_d(t, E_0) = 2\sigma + s(-\gamma) = \underbrace{2\sigma - \gamma}_{=\operatorname{tr}(A(0))=-b} + \gamma - s\gamma = -b + (1 - s)\gamma$$

因此 $\Sigma_d(t, E_0) < 0 \Leftrightarrow d > 3 - b/\gamma$。结合（15）和定理 IV.1，我们由此推断：$d_L := 3 - b/\gamma$ 是使系统（78）能够在满足假设 III.2 的正向不变紧集 $\mathbb{X}$ 上一致 d- 收缩的 d 的下界。

G.A. Leonov 猜想，系统 (78) 的 Rössler 吸引子的 Lyapunov 维数恰好为$3 - b/\gamma$。证明这一猜想的一种可行思路，基本上是要确立以下两个命题：

i) 鞍焦点平衡点 E_0 存在一条同宿轨迹。

ii) 对于任何满足假设 III.2 且包含E_0的集合 $\mathbb{X}$，系统（78）对所有 $d > 3 - b/\gamma$ 都是均匀 d-压缩的。

具体而言，i) 表明存在一个满足假设 III.2 且包含平衡点 E_0 的不变集，而 ii) 则确保 $d_L := 3 - b/\gamma$ 给出了该集合的李雅普诺夫维数上界。

在本节余下部分中，我们将处理经典取值 $a = 0.386$, $b = 0.2$，并通过数值分析以高精度证明 ii) 成立。为此，我们采用定理 V.1。

有鉴于此，我们选取一个正定 3×3-矩阵 P_0，并令 $P(x, y, z) = P_0\, e^{v(x,y,z)}$，其中$v(x, y, z) := \tau(z - bx)$，且 $\tau > 0$是一个自由参数。容易看出，方程（17）的根仅取决于 y，如下所示

$$\lambda_1 = \eta_1 + \dot{v}, \qquad \lambda_2 = \eta_2 + \dot{v}, \qquad \lambda_3 = \eta_3 + \dot{v},$$

其中，$\dot{v} = \tau\big[(a + b)y - ay^2\big]$ 是$v(\cdot)$的轨道导数，而 $\eta_1 \geq \eta_2 \geq \eta_3$ 是方程的根

$$\det\big[A(y)^\top P_0 + P_0 A(y) - \eta P_0\big] = 0.$$

使用 ChatGPT 5 对以下最小化问题进行数值求解

$$\begin{gathered} s \longrightarrow \min_{\tau, P_0} \\ \textbf{subject to } \tau > 0, P_0 = P_0^\top > 0, s \in [0, 1], \\ \lambda_1(y) + \lambda_2(y) + s\,\lambda_3(y) < 0 \text{ for all } y \in [-20, 20]. \quad (80) \end{gathered}$$

建议的解为 $s^\star \approx 0.60557$、$\tau^\star \approx 0.25$ 和

$$P^\star \approx \begin{pmatrix} 0.50578332 & -0.03189052 & -0.15406100 \\ -0.03189052 & 0.36983503 & 0.26733901 \\ -0.15406100 & 0.26733901 & 0.52428427 \end{pmatrix}$$

经独立验证，确认其满足来自 (80) 和 $\lambda_3(y) < 0\ \forall y \in [-20, 20]$ 的约束。根据定理 V.1，这意味着，如果系统 (78) 存在一个满足假设 III.2 的正不变集 $\mathbb{X} \subset \{(x,\ y,\ z) :\ |y| \leq 20\}$，那么它在 $\mathbb{X}$上对于任意 $d \geq d_\star := 2 + s^\star \approx 2.60557$ 都是均匀 d- 压缩的。这为 Leonov 猜想（见陈述 ii）提供了支持，因为猜想中的阈值$3 - b/\gamma \approx 2.6055653$ 的数值与刚刚建立的 $d_\star$高度精确地一致。然而，作者并不清楚，对于经典参数，吸引子是否包含原点（见陈述 i））。

C. Langford 系统

以下系统通常被认为归因于 Langford（也拼作 Lanford）：

$$\begin{aligned} &\dot{x} = (a - 1)x - y + xz, \\ &\dot{y} = x + (a - 1)y + yz, \qquad x, y, z \in \mathbb{R},\ a > 0, \\ &\dot{z} = az - (x^2 + y^2 + z^2), \end{aligned} \quad (81)$$

且已得到广泛研究（例如，参见[48–50]），尤其是与非线性系统周期轨道的稳定性相关的研究。（81）的一个便利之处在于，当 $a \in (\frac{1}{2}, 1)$ 时，存在显式的 2π-周期解

$$x_\star(t) = R\cos t, \quad y_\star(t) = R\sin t, \quad z_\star(t) = 1 - a, \quad (82)$$

其中 $R := \sqrt{(1 - a)(2a - 1)}$。

第九节所发展的理论使我们能够建立以下结果。

定理 X.2。解 (82) 的轨道满足安德罗诺夫–维特条件，当且仅当 $\frac{1}{2} < a < \frac{2}{3}$。

证明。沿着周期解 (82)，雅可比矩阵 $A(t) = A[x_\star(t)\ y_\star(t)\ z_\star(t)]$ 呈现为

$$\begin{aligned} A(t) &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & R\cos t \\ 1 & 0 & R\sin t \\ -2R\cos t & -2R\sin t & 3a - 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \Omega & R\,u(t) \\ -2R\,u(t)^\top & 3a - 2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

其中

$$\Omega := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad u(t) := \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

我们引入旋转正交基

$$v(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \qquad Q(t) = \big[u(t)\ \ v(t)\big],$$

对于该基，$Q(t)^\top Q(t) = I_2$ 以及

$$\dot{Q}(t) = Q(t)\Omega, \qquad Q(t)^\top \dot{Q}(t) = \Omega.$$

我们通过令 $\mathbb{R}^3$ 将这一变换扩展为

$$T(t) = \mathbf{diag}[Q(t), 1],$$

并考虑线性常微分方程 $\dot{\xi} = A(t)\xi$。变量变换 $\xi \mapsto \zeta := T(t)^{-1}\xi$ 将该常微分方程变换为

$$\dot{\zeta} = B\,\zeta,\ B := T^{-1}A(t)T - T^{-1}\dot{T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & R \\ 0 & 0 & 0 \\ -2R & 0 & 3a - 2 \end{pmatrix}.$$

矩阵 B 的零特征值对应的特征向量为 $(0,1,0)^\top$。因此，将第一个和第二个坐标互换的坐标置换会将系统变换为

$$\dot{z} = \mathbf{diag}\{0, A_2\}z, \quad \text{where } A_2 = \begin{pmatrix} 0 & R \\ -2R & 3a - 2 \end{pmatrix}.$$

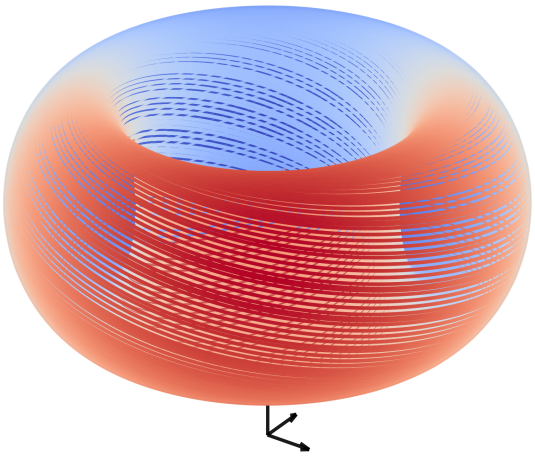

图 1. $a = \frac{2}{3}$ 时 Langford 系统 (81) 的一条轨迹。各点根据其相对于观察方向的深度着色：较暖的色调（红色）表示离观察者较近的点，较冷的色调（蓝色）表示较远的点。原点处显示了一个小型坐标架以供参考。

矩阵 A_2 是 Hurwitz 矩阵且具有实数 R 当且仅当$\frac{1}{2} < a < \frac{2}{3}$.

因此，类似于引理 IX.1 证明中的论证，存在一个正定矩阵 P_2，使得 λ_1，λ_2 的广义特征值

$$\det(A_2^\top P_2 + P_2 A_2 - \lambda P_2) = 0$$

可以任意接近 A_2 的特征值实部的两倍。令 $P_1 =$ blkdiag$\{1, P_2\}$，并取 $P_0 = U P_1 U^\top$，则对于 det$($ $\tilde{J}^\top P_0 + P_0 \tilde{J} - \lambda P_0) = 0.$ 的两个最大解，有 $\lambda_1 + \lambda_2 < 0$

回到原坐标，定义周期矩阵 $P(t) = T(t) P_0 T(t)^\top$.。于是

$$A(t)^\top P(t) + P(t) A(t) + \dot{P}(t) = T(t)\big(\tilde{J}^\top P_0 + P_0 \tilde{J}\big) T(t)^\top,$$

因此，.....的广义特征值

$$\det(A(t)^\top P(t) + P(t) A(t) + \dot{P}(t) - \lambda P(t)) = 0$$

与常矩阵铅笔的广义特征值相同

$$\det(\tilde{J}^\top P_0 + P_0 \tilde{J} - \lambda P_0) = 0.$$

因此，$\lambda_1 + \lambda_2 < 0$，并且在满足 $\frac{1}{2} < a < \frac{2}{3}$ 的情况下，定理 IX.1 的条件 ii) 成立。 □

XI. 结论

本文通过引入一致 d收缩的概念，对经典 k收缩理论作了测度论扩展，其中收缩维数 d 可以取任意实数值，范围为 $(0,\ n]$。所提出框架的一个关键要素是一族依赖度量的豪斯多夫–黎曼椭圆d测度。这些测度自然源于状态依赖的黎曼度量，而它们沿动力系统轨迹的演化，则为紧集的收缩提供了定量刻画。

本文的一项核心结果指出，统一的 d-收缩等价于存在一种黎曼度量，使得与之关联的 Hausdorff–Riemann 椭圆 d-测度沿系统的轨迹呈指数递减。由此，这些测度可视为基于集合的李雅普诺夫函数，并有望通过将关注点从逐轨迹稳定性分析拓展到考察某些集合的维数体积演化，来扩展经典的李雅普诺夫方法。我们分别利用李雅普诺夫特征指数（第一李雅普诺夫方法）和基于度量的构造（第二李雅普诺夫方法）得到了充分必要条件，这些方法为验证收缩性质提供了互补的分析与计算工具。

本文通过若干示例阐释了所提出的理论，其中既包括可进行解析估计的系统，也包括需要数值研究的情形。除了为验证收缩性和轨道稳定性提供新的判据外，所引入的 Hausdorff–Riemann 测度还为研究维数收缩、估计不变集的维数以及设计诱导收缩的度量提供了灵活的几何框架。这些结果为进一步开发计算收缩度量的数值算法，以及将其应用于经典收缩分析过于保守的高维非线性系统，开辟了道路。

致谢

作者感谢 R. Kato博士提醒我们关注论文[10]。

附录A：补充结果的证明。

引理 VI.3 的证明：i)我们注意到

$$\begin{aligned}
{}^{P_2}B_x^r &= \{y : \quad y - x, y - x \succ^{P_2} \le r^2\} \\
&= \{y : \langle P_2(y-x); y - x\rangle \le r^2\} \\
&= \{y : \langle S_2(y-x); S_2(y-x)\rangle \le r^2 \\
&= \{y : S_2(y-x) \in B_0^r\} = x + S_2^{-1} B_0^r,
\end{aligned}$$

也就是说，i) 中的第一个等式成立。第二个等式由第一个等式得出。

ii) 令 $A^\star$ 表示关于 A 的伴随算子。$\cdot,\cdot\succ^{P_2}$. 因此，对于任意 $x, y \in \mathbb{R}^n$，我们有

$$\begin{aligned}
Ax, y\succ^{P_2} = \quad x, A^\star y\succ^{P_2} \Leftrightarrow \\
\langle P_2 A x; y\rangle = \langle P_2 x; A^\star y\rangle = \big\langle (A^\star)^\top P_2 x; y\big\rangle \Leftrightarrow
\end{aligned}$$

$$P_2A=(A^\star)^\top P_2\Leftrightarrow A^\star=P_2^{-1}A^\top P_2\Rightarrow$$
$$A^\star A=P_2^{-1}A^\top P_2A=S_2^{-1}S_2^{-1}A^\top S_2S_2A$$
$$=S_2^{-1}\big[S_2^{-1}A^\top S_2S_2AS_2^{-1}\big]S_2=S_2^{-1}\Xi^\top\Xi S_2,$$

其中 $\Xi:=S_2AS_2^{-1}$。由此可知，矩阵 $A^\star A$ 和 $\Xi^\top\Xi$ 相似，因此具有相同的特征值。根据奇异值的定义，即可证明 ii) 中的第一个公式。将其应用于 $P_2:=P_1$ 和 $A:=S_{1\to2}AS_{1\to2}^{-1}$，便得到第二个公式。根据（13），第三个和第四个公式分别由第一个和第二个公式推出。

iii) 我们将椭球 E 表示为 $E=x+\mathcal{A}({}^{P_2}B_0^1)$ 的形式，其中 $x\in\mathbb{R}^n$ 和 $\mathcal{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$，$\det\mathcal{A}\neq0$。由 ii) 和引理 VI.1，

$$\varpi_d^{P_2}(E)=\omega_d^{P_2}(\mathcal{A})=\omega_d(S_2\mathcal{A}S_2^{-1}),$$
$$\varsigma_i^{P_2}(E)=\sigma_i^{P_2}(\mathcal{A})=\sigma_i(S_2\mathcal{A}S_2^{-1}).$$

再次应用引理 VI.1，并注意到 $E=x+\mathcal{A}({}^{P_2}B_0^1)$ $=x+\mathcal{A}S_2^{-1}B_0^1\Rightarrow S_2E=S_2x+S_2\mathcal{A}S_2^{-1}B_0^1$，即可得到 iii) 中的第一和第三个关系。反过来，它们又推出第二和第四个关系。

iv) 我们将椭球 E 表示为 $E=x+\mathcal{A}({}^{P_1}B_0^1)$ 的形式，其中 $x\in\mathbb{R}^n$ 和 $\mathcal{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$，$\det\mathcal{A}\neq0$。于是

$$\varpi_d^{P_2}(E)\overset{\text{iii)}}{=}\varpi_d^{P_1}(S_{1\to2}E)=\varpi_d^{P_1}\big[S_{1\to2}x+S_{1\to2}\mathcal{A}({}^{P_1}B_0^1)\big]$$
$$\overset{\text{Lem. VI.1}}{=\!=}\omega_d^{P_1}(S_{1\to2}\mathcal{A})\overset{(16)}{\leq}\omega_d^{P_1}(S_{1\to2})\omega_d^{P_1}(\mathcal{A})$$
$$\overset{\text{Lem. VI.1}}{=\!=}\omega_d^{P_1}(S_{1\to2})\varpi_d^{P_1}(E)\overset{\text{ii)}}{=}\omega_d(S_1S_{1\to2}S_1^{-1})\varpi_d^{P_1}(E)$$
$$=\omega_d(S_2S_1^{-1})\varpi_d^{P_1}(E).$$

由此可见，iv) 中的第二个不等式成立。交换其中的指标，即可得到第一个不等式。**v)** 我们首先注意到，对于任意 A，$B\in\mathbb{R}^{n\times n}$，

$$\sigma_1(A^{-1})=\frac{1}{\sigma_n(A)}\quad\text{if }\det A\neq0,\qquad\text{(A1)}$$
$$\sigma_1(AB)=\|AB\|_2\leq\|A\|_2\|B\|_2=\sigma_1(A)\sigma_1(B).$$

v) 中的第二个不等式证明如下：

$$\varsigma_1^{P_2}(E)=\max_{x\in E}\sqrt{\langle P_2x;x\rangle}=\max_{x\in E}\|S_2x\|$$
$$=\max_{x\in E}\|S_2S_1^{-1}S_1x\|\leq\sigma_1(S_2S_1^{-1})\max_{x\in E}\|S_1x\|=$$
$$\sigma_1(S_2S_1^{-1})\varsigma_1^{P_1}(E)\overset{\text{(A1)}}{\leq}\sigma_1(S_2)\sigma_1(S_1^{-1})\varsigma_1^{P_1}(E)$$
$$\overset{\text{(A1)}}{=}\frac{\sigma_1(S_2)}{\sigma_n(S_1)}\varsigma_1^{P_1}(E).$$

第一个不等式是将指标 1 和 2 互换后由第二个不等式得到的。同理

$$\varsigma_n^{P_2}(E)=\min_{x\notin E}\sqrt{\langle P_2x;x\rangle}=\min_{x\notin E}\|S_2S_1^{-1}S_1x\|$$
$$\leq\sigma_1(S_2S_1^{-1})\min_{x\notin E}\|S_1x\|=\sigma_1(S_2S_1^{-1})\varsigma_n^{P_1}(E)$$
$$\overset{\text{(A1)}}{\leq}\frac{\sigma_1(S_2)}{\sigma_n(S_1)}\varsigma_n^{P_1}(E),$$

也就是说，v) 中的第四个不等式成立。将指标 1 和 2 互换后，即可由此不等式推出第三个不等式。

vi) 只需注意到

$$\mathrm{ecc}^{P_2}(E)=\frac{\varsigma_1^{P_2}(E)}{\varsigma_n^{P_2}(E)}\overset{\text{v)}}{\leq}\frac{\frac{\sigma_1(S_2)}{\sigma_n(S_1)}\varsigma_1^{P_1}(E)}{\frac{\sigma_n(S_2)}{\sigma_1(S_1)}\varsigma_n^{P_1}(E)}$$
$$=\frac{\sigma_1(S_2)}{\sigma_n(S_2)}\frac{\sigma_1(S_1)}{\sigma_n(S_1)}\,\mathrm{ecc}^{P_1}(E),$$

即，vi) 中的第二个不等式成立。第一个不等式由第二个不等式推出。

vii) 我们将 E 表示为 $E=x+C(B_0^1)$的形式，其中$x\in\mathbb{R}^n$ 与 $C\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $\det C\neq0$。于是

$$\varpi_d^{P_2}(AE)\overset{\text{iii)}}{=}\varpi_d^{P_1}(S_{1\to2}AE)\overset{\text{iii)}}{=}\varpi_d(S_1S_{1\to2}AE)$$
$$=\varpi_d(S_2AS_1^{-1}S_1E)\overset{\text{Lem. VI.1}}{=\!=}\omega_d(S_2AS_1^{-1}S_1C)$$
$$\overset{(16)}{\leq}\omega_d(S_2AS_1^{-1})\omega_d(S_1C)\overset{\text{Lem. VI.1}}{=\!=}\omega_d(S_2AS_1^{-1})\varpi_d(S_1E)$$
$$\overset{\text{iii)}}{=}\omega_d(S_2AS_1^{-1})\varpi_d^{P_1}(E).\qquad\square$$

引理 VI.6的证明：

证明。 **i)** 前两个关系是平凡的，并由 (20) 推出第三个关系。

ii) 令 $S:=\sqrt{P}$。由引理 VI.3 中的 iii)，$\varpi_d^P(AE)=\varpi_d(SAE)$ $=\varpi_d(SAS^{-1}SE)$。接下来将椭球 E写成 $E=x+C(B_0^1)$ 的形式，其中 C 是某个 $n\times n$矩阵，且 $x\in\mathbb{R}^n$。由引理 VI.1 和 (16),

$$\varpi_d^P(AE)=\omega_d(SAS^{-1}SC)$$
$$\leq\omega_d(SAS^{-1})\omega_d(SC)=\omega_d^P(A)\,\varpi_d^P(E),$$

其中，最后一个等式由引理 VI.1 以及引理 VI.3 中的 ii) 和 iii) 得出。

iii) 由于 E 是凸集，

$$B_0^\lambda=\frac{\lambda}{\varsigma_n(E)}\big[\varsigma_n(E)B_0^1\big]\subset\frac{\lambda}{\varsigma_n(E)}[E-\mathbf{c}(E)],$$
$$E+B_0^\lambda=\mathbf{c}(E)+E-\mathbf{c}(E)+B_0^\lambda$$
$$\subset\mathbf{c}(E)+\left[1+\frac{\lambda}{\varsigma_n(E)}\right][E-\mathbf{c}(E)]=E_\lambda^+.$$

由 i) 中最后一个事实可知，这便推出了 iii) 中的不等式。

iv) 我们将椭球 E 写成形式 $E=y+T[{}^PB_0^1]$，其中 $T\in\mathbb{R}^{n\times n}$。由此得到类似的表示 $x+AE=x+Ay+AT[{}^PB_0^1]$。容易看出，对于 $i=1,\dots,n$，$\varsigma_i^P(E)=\sigma_i^P(T)$，类似地，$\varsigma_i^P(x+AE)=\sigma_i^P(AT)$。记 $\|x\|_P:=\sqrt{\langle Px;\ x\rangle}$ 和 $\|C\|_P:=\max_{\|x\|_P\leq1}\|C\|_P\ \forall C\in\mathbb{R}^{n\times n}$，可知 iv) 中的前两个不等式成立，因为

$$\varsigma_1^P(x+AE)=\sigma_1^P(AT)=\|AT\|_P\leq\|A\|_P\|T\|_P$$

$$= \sigma_1^P(A)\sigma_1^P(T) = \sigma_1^P(A)\varsigma_1^P(E);$$
$$\varsigma_n^P(x+AE) = \sigma_n^P(AT) = \frac{1}{\sigma_1^P(T^{-1}A^{-1})}$$
$$= \frac{1}{\|T^{-1}A^{-1}\|_P} \geq \frac{1}{\|T^{-1}\|_P}\frac{1}{\|A^{-1}\|_P}$$
$$= \frac{1}{\sigma_1^P(T^{-1})}\frac{1}{\sigma_1^P(A^{-1})} = \underbrace{\sigma_n^P(T)}_{\varsigma_n(E)}\sigma_n^P(A).$$

反过来，它们推出第三不等式。 □

引理 A.1。 对于任意 $\gamma \in (0, \gamma_\star)$、 $\varepsilon \in \big(0, \frac{\gamma m_{P(\cdot)}}{2}\big)$, ~~$\alpha \geq 1$~~以及紧集 $K \subset O$，以下不等式成立：

$$^{P(\cdot)}\pi^{\langle a(\alpha)\rangle}_{d,\epsilon_\gamma(\varepsilon,\alpha)}[g(K)] \leq {}^{P(\cdot)}\pi^{\langle\alpha\rangle}_{d,\varepsilon}(K)(1+\xi_{\varepsilon,\alpha,\gamma})^d\Omega_\gamma. \quad \text{(A2)}$$

引理 VI.7 的证明：

证明。 给定 $\eta > 0$，由公式 (28)可知，存在一个由椭球 E_i 构成的 K 的有限覆盖 $\{E_i\}$，使得

$$\sum_i \varpi_d^{P[\mathbf{c}(E_i)]}(E_i) \leq {}^{P(\cdot)}\pi^{\langle\alpha\rangle}_{d,\varepsilon}(K) + \eta, \quad \text{(A3)}$$
$$K \subset \bigcup_i E_i,\ \varsigma_1^{P[\mathbf{c}(E_i)]}(E_i) < \varepsilon,\ \mathrm{ecc}^{P[\mathbf{c}(E_i)]}(E_i) \leq \alpha\ \forall i.$$

去掉与 K 不相交的椭球后，上述关系仍然成立，并且可确保 $E_i \cap K \neq \emptyset\ \forall i$。 记 $\mathbf{c}_i := \mathbf{c}(E_i)$，并利用引理 VI.3 中的 v)（其中 $P_2 := I_n, P_1 := P[\mathbf{c}(E_i)]$），可得

$$\varsigma_1(E_i) \leq \frac{1}{\sigma_n(S[\mathbf{c}(E_i)])}\varsigma_1^{P[\mathbf{c}(E_i)]}(E_i) \overset{(27)}{\leq} \frac{\varepsilon}{m_{P(\cdot)}}$$
$$\Rightarrow r_i := \mathbf{diam}\, E_i \leq \frac{2\varepsilon}{m_{P(\cdot)}} < \gamma \overset{E_i\cap K\neq\emptyset}{\Longrightarrow} \mathbf{c}_i \in N_\gamma^K. \quad \text{(A4)}$$

将引理 VI.5 应用于 $M := E_i, x_* := \mathbf{c}_i := \mathbf{c}(E_i)$，并利用引理 VI.6 中的 iii)，可得

$$g(E_i) \subset g(\mathbf{c}_i) + Dg(\mathbf{c}_i)[E_i - \mathbf{c}_i] + B_0^{r_i\delta_{g,\gamma}(r_i)} \subset \mathcal{E}_i$$
$$:= g(\mathbf{c}_i) + \left[1 + \frac{r_i\delta_{g,\gamma}(r_i)}{\varsigma_n(\mathfrak{E}_i)}\right]\mathfrak{E}_i, \quad \text{(A5)}$$
$$\text{where } \mathfrak{E}_i := Dg(\mathbf{c}_i)\big[E_i - \mathbf{c}_i\big]; \quad \text{(A6)}$$
$$g(K) \subset \bigcup_i g(E_i) \subset \bigcup_i \mathcal{E}_i, \text{where} \quad \mathbf{c}(\mathcal{E}_i) = g[\mathbf{c}_i]. \quad \text{(A7)}$$

我们继续注意到 $r_i := \textbf{直径}\, E_i = 2\varsigma_1(E_i)$，并且

$$\frac{r_i\delta_{g,\gamma}(r_i)}{\varsigma_n(\mathfrak{E}_i)} \overset{\text{iv) in Lem. VI.6}}{\leq} \frac{r_i\delta_{g,\gamma}(r_i)}{\sigma_n[Df(\mathbf{c}_i)]\varsigma_n(E_i)}$$
$$\overset{(39),(A4)}{\leq} \frac{r_i\delta_{g,\gamma}(r_i)}{\sigma_\gamma^-\varsigma_n(E_i)} = \mathrm{ecc}(E_i)\frac{r_i\delta_{g,\gamma}(r_i)}{\sigma_\gamma^-\varsigma_1(E_i)} = 2\,\mathrm{ecc}(E_i)\frac{\delta_{g,\gamma}(r_i)}{\sigma_\gamma^-}$$
$$\overset{\text{vi) in LemVI.3}}{\leq} 2\frac{\sigma_1\left[S(\mathbf{c}_i)\right]}{\sigma_n\left[S(\mathbf{c}_i)\right]}\mathrm{ecc}^{P(\mathbf{c}_i)}(E_i)\frac{\delta_{g,\gamma}(r_i)}{\sigma_\gamma^-} \quad \text{(A8)}$$
$$\overset{(27)}{\leq} 2\frac{M_{P(\cdot)}}{m_{P(\cdot)}}\mathrm{ecc}^{P(\mathbf{c}_i)}(E_i)\frac{\delta_{g,\gamma}(r_i)}{\sigma_\gamma^-} \quad \text{(A9)}$$
$$\overset{(41)}{=} 2e_{P(\cdot)}\,\mathrm{ecc}^{P(\mathbf{c}_i)}(E_i)\frac{\delta_{g,\gamma}(r_i)}{\sigma_\gamma^-}$$
$$\overset{\text{(A3)}}{\leq} 2e_{P(\cdot)}\alpha\frac{\delta_{g,\gamma}(r_i)}{\sigma_\gamma^-} \overset{(36),(41),(A4)}{\leq} \xi := \xi_{\varepsilon,\alpha,\gamma},$$
$$\varsigma_1^{P[\mathbf{c}(\mathcal{E}_i)]}(\mathcal{E}_i) \overset{\text{i) in Lem. VI.6}}{=\!=} \left[1 + \frac{r_i\delta_{g,\gamma}(r_i)}{\varsigma_n(E_i)}\right]\varsigma_1^{P[\mathbf{c}(\mathcal{E}_i)]}(\mathfrak{E}_i)$$
$$\overset{\text{v) in Lem. VI.3}}{\leq} (1+\xi)\frac{\sigma_1\left\{S[g(\mathbf{c}_i)]\right\}}{\sigma_n\left\{S(\mathbf{c}_i)\right\}}\varsigma_1^{P(\mathbf{c}_i)}(\mathfrak{E}_i) \quad \text{(A10)}$$
$$\overset{(27)}{\leq} \frac{M_{P(\cdot)}}{m_{P(\cdot)}}(1+\xi)\varsigma_1^{P(\mathbf{c}_i)}(\mathfrak{E}_i) \overset{(41)}{=} e_{P(\cdot)}(1+\xi)\varsigma_1^{P(\mathbf{c}_i)}(\mathfrak{E}_i)$$
$$\overset{\text{iii) in Lem. VI.6}}{=\!=} e_{P(\cdot)}(1+\xi)\varsigma_1\big[S(\mathbf{c}_i)\mathfrak{E}_i\big] \quad \text{(A11)}$$
$$\overset{\text{iv) in Lem. VI.6}}{\leq} e_{P(\cdot)}(1+\xi)\sigma_1\big[S(\mathbf{c}_i)\big]\varsigma_1\left\{Dg(\mathbf{c}_i)\big[E_i - \mathbf{c}_i\big]\right\}$$
$$\overset{\text{iv) in Lem. VI.6}}{\leq} e_{P(\cdot)}(1+\xi)\sigma_1\big[S(\mathbf{c}_i)\big]\sigma_1\big[Dg(\mathbf{c}_i)\big]\varsigma_1(E_i)$$
$$\overset{(27),(39)}{\leq} e_{P(\cdot)}(1+\xi)M_{P(\cdot)}\sigma_\gamma^+\varsigma_1(E_i)$$
$$\overset{(41),(A3)}{\leq} e_{P(\cdot)}M_{P(\cdot)}\sigma_\gamma^+\left\{1 + 2\alpha\frac{e_{P(\cdot)}}{\sigma_\gamma^-}\delta_\gamma\left[\frac{2\varepsilon}{m_{P(\cdot)}}\right]\right\}\varepsilon$$
$$\overset{(42)}{=} \epsilon_\gamma(\varepsilon,\alpha).$$

利用引理 VI.3 中的 ii)、vi) 和 vii)，我们还可以看出

$$\mathrm{ecc}^{P[\mathbf{c}(\mathcal{E}_i)]}(\mathcal{E}_i) \overset{(A5),(A7)}{=\!=} \mathrm{ecc}^{P[g(\mathbf{c}_i)]}(\mathfrak{E}_i)$$
$$\overset{(A6)}{=} \mathrm{ecc}^{P[g(\mathbf{c}_i)]}\big[Dg(\mathbf{c}_i)E_i\big]$$
$$\overset{\text{vi)}}{\leq} \frac{\sigma_1(\sqrt{P[\mathbf{c}(\mathcal{E}_i)]})}{\sigma_n\sqrt{P[\mathbf{c}(\mathcal{E}_i)]}}\frac{\sigma_1(\sqrt{P[\mathbf{c}(E_i)]})}{\sigma_n(\sqrt{P[\mathbf{c}(E_i)]})}\mathrm{ecc}^{P[\mathbf{c}(E_i)]}\big[Dg(\mathbf{c}_i)E_i\big]$$
$$\overset{(27),(41)}{\leq} \big[e_{P(\cdot)}\big]^2\,\mathrm{ecc}^{P(\mathbf{c}_i)}\big[Dg(\mathbf{c}_i)E_i\big]$$
$$\overset{\text{iv) in Lem. VI.6}}{\leq} \big[e_{P(\cdot)}\big]^2\frac{\sigma_1^{P(\mathbf{c}_i)}[Dg(\mathbf{c}_i)]}{\sigma_n^{P(\mathbf{c}_i)}[Dg(\mathbf{c}_i)]}\mathrm{ecc}^{P(\mathbf{c}_i)}\big[E_i\big]$$
$$\overset{\text{(A3)}}{\leq} \big[e_{P(\cdot)}\big]^2\frac{\sigma_1^{P(\mathbf{c}_i)}[Dg(\mathbf{c}_i)]}{\sigma_n^{P(\mathbf{c}_i)}[Dg(\mathbf{c}_i)]}\alpha$$
$$\overset{\text{ii) in Lem. VI.3,}S:=\sqrt{P(\mathbf{c}_i)}}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=} \big[e_{P(\cdot)}\big]^2\frac{\sigma_1[SDg(\mathbf{c}_i)S^{-1}]}{\sigma_n[SDg(\mathbf{c}_i)S^{-1}]}\alpha$$
$$\overset{(A1)}{\leq} \big[e_{P(\cdot)}\big]^2\frac{\sigma_1(S)\sigma_1(S^{-1})\sigma_1[Dg(\mathbf{c}_i)]}{\sigma_n(S)\sigma_n(S^{-1})\sigma_n[Dg(\mathbf{c}_i)]}\alpha$$
$$\overset{(A1)}{=} \big[e_{P(\cdot)}\big]^2\frac{\sigma_1(S)^2\sigma_1[Dg(\mathbf{c}_i)]}{\sigma_n(S)^2\sigma_n[Dg(\mathbf{c}_i)]}\alpha$$
$$\overset{(27),(41)}{\leq} \big[e_{P(\cdot)}\big]^4\frac{\sigma_1[Dg(\mathbf{c}_i)]}{\sigma_n[Dg(\mathbf{c}_i)]}\alpha \overset{(39)}{\leq} \big[e_{P(\cdot)}\big]^4\frac{\sigma_\gamma^+}{\sigma_\gamma^-}\alpha \overset{(41)}{=} a(\alpha).$$

根据上述内容，椭球体集合 $\{\mathcal{E}_i^+\}$ 属于定义 (28) 中的集合 $^{P(\cdot)}\pi^{\langle a(\alpha)\rangle}_{d,\ \varepsilon\ ,\epsilon_\gamma(,\alpha)}[g(K)]$，因此

$$^{P(\cdot)}\pi^{\langle a(\alpha)\rangle}_{d,\epsilon_\gamma(\varepsilon,\alpha)}[g(K)] \leq \sum_i \varpi_d^{P[\mathbf{c}(\mathcal{E}_i)]}(\mathcal{E}_i). \quad \text{(A12)}$$

考虑到引理 VI.3 中的 vii) 和 (A5) 中的最后一个关系，我们看到

$$\begin{aligned}\varpi_d^{P[\mathbf{c}(\mathcal{E}_i)]}\big(\mathcal{E}_i\big) &\overset{\text{(A5),(A7)}}{=\!=} \left[1+\frac{r_i\delta_{g,\gamma}(r_i)}{\varsigma_n(\mathfrak{E}_i)}\right]^d \varpi_d^{P[g(\mathbf{c}_i)]}(\mathfrak{E}_i)\\ &\overset{\text{(A8),(A9)}}{\leq} (1+\xi)^d\varpi_d^{P[g(\mathbf{c}_i)]}(\mathfrak{E}_i)\\ &\overset{\text{(A6)}}{=} (1+\xi)^d\varpi_d^{P[g(\mathbf{c}_i)]}\big[Dg(\mathbf{c}_i)E_i\big]\\ &\overset{\text{iii) in Lem. VI.3}}{=\!=\!=} (1+\xi)^d\varpi_d\big[S[g(\mathbf{c}_i)]Dg(\mathbf{c}_i)S(\mathbf{c}_i)^{-1}S(\mathbf{c}_i)E_i\big]\\ &\overset{\text{ii) in Lem. VI.6}}{\leq} (1+\xi)^d\omega_d\big[S[g(\mathbf{c}_i)]Dg(\mathbf{c}_i)S(\mathbf{c}_i)^{-1}\big]\\ &\quad\times\varpi_d\big[S(\mathbf{c}_i)E_i\big]\\ &\overset{\text{iii) in Lem. VI.3}}{=\!=\!=} (1+\xi)^d\omega_d\big[S[g(\mathbf{c}_i)]Dg(\mathbf{c}_i)S(\mathbf{c}_i)^{-1}\big]\\ &\quad\times\varpi_d^{P[\mathbf{c}_i]}\big[S(\mathbf{c}_i)E_i\big] \overset{(40)}{\leq} (1+\xi)^d\Omega_\gamma\varpi_d^{P[\mathbf{c}_i]}\big[E_i\big].\end{aligned}$$

由此可见，利用 (A3) 和 (A12),

$$\begin{aligned}{}^{P(\cdot)}\pi^{\langle a(\alpha)\rangle}_{d,\epsilon_\gamma(\varepsilon,\alpha)}[g(K)] &\leq \sum_i \varpi_d^{P[\mathbf{c}(\mathcal{E}_i)]}\big(\mathcal{E}_i\big)\\ &\leq (1+\xi)^d\Omega_\gamma\sum_i\varpi_d^{P(\mathbf{c}_i)}\big(E_i\big)\\ &\leq (1+\xi)^d\Omega_\gamma\left[{}^{P(\cdot)}\pi^{\langle\alpha\rangle}_{d,\varepsilon}(K)+\eta\right].\end{aligned}$$

令 $\eta\to 0+$，证明即告完成。 □

[1]W. Lohmiller 和 J.-J. E. Slotine，Automatica **34**，683（1998）。[2] Z. Aminzare 和 E. Sontag，载于 *Proc. 53rd IEEE conf. on Decision and Control* 2014 3835 3847（洛杉矶，加利福尼亚州，）第 – 页）。[3]F. Forni 和 R. Sepulchre，IEEE 自动控制汇刊 **59**，614（2014）。[4]F. Forni 和 R. Sepulchre，IEEE 自动控制汇刊 **64**，2340（2019）。[5]F. Bullo, *Contraction Theory for Dynamical Systems*（Kindle Direct Publishing，2023）。[6]D. Angeli，IEEE 自动控制汇刊 **47**，410（2002）。[7]A. Pavlov、N. van de Wouw 和 H. Nijmeijer, *Uniform output regulation of nonlinear systems: a convergent dynamics approach* 2005 （Springer-Verlag，柏林，）。[8]A. Pavlov、A. Pogromsky、N. van de Wouw 和 H. Nijmeijer，Systems and Control Letters **52**，257（2004）。[9]H. Tsukamoto、S.-J. Chung 和 J.-J. E. Slotine，Annual Reviews in Control **52**，135（2021）。[10]Y. S. Il'yashenko，Selecta Mathematica Sovietica **11**，203（1992）。[11]C. Wu、I. Kanevskiy 和 M. Margaliot，Automatica **136**，110048（2022）。[12]Y. Li 和 J. S. Muldowney，微分方程杂志 **106**，27（1993）。[13]D. Angeli、M. Al-Radhawi 和 E. Sontag，IEEE 自动控制汇刊 **67**，3305（2021）。[14] A. Douady 和 J. Oesterl´e，C.R. Acad. Sci. Paris，A辑 **290**，1135 1980（）。[15]R. Smith，Proc. Royal Soc. Edinburgh **104A**，235（1986）。[16]R. Temam, *Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics* 1997 （Springer，纽约，）。[17]G. Leonov、D. Ponomarenko 和 V. S mirnova， *Frequency methods for nonlinear analysis. Theory and applications*（World Scientific，新加坡，1996）。[18]V. A. Boichenko、G. A. Leonov 和 V. Reitman， *Dimension The-ory for Ordinary Differential Equations*（Teubner Verlag，德国威斯巴登，2005）。[19]V. S. Afraimovich 和 Y. B. Pesin，Soviet Scientific Reviews，C辑：数学物理评论 6，169（1987）。[20]N. Kuznetsov，Physics Letters，A辑 380，2142（2016）。[21]R. Kato 和 H. Ishii，IEEE Control Systems Letters 7，3247（2023）。[22]M. Louzeiro、C. Kawan、S. Hafstein、P. Giesl 和 J. Yuan，SIAM 应用动力系统杂志 21，2610 – 2641（2022）。[23]P. Giesl、S. Hafstein 和 C. Kawan，计算动力学杂志 10，1（2023）。[24]A. Y. Pogromsky 和 A. Matveev，非线性 24，1937（2011）。[25]A. Matveev 和 A. Y. Pogromsky，Automatica 70，217（2016）。[26]A. Matveev 和 A. Y. Pogromsky，Automatica 103，189（2019）。[27]C. Kawan、A. Matveev 和 A. Y. Pogromsky，Automatica 125，109467 2021（）。[28] P. Mattila， *Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces*（剑桥大学出版社，1995）。[29]H. Federer， *Geometric Measure Theory*（Springer-Verlag，1969）。[30]R. Horn 和 C. Johnson， *Matrix Analysis*（剑桥大学出版社，英国剑桥，2013）。[31]G. S¨oderlind，BIT 数值数学 46，631（2006）。[32]J. Muldowny，Rocky Mountain J. Math. 20，957（1990）。[33]S. Schreiber，J. Differ. Equ. 148，334（1998）。[34]C. Kawan, *Invariance Entropy for Deterministic Control Systems* 2013 （Springer-Verlag，瑞士，）。[35]N. Kuznetsov 和 V. Reitmann， *Attractor Dimension Estimates for Dynamical Systems: Theory and Computation*（Springer，瑞士沙姆，2021）。[36]K. Falconer, *Fractal geometry: Mathematical foundations and applications.* 1952 （Wiley and Sons，纽约，）。[37]N. Attia、H. Jebali 和 R. Guedri，非线性分析中的拓扑方法 62，601（2023）。[38]R. Engelking， *General topology*（Heldermann Verlag，柏林，1989）。[39]P. Hartman， *Ordinary Differential Equations*，第2版（Birkh¨auser，波士顿，1982）。[40]T. Kato， *Perturbation Theory for Linear Operators*（Springer，柏林，1995）。[41]S. Sternberg， *Lectures on Differential Geometry*，第2版（Chelsea，纽约，1983）。[42]J. Thorpe， *Elementary topics in differential geometry*（Springer，纽约，1979）。[43]B. Merriman 和 S. Ruuth，计算物理学杂志 225，2267（2007）。[44] G. Harris 和 C. Martin，美国数学学会会刊 100，390（1987）。[45]N. Kuznetsov、T. Mokaev 和 P. Vasilyev，非线性科学与数值模拟通讯 19，1027（2014）。[46]Y. Ding 和 L. Zheng，数学与计算机模拟 206，770（2023）。[47]S. Malykh、Y. Bakhanova、A. Kazakov、K. Pusuluri 和 A. Shilnikov，混沌：非线性科学跨学科期刊 30，113126（2020）。[48] V. Belozyorov，国际分岔与混沌杂志 25，1550048 2015（）。[49]S. Nikolov 和 B. Bozhkov，混沌、孤子与分形 21，803（2004）。[50]Q. Yang 和 T. Yang，非线性动力学 91，2241（2018）。