arXiv:2603.02807v1 [physics.flu-dyn] 3 Mar 2026

基于最小压力梯度原理的不可压缩黏性流有限元公式

Julian J. Rimoli

加利福尼亚大学尔湾分校机械与航空航天工程系，CA 92697，美国 jrimoli@uci.edu

摘要

我们提出一种基于最小压力梯度原理（PMPG）的不可压缩黏性流有限元公式。这一变分原理由 Taha, Gonzalez & Shorbagy 最近建立（《流体物理学》，第35卷，2023），指出纳维–斯托克斯方程等价于在每一时刻确定变化率 $\partial_t \boldsymbol{v}$，即在不可压缩性与边界条件约束下，最小化所隐含压力梯度的 L^2 范数。我们使用 Q9 双二次有限元直接离散 PMPG 泛函，并对节点速度变化率进行最小化（瑞利–里茨）。其中不出现压力自由度；不可压缩性与边界条件通过整体鞍点系统作为线性等式约束加以施加，其拉格朗日乘子可在无需压力重构的情况下给出壁面力。我们针对精确泊肃叶流（达到机器精度恢复）和 Kovasznay 解（收敛率 ~ 3.3）验证该公式，并对照已发表的顶盖驱动方腔、后向台阶和圆柱绕流基准进行确认。该公式在对流主导区间的粗网格上无需稳定化即可得到光滑的无振荡解。我们进一步表明，单元级 PMPG 泛函密度可作为自适应网格细化的内置误差指标，并且驻定条件可以反向解读，从而直接由速度场测量估计运动黏度。

关键词： 有限元、不可压缩黏性流、最小压力梯度原理、瑞利–里兹法、仅速度公式、误差估计

1 引言

1.1 最小压力梯度原理

半个多世纪以来，不可压缩黏性流的数值模拟一直是计算力学的核心课题。主流方法（有限元法、有限体积法和谱方法）直接对纳维–斯托克斯方程进行离散，并将

压力作为主要未知量（混合方法）处理，或通过投影／分步算法处理 [1, 2, 3]。在混合公式中，速度–压力对必须满足 Babuška–Brezzi inf-sup 条件 [4, 5]，以确保稳定性，这限制了插值空间的选择。投影方法通过算子分裂将速度与压力解耦，但可能引入分裂误差，从而影响稳态下的精度 [3]。

Taha, Gonzalez & Shorbagy [6], 最近确立了一种根本不同的视角，证明不可压缩纳维–斯托克斯方程等价于一个约束优化问题：在每一时刻，变化率 $\partial_t \boldsymbol{v}$ 由在区域上最小化隐含压力梯度的 L^2 范数来确定，并受不可压缩性与边界条件约束。这就是**最小压力梯度原理**（PMPG）。该原理深深植根于经典分析力学（高斯最小约束原理 [7] 与Appell 表述 [8]），最初由Gonzalez & Taha [9] 推广到理想流体流动，随后又推广到黏性流动 [6]。

PMPG原理将纳维–斯托克斯方程重新表述为约束最小化，而非边值问题，因而需要一种根本不同的离散策略：不必写出弱形式并施加Galerkin 投影，而是可将有限维速度近似直接代入PMPG 泛函，并对节点速度变化率进行最小化（经典的Rayleigh–Ritz 方法），同时通过拉格朗日乘子精确施加约束。该原理在 [6, 9], 中的演示则依赖于解析或半解析速度表示，从而将其适用性限制于简单几何。通用实现需要能够处理任意区域与边界条件的有限元离散；这正是本文的主题。

1.2 目标与贡献

本研究旨在为黏性不可压缩流动开发一种通用的 PMPG 原理有限元实现。我们的贡献包括以下五点：

1. **首次将有限元方法用于黏性流动中的 PMPG 实现**。我们将瑞利–里兹方法应用于 PMPG 泛函：将 Q9 双二次速度插值代入变分原理，从而将其转化为关于节点速度变化率的有限维约束最小化问题。由此得到的求解器可处理具有无滑移壁面、给定入口剖面和自由出流边界的一般二维几何。

2.**仅基于速度（变化率）的原始形式**。不引入压力有限元空间，也无需满足 inf–sup 速度–压力配对条件。压力相关量通过与施加的不可压缩性约束和边界约束相关联的对偶变量（拉格朗日乘子）体现，因此无需进行压力重构即可提取力。

3. **整体式基于约束的架构**。无散流动和所有边界条件均编码为线性等式约束，并在每个时间步通过整体鞍点系统加以强制。与投影方法不同，投影方法会在黏性子问题和不可压缩性子问题之间引入分裂误差，而整体式

方法会同时强制施加所有约束；对于解属于有限元空间的问题，该方法以机器精度收敛至精确稳态。由于对流仅通过显式右端项引入，因此无论雷诺数如何，系统矩阵均为对称正定；即使在对流主导区间使用粗网格，该公式也无需稳定化即可产生无振荡解。

4. **内置误差指标与自适应加密**。单元级 PMPG 泛函密度衡量局部动量残差，可作为零成本误差指标：无需伴随问题、参考网格或额外求解。我们展示了如何将其用于后向台阶流动的自适应网格细化。

5. **根据速度数据进行逆黏度估计**。我们表明，可以逆向解读 PMPG 驻定条件，直接根据速度场测量（例如 PIV数据）恢复运动黏度。通过投影到无散子空间消除约束力，再通过内积之比即可求得黏度，无需正向求解、压力重构或迭代优化。

1.3 概述

本文其余部分安排如下。第 2 节介绍 PMPG 形式：变分原理的瑞利–里兹离散、Q9 有限元插值、无散约束、边界条件、单体鞍点求解器、自适应库朗–弗里德里希–列维（CFL）时间步进，以及从拉格朗日乘子中提取壁面力。第 3 节通过精确的泊肃叶解和 Kovasznay 解进行验证。第 4 节将该方法与已发表的顶盖驱动方腔、后向台阶和圆柱绕流基准数据进行对比验证。第 5 节说明单元级 PMPG 泛函可自然地用作误差指标，并展示其在自适应网格细化中的应用。第 6 节提出逆黏度估计方法，并将其应用于合成粒子图像测速数据。第 7 节总结本文的贡献并讨论未来方向。

2 公式

2.1 PMPG 变分原理

考虑区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$内密度恒定为 $\rho = 1$ 、运动黏度恒定为 ν 的牛顿流体的不可压缩黏性流。速度场 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},\ t)$满足 Navier–Stokes 方程:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} = -\nabla p + \nu \nabla^2 \boldsymbol{v} \qquad \text{in } \Omega, \tag{1}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0 \qquad \text{in } \Omega, \tag{2}$$

在 $\partial\Omega$上具有边界条件。

Taha等人 [6] 证明，(1)–(2)的解可通过极小化原理等价刻画。PMPG原理指出，在每一时刻，时间导数 $\partial_t \boldsymbol{v}$ 是使隐含压力梯度的 L^2 范数最小的那个：

$$\min_{\partial_t \boldsymbol{v}} \ \mathcal{J}(\partial_t \boldsymbol{v}) = \frac{1}{2} \int_\Omega \left| \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} - \nu \nabla^2 \boldsymbol{v} \right|^2 d\Omega, \tag{3}$$

对于所有满足 $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$ 和狄利克雷边界条件的速度场。在此公式中，给定时刻的当前速度 $\boldsymbol{v}$ 及其空间导数均为已知量；未知量为 $\partial_t \boldsymbol{v}$，它作为被积函数中的第一项出现。因此，该泛函关于 $\partial_t \boldsymbol{v}$是二次的，并在满足上述约束的条件下对其进行最小化。

PMPG 泛函的二次结构是使其适用于有限元离散的关键特性。正如线弹性中的最小势能原理（关于位移为二次）通过瑞利–里兹法导出对称线性系统，并构成结构有限元方法的基础一样，PMPG 泛函（关于 $\partial_t \boldsymbol{v}$为二次）在采用有限元形函数离散后，也应产生对称线性系统。下一节将介绍这种离散化。

2.2 瑞利–里兹离散

我们使用有限元形函数 $N_a(\boldsymbol{x})$ 对速度场进行离散，写作 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},\ t) = \sum_a N_a(\boldsymbol{x})\, \boldsymbol{d}_a(t)$，其中 $\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^{n_{\text{dofs}}}$ 表示节点速度系数。时间导数（进行最小化所针对的场）采用相同的基函数进行插值：$\partial_t \boldsymbol{v} = \sum_a N_a\, \dot{\boldsymbol{d}}_a$。具体采用何种单元和形函数将在第 2.3 节中说明；此处的推导不依赖于具体选择。

代入 PMPG 泛函 (3) 后，无限维最小化转化为关于 $\dot{\boldsymbol{d}}$的有限维二次规划。记残差向量

$$\boldsymbol{R}(\dot{\boldsymbol{d}}) = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} - \nu \nabla^2 \boldsymbol{v} = \sum_a N_a \dot{\boldsymbol{d}}_a + \boldsymbol{g}, \tag{4}$$

其中，$\boldsymbol{g} = (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} - \nu \nabla^2 \boldsymbol{v}$ 汇集了取决于已知速度场的各项，泛函变为 $\mathcal{J} = \frac{1}{2} \int_\Omega |\boldsymbol{R}|^2 \, d\Omega$；该泛函关于 $\dot{\boldsymbol{d}}$ 为二次函数，并具有唯一极小值。对 d_i （节点 a处分量 k 所对应的自由度）求导，得到

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \dot{d}_i} = \int_\Omega \boldsymbol{R} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \dot{d}_i} \, d\Omega = \int_\Omega R_k \, N_a \, d\Omega = 0. \tag{5}$$

$R_k = \sum_b N_b \dot{d}_{k,\ b} + g_k$ 并将未知的 $\dot{\boldsymbol{d}}$ 与已知项分离展开：

$$\sum_b \left(\int_\Omega N_a \, N_b \, d\Omega \right) \dot{d}_{k,b} + \int_\Omega N_a \left[(\boldsymbol{v} \cdot \nabla) v_k - \nu \nabla^2 v_k \right] d\Omega = 0. \tag{6}$$

对黏性项应用分部积分（$\int_\Omega N_a \nabla^2 v_k \, d\Omega = -\int_\Omega \nabla N_a \cdot \nabla v_k \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} N_a \, \partial_n v_k \, d\Gamma$；边界积分在速度

由约束给定的狄利克雷边界上消失，并在自由出流边界上给出自然的零应力条件），并收集系数，得到半离散系统

$$\boldsymbol{M}\,\dot{\boldsymbol{d}} = -\boldsymbol{r}_{\mathrm{conv}}(\boldsymbol{d}) - \nu \boldsymbol{K}\,\boldsymbol{d}, \tag{7}$$

以及全局算子

$$M_{ij} = \int_\Omega N_i\, N_j \, d\Omega \qquad \text{(mass matrix)}, \tag{8}$$

$$K_{ij} = \int_\Omega \nabla N_i \cdot \nabla N_j \, d\Omega \qquad \text{(stiffness matrix)}, \tag{9}$$

$$r_{\mathrm{conv},i} = \int_\Omega N_i \, [(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}] \, d\Omega \qquad \text{(convective residual)}. \tag{10}$$

实际上，全局积分可分解为单元贡献之和，例如 $M_{ij} = \sum_e \int_{\Omega_e} N_i\, N_j \, d\Omega_e$，在参考单元上使用适当的高斯求积公式Ca 进行计算。 $\boldsymbol{M}$和 $\boldsymbol{K}$ 均具有块对角结构 diag($\boldsymbol{M}_s, \boldsymbol{M}_s$) 和 diag($\boldsymbol{K}_s, \boldsymbol{K}_s$)，这反映了 v_x 和 v_y的独立插值。对流残差关于 $\boldsymbol{d}$ 是二次的，因此必须在每个时间步重新组装。

PMPG 公式的变分结构赋予这些算子良好的性质。质量矩阵 $\boldsymbol{M}$ 是对称正定的，而刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 是对称半正定的，因为 $\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{d} = \int_\Omega |\nabla \boldsymbol{v}|^2 \, d\Omega \geq 0$。由此可知，任何满足 $\alpha \geq 0$ 的线性组合 $\boldsymbol{M} + \alpha\boldsymbol{K}$ 均为对称正定，这一性质保证了下文所推导的时间推进系统适定。

受约束瞬时问题。式（7）是一个瞬时条件：在每个时间点 t，速度场 $\boldsymbol{d}$ 已知，而速度变化率 $\dot{\boldsymbol{d}}$ 是待求未知量。解还必须满足不可压缩约束和边界条件。这些约束都是关于 $\dot{\boldsymbol{d}}$ 的线性约束（狄利克雷边界条件显然如此；散度约束则是次参数几何映射的结果，见第 2.3.4 节），可将其汇总为

$$\boldsymbol{C}\,\dot{\boldsymbol{d}} = \boldsymbol{b}, \tag{11}$$

其中 $\boldsymbol{C}$ 是全局约束矩阵， $\boldsymbol{b}$是指定值； $\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的具体构造详见第 2.4 节和第 2.5 节。由于当前状态满足 $\boldsymbol{C}\boldsymbol{d} = \boldsymbol{b}$，变化率受到的约束为 $\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{d}} = \boldsymbol{0}$，也就是说，速度变化率本身必须无散，且不得改变指定的边界值。

因此，原则上的求解步骤为：求解式（7），得到 $\dot{\boldsymbol{d}}$，使其满足 $\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{d}} = \boldsymbol{0}$，更新 $\boldsymbol{d}^{n+1} = \boldsymbol{d}^n + \Delta t\, \dot{\boldsymbol{d}}$，然后重复上述步骤。

时间离散化。当前公式的一个关键特点是，前向欧拉离散 $\dot{\boldsymbol{d}} \approx (\boldsymbol{d}^{n+1} - \boldsymbol{d}^n)/\Delta t$ 将半离散方程（7）转化为一个可直接求解 $\boldsymbol{d}^{n+1}$ 的系统。这一点意义重大，因为 $\boldsymbol{d}^{n+1}$ 是施加约束的对象：用 $\boldsymbol{C}\boldsymbol{d}^{n+1} = \boldsymbol{b}$ 替换 $\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{d}} = \boldsymbol{0}$ 是精确的，而且约束系统可以通过单个整体求解步骤求解（第 2.6 节）。

将前向欧拉离散代入（7），得到一个完全显式的时间步：
$\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{d}^{n+1} = \boldsymbol{M}\,\boldsymbol{d}^{n} - \Delta t\,\boldsymbol{r}_{\mathrm{conv}} - \nu\Delta t\,\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{d}^{n}$。为保证数值稳定性，我们将显式黏性项 $-\nu\boldsymbol{K}\boldsymbol{d}^{n}$ 替换为隐式求值 $-\nu\boldsymbol{K}\boldsymbol{d}^{n+1}$，从而得到半隐式系统

$$(\boldsymbol{M} + \nu\Delta t\,\boldsymbol{K})\,\boldsymbol{d}^{n+1} = \boldsymbol{M}\,\boldsymbol{d}^{n} - \Delta t\,\boldsymbol{r}_{\mathrm{conv}}(\boldsymbol{d}^{n}). \tag{12}$$

这消除了扩散稳定性约束 $\Delta t \sim h^2/\nu$，仅保留对流 CFL 条件 $\Delta t \sim h/|\boldsymbol{v}|$。该修改不会改变稳态解（其中$\boldsymbol{d}^{n+1} = \boldsymbol{d}^{n}$），并且对于中等雷诺数下的实际计算至关重要。

注 2.1。 半隐式系统（12）具有区别于标准伽辽金离散的结构特性。对于任意正黏度和时间步，无论雷诺数为何，系统矩阵 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{M} + \nu\Delta t\,\boldsymbol{K}$ 都是对称正定的：质量矩阵 $\boldsymbol{M}$ 是对称正定矩阵，刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 是半正定的，而对流仅出现在显式右端项 $\boldsymbol{r}_{\mathrm{conv}}$（$\boldsymbol{d}^{n}$）中）。因此，每个时间步都对应于对凸二次泛函进行约束最小化，且解是唯一确定的。相比之下，在伽辽金有限元方法中，对流算子会向系统矩阵贡献一个非对称项；当单元佩克莱数 $\mathrm{Pe}_h = |\boldsymbol{v}|h/(2\nu) \gg 1$时，该项可能破坏离散强制性，从而产生伪振荡 [10]。PMPG 公式完全避免了这一机制：CFL 条件限制时间步是为了保证时间精度，而不是为了防止空间振荡。在 $Re = 1000$ 的粗网格上、Pe_h 最高达 42 时验证这一性质的数值证据见第 4.1.3 节。

上述推导与具体的单元类型或问题维数无关。接下来，我们将详述实现的具体内容：用于二维问题中速度插值的 Q9 双二次单元（第 2.3 节）、逐点无散约束的构造（第 2.4 节）、边界条件（第 2.5 节），以及将所有组成部分整合在一起的整体式鞍点求解器（第 2.6 节）。

2.3 Q9 有限元离散

速度场与速度变化率场采用 9 节点双二次（Q9）拉格朗日有限元进行离散。每个单元包含 9 个节点，场使用全套双二次形函数进行插值。从参考单元到物理单元的坐标映射采用第 2.3.4 节详述的次参数方法。

2.3.1 参考单元

Q9 单元定义在参考正方形 $[-1,1]^2$ 上，共有 9 个节点：4 个角点、4 个边中点节点和 1 个中心节点（图 1 左）。各节点 a的参考坐标（ξ_a, η_a）也示于图中。

2.3.2 场插值

在 9 个单元节点处定义的任意二维向量场，均使用完整的 Q9双二次形函数组进行插值。在本公式中，关注的两个场是

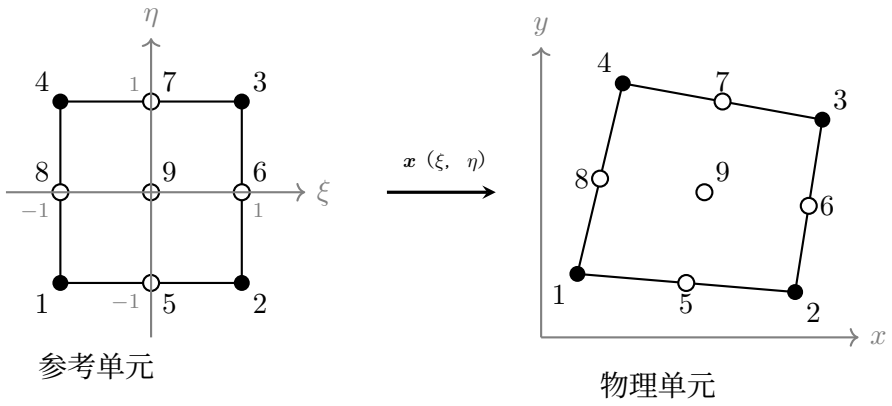


图 1：次参数映射 $\boldsymbol{x}(\xi,\eta)$ 下的 Q9 参考单元（左）和一个典型物理单元（右）。实心圆（ ）表示定义双线性几何映射的 4 个角节点；空心圆（ ）表示仅用于双二次场插值的 5 个边中点节点和中心节点。在物理单元中，边中点节点位于（直）边的中点，中心节点位于双中线的交点处，这由双线性映射确定。

速度 $\boldsymbol{v}$ 及其时间导数 $\partial_t \boldsymbol{v}$；两者均使用相同的形函数进行插值，但节点系数不同。

形函数由 $\{-1,0,1\}$ 上的一维二次拉格朗日多项式的张量积构造：

$$\ell_0(t)=\frac{t(t-1)}{2},\quad \ell_1(t)=1-t^2,\quad \ell_2(t)=\frac{t(t+1)}{2}. \tag{13}$$

二维形函数为 $N_a(\xi,\eta)=\ell_{i_a}(\xi)\,\ell_{j_a}(\eta)$，其中 $a=1,\dots,9$，(i_a,j_a) 是与节点 a 相关联的一维基函数指标。接着，通用向量场 $\boldsymbol{f}=(f_x,f_y)$ 可由其节点系数向量表示

$$\boldsymbol{c}=\big(c_1,\dots,c_9,c_{10},\dots,c_{18}\big)^T\in\mathbb{R}^{18}, \tag{14}$$

因此

$$f_x(\xi,\eta)=\sum_{a=1}^{9}N_a\,c_a,\qquad f_y(\xi,\eta)=\sum_{a=1}^{9}N_a\,c_{9+a}. \tag{15}$$

对于速度场，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{d}$ 其中 $\boldsymbol{d}=(v_x^1,\ \dots\dots,\ v_x^9,\ v_y^1,\ \dots\dots,\ v_y^9)^T$；对于时间导数，$\boldsymbol{c}=\dot{\boldsymbol{d}}$ 其中 $\dot{\boldsymbol{d}}=(\dot v_x^1,\ \dots\dots,\ \dot v_x^9,\ \dot v_y^1,\ \dots\dots,\ \dot v_y^9)^T$。

2.3.3 物理梯度

计算插值场的物理导数需要从参考单元到物理单元的坐标映射的雅可比矩阵 $\boldsymbol{J}$。对于节点值为（c_1，……，c_9）的标量分量f，其物理导数为：

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{j_{22}f_{,\xi}-j_{21}f_{,\eta}}{\det(\boldsymbol{J})},\qquad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{-j_{12}f_{,\xi}+j_{11}f_{,\eta}}{\det(\boldsymbol{J})}, \tag{16}$$

其中 $f_{,\,\xi} = \boldsymbol{B}_\xi \cdot \boldsymbol{c}$ 和 $f_{,\,\eta} = \boldsymbol{B}_\eta \cdot \boldsymbol{c}$，其中 $\boldsymbol{B}_\xi$ 和 $\boldsymbol{B}_\eta$ 为参数形函数导数的行向量：

$$\boldsymbol{B}_\xi = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \cdots & \frac{\partial N_9}{\partial \xi} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B}_\eta = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \cdots & \frac{\partial N_9}{\partial \eta} \end{pmatrix}. \tag{17}$$

将式（16）应用于 $\boldsymbol{v}$ 或 $\partial_t \boldsymbol{v}$ 的每个分量，即可得到相应的物理梯度张量。雅可比矩阵分量 j_{ij} 和 $\det(\boldsymbol{J})$ 取决于具体的几何映射，下面将对此进行详细说明。

2.3.4 次参数几何映射

物理梯度公式（16）需要一个从参考单元到物理单元的坐标映射的雅可比矩阵。在标准等参方法中，用于速度插值的同一组双二次函数也用于映射几何，从而得到关于 (ξ, η) 的二次雅可比矩阵。我们改为采用一种次参数映射，仅使用由 4 个角节点构造的双线性形函数（图 1 右图）：

$$\boldsymbol{x}(\xi, \eta) = \sum_{a=1}^{4} N_a^{\mathrm{lin}}(\xi, \eta)\, \boldsymbol{x}_a, \qquad N_a^{\mathrm{lin}} = \frac{(1 + \xi_a \xi)(1 + \eta_a \eta)}{4}. \tag{18}$$

该映射的雅可比矩阵为：

$$\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix}, \tag{19}$$

至多关于 (ξ, η) 呈线性。它可以用 6 个标量参数表示：

$$\begin{aligned} j_{11}^0 &= \tfrac{1}{4}(-x_1 + x_2 + x_3 - x_4), & j_{12}^0 &= \tfrac{1}{4}(-x_1 - x_2 + x_3 + x_4), \\ j_{21}^0 &= \tfrac{1}{4}(-y_1 + y_2 + y_3 - y_4), & j_{22}^0 &= \tfrac{1}{4}(-y_1 - y_2 + y_3 + y_4), \\ h_1 &= \tfrac{1}{4}(x_1 - x_2 + x_3 - x_4), & h_2 &= \tfrac{1}{4}(y_1 - y_2 + y_3 - y_4), \end{aligned} \tag{20}$$

因此，在 (ξ, η) 处的雅可比矩阵分量为：

$$j_{11} = j_{11}^0 + h_1 \eta, \quad j_{12} = j_{12}^0 + h_1 \xi, \quad j_{21} = j_{21}^0 + h_2 \eta, \quad j_{22} = j_{22}^0 + h_2 \xi. \tag{21}$$

雅可比行列式关于（ξ，η）至多为线性：

$$\det(\boldsymbol{J}) = J_0 + J_\xi \xi + J_\eta \eta, \tag{22}$$

其中 $J_0 = j_{11}^0 j_{22}^0 - j_{12}^0 j_{21}^0$、$J_\xi = j_{11}^0 h_2 - j_{21}^0 h_1$ 和 $J_\eta = h_1 j_{22}^0 - h_2 j_{12}^0$。

注 2.2. 次参数化选择是该公式的核心。物理导数 (16) 涉及除以 $\det(\boldsymbol{J})$。在第 2.4 节中，由这些物理导数组成散度约束 $\partial v_x/\partial x + \partial v_y/\partial y = 0$；两边乘以 $\det(\boldsymbol{J})$ 消去分母后，得到一个约束行，它是乘积 $j_{ij}\, \partial N_a/\partial \xi_k$ 的线性组合，并且关于节点速度 $\boldsymbol{d}$ 呈线性。由于次参数化雅可比矩阵分量 j_{ij} 至多是 (ξ, η) 的双线性函数，这些乘积仍为低次多项式，非常适用于标准高斯求积。采用完整双二次几何的等参表述会产生更高次的雅可比项，使约束结构变得复杂，却不会给直边单元或缓曲单元带来任何益处。

2.4 无散约束

不可压缩条件 $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$ 是黏性公式中唯一的单元级约束。在求积点 (ξ_k, η_k) 处，两边乘以 $\det(\boldsymbol{J})$ 以避免除以雅可比行列式后，约束变为：

$$j_{22} v_{x,\xi} - j_{21} v_{x,\eta} - j_{12} v_{y,\xi} + j_{11} v_{y,\eta} = 0. \tag{23}$$

将参数导数用 $\boldsymbol{d}$ 表示后代入：

$$\boldsymbol{c}_k^{\mathrm{div}} \cdot \boldsymbol{d} = 0, \qquad \boldsymbol{c}_k^{\mathrm{div}} = \begin{pmatrix} j_{22}\boldsymbol{B}_\xi - j_{21}\boldsymbol{B}_\eta & -j_{12}\boldsymbol{B}_\xi + j_{11}\boldsymbol{B}_\eta \end{pmatrix}_k \in \mathbb{R}^{1\times 18}. \tag{24}$$

该约束是线性的，因为雅可比矩阵分量仅取决于（固定的）角点坐标，而与速度自由度无关。

我们在 2×2 个高斯求积点处施加式 (24)，每个单元由此产生 4 行约束。2×2 求积公式是能够在足够多的点上捕捉双二次速度场散度、保证精度的最低阶公式，同时使每个单元保留 $18 - 4 = 14$ 个未受约束的自由度，足以让速度满足动量方程。更高阶的求积公式（例如 3×3）会在每个单元施加 9 个约束，仅留下 9 个自由自由度，从而对全局系统施加过多约束。对于非退化单元，4 行约束始终线性独立（秩为 4），因此在单元层面没有冗余约束。

注 2.3。</style上述关于自由度计数的论述之外，个高斯点还具有一种结构性质。由于 () det() 关于 (，η) 的次数至多为 (2，2)（双二次形函数导数的次数为 2，而次参数雅可比分量的次数至多为 1），它与任意双线性函数 q(ξ，η) 的乘积次数至多为 (3，3)，因此可由 2×2 高斯–勒让德求积公式精确积分。因此，如果 (∇·$\boldsymbol{v}$) det($\boldsymbol{J}$) $= 0$ 在四个高斯点处成立，那么对于每个双线性函数 q，

$$\int_{\Omega_e} (\nabla\cdot\boldsymbol{v})\, q \, d\Omega = 0. \tag{25}$$

任何经约束后仍然残留的散度残差，因此在每个单元上与双线性多项式空间 $Q_1 = \mathrm{span}\{1, \xi, \eta, \xi\eta\}$ L^2-正交：其平均值为零、一阶矩为零，且双线性矩为零。仅余高阶多项式模态，这些模态在每个单元内振荡，并倾向于在相邻单元间相互抵消，而非相干累积。散度残差的这种“高通滤波”解释了为何 2×2 高斯公式优于在使逐单元泄漏度量最小化的点处进行配点；参见第3.2节中的Kovasznay 流比较以及附录 A中的详细分析。

元素约束行通过单元自由度映射进行散射，组装为全局约束矩阵 $\boldsymbol{C}$，其方式与将单元刚度矩阵组装为全局刚度矩阵相同。请注意，单元级自由度排序 (14) 将所有 v_x 分量排在所有 v_y 分量之前，而全局自由度向量 $\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^{n_{\mathrm{dofs}}}$ 则采用交错排序：自由度 $2i$ 对应全局节点 i 处的 v_x，自由度 $2i+1$ 对应全局节点 i 处的 v_y。组装过程中，单元自由度映射负责在这两种排序之间进行转换。$\boldsymbol{C}$ 的每一行都在特定的求积点处施加约束 $\nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0$，该求积点位于特定的

单元中。边界条件（第 2.5 节）作为 $\boldsymbol{C}$ 的附加行加入，随后通过第 2.6 节所述的鞍点公式求解完整系统。

该公式的一个关键特点是，不可压缩性在求积点处逐点施加，而不是以弱形式或平均意义施加。由此得到的速度场在每个单元的每个高斯点处都严格无散。这直接源于其变分结构：在 PMPG 框架中，不可压缩性作为最小化问题的等式约束，而拉格朗日乘子则确保该约束得到严格满足。该方法不需要压力有限元空间，无须满足 inf-sup 条件，也无需调整罚参数。约束的数量和位置完全由所选的求积规则决定。

这与速度–压力混合公式形成对比。在这类公式中，不可压缩性以弱形式施加：$\int_\Omega q \nabla \cdot \boldsymbol{v}\, d\Omega = 0$ 对压力空间 Q_h 中的所有检验函数 q 都成立。混合方法中的速度场仅在投影到 Q_h后才是无散的，而非逐点无散。 此外，压力空间必须经过选择，以满足 Babuška–Brezzi inf-sup 条件 [4, 5]；若不满足，该公式就会不稳定，并且需要进行压力稳定化处理 [11]。由于无需引入压力空间，当前公式避免了速度–压力 inf-sup 要求；相反，其稳健性取决于逐点约束算子的秩与一致性，以及所得 KKT 系统的条件数。

2.5 边界条件

当前公式中的所有边界条件均为狄利克雷类型：在边界节点处指定速度值。每个指定分量都会在全局约束矩阵 $\boldsymbol{C}$ 中增加一行，并在右端项 $\boldsymbol{b}$中增加一个对应项。具体而言，在节点 i 处指定$v_{x,\,i} = \bar{v}_{x,\,i}$，会在 $\boldsymbol{C}$ 中增加一行，其中自由度 $2i$ 处的值为 1，其余项为 0；并在 $\boldsymbol{b}$中加入值为$\bar{v}_{x,\,i}$ 的对应项。对于任何指定的$v_{y,\,i}$，也会以类似方式增加一行。

无滑移壁面是特殊情况，即$\bar{v}_{x,\,i} = \bar{v}_{y,\,i} = 0$（每个壁面节点有 2 个约束）。入口速度分布是非零的狄利克雷边界条件，其取值经过设定以匹配所需的流入（例如抛物线形的泊肃叶速度分布）。在这两种情况下，约束都以与散度约束相同的方式进入鞍点系统 (26)。

在自由出口边界处，不施加任何约束。出口节点处的速度完全由单元散度约束和 PMPG 极小化确定；求解器会自然地调整流出，以满足全局不可压缩性。这类似于传统公式中的“无操作”或自然流出条件 [12]。

2.6 整体鞍点求解器

2.6.1 耦合系统

计算流体力学中一种常见的方法是先求解无约束的动量方程（12），然后在单独的步骤中将结果投影到约束流形（11）上。这一策略由 Chorin [1]提出，并被广泛称为投影法或分步法 [3], 。该方法实现简单，但会在黏性子问题与不可压缩性子问题之间引入分裂误差，从而可能损害稳态精度 [3]。也可以在不产生分裂误差的情况下构造精确投影方法，

在离散层面上，当存在显式（最好是稀疏的）无散基时，可通过投影到离散散度算子的零空间（不包括狄利克雷约束）来实现；对于某些交错离散化，构造这样的基很简单，但在一般的有限元（FE）设置中则可能并非易事 [2]。

在本文的公式中，我们改为通过拉格朗日乘子将约束 (11) 直接纳入时间步中。如第 2.2 节所述，约束 $\boldsymbol{C}\boldsymbol{d}^{n+1} = \boldsymbol{b}$ is等价于 $\boldsymbol{C}\boldsymbol{d} = \boldsymbol{0}$，因此相对于 PMPG 优化变量是线性的。将其与半隐式系统 (12) 结合，可得一个耦合鞍点系统：

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{C}^T \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}}_{\text{saddle-point matrix}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{d}^{n+1} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{M}\boldsymbol{d}^{n} - \Delta t\, \boldsymbol{r}_{\text{conv}} \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix}, \tag{26}$$

其中，$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{M} + \nu\Delta t\, \boldsymbol{K}$ is 隐式算子，$\boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^{m \times n_{\text{dofs}}}$ is 完整的约束矩阵（散度 $+$ 边界条件），$\boldsymbol{b}$ is 约束右端项（散度和无滑移条件对应零值，入口狄利克雷条件对应给定值），而 $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m$ is 拉格朗日乘子向量。

(26) 的第一块行是受约束动量方程：项 $\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{\lambda}$ is 是约束力的离散类比，用于施加不可压缩性和边界条件。第二块行精确施加 $\boldsymbol{C}\boldsymbol{d}^{n+1} = \boldsymbol{b}$。这是由 PMPG 泛函的约束最小化自然导出的标准鞍点结构 [13]。

2.6.2 实现

式 (26) 中的鞍点矩阵是稀疏的，其稀疏模式在整个模拟过程中保持不变。在每个时间步：

1. Th e对流残差 $\boldsymbol{r}_{\text{conv}}(\boldsymbol{d}^n)$由当前速度fie计算。 ld.

2. 组装右端项 $\boldsymbol{M}\boldsymbol{d}^n - \Delta t\, \boldsymbol{r}_{\text{conv}}$。

3. 鞍点系统 (26) 的求解方式为：对中等规模问题采用稀疏 LU 分解（SuperLU），对更大规模系统采用预条件 GMRES。GMRES 求解器使用块三角预条件器，该预条件器基于 $\boldsymbol{A}$ 的不完全 LU 分解以及近似舒尔补$\hat{S} = \boldsymbol{C}\,\text{diag}(\boldsymbol{M}_L)^{-1}\boldsymbol{C}^T$，其中 $\boldsymbol{M}_L$ 为集总质量矩阵。

由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 依赖于 Δt（通过项 $\nu\Delta t\boldsymbol{K}$），仅当 Δt 的变化超过10%时才重新计算分解（或预条件器），这通常仅在预热阶段发生少数几次。

注 2.4。鞍点系统 (26) 的结构与混合有限元公式 [13], 相似，但有两点不同。首先，约束矩阵 $\boldsymbol{C}$ 通过单个算子同时编码不可压缩性和边界条件；拉格朗日乘子 $\boldsymbol{\lambda}$是优化过程中的约束力，而不是有限元压力空间中的节点压力值。其次，$\boldsymbol{C}$ 的每一行都施加一个点态等式（在

特定求积点处无散，或在边界节点处规定速度），而不是混合公式的加权积分 $\int_\Omega q\,\nabla\cdot\boldsymbol{v}\,d\Omega = 0$。因此，速度场在所有求积点处都严格满足 $\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0$；所有测试用例的约束残差均达到机器精度 ($\sim 10^{-13}$)，数值结果证实了这一性质。一种等价的纯速度替代方案是直接在离散散度算子的零空间中参数化解（同时满足施加的狄利克雷约束），但在非交错离散中，构造稀疏显式基通常是实际应用的瓶颈 [2]。

注 2.5。 每个时间步的计算复杂度由鞍点求解决定。采用 2×2 散度求积时，每个单元贡献 4 个约束行，因此约束矩阵有 $m \approx 4n_e + m_{\mathrm{bc}}$ 行，其中 n_e 为单元数，m_{bc} 为边界自由度数。系统总维数为 $n+m$，其中 $n = 2n_{\mathrm{nodes}}$ 为速度自由度数。对于规则网格上的 Q9 网格，$n_e \approx n_{\mathrm{nodes}}/4$（每个内部节点由 4 个单元共享），因此 $m \approx n$，鞍点系统的规模约为单独速度系统的两倍。对于典型的网格拓扑 [13]，稀疏直接求解器（LU 分解）在二维中需要 $O((n+m)^{3/2})$ 次运算；迭代求解器（例如预条件 GMRES）在采用合适的预条件器时，可将每次迭代的运算量降至 $O(n+m)$，但迭代次数取决于条件数。由于 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{M} + \nu\Delta t\,\boldsymbol{K}$ 是对称正定的，针对鞍点系统的成熟块预条件器 [13] 可直接适用。

2.7 自适应 CFL 时间步进

时间步由对流 CFL 条件自适应确定：

$$\Delta t = c_{\mathrm{CFL}} \cdot \frac{h_{\min}}{|\boldsymbol{v}|_{\max}}, \tag{27}$$

其中 $h_{\min} = \min_e l_{c,e}$ 是全局最小特征单元长度（根据双线性映射的最短边计算），$|\boldsymbol{v}|_{\max}$ 是全局最大速度大小，$c_{\mathrm{CFL}} = 0.25$ 是安全系数。上限 $\Delta t_{\max}$ 可避免在速度较小的初始瞬态期间出现不必要的大步长。

2.8 利用拉格朗日乘子提取壁面力

鞍点系统 (26) 中的拉格朗日乘子 $\boldsymbol{\lambda}$ 包含有关约束力的物理信息。根据 (26) 的第一块行：

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{d}^{n+1} + \boldsymbol{C}^T\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{d}^{n} - \Delta t\,\boldsymbol{r}_{\mathrm{conv}}, \tag{28}$$

可将其重新排列为：

$$\boldsymbol{M}\frac{\boldsymbol{d}^{n+1}-\boldsymbol{d}^{n}}{\Delta t} + \boldsymbol{r}_{\mathrm{conv}} + \nu\boldsymbol{K}\boldsymbol{d}^{n+1} = -\frac{\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{\lambda}}{\Delta t}. \tag{29}$$

左端是离散动量方程；右端项 $-\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{\lambda}/\Delta t$ 是施加在流体上的总约束力。

由于约束矩阵 $\boldsymbol{C}$ 包含不同类型的行（无散、壁面边界条件和远场狄利克雷条件），给定自由度处的乘积 $\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{\lambda}$ 混合了所有涉及该自由度的约束所产生的贡献。具体而言，共享壁面节点的单元中的散度行会对壁面自由度处的 $[\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{\lambda}]_i$ 产生贡献，但这些项表示的是不可压缩约束产生的体积平均类压力力，而不是壁面上的表面牵引力。

壁面表面牵引力可通过提取与壁面边界条件行相关的乘子获得。对于无滑移壁面，每个壁面自由度 i都有对应的约束行 $r(i)$，其中仅有一个值为 1 的项：$C_{r(i),\ i} = 1$。相应的乘子 $\lambda_{r(i)}$ 是将该自由度保持为零所需的力，正是壁面处的约束反力。根据牛顿第三定律，流体在自由度 i 处施加于壁面的力为：

$$f_i = \frac{\lambda_{r(i)}}{\Delta t}, \qquad i \in \{\text{wall DOFs}\}. \tag{30}$$

例如，对于升力体，壁面上的总阻力和升力可通过对所有壁面节点的 x 分量和 y 分量求和得到：

$$F_x = \sum_{i \in \text{wall}} f_{2i}, \qquad F_y = \sum_{i \in \text{wall}} f_{2i+1}. \tag{31}$$

重要的是，这些节点力同时包含压力和黏性剪切贡献：乘子 $\lambda_{r(i)}$ 是在节点 i处维持无滑移条件所需的总力，涵盖了完整应力张量的影响，无需分别重构压力或黏性应力。这为计算升力和阻力提供了一种自然且准确的方法，无需重构压力场。此外，拉格朗日乘子可直接提供节点力，因此该公式对于流固耦合尤其具有吸引力，因为这些力可作为耦合载荷施加给结构求解器。

3 验证

在将该公式应用于具有工程意义的问题之前，我们先通过纳维–斯托克斯方程的两个精确解对其进行验证。这两项测试旨在考察求解器互为补充的不同方面。泊肃叶通道流具有二次速度剖面，恰好属于 Q9 双二次插值空间；因此，整体求解器应能以机器精度恢复该解，从而严格检验约束施加和时间推进机制。相比之下，Kovasznay 流的解具有指数—三角函数形式，无法由 Q9空间精确表示；它可用于检验离散化对非平凡纳维–斯托克斯解的空间收敛率。

3.1 泊肃叶流

3.1.1 问题设置

第一个验证测试是高度为 $H = 1$、长度为 $L = 5$ 的矩形通道中的平面泊肃叶流（图 2）。边界条件为：两侧壁面均为无滑移条件（$y = 0$

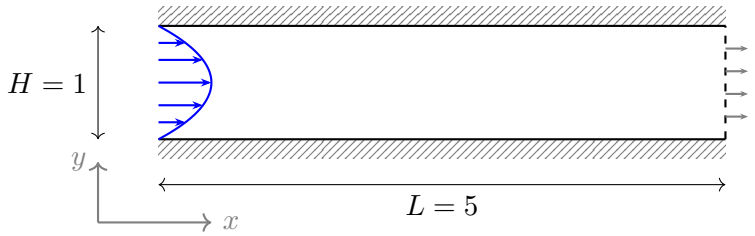


图 2：泊肃叶流：问题设置。带斜线的边界表示无滑移壁面（$\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$），蓝色箭头表示给定的抛物线入口速度分布，虚线边界表示自由出流。

和 $y = H$），入口处为抛物线形泊肃叶速度分布（$x = 0$），

$$v_x(0, y) = u_{\max} \frac{4y(H - y)}{H^2}, \qquad v_y(0, y) = 0, \tag{32}$$

在 $u_{\max} = 1.5$ ($U_{\text{mean}} = 1$) 处，$x = L$ 处为自由出流。运动黏度为 $\nu = 0.1$，因此 $Re = H \cdot U_{\text{mean}}/\nu = 10$。区域采用结构化 Q9 网格离散，共有 $n_x \times n_y$ 个单元，其中 $n_x = n_y L/H$ 以保持近似为 1 的纵横比。我们报告 $n_y = 4$、8 和 16 的结果（分别对应 20×4、40×8 和 80×16 个单元的网格）。

模拟以全域零速度为初始条件，使用整体鞍点求解器（第 2.6 节）随时间推进，直至达到稳态，稳态定义为 $\|\partial_t \boldsymbol{v}\|/\|\boldsymbol{v}\| < 10^{-12}$。

该问题具有稳态闭式解：$v_x(x,\ y) = u_{\max} \cdot 4y(H - y)/H^2$,$v_y = 0$，它是关于 y 的二次多项式。由于 Q9 双二次插值空间包含所有二次多项式，精确的泊肃叶流解属于有限元空间。然而，属于插值空间是精确恢复解的必要条件，但并非充分条件：时间步进格式、约束施加和鞍点求解器都必须在时间演化过程中保留精确解。因此，泊肃叶流是对整体形式特别严格的检验。

3.1.2 结果

图 3 展示了在若干 x 站点处计算得到的速度剖面，并与 40×8 网格上的精确抛物线剖面进行了比较。两者在视觉上完全吻合；在其他网格上，结果也无法区分。

定量而言，整体求解器在所有三个网格上均达到机器精度（L^2 误差 $\sim 10^{-13}$），证实时间步进格式、约束施加和鞍点求解均未引入任何伪误差。

图 4 显示了 40×8 网格的收敛历史。时间导数范数$\|\partial_t \boldsymbol{v}\|$ 单调下降，并在约 100 个时间步内达到机器精度，证实其快速收敛至稳态。

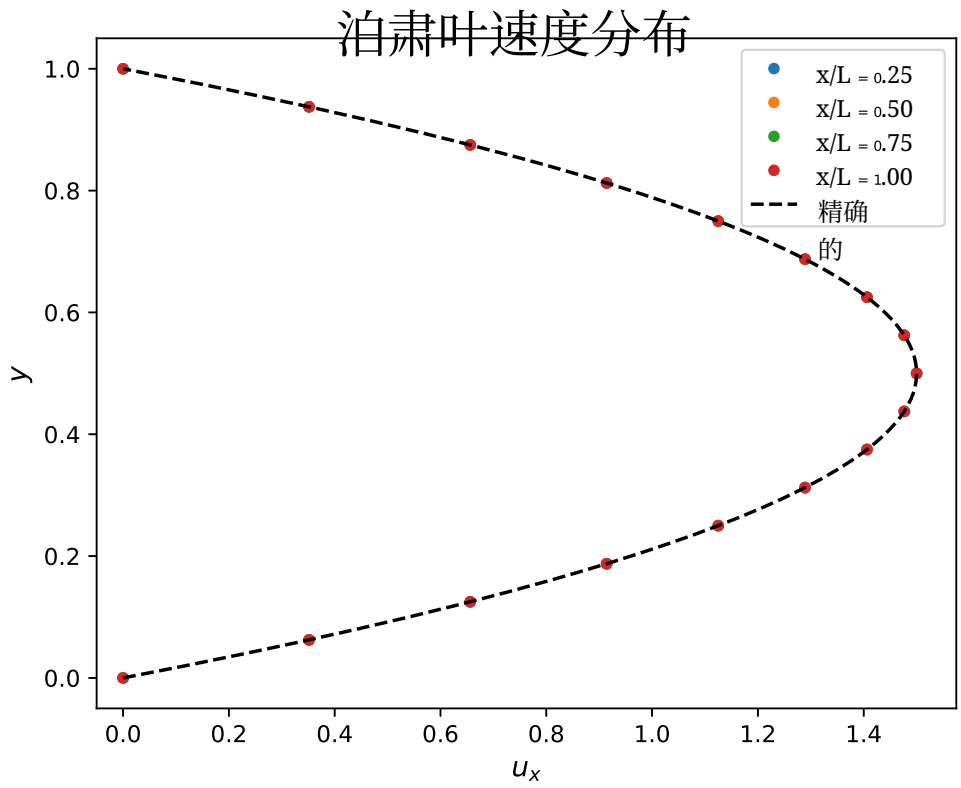


图 3：泊肃叶流：网格 40×8 上计算得到的速度剖面（符号）与多个 x 位置处的精确抛物线解（实线）的比较。

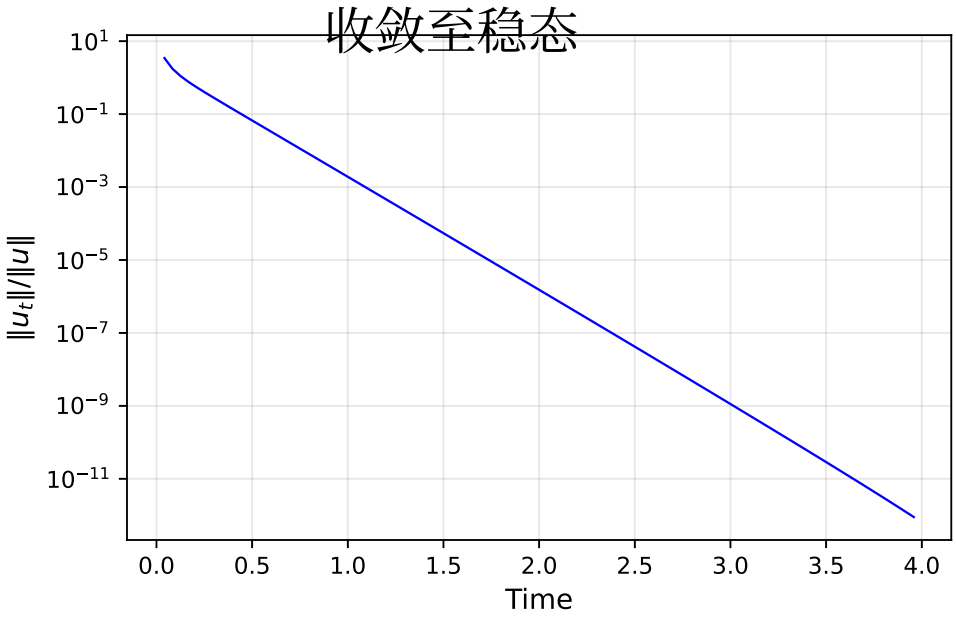


图 4：泊肃叶流： 40×8 网格上的收敛历史。时间导数范数$\|\partial_t \boldsymbol{v}\|$收敛至机器精度，证实了稳态解的精确恢复。

3.2 Kovasznay 流

3.2.1 问题设置

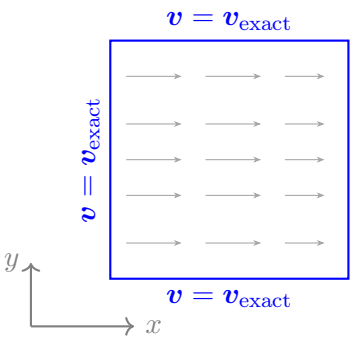
第二项验证测试采用 Kovasznay 精确解 [14], ，这是一种非平凡的不可压缩纳维–斯托克斯方程稳态解，描述二维网格下游的流动。速度场表示为：

$$
\begin{aligned}
v_x &= 1 - e^{\lambda x}\cos(2\pi y), \\
v_y &= \frac{\lambda}{2\pi} e^{\lambda x}\sin(2\pi y),
\end{aligned}
\tag{33}
$$

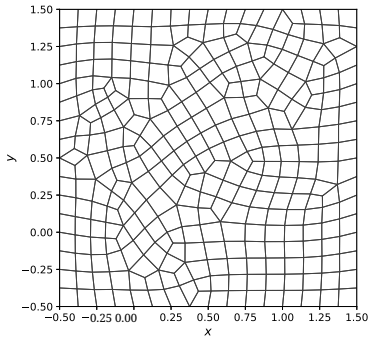
其中 $\lambda = Re/2 - \sqrt{Re^2/4 + 4\pi^2}$， 且 $Re = 1/\nu$。区域为 $[-0.5, 1.5]^2$ （图 5），所有边界均采用狄利克雷边界条件，并在每条边上指定精确解。该区域没有固体边界；这是针对纳维–斯托克斯算子的纯空间精度测试。我们采用 $Re = 40$ （$\nu = 0.025$）。

与泊肃叶流不同，Kovasznay 解包含指数项和三角函数项，Q9 插值空间无法精确表示这些项。对于双二次元， L^2 范数下的预期收敛率为 $O(h^3)$，本测试旨在验证求解器能否达到这一收敛率。

我们在非结构化 Q9 网格（图 5b）上进行空间收敛性研究，近似单元尺寸为 $h = 2/n$ ，网格规模分别为 $n = 4$、8、16 和 32。与规则网格相比，采用非结构网格对公式提出了更严格的检验。每次模拟均以零速度为初始条件，并使用整体求解器随时间推进，直到



(a) 问题设置。



(b) 非结构化Q9网格（$n = 16$，302 个单元）。

图 5：Kovasznay 流：（a）问题设置：正方形区域 $[-0.5, 1.5]^2$，四周均施加精确的 Kovasznay 解 (33) 作为狄利克雷边界条件（蓝色）；灰色箭头表示主要向右的平均流；（b）具有代表性的非结构化Q9网格（$n = 16$）。

满足稳态准则 $\|\partial_t \boldsymbol{v}\|/\|\boldsymbol{v}\| < 10^{-12}$。随后，通过逐单元高斯求积，将有限元插值函数与精确解（33）进行比较，以计算 L^2 误差。

3.2.2 结果

图 6 展示了在 $n = 16$ 网格上计算得到的稳态速度流线。该解呈现出典型的 Kovasznay 模式：流动主要向右，同时在横流方向上带有呈指数衰减的正弦扰动。

为评估空间精度，图 7（左）在双对数坐标上给出了基线 2×2 高斯配置规则下 L^2 速度误差随单元尺寸 h 的变化。测得的收敛率从最粗网格对的 3.40 到最细网格的 3.18，与双二次元的理论 $O(h^3)$ 预期吻合良好。

图 7 还比较了散度约束（24）在不同配置点布置下的影响。在同一系列非结构网格上测试了五种格式：2×2 高斯公式（4 点）、对角（$\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}$）格式（4 点）、交叉轴布置（坐标轴上 4 点）、2×2 高斯加上单元中心（5 点），以及 3×3 高斯减去中心（8 点）。2×2 高斯公式在每一细化层级上均取得最低的速度误差和最低的积分散度 $\|\nabla \cdot \boldsymbol{v}\|_{L^2}$，并呈现干净的 $O(h^3)$ 收敛。对角（$\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}$）格式虽使逐单元散度泄漏度量最小（附录 A），但在组装系统中产生明显更高的散度，并降低了速度精度。过约束格式（5 点或 8 点）未见改善，这与过多约束会减少动量方程可用自由度的观察一致。

尽管单个单元的泄漏略大，但在整体组装计算中，2×2 高斯公式表现更优。这可由注 2.3 中所述、并在附录 A 中详细分析的多项式正交性解释：高斯点约束会剔除散度残差中的所有低频成分，因此相邻单元的残差会相互抵消，而非累积。

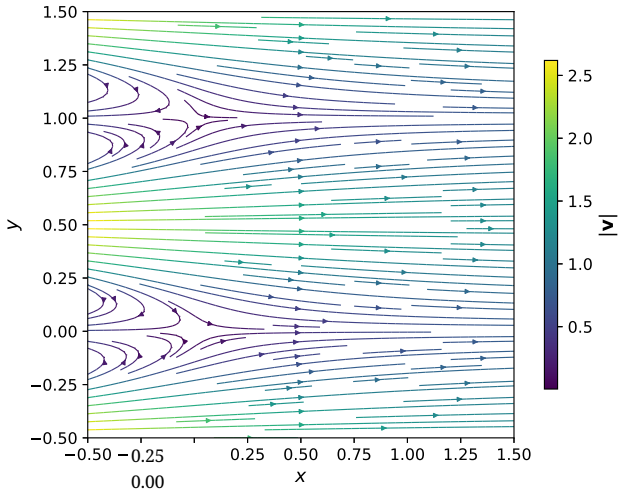


图 6：Kovasznay 流：在稳态下于 $n = 16$非结构网格上计算得到的速度流线。

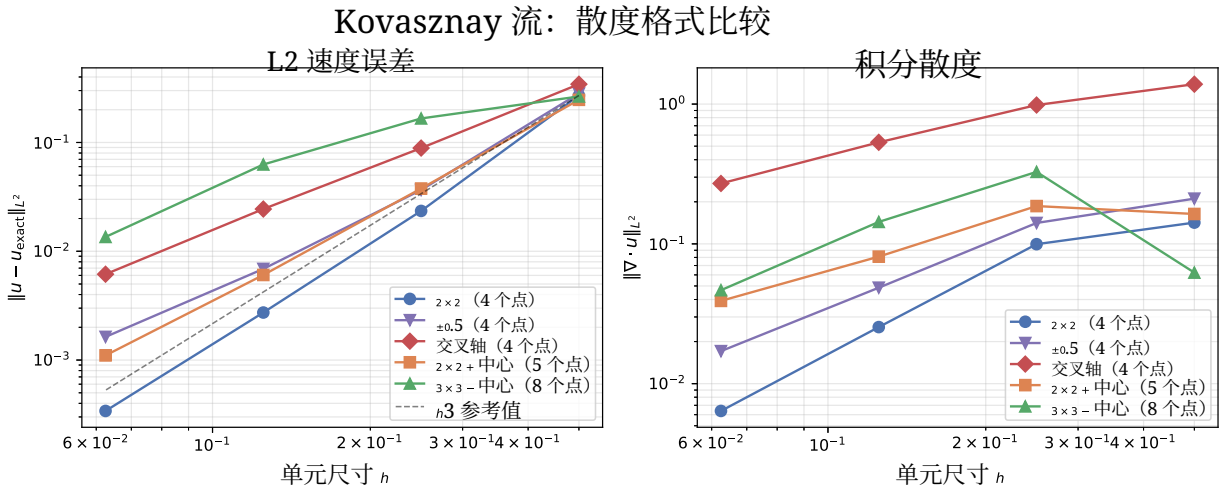


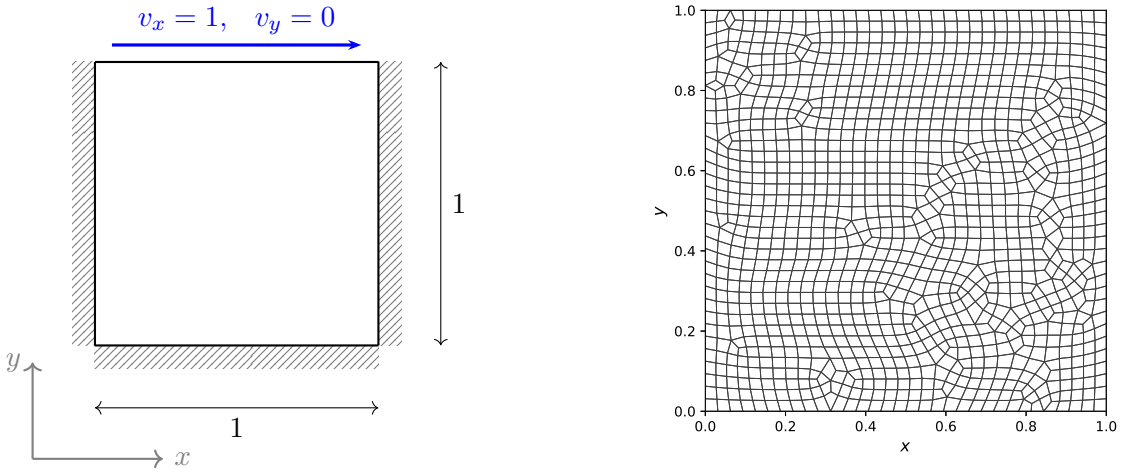
图 7：Kovasznay 流：非结构化 Q9 网格上散度配置格式的比较。**左：** L^2 速度误差与单元尺寸 h的关系。**右：**积分散度 $\|\nabla \cdot \boldsymbol{v}\|_{L^2}$与 h的关系。Gauss 公式（蓝色圆圈）实现了最优的 $O(h^3)$ 收敛，并在每个加密级别上达到最低散度。高斯点的多项式正交性（注 2.3，附录 A）防止低频散度残差在各单元之间累积。

4 演示

在通过精确解验证公式后，我们将其应用于复杂度逐渐增加的基准问题。这些问题没有闭式解，必须依据已发表的实验或计算数据进行验证。顶盖驱动方腔用于测试求解器处理受限回流的能力；方腔角落处存在速度奇异性，计算结果将与广泛采用的 Ghia 等人参考数据进行比较。 [15] 后向台阶会产生流动分离和再附着，可用于检验壁面力提取机制（第 2.8 节），并与 Armaly 等人的实验测量结果进行比较。 [16] 圆柱绕流则用于验证阻力和升力的计算（第 2.8 节），并与 Dennis 和 Chang [17], 、Tritton [18], 以及 Williamson [19], 的经典数据进行比较，涵盖稳态和非稳态流态。

4.1 顶盖驱动方腔

4.1.1 问题设置



(a) 问题设置。

(b) 非结构化Q9网格（1 183 个单元）。

图 8：顶盖驱动方腔：(a) 问题设置：顶壁以给定速度运动（蓝色箭头），带剖面线的边界表示静止的无滑移壁面（$\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$）；(b) 用于 $Re = 100$ 和 $Re = 400$ 的非结构化 Q9 网格。

顶盖驱动方腔是不可压缩流求解器的标准基准算例 [15, 20]。区域为 $[0, 1]^2$ （图 8），所有壁面均施加无滑移边界条件。顶壁（顶盖）以单位速度 $v_x = 1$运动 $v_y = 0$，驱动流体形成回流。底壁、左壁和右壁均为静止壁面（$\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$）。在顶盖与静止壁面相接的顶角处，施加无滑移条件 $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ （以壁面条件为准），从而产生速度不连续；有限元解会在附近单元内将其平滑化。雷诺数为 $Re = U_{\text{lid}} L/\nu$，其中 $L = 1$ 为方腔边长， $U_{\text{lid}} = 1$ 为顶盖速度。

对于 $Re = 100$ （$\nu = 0.01$）和 $Re = 400$ （$\nu = 0.0025$），采用非结构化Q9网格对区域进行离散，单元数约为 32×32（图 8b；1 183 个单元、4 861 个节点、9 722 个自由度）。对于 $Re = 1000$ （$\nu = 0.001$），采用壁面分级非结构化Q9网格，壁面处的单元尺寸为 $h_{\text{wall}} = 1/32$，内部为 $h_{\text{center}} = 3/32$ （446 个单元、1 913 个节点、3 826 个自由度）。每次模拟均以零速度作为初始条件，并使用整体求解器进行时间推进，直至满足稳态准则 $\|\partial_t \boldsymbol{v}\|/\|\boldsymbol{v}\| < 10^{-10}$。结果与 Ghia 等人的列表参考数据 [15]进行比较。

4.1.2 结果

图 9 展示了三个雷诺数下计算得到的速度流线（左列，按速率 $|\boldsymbol{v}|$ 着色）和中心线速度剖面（右列，与 Ghia 等人 [15] 的结果进行比较）。在 $Re = 100$ 时，单个主涡占据整个空腔；在 $Re = 400$ 时，边界层变薄，二次角涡开始出现；在 $Re = 1000$ 时，主涡几乎位于中心，角涡也更加明显。三个雷诺数下的中心线剖面均与参考数据吻合良好，且随着 Re 增大，靠近壁面的速度梯度变得更陡。

4.1.3 对流主导区间的稳定性

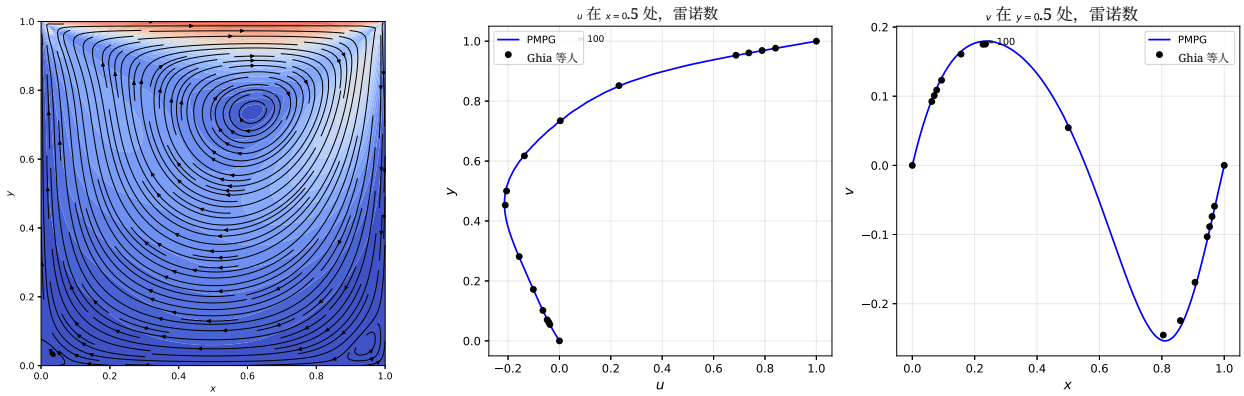
为检验 PMPG 公式在高单元佩克莱数下的稳定性，我们在 $Re = 1000$ 条件下，使用一系列刻意设置为粗糙且壁面渐变的 Q9 网格求解空腔流动。每个网格的壁面单元尺寸为 $h_{\text{wall}} = 1/n$，内部单元尺寸为 $h_{\text{center}} = 3/n$；每条边界上的单元数分别为 $n = 12$、16、24、32，生成的是真正的非结构网格，单元数从 96 到 446 不等。壁面处的单元佩克莱数 $\text{Pe}_h = U h_{\text{wall}}/(2\nu) = n/2$，范围为 6 （$n = 12$）至 16 （$n = 32$）；在内部区域，$h_{\text{center}} = 3/n$，$\text{Pe}_h$ 在最粗网格上达到 42，远超标准伽辽金方法出现伪振荡的区间。此外，层流边界层厚度按 $\delta \sim L/\sqrt{Re} \approx 0.032$ 的规律缩放，因此 h_{wall}/δ 的范围为 2.6（$n = 12$）至 1.0（$n = 32$）：在最粗的网格上，甚至没有一个单元能够分辨边界层。

尽管分辨率严重不足，四种网格均在未采用任何稳定化方法的情况下，得到平滑且无振荡的稳态解。图 10 将四种网格的中心线剖面叠加展示，表明随着网格细化，解逐渐趋近参考数据；即使在最粗的网格上，也没有出现振荡迹象。这一行为证实了注 2.1 中讨论的结构稳定性：由于对流仅通过显式右端项引入，PMPG时间推进格式不会遭受在高佩克莱数下引发伽辽金不稳定性的强制性损失。

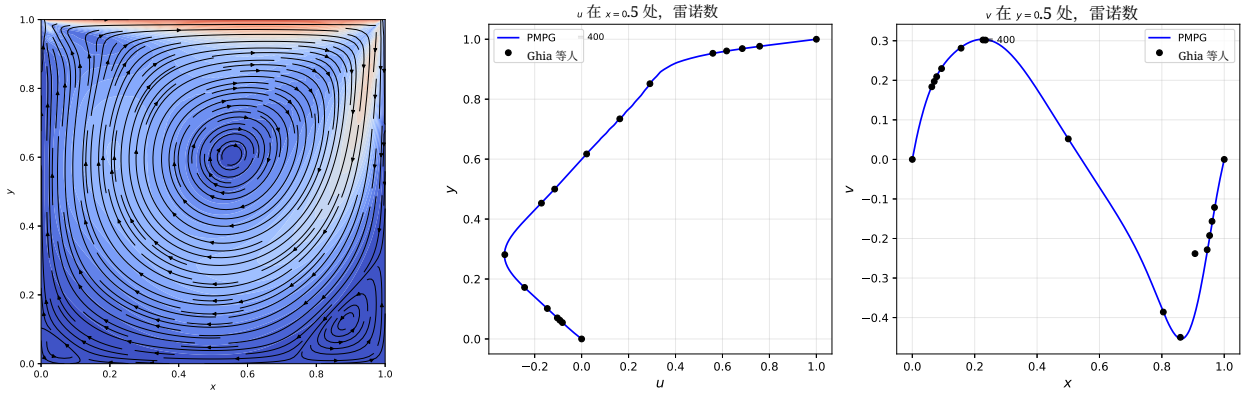
4.2 后向台阶

4.2.1 问题设置

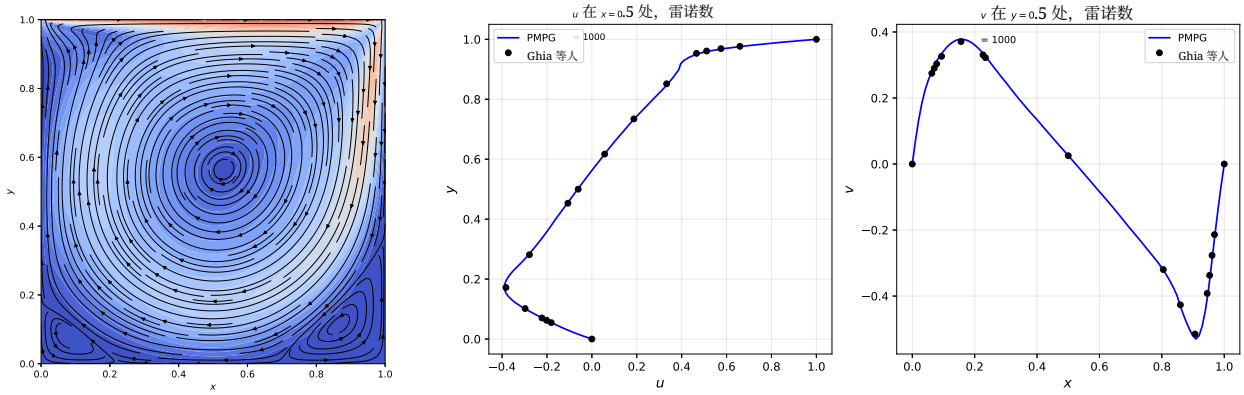
后向台阶是分离流的经典基准问题 [16]。其几何形状（图 11）由一个 L形通道构成：高度为 $h = H - s$ 的入口段连接到高度为 H 的扩张段，两者交界处设有高度为 s 的锐边台阶。扩张



(a) $Re = 100$。



(b) $Re = 400$。



(c) $Re = 1000$。

图 9：顶盖驱动方腔：按速率着色的速度流线 $|\boldsymbol{v}|$（左）以及与 Ghia 等人 [15] 参考数据（符号，右）对比的中心线速度剖面。随着 Re增大，主涡向中心移动，边界层变薄，二次角涡也更加明显。PMPG 解与三个雷诺数下的参考数据均吻合良好。

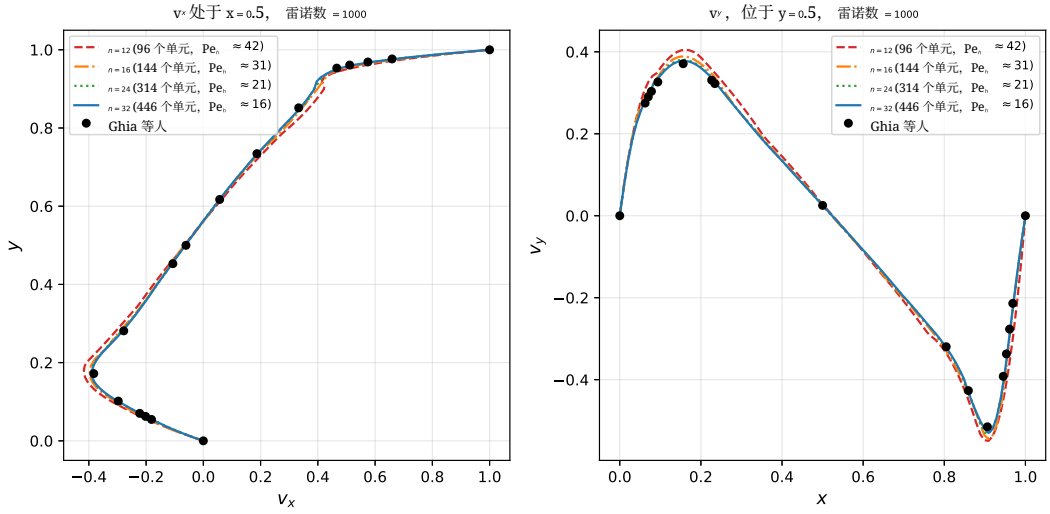
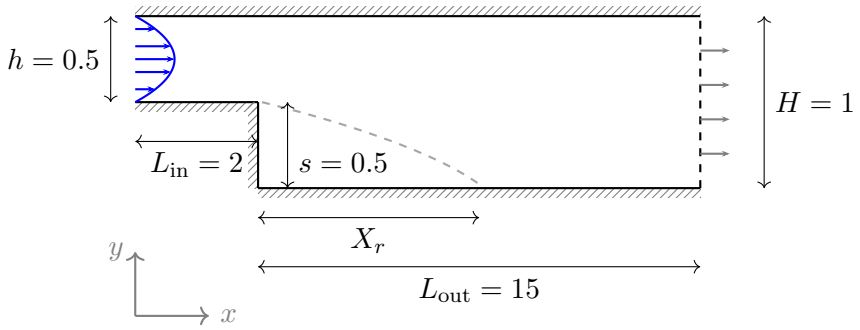
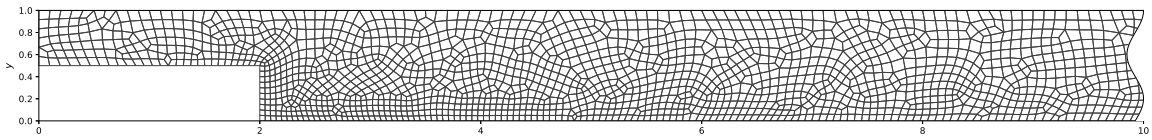


图 10： $Re = 1000$ 时的顶盖驱动方腔：粗糙壁面加密网格上的中心线速度剖面，每边分别有 $n = 12$、16、24、32 个单元。内部区域的单元佩克莱数介于 16 和 42 之间，最粗网格无法用单个单元解析边界层。尽管没有采用任何稳定化方法，所有解均平滑且无振荡；随着网格加密，解逐渐趋近于 Ghia 等人的 [15] 参考数据。



(a) 问题设置。



(b) 非结构化Q9网格（2 757 个单元， $l_c = 0.1$）。

图 11：后向台阶：(a) 问题设置：高度为 $h = 0.5$ 的入口通道通向高度为 $H = 1$ 的扩张通道，途中经过高度为 $s = 0.5$ 的台阶；蓝色箭头表示抛物线入口速度分布，阴影边界表示无滑移壁面，虚线边界表示自由出流；虚线曲线表示回流区，其再附着长度为 X_r；(b) 用于 $Re = 141$ 的非结构化Q9网格。

扩张比为 $ER = H/h$。我们采用 $H = 1$, $s = 0.5$ ($ER = 2$, $h = 0.5$)、入口长度 $L_{\text{in}} = 2$ 和出口长度 $L_{\text{out}} = 15$ （足够长，可避免出口对回流区产生影响）。

边界条件为：泊肃叶入口剖面 $v_x = \frac{3}{2}U_{\text{mean}} \cdot 4(y-s)(H-y)/h^2$, $v_y = 0$，并采用 $U_{\text{mean}} = 1$；所有壁面（顶部、底部和台阶面）均为无滑移边界；出口处为自由出流。雷诺数定义为 $Re = U_{\text{mean}} \cdot h/\nu$。

区域采用由 Gmsh 生成的非结构化 Q9 网格进行离散（图 11b），并在剪切层起始处的台阶拐角附近加密网格。 $Re \leq 100$ 的特征单元尺寸为 $l_c = 0.15$ ， $Re = 141$的特征单元尺寸为 $l_c = 0.1$ ，分别得到约 1 260 个和 2 760 个单元。每次模拟均以零速度初始化，并使用整体求解器随时间推进，直至满足稳态准则 $\|\partial_t \boldsymbol{v}\|/\|\boldsymbol{v}\| < 10^{-10}$ 。

4.2.2 结果

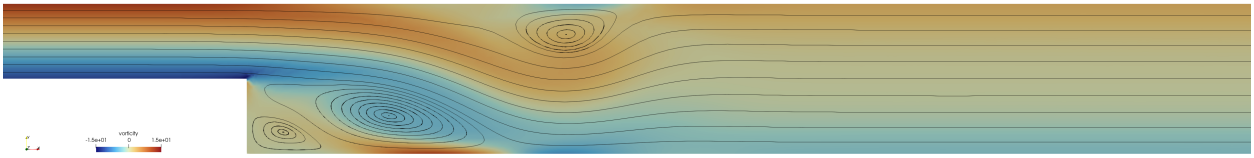
我们计算了雷诺数范围为 $Re = 34$–141 的若干解，并与 Armaly 等人 [16] ($ER = 1.94$) 的实验数据进行了比较。

图 12 展示了 $Re = 141$ 时的瞬态流动发展。在第 1000 步（图 a）时，可以看到三个明显的回流区：两个彼此分离的气泡位于台阶拐角后方，第三个涡则沿上壁分布，由分离剪切层驱动。到第 1600 步（图 b）时，两个角涡泡合并为一个更大的回流区，而上壁涡则被对流带向下游。图 (c) 展示了最终的稳态，其特征是从台阶拐角延伸出的主回流区。这种瞬态演化体现了 PMPG 公式所捕捉到的丰富分离流动动力学。

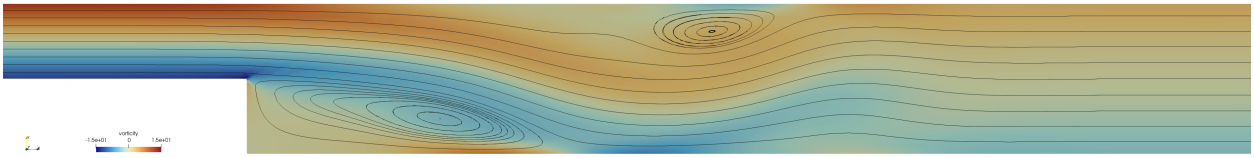
稳态时，流动在台阶拐角处分离，并在下游再附着，形成回流泡。我们关注的主要量是无量纲再附着长度 X_r/s，定义为从台阶拐角到再附点的距离，并以台阶高度 s 归一化。

再附点由第2.8节的壁面力提取机制确定。当底壁节点被视为无滑移约束时，鞍点系统(26)中的拉格朗日乘子通过(30)给出节点反力。每个壁面节点处的切向（流向）分量与局部壁面剪切应力直接相关：在流动发生反向的回流区内该分量为负，而在再附点下游为正。符号变化即确定再附着位置。

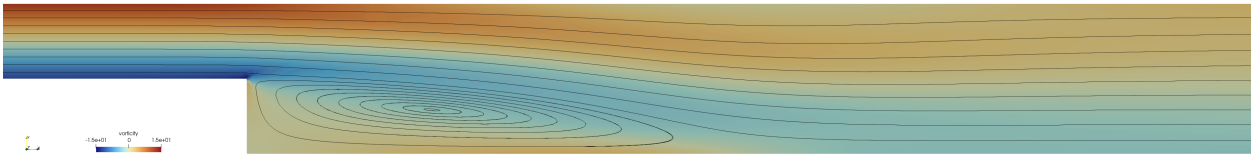
图13通过将节点切向力转换为壁面摩擦系数 $C_f = 2f_x/(\Delta x_i\, U_{\text{mean}}^2)$，展示了 $Re = 100$ 的情况。其中， f_x 是式（30）中的节点切向力， Δx_i 是分担长度（沿单元边的 Gauss–Lobatto积分权重）。为进行验证，图中还展示了经典基于应力的估计 $C_f = 2\nu\,(\partial v_x/\partial y)|_{y=0}/U_{\text{mean}}^2$，该估计利用 Q9形函数导数根据速度梯度计算得出。两种分布几乎无法区分。整个壁面上的相对 L^2误差定义为 $\|\,C_f^{\lambda} - C_f^{\text{stress}}\|_2 \,/\, \|C_f^{\text{stress}}\|_2$，其值为 0.5%；若仅考虑区域$x/s > 1$ （远离台阶角奇异性，此处两种方法的结果均接近零），则逐点相对误差的中位数为 0.03%。这证实，拉格朗日乘子壁面力能够准确再现黏性剪切应力，无需显式速度梯度计算；同时，节点力可用于检测诸如



(a) 瞬态流线（步数 1000）：两个角涡泡和一个上壁涡。



（b）瞬态流线（第1600步）：角涡泡合并，上部涡旋向下游输运。



(c) 稳态流线。

图 12： $Re = 141$处的后向台阶：速度流线的瞬态演化，展示回流区的发展与合并。仅显示区域 $x \leq 10$；完整区域延伸至 $x = 17$ （$L_{\text{out}} = 15$）。

分离与再附着。

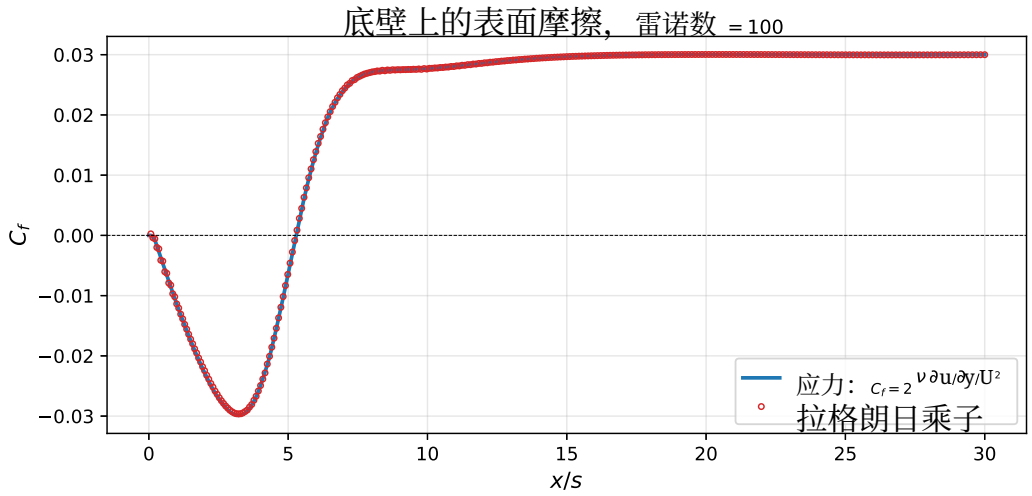


图13： $Re = 100$处的后向台阶：沿底壁的壁面摩擦系数。实线：根据速度梯度进行的经典基于应力的计算；圆圈：转换为 C_f 的拉格朗日乘子节点力。零交叉点表示再附点。

图 14 汇总了所考虑的所有雷诺数下的无量纲再附着长度。尽管扩张比略有差异，PMPG 的结果仍呈现预期的线性趋势 $X_r/s \propto Re$ ，且与两组实验数据均高度吻合。在较低雷诺数下（$Re \leq 100$），相对于最近的实验值，误差低于 7%；在 $Re \approx 48$ 时吻合度最佳（误差为 1.1%）。在 $Re = 141$ 时，误差为 4.6%，这与较高雷诺数下流动复杂性增加的情况一致。

4.3 圆柱绕流

4.3.1 问题设置

圆柱绕流是一个经典基准问题，随着雷诺数增加，会呈现出性质迥异的流态：定常对称流（$Re \lesssim 5$）、具有双涡的定常回流（$5 \lesssim Re \lesssim 47$），以及周期性涡脱落（$Re \gtrsim 47$） [19]。我们选取三个雷诺数来考察这些流态： $Re = 20$和 $Re = 40$（定常双涡），以及 $Re = 100$ （非定常涡脱落）。

计算域（图 15）为 $[-15D,\, 25D] \times [-15D,\, 15D]$，直径为 $D = 1$ 的圆柱位于原点。边界条件如下：左边界为均匀入流 $\boldsymbol{v} = (U_\infty, 0)$，并满足 $U_\infty = 1$；顶部和底部边界的自由来流速度为 $\boldsymbol{v} = (U_\infty, 0)$；圆柱表面为无滑移条件（$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$）；右边界为自由出流。雷诺数定义为 $Re = U_\infty D/\nu$。

计算域采用由 gmsh 生成的非结构化 Q9 网格进行离散，远场特征单元尺寸为 $l_c = 0.3$，并在圆柱表面细化至 $l_c/4 \approx 0.075$。这产生了约 26 000 个单元和 106 000 个节点（212 000 个速度自由度）。每次模拟

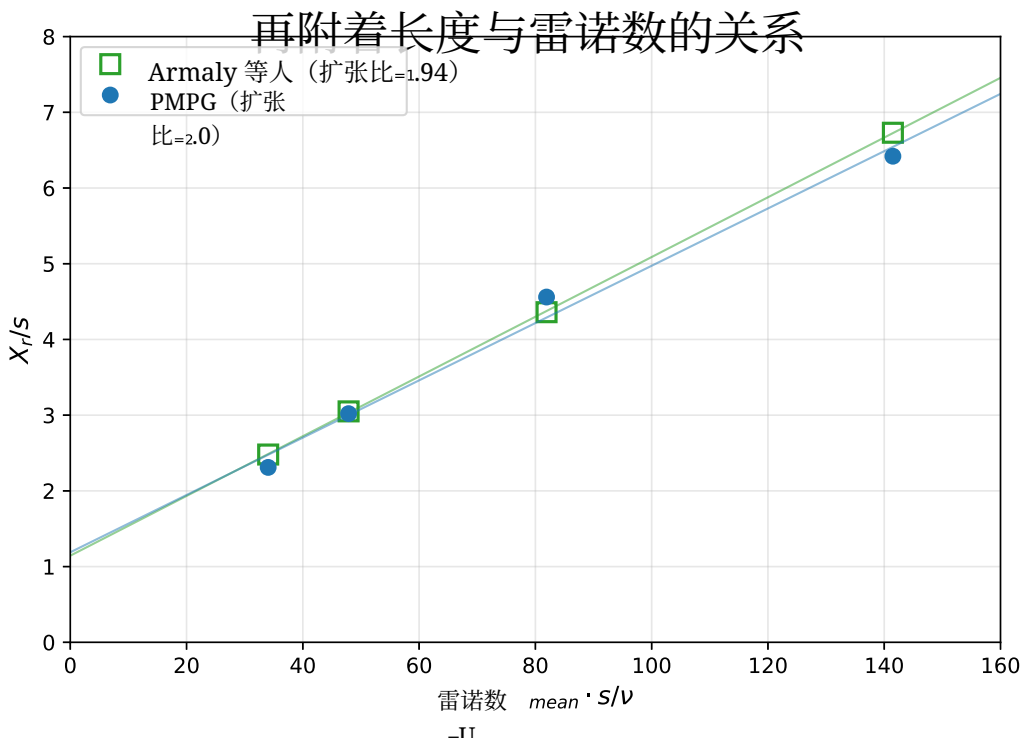


图 14：后向台阶：无量纲再附着长度 X_r/s随雷诺数的变化。将 PMPG 结果（圆圈及最小二乘拟合）与 Armaly 等人的实验数据进行比较 [16]。

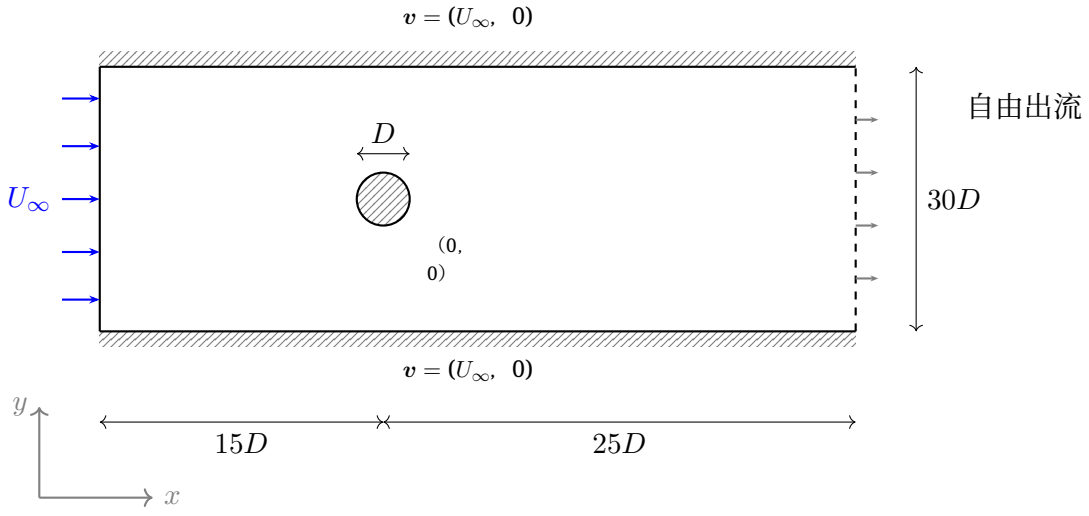


图 15：圆柱绕流：计算域（未按比例绘制）。左侧为均匀入流 $U_\infty = 1$，顶部和底部的自由来流速度为 $\boldsymbol{v} = (U_\infty,\ 0)$，圆柱表面为无滑移边界，右侧为自由出流。直径为 $D = 1$ 的圆柱位于原点。

以均匀流场 $\boldsymbol{v} = (U_\infty, 0)$ 初始化（圆柱上为 $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$），并使用带自适应 CFL 时间步进（$c_{\mathrm{CFL}} = 0.25$）的整体求解器推进时间。

阻力系数和升力系数定义如下：

$$C_D = \frac{F_x}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 D}, \qquad C_L = \frac{F_y}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 D}, \tag{34}$$

其中，F_x 和 F_y 是式（31）中的总壁面力，参考长度为圆柱直径 D（标准二维惯例，按单位展向长度计）。

4.3.2 结果

在 $Re = 20$ 和 $Re = 40$下，流动达到稳态。表 1 将计算得到的阻力系数与 Dennis 和 Chang [17]的数值结果以及 Tritton [18]的实验测量结果进行了比较。在 $Re = 20$ 下，本文结果（$C_D = 2.13$）与 Dennis 和 Chang 的结果相差不超过 4%，与 Tritton 的结果相差不超过 2%。在 $Re = 40$ 下，计算值（$C_D = 1.57$）与 Dennis 和 Chang 的结果相差不超过 3%，与 Tritton 的结果相差不超过 1.3%。在 $Re = 100$下，流动处于非稳态，时间平均阻力系数（$C_D = 1.36$）与 Tritton 的实验测量值相差不超过 3%。

在 $Re = 100$，流动发展出周期性涡脱落（冯·卡门涡街）。图16对比了 $Re = 40$时的稳态双涡尾流与 $Re = 100$时充分发展的冯·卡门涡街。

经过初始瞬态后，升力系数 C_L 围绕零值对称振荡，表明涡从圆柱的上、下表面交替脱落。图17展示了 C_D 和 C_L的时间历程。阻力以涡脱落频率的两倍振荡（符合对称性预期），而升力则以基频振荡。

表征涡脱落频率的斯特劳哈尔数为：

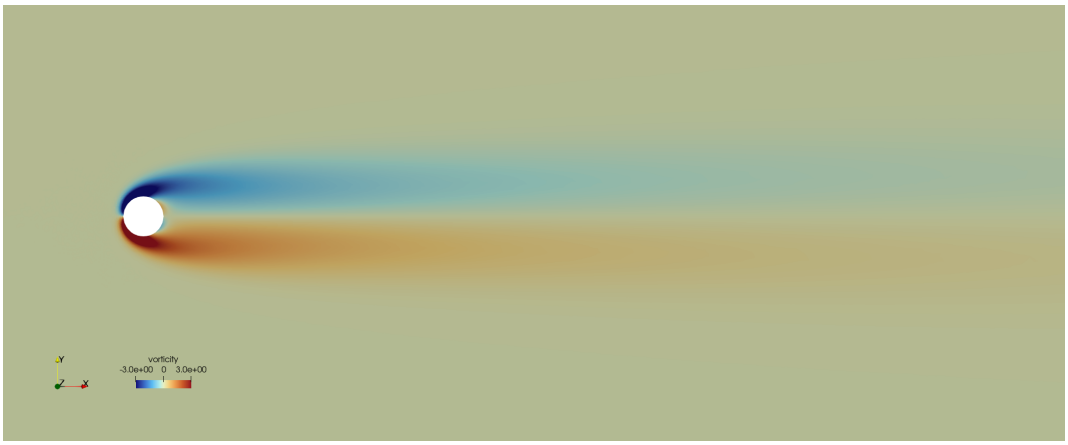
$$St = \frac{fD}{U_\infty}, \tag{35}$$

其中，f 由周期性 C_L 信号的过零点确定，所报告的C_D 为充分发展振荡阶段的时间平均值。计算所得的斯特劳哈尔数（$St = 0.168$）与 Williamson 的实验关联式 [19]（$St = 0.164$）相差不超过 2.5%，如表1所示。

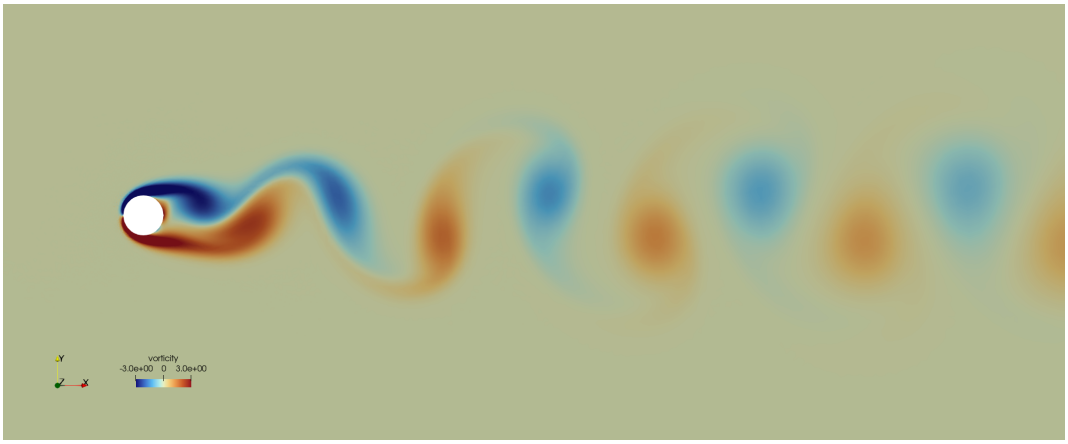
表 1：圆柱绕流：阻力系数 C_D 和斯特劳哈尔数 St 与已发表数据的比较。短横线表示该流动状态下不适用的量。

	C_D			St	
Re	PMPG	Dennis 和 Chang	Tritton	PMPG	Williamson
20	2.13	2.045	2.09	—	—
40	1.57	1.522	1.59	—	—
100	1.36	—	1.32	0.168	0.164

圆柱基准算例通过定量验证，展示了曲面几何上的壁面力提取机制（第 2.8 节）。计算所得的阻力系数来自



(a) $Re = 40$：稳态对称双涡尾流。



(b) $Re = 100$：瞬时冯·卡门涡街。

图16：圆柱绕流：涡量等值线显示从稳态流态到周期性涡脱落的转变。

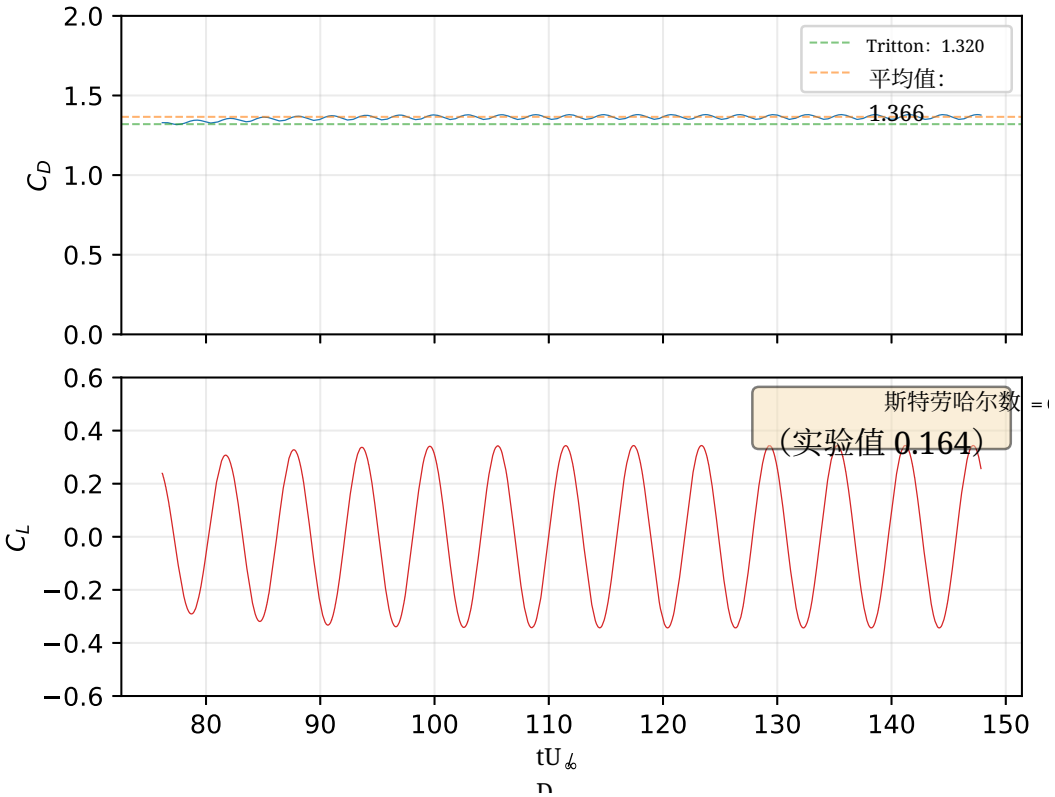


图17： $Re = 100$时的圆柱绕流：(a) 阻力系数 C_D和 (b) 升力系数 C_L的时间历程。周期性振荡对应于涡脱落。

拉格朗日乘子与已发表的数值一致，无需进行压力重构或应力积分，这证实约束反力能够为计算气动力提供可靠的方法。

5 误差估计与自适应加密

PMPG 公式的一个显著特点是，目标函数本身就提供了衡量解的质量的自然指标。PMPG 泛函 (3) 计算动量残差的平方 L^2范数，$\mathcal{J}_h = \frac{1}{2}\int_\Omega |\boldsymbol{R}_h|^2\, d\Omega$，其中 $\boldsymbol{R}_h = (\boldsymbol{v}_h \cdot \nabla)\boldsymbol{v}_h - \nu\nabla^2\boldsymbol{v}_h$ 是残差 (4) 在离散速度场上的取值。精确的纳维–斯托克斯速度 $\boldsymbol{v}_{\text{exact}}$也有其自身的残差 $\boldsymbol{R}_{\text{exact}} = (\boldsymbol{v}_{\text{exact}} \cdot \nabla)\boldsymbol{v}_{\text{exact}} - \nu\nabla^2\boldsymbol{v}_{\text{exact}}$ 及相应的泛函值

$$\mathcal{J}_{\text{exact}} = \tfrac{1}{2}\int_\Omega |\boldsymbol{R}_{\text{exact}}|^2\, d\Omega. \tag{36}$$

单元泛函密度 $\mathcal{J}_e/A_e$（其中 A_e 为单元面积）因此衡量局部动量不平衡，并可作为内置的误差指标：残差相较于邻近区域较大的地方，表明分辨率不足。与基于残差的后验 伽辽金方法估计器不同， [21, 22], 后者需要依赖局部网格几何和偏微分方程系数的可靠性与效率常数；PMPG 指标直接源自变分原理（它正是被最小化的量），且无需求解器已有操作之外的额外计算。

5.1 单元误差指示子

为定量评估该指示子，我们回到Kovasznay测试问题（第3.2节），其精确解是已知的。记作 $\boldsymbol{R}_h = \boldsymbol{R}_{\text{exact}} + \delta\boldsymbol{R}$，其中 $\delta\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_h - \boldsymbol{R}_{\text{exact}}$为残差误差，则离散泛函与精确泛函之间的差值可分解为

$$\mathcal{J}_h - \mathcal{J}_{\text{exact}} = \underbrace{\int_\Omega \boldsymbol{R}_{\text{exact}} \cdot \delta\boldsymbol{R}\, d\Omega}_{\text{cross term}} + \underbrace{\tfrac{1}{2}\int_\Omega |\delta\boldsymbol{R}|^2\, d\Omega}_{\text{quadratic term} \geq 0}. \tag{37}$$

二次项按构造是非负的；交叉项则可能为正，也可能为负。对于严格满足边界条件和散度约束的离散解，该泛函是 $\mathcal{J}_{\text{exact}}$的上界。当这些约束仅得到近似满足时，差值可能变为负值，这表明约束本身未得到充分解析。这种非单调行为本身也是一种有用的诊断信号。

图18展示了Kovasznay问题中 $\mathcal{J}_h - \mathcal{J}_{\text{exact}}$ 与速度 L^2 误差随网格尺寸 $n = 4$、6、8、12、16、24、32的收敛情况。该差值在 $n = 4$（负值，原因是最粗网格上的约束违反）与 $n = 6$ （正值）之间改变符号，此后以 $\sim h^2$的速率收敛。差值分解（37）证实，交叉项驱动了粗网格上的符号变化，而始终非负的二次项则在更细的网格上占主导地位。

在单元层面，间隙 $\frac{1}{2}\int_{\Omega_e} |\delta\boldsymbol{R}|^2\, d\Omega$ 的二次项与真实的逐单元速度误差几乎完全相关。图 19 在 $n = 16$网格上比较了

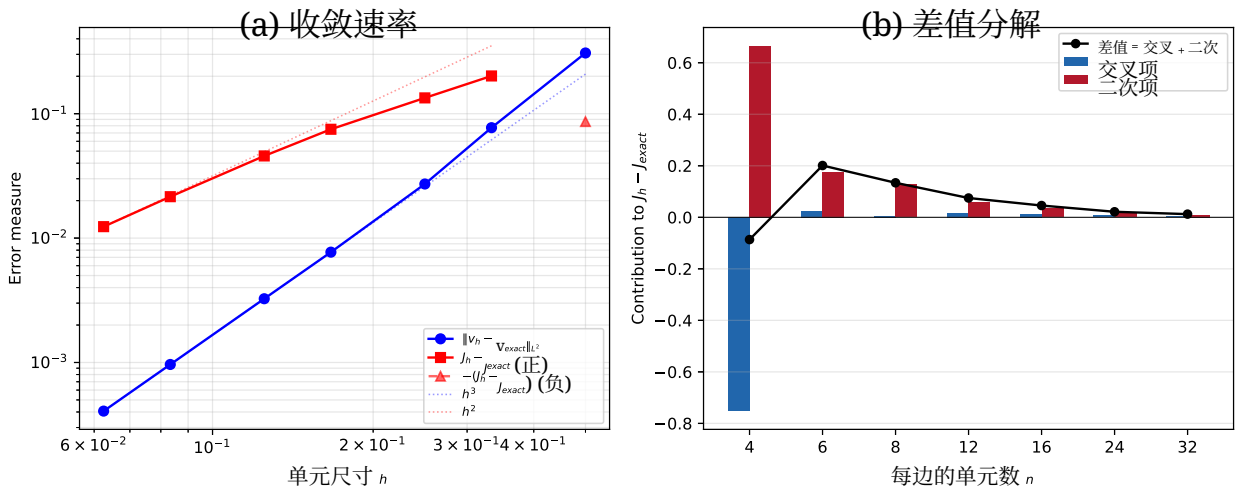


图 18：Kovasznay 流：PMPG 泛函的收敛性。(a)速度 L^2 误差和泛函间隙 $\mathcal{J}_h - \mathcal{J}_{\text{exact}}$ 随单元尺寸 h的变化。间隙在 $n = 4$ 和$n = 6$之间改变符号；实心正方形表示正间隙，空心三角形表示负间隙（以绝对值绘制）。图中显示了参考斜率 h^3 和 h^2。(b) 根据式 (37) 将间隙分解为交叉项和二次项。最粗网格上的负间隙由交叉项导致；二次项始终非负。

完整的逐单元指标 $\eta_e = \mathcal{J}_e - \mathcal{J}_{\text{exacte}}$ 与逐单元 L^2 速度误差，并单独展示了仅二次项的相关性。尽管完整指标 η_e的秩相关性中等（斯皮尔曼 $\rho = 0.69$），这是因为交叉项的符号不定，但二次项达到了 $\rho = 0.996$：它几乎能完美地按误差幅值对单元进行排序。

注 5.1。 Kovasznay测试是一个特殊情况：所有边界条件都涉及 Q9空间无法精确表示的超越函数，因此在粗网格上会违反约束，并在 $n = 4$处产生负间隙。在典型应用（通道流、腔体流、圆柱绕流）中，边界条件是多项式函数或零（无滑移壁面），Q9空间可以精确表示这些条件。在这种情况下，该泛函确实是 $\mathcal{J}_{\text{exact}}$的上界，并且预期会随着网格加密而单调减小。

5.2 后向台阶上的空间分布

没有精确解时，泛函密度 $\mathcal{J}_e/A_e$ 仍可用作空间诊断：相对于网格平均值而言密度较高的单元，是值得考虑进行细化的候选单元。图 20 显示了在特征单元尺寸为 $l_c = 0.10$ 的非结构化Q9网格上计算得到的后向台阶单元泛函密度（雷诺数 $= 100$，第 4.2 节）。

密度自然集中在台阶拐角处——该处是速度梯度最强的几何奇异性位置——以及从台阶边缘延伸出的自由剪切层上。在充分发展的下游区域，密度降低了四个数量级。因此，该指标无需任何额外计算，就能准确识别出需要分辨的流动

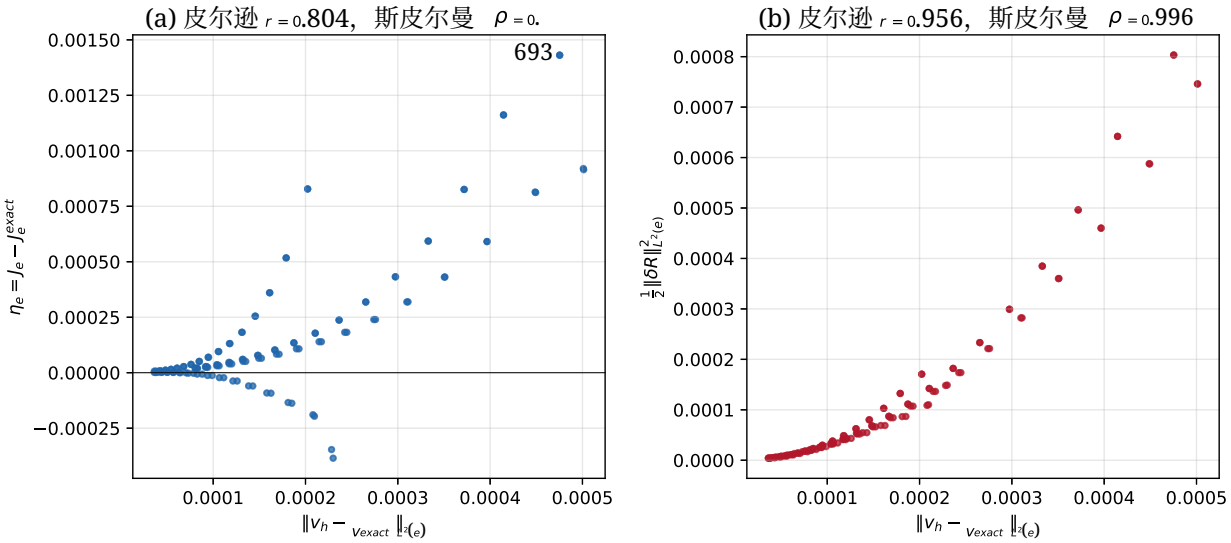


图 19：Kovasznay 流（$n = 16$）：逐单元误差指标与真实速度 L^2误差的对比。**左图：**完整指标 $\eta_e = \mathcal{J}_e - \mathcal{J}_e^{\text{exact}}$（斯皮尔曼相关系数 $\rho = 0.69$）。**右图：**二次项$\frac{1}{2}\int_{\Omega_e} |\delta \boldsymbol{R}|^2 \, d\bar{\Omega}$（斯皮尔曼相关系数 $\rho = 0.996$）。二次项提供了近乎完美的单元误差排序。

特征：分离点、剪切层和再附着区。

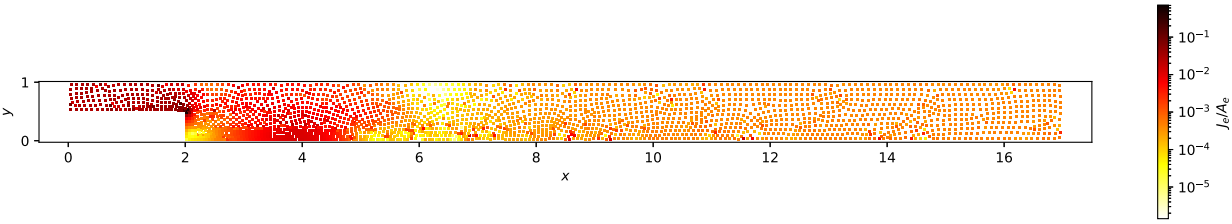


图 20：后向台阶（雷诺数 $= 100$）：对数色标下的单元级 PMPG 泛函密度 $\mathcal{J}_e/A_e$。该指标跨越四个数量级，并集中分布于台阶拐角、自由剪切层和再附着区。

5.3 自适应网格细化

泛函密度可通过等分布驱动网格自适应：细化密度较高的单元，并粗化密度较低的单元，从而使网格上的密度趋于均匀。具体而言，目标单元尺寸计算如下：

$$h_e^{\text{new}} = h_e \left(\frac{\bar{\mathcal{J}}}{\mathcal{J}_e / A_e} \right)^{\alpha}, \tag{38}$$

其中 $h_e = \sqrt{A_e}$为当前单元尺寸，$\bar{\mathcal{J}}$为平均泛函密度，且 $\alpha = 0.25$。目标尺寸被限制在 $[h_{\min}, h_{\max}]$，并通过平均处理从单元中心投影到网格节点，

然后作为背景尺寸场传递给 Gmsh [23]，以生成新的 Q9 网格。

图 21 对比了自适应前后台阶拐角附近的网格拓扑。初始均匀网格（$l_c = 0.15$）包含 886 个单元。经过一个自适应循环后，自适应网格包含 715 个单元（减少了 19%），同时保持了相同的全局泛函值。单元集中在台阶拐角和剪切层沿线，恰好位于泛函密度最大的区域；而在流动已得到良好解析的下游发展区域，网格则变得较疏。

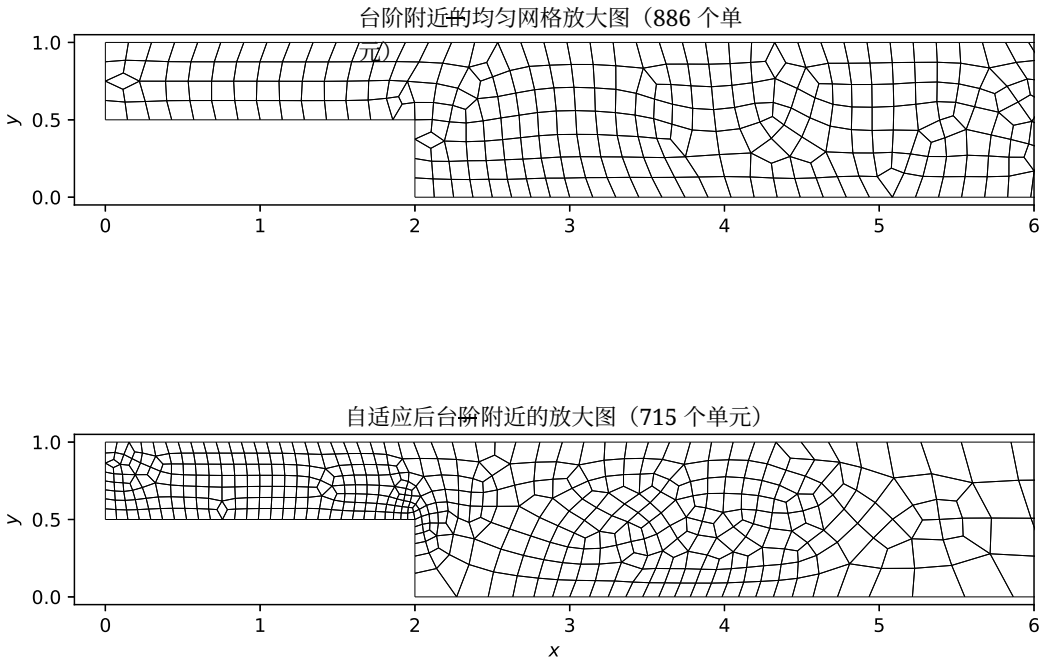


图 21：后向台阶：台阶拐角附近的网格拓扑。**上图：**均匀网格（886 个单元）。**下图：**经过一个自适应循环后（715 个单元，-19%）。单元集中在台阶拐角和剪切层处，在流动已得到良好解析的下游区域则逐渐变疏。

本示例的目的并非开发完整的自适应网格细化算法（收敛准则、振荡控制和最优细化策略等问题超出本文范围），而是说明 PMPG 泛函可提供一种自然且零成本的误差指标，无需任何额外机制即可驱动标准网格自适应工具。

6 从速度场数据估算黏度

根据速度场测量估算流体性质是一个活跃的研究领域。物理信息神经网络（PINNs）[24, 25] 通过迭代训练最小化偏微分方程残差，从而联合学习速度、压力和纳维–斯托克斯参数。贝叶斯纳维–斯托克斯逆方法 [26] 通过结合不确定性量化的基于伴随方法的优化，重建完整流场并学习流变参数。这些方法功能强大

且适用范围广，但需要进行迭代优化，并且所采用的纳维–斯托克斯方程形式将压力作为一个额外的未知量。

在实验固体力学中，虚拟场法（VFM） [27] 采用了不同的方法：将平衡弱形式与精心选取的虚拟位移场进行检验，直接从全场应变测量中提取本构参数，而无需求解任何正问题。此方法不需要迭代优化；未知参数在线性形式中出现，因此参数识别可归结为一次直接的线性求解。重要的是，弱形式仅涉及一阶空间导数（应变），而非二阶导数，因此该方法本质上对测量噪声具有更强的鲁棒性。

PMPG 驻定条件 (7) 自然地启发了一种类似的方法，用于识别流体黏度。在正向求解器中，对于已知的 ν，该条件可确定 $\boldsymbol{d}$ ；反过来理解，当速度及其时间导数已由实验测得时，该条件便成为对 ν的约束。由于该公式仅涉及速度（从未引入压力场），测得的速度可直接代入正向求解器中使用的同一组有限元算子 $(\boldsymbol{M},\, \boldsymbol{K},\, \boldsymbol{r}_{\mathrm{conv}})$。通过投影到 $\boldsymbol{C}$ 的零空间，可消除约束力 $\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{\lambda}$ ；随后，只需计算一次内积之比即可求得黏度。与虚拟场法（VFM）一样，只需使用测得速度的一阶空间导数（通过刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$），而无需使用强形式纳维–斯托克斯方程中出现的拉普拉斯算子 $\nabla^2\boldsymbol{v}$ 。整个识别过程都是直接的代数计算：无需正向求解、无需伴随方法，也无需迭代优化。

尽管从原理上说（将动量平衡弱形式与无散场进行测试，以分离出 ν）可以采用任何一致的伽辽金离散来实现，但仅速度 PMPG 公式使实现尤其简洁：无需重构或消去压力场，而配置点散度约束（第 2.4 节）提供了稀疏矩阵 $\boldsymbol{C}_{\mathrm{div}}$ ，只需进行一次稀疏分解即可据此构造投影算子。

本节将这一思路发展为一种具体方法，用于从粒子图像测速（PIV）数据中识别运动黏度。本文通过合成数据展示该方法（将收敛的数值解用作替代 PIV 测量，并分别考虑添加和未添加噪声的情况），而实验 PIV 数据的验证则留待今后开展。

6.1 公式

设想一位实验人员在一个矩形窗口内的规则点阵上测得了速度场，这正是 PIV 系统的典型输出。将测得的速度赋值到 Q9 有限元网格上：每个包含 3×3 个测量点的区块定义一个双二次元。根据此网格，按常规方式组装质量矩阵 $\boldsymbol{M}$、刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$、对流残差 $\boldsymbol{r}_{\mathrm{conv}}(\boldsymbol{d})$ 以及散度约束矩阵 $\boldsymbol{C}$ （第 2.4 节）。不施加边界条件；唯一的约束是不可压缩性， $\boldsymbol{C}\boldsymbol{d} = \boldsymbol{0}$。

加入不可压缩性约束力后的 PMPG 驻定条件（7）为

$$\boldsymbol{M}\dot{\boldsymbol{d}} + \boldsymbol{r}_{\mathrm{conv}}(\boldsymbol{d}) + \nu\,\boldsymbol{K}\boldsymbol{d} + \boldsymbol{C}^T\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{0}. \tag{39}$$

在正向求解器中， ν 是已知量， $\boldsymbol{d}$ 是未知量；这里，速度及其时间

导数是给定数据，ν 是未知量。定义

$$\boldsymbol{a}_h = \boldsymbol{M}\dot{\boldsymbol{d}} + \boldsymbol{r}_{\mathrm{conv}}(\boldsymbol{d}), \qquad \boldsymbol{b}_h = \boldsymbol{K}\boldsymbol{d}, \tag{40}$$

(39) 变为 $\boldsymbol{a}_h + \nu\,\boldsymbol{b}_h + \boldsymbol{C}^T\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{0}$。约束力 $\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{\lambda}$ 未知，但可以如下将其消去。令 $\mathbb{P}$ 表示到 Null($\boldsymbol{C}$) 上的正交投影算子，对任意向量 $\boldsymbol{f}$，其定义为

$$\mathbb{P}\,\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f} - \boldsymbol{C}^T(\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^T)^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{f}. \tag{41}$$

将 $\mathbb{P}$ 应用于 (39)，即可消去约束力，得到 $\mathbb{P}\boldsymbol{a}_h + \nu\,\mathbb{P}\boldsymbol{b}_h = \boldsymbol{0}$，这是一个关于单个标量 ν 的超定系统。其在 $\boldsymbol{M}$ 加权内积下的最小二乘解为

$$\boxed{\nu = -\frac{(\mathbb{P}\boldsymbol{b}_h)^T\boldsymbol{M}\,(\mathbb{P}\boldsymbol{a}_h)}{(\mathbb{P}\boldsymbol{b}_h)^T\boldsymbol{M}\,(\mathbb{P}\boldsymbol{b}_h)}.} \tag{42}$$

每次投影只需对预先分解的 $\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^T$ 进行一次稀疏三角求解；无需构造稠密零空间基。

注 6.1。 (42) 中的所有量（矩阵 $\boldsymbol{M}$、 $\boldsymbol{K}$、 $\boldsymbol{C}$，对流残差 $\boldsymbol{r}_{\mathrm{conv}}$、$\dot{}$，以及速度 $\boldsymbol{d}$ 及其时间导数 $\dot{\boldsymbol{d}}$）完全由测量速度和 Q9形函数计算得出。计算过程中不涉及边界条件、压力重构或正向模拟。

内部节点。 在测量窗口的边界处，最外层单元中的节点，其基函数支撑范围会延伸到视场之外的单元。这些节点处的动量平衡 (39) 不完整，因为缺少了来自这些单元的贡献。因此，我们将估计范围限制在内部节点：即其完整单元邻域均位于测量窗口内的节点。令 $\mathcal{I}$ 表示内部自由度集合。将散度约束限制在这些自由度上，$\boldsymbol{C}_{\mathcal{I}} = \boldsymbol{C}$ （：$\mathcal{I}$），并在这个缩减后的集合上，利用 $\boldsymbol{M}_{\mathcal{I}} = \boldsymbol{M}$（$\mathcal{I}$，$\mathcal{I}$）计算投影算子 (41) 和估计值 (42)。

该公式有两个特点值得强调。第一，向量 $\boldsymbol{a}_h$ 与 $\boldsymbol{b}_h$ 至多涉及测量速度的一阶空间导数；与基于强形式纳维–斯托克斯方程的方法不同，不需要二阶空间导数。第二，整个识别是直接的代数计算：无需正向求解，无需伴随，也无需迭代优化。该过程总结于算法 1。

6.2 时间多项式回归

算法1要求在测量网格点处给出速度 $\boldsymbol{d}$ 及其时间导数 $\dot{\boldsymbol{d}}$ 。在PIV实验中，所能获得的是个时刻 t_0，t_1，……，t_{N-1}处的 N 个速度快照序列，因此 $\boldsymbol{d}$和 $\dot{\boldsymbol{d}}$都必须由离散时间序列估计得到。一种简单有限差分 $\dot{\boldsymbol{d}} \approx (\boldsymbol{d}^{n+1} - \boldsymbol{d}^{n})/\Delta t$ 会将测量噪声放大 $1/\Delta t$倍，从而降低黏度估计的精度。

我们采用滑动窗口多项式回归来解决这一问题，方法遵循 Savitzky–Golay 方法 [28]。在一个窗口内，取时间为 t_0、……、t_{W-1} 的连续 W 个快照，

算法1 根据速度场数据估计黏度。

要求： 网格点处的速度 $\boldsymbol{d}$ 及其时间导数 $\dot{\boldsymbol{d}}$**确保：** 运动黏度 ν

将 Q9 单元分配到测量网格。在这些单元上组装 $\boldsymbol{M}$、$\boldsymbol{K}$、$\boldsymbol{C}$。识别内部自由度 $\mathcal{I}$（具有完整单元支撑的节点）。限制：$\boldsymbol{C}_{\mathcal{I}} \leftarrow \boldsymbol{C}(:, \mathcal{I})$。分解$\boldsymbol{C}_{\mathcal{I}}\boldsymbol{C}_{\mathcal{I}}^{T}$（稀疏，一次）。计算 $\boldsymbol{a}_h = \boldsymbol{M}\dot{\boldsymbol{d}} + \boldsymbol{r}_{\mathrm{conv}}(\boldsymbol{d})$和 $\boldsymbol{b}_h = \boldsymbol{K}\boldsymbol{d}$。限制到内部自由度：$\boldsymbol{a}_{\mathcal{I}} \leftarrow \boldsymbol{a}_h(\mathcal{I})$、$\boldsymbol{b}_{\mathcal{I}} \leftarrow \boldsymbol{b}_h(\mathcal{I})$。投影：$\mathbb{P}\boldsymbol{a}_{\mathcal{I}} \leftarrow \boldsymbol{a}_{\mathcal{I}} - \boldsymbol{C}_{\mathcal{I}}^{T}(\boldsymbol{C}_{\mathcal{I}}\boldsymbol{C}_{\mathcal{I}}^{T})^{-1}\boldsymbol{C}_{\mathcal{I}}\boldsymbol{a}_{\mathcal{I}}$（对 $\boldsymbol{b}_{\mathcal{I}}$同样处理）。$\nu \leftarrow -(\mathbb{P}\boldsymbol{b}_{\mathcal{I}})^{T}\boldsymbol{M}_{\mathcal{I}}(\mathbb{P}\boldsymbol{a}_{\mathcal{I}})\,(\mathbb{P}\boldsymbol{b}_{\mathcal{I}})^{T}\boldsymbol{M}_{\mathcal{I}}(\mathbb{P}\boldsymbol{b}_{\mathcal{I}})$。

对每个自由度的时间序列用最小二乘拟合一个 $p < W$ 次多项式。然后在窗口中点$t_{\mathrm{mid}} = (t_0 + t_{W-1})/2$处计算该拟合多项式及其时间导数。

回归权重与数据无关。定义中心化范德蒙德矩阵 $V_{ij} = (t_i - t_{\mathrm{mid}})^j$ 及其伪逆 $V^{+} = (V^{T}V)^{-1}V^{T}$，则在 t_{mid} 处的拟合值及其导数为

$$d_k(t_{\mathrm{mid}}) = \boldsymbol{w}_{\mathrm{val}}^{T}\boldsymbol{d}_k, \qquad \dot{d}_k(t_{\mathrm{mid}}) = \boldsymbol{w}_{\mathrm{der}}^{T}\boldsymbol{d}_k, \tag{43}$$

其中 $\boldsymbol{w}_{\mathrm{val}} = V_{0,:}^{+}$ 和 $\boldsymbol{w}_{\mathrm{der}} = V_{1,:}^{+}$ 分别是零阶和一阶权重向量，而 $\boldsymbol{d}_k = (d_k(t_0), \ldots, d_k(t_{W-1}))^{T}$是自由度 k对应的样本向量。权重只需计算一次，即可通过一次矩阵–向量乘法应用于所有自由度。

当 $p < W-1$ 时，多项式拟合有 $W-p-1$ 个残差自由度，可用于平均消除噪声。平滑后速度及其导数中的噪声相对于原始测量噪声 σ按 $\sim \sigma/\sqrt{W-p-1}$的比例缩放。多项式次数 p 决定了偏差–方差权衡：较高的 p 可以捕捉更多的时间曲率（这对振荡流动很重要），但留给平均处理的自由度会更少。

每次将窗口沿 N 个快照滑动一步，即可得到 $N - W + 1$个黏度估计。对于含噪数据，会对这些估计取平均以降低方差。若有多个独立的噪声实现（例如，来自不同的 PIV 采集批次），则对每个噪声实现分别执行此过程，再汇总结果。

6.2.1 含噪快照的预滤波

测量噪声违反了不可压缩约束 $\boldsymbol{C}\boldsymbol{d} = \boldsymbol{0}$，引入可压缩速度分量，从而使黏度估计产生偏差。在应用时间回归之前，每个含噪快照均利用$\mathbb{P}\,\boldsymbol{d} = \boldsymbol{d} - \boldsymbol{C}^{T}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^{T})^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{d}$投影到无散子空间，该投影使用测量窗口内的全部自由度（而不仅仅是内部自由度）。对于二维各向同性噪声，这大约可去除30–50%的噪声方差。

6.3 数值演示

我们在后向台阶（第4.2节）上演示该方法，将其收敛速度场用作合成粒子图像测速数据。后向台阶在 $Re = 100$ ($\nu_{\text{true}} = 0.005$)下提供了一个近乎定常的测试案例：收敛流动变化 $O(10^{-4})$，发生在连续时间步之间，因此时间导数 $\boldsymbol{d}$ 与空间项相比可以忽略不计。尽管如此，我们仍采用完整的瞬态公式，使用 $N = 65$ 个快照，其间隔为$\Delta t = 0.007$。

一个包含 75 个单元（498 个内部自由度）的矩形测量窗口紧邻台阶下游放置（$x \in [3, 5]$, $y \in [0.3, 0.7]$，图 22），覆盖速度梯度最强、因而黏性信号也最强的回流区。对于无噪声数据，

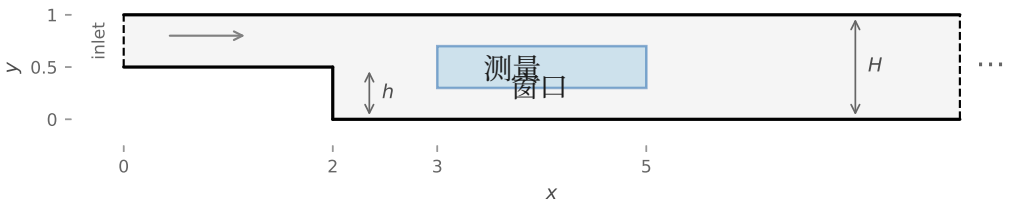


图 22：用于黏度估计的后向台阶几何结构及测量窗口。窗口放置在台阶下游的回流区内，远离区域的所有边界。

滑动窗口（$W = 33$, $p = 1$）可恢复 $\nu_{\text{est}}/\nu_{\text{true}} = 0.9998$ （对所有窗口位置取平均）。在通道其他位置（充分发展流区域、远下游区域、出口区域）放置的另外四个窗口也得到同样准确的结果，这表明只要速度梯度足够强，该方法就不会对窗口位置的选择敏感。

为模拟测量不确定性，在每个速度分量上都添加标准差为$\sigma = \varepsilon\, V_{\text{rms}}$ 的各向同性高斯噪声，其中 $V_{\text{rms}} = \sqrt{\langle |\boldsymbol{v}|^2 \rangle}$ 为空间均方根速度。回归前，将每个含噪快照预先投影到无散子空间。图 23 显示了所得黏度估计随噪声水平 ε的变化。在 1% 噪声下，该方法得到 $\nu_{\text{est}}/\nu_{\text{true}} = 0.99 \pm 0.02$ （均值 $\pm$，即对 20 次独立噪声实现和所有滑动窗口位置计算的一个标准差）。

主要的噪声退化机制是变量误差导致的衰减偏差：黏性项 $\boldsymbol{b}_h = \boldsymbol{K}\boldsymbol{d}$ 出现在式（42）的分母中，而 $\boldsymbol{d}$ 中的噪声会使其产生趋向于零的偏差。增大时间窗口大小 W可以减轻这一影响，因为这样能对更多快照中的噪声进行平均。在测试的多项式次数（$p = 1$、2、3）中，$p = 1$ （线性回归）的结果始终最佳，因为它为噪声平均保留了最多的自由度（$W - 2$）。在典型的 PIV实验中，帧率可达数百 Hz，采用 $W \geq 30$ 帧的窗口很容易实现。

6.4 讨论

数值演示表明，可以反向利用 PMPG 驻定条件，直接从速度场数据中恢复运动黏度，并且在干净数据上获得近乎

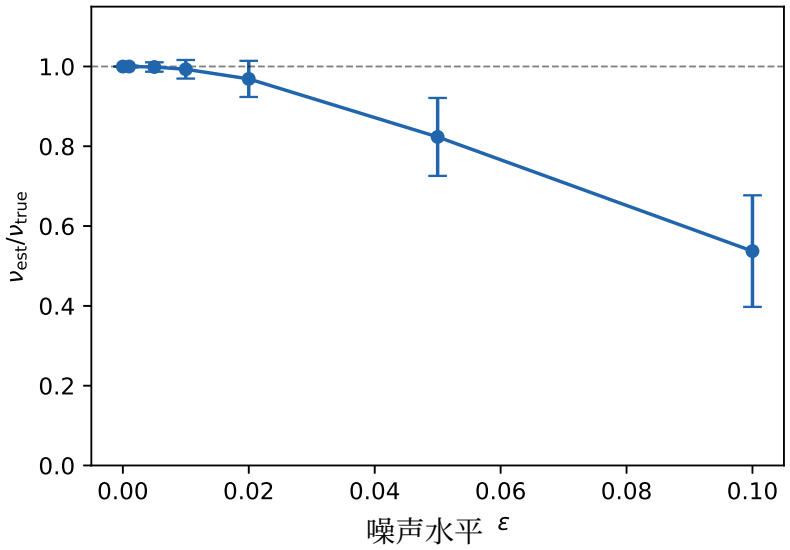


图 23：近阶跃测量窗口（$W = 33, p = 1$）中黏度估计随噪声水平的变化。误差棒表示 20 次噪声实现的 ± 1 标准差。对每个含噪快照进行回归前，先将其预滤波至无散子空间。

精确的结果，且在存在测量噪声时性能也能平稳下降。最重要的实际考量是测量窗口的位置：精度很大程度上取决于黏性项 $\boldsymbol{K}\boldsymbol{d}$ 的局部信噪比，因此窗口应选在速度梯度较大的区域（剪切层、回流区、边界层），因为在这些区域中，黏性项对动量平衡的贡献相对于测量噪声最大。

上述演示假设牛顿黏度在空间中均匀，但该公式可自然扩展至空间变化黏度 $\nu(\boldsymbol{x}) = \sum_a N_a(\boldsymbol{x})\,\nu_a$。黏性项变为 $\sum_a \nu_a\,\boldsymbol{K}_a\boldsymbol{d}$，其中 $(K_a)^{ij} = \int_\Omega N_a \nabla N_i \cdot \nabla N_j \, d\Omega$，投影后的系统则成为关于向量 $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \ldots, \nu_{n_{\mathrm{nodes}}})^T$的线性系统。这使得直接通过 PIV 测量绘制有效黏度（包括湍流涡黏度）的空间分布成为可能。对于黏度取决于局部应变率 $\nu = \nu(\dot{\gamma})$ 的广义牛顿流体，同一框架同样适用：流变参数以代数形式进入投影后的动量平衡，无需压力重构或正向模拟即可识别。

7 总结与未来工作

我们介绍了首个将最小压力梯度原理（PMPG）用于不可压缩黏性流的有限元实现。与对控制方程弱形式进行离散的伽辽金公式不同，本文方法将瑞利–里兹法直接应用于 PMPG 变分原理：在每一时刻，通过最小化隐含压力梯度的 L^2 范数，在满足不可压缩性和边界约束的条件下，确定节点速度变化率 $\dot{\boldsymbol{d}}$。这一变分结构有三个重要

后果：

1. **仅速度率公式**。 无需引入压力有限元空间，也无需满足 inf–sup 条件。压力相关量仅通过约束系统的拉格朗日乘子体现，并作为求解的直接副产物给出壁面力（压力和黏性剪切力）。

2. **对称正定系统矩阵**。由于对流项仅出现在显式右端项中，因此对于任意正黏度和时间步，无论雷诺数如何，系统矩阵 $\boldsymbol{M} + \nu\Delta t\, \boldsymbol{K}$ 均为对称正定矩阵。因此，即使在对流主导区间的粗网格上，该公式也无需稳定化。

3. **内置误差指标**。单元级 PMPG 泛函密度能够以零额外成本度量局部动量残差，从而为自适应网格细化提供自然准则，无需伴随问题或参考解。

该公式通过两个精确解进行了验证：泊肃叶通道流（达到机器精度的恢复）和 Kovasznay 解（空间收敛率为 ~ 3.3，与双二次元的 $O(h^3)$ 一致）。此外，还通过已发表的基准数据对顶盖驱动方腔（Ghia 等人 [15]）、后向台阶（Armaly 等人 [16]）以及圆柱绕流（Dennis 和 Chang [17], Tritton [18], Williamson [19]）进行了验证，结果表明在一系列雷诺数范围内均具有良好的一致性。特别是，在$Re = 1000$ 的顶盖驱动方腔算例中，采用粗壁面加密网格且单元佩克莱数最高达到 42，验证了由对称正定结构所预言的无振荡行为。

利用鞍点系统中的拉格朗日乘子提取壁面力，无需进行压力重构；所得后向台阶的再附着长度以及圆柱上的阻力系数和升力系数，均与已发表的数值相差仅几个百分点。

该误差指标在 Kovasznay 问题上得到了验证（斯皮尔曼 $\rho = 0.996$ 相关性与真实的单元速度误差相对应），并应用于后向台阶。在后者中，仅经过一轮基于均匀分布的自适应，单元数量便减少了 19%，同时保持泛函值不变。

除正向模拟外，我们还表明，PMPG 驻定条件可以反向解读，以便直接根据速度场数据估算运动黏度。通过投影到无散子空间，约束力得以消去；黏度则由一个内积比值直接求得，无需边界条件、压力重构或迭代优化。在一个后向台阶测试案例中，对于无噪声数据，该估算方法所得黏度与真实值的误差在 0.02% 以内；在测量噪声为 1% 时，误差在 1% 以内。该公式还可自然推广至空间变化黏度和非牛顿黏度。

当前的实现是迈向充分发挥 PMPG 框架潜力的第一步。我们设想了若干扩展方向：

- **更高的雷诺数**。 $Re = 1000$ （第 4.1.3 节）的空腔结果表明，PMPG 公式在高单元佩克莱数下具有结构稳定性，即使边界层未被单个

单元解析，也能产生平滑的解。在更高的雷诺数下，边界层和剪切层会变得更薄，因此需要更精细的网格来提高精度。单元级 PMPG 泛函密度（第 5 节）已能识别解析不足的区域，而在后向台阶上展示的自适应加密策略（第 5.3 节）提供了一种自然机制，可在需要的位置集中布置单元，无需任何稳定化机制。

- **三维扩展**。 该公式可自然扩展至三维：采用带三线性几何映射的 27 节点六面体单元（Q27）即可。散度约束仍为线性，鞍点结构保持不变。

- **湍流建模**。 PMPG 公式或可为湍流建模提供新的视角，因为变分原理为亚网格尺度封闭提供了自然的基于能量的判据。

- **移动边界与流固耦合**。 基于约束的架构非常适合纳入移动边界，因为无需修改底层单元公式，即可在每个时间步更新约束。此外，拉格朗日乘子可作为求解的直接副产物，给出壁面节点处的总节点力（压力和黏性剪切力），因此无需单独重构力。这些节点力正是结构求解器所需的耦合载荷，因此 PMPG 公式是分区式或整体式流固耦合方案的理想选择。

- **与变分框架的联系**。PMPG原理属于流体力学中更广泛的变分框架，该框架还包括高斯原理和阿佩尔函数。探索这些联系或可带来新的计算策略和物理见解。 [9, 6]

致谢

作者感谢Haithem Taha教授和Perry Johnson教授（加利福尼亚大学尔湾分校机械与航空航天工程系）在本研究开展过程中提供宝贵的讨论。

附录

A 2×2 高斯配置点的最优性

本附录分析无散约束 (24) 的配点选择。我们引入一种严格的散度泄漏度量，推导出闭式的最优配置点布置，并解释为什么 2×2 高斯点（尽管并非每个单元的最优选择）在组装后的有限元计算中能产生最佳结果。所有符号均沿用正文；特别是， $\boldsymbol{d}$、 $\boldsymbol{B}_{\xi}$、 $\boldsymbol{B}_{\eta}$、 $\boldsymbol{J}$ 和 $\boldsymbol{c}_k^{\mathrm{div}}$ 定义于方程 (14)、(17)、(19) 和 (24) 中。

A.1 散度泄漏算子

在参考单元中的任意一点 $(\xi,\ \eta)$，缩放散度 $(\nabla\cdot\boldsymbol{v})\ \det(\boldsymbol{J})\ =\boldsymbol{c}^{\mathrm{div}}\cdot\boldsymbol{d}$ 是单元自由度向量 $\ \boldsymbol{d}\in\mathbb{R}^{18}$ 的线性函数。为了度量单元上的积分散度残差，我们定义散度质量矩阵 散度质量矩阵

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{div}}=\int_{-1}^{1}\!\!\int_{-1}^{1}(\boldsymbol{c}^{\mathrm{div}})^{T}\boldsymbol{c}^{\mathrm{div}}\ d\xi\,d\eta\ \in\ \mathbb{R}^{18\times 18},\tag{44}$$

它是对称半正定的，并满足 $\ \boldsymbol{d}^{T}\boldsymbol{M}_{\mathrm{div}}\,\boldsymbol{d}=\int_{-1}^{1}\!\int_{-1}^{1}[(\nabla\boldsymbol{v})\ \det(\boldsymbol{J})]^{2}\ d\xi\,d\eta$。对于 $\det(\boldsymbol{J})$ 为常数的方形单元，该式与 $\ \int(\nabla\cdot\boldsymbol{v})^{2}\,d\Omega$ 成正比。

在四个配点处对约束 (24) 求值，可得到一个 $\ 4\times 18$ 约束矩阵 $\ \boldsymbol{A}$，其零空间 $\mathrm{Null}(\boldsymbol{A})\ \subset\mathbb{R}^{18}$ 的维数为 14。设 $\ \boldsymbol{V}\in\mathbb{R}^{18\times 14}$ 为该零空间的标准正交基。每个容许速度场都满足 $\boldsymbol{d}=\boldsymbol{V}\boldsymbol{z}$，其中某个 $\ \boldsymbol{z}\in\mathbb{R}^{14}$，其散度残差为

$$\boldsymbol{d}^{T}\boldsymbol{M}_{\mathrm{div}}\,\boldsymbol{d}=\boldsymbol{z}^{T}\underbrace{\boldsymbol{V}^{T}\boldsymbol{M}_{\mathrm{div}}\,\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{L}}\ \boldsymbol{z},\tag{45}$$

其中 $\ \boldsymbol{L}\ \in\ \mathbb{R}^{14\times 14}$ 是泄漏算子。其迹 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{L})$ 衡量总散度泄漏，并具有与基底无关的公式

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{L})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{M}_{\mathrm{div}})-\mathrm{tr}\big(\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{M}_{\mathrm{div}}\,\boldsymbol{A}^{T}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{T})^{-1}\big).\tag{46}$$

由于 $\ \boldsymbol{L}\ $ 的 14 个特征值与 $\boldsymbol{M}_{\mathrm{div}}$的特征值交错，泄漏满足下界

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{L})\ \geq\ \sum_{i=1}^{14}\mu_{i},\tag{47}$$

其中 $\ \mu_{1}\leq\cdots\leq\mu_{18}$ 是 $\ \boldsymbol{M}_{\mathrm{div}}$ 的特征值。任何四个线性约束都无法达到比此更好的界。

A.2 单位正方形上的分析

在参考正方形 $\ [-1,1]^{2}$ 上，雅可比矩阵为单位矩阵，且 $\ \boldsymbol{c}^{\mathrm{div}}\ =(\boldsymbol{B}_{\xi}\ \ \boldsymbol{B}_{\eta})$。Q9形函数的张量积结构使得 $\ \boldsymbol{M}_{\mathrm{div}}$ 可以由一维拉格朗日基（13）中的 3×3 一维质量矩阵、刚度矩阵和混合矩阵组装而成。

该矩阵的秩为 $\boldsymbol{M}_{\mathrm{div}}\ =8$：10 维零空间由恰好无散的双二次速度场构成。反映正方形 D_{4} 对称性的 8 个非零特征值为：

$$\begin{aligned}\mu_{1}&=\tfrac{17-\sqrt{209}}{15}\approx 0.170,\ \ \mu_{2}=\tfrac{4}{15}\approx 0.267,\ \ \mu_{3,4}=\tfrac{27-\sqrt{409}}{10}\approx 0.678\ \ (\times 2),\\ \mu_{5}&=\tfrac{17+\sqrt{209}}{15}\approx 2.097,\ \ \mu_{6}=\tfrac{8}{3}\approx 2.667,\ \ \ \mu_{7,8}=\tfrac{27+\sqrt{409}}{10}\approx 4.722\ \ (\times 2),\end{aligned}\tag{48}$$

其中 $\sum_{i=1}^{8}\mu_{i}=16=\mathrm{tr}(\boldsymbol{M}_{\mathrm{div}})$。理论最小泄漏 (47) 等于四个最小非零特征值之和：

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{L})_{\min}=\frac{34}{5}-\frac{\sqrt{209}}{15}-\frac{\sqrt{409}}{5}\approx 1.791.\tag{49}$$

A.3 最优配点

正方形的 D_4 对称性限制了最优配置。我们考虑两种符合该对称性的自然单参数族。

对角线布置： $(\pm s,\ \pm s)$。对式（46）进行符号计算，可得泄漏量的闭式解：

$$\mathcal{L}_{\mathrm{diag}}(s) = \frac{4(9234s^8 - 18684s^6 + 16632s^4 - 6858s^2 + 1297)}{45(3s^4 - 4s^2 + 2)(36s^4 - 48s^2 + 25)}. \tag{50}$$

最小值出现在 $s^* \approx 0.4959$，而在 $s = 1/2$ 处的闭式解与之基本相同：$\mathcal{L}_{\mathrm{diag}}(1/2) = 18746/10431 \approx 1.797$。$2 \times 2$ 高斯点对应于$s = 1/\sqrt{3}$，得到 $\mathcal{L}_{\mathrm{diag}}(1/\sqrt{3}) = 1124/585 \approx 1.921$。

坐标轴布置： $(0,\ \pm s)$ **和** $(\pm s,\ 0)$。泄漏量为 $\mathcal{L}_{\mathrm{axis}}(s) = (19332s^4 - 45552s^2 + 42352)/(3375s^4 - 9000s^2 + 9000)$，最优值为 ≈ 4.564，比理论下界高出两倍半以上。轴上点沿坐标方向检测散度，却无法捕捉占主导地位的对角拉伸模态（$\mu_{7,\,8} \approx 4.72$）。

表 2 汇总了主要结果。

表 2：单位正方形上四点配置方案的泄漏 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{L})$。该比值相对于理论界 (49)。

配点	s	$\mathrm{tr}(\boldsymbol{L})$	与界的比值
理论界（任意 4 个约束）	—	1.791	1.000
最优对角线布置	0.496	1.797	1.003
$(\pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{1}{2})$	0.500	1.797	1.003
2×2 高斯点	$1/\sqrt{3}$	1.921	1.073
最优轴	0.755	4.564	2.548

根据逐单元度量，对角线（$\pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{1}{2}$）点几乎是最优的（距界限在 0.3% 以内），$2 \times 2$ 高斯点比该界限高出 7.3%，而轴上点则明显较差。

一般四边形。 为验证稳健性，我们在 200 个随机凸四边形上重复了该分析（角点扰动的标准差为 0.3）。对角线（$\pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{1}{2}$）点的平均泄漏比保持在 1.02，最差情况下低于 $1.1\bar{9}$；$\bar{2} \times 2$高斯点的平均比值为 1.09。轴对齐点的平均比值超过 2.5。

A.4 2×2 高斯公式的多项式正交性

尽管逐单元泄漏更严重，2×2 高斯点在组装计算中产生的积分散度更低，且速度收敛性更好（图 7）。其原因在于多项式次数论证。

在次参数化公式中，每个雅可比矩阵分量 j_{ij} 至多是 (ξ,η) 的一次函数；见式（21）。形函数导数 $\partial N_a/\partial\xi$ 的次数为 (1,2)，而 $\partial N_a/\partial\eta$ 的次数为 (2,1)。因此，散度约束（24）中的乘积满足

$$(\nabla\cdot\boldsymbol{v})\,\det(\boldsymbol{J}) \ \text{ is at most degree } (2,2) \text{ in } (\xi,\eta). \tag{51}$$

对于任意双线性函数 $q(\xi,\ \eta)$（每个变量的次数均为 ≤ 1），乘积 $[(\nabla\cdot\boldsymbol{v})\ \det(\boldsymbol{J})]\cdot q$的次数至多为（3，3），因此可由 2×2 高斯公式精确积分。如果散度约束在四个高斯点处均为零，则

$$\int_{\Omega_e}(\nabla\cdot\boldsymbol{v})\,q\;d\Omega \;=\; \sum_{k=1}^{4} w_k \underbrace{[(\nabla\cdot\boldsymbol{v})\det(\boldsymbol{J})]_{P_k}}_{=0}\, q(P_k) \;=\; 0 \qquad \forall\, q\in Q_1, \tag{52}$$

其中 $w_k=1$ 为高斯权重，且数值求积是精确的。

换言之：在 2×2 高斯点处进行逐点配点，意味着散度残差与每个单元上的整个双线性多项式空间 $Q_1=$ 张成$\{1,\,\xi,\,\eta,\,\xi\eta\}$ 是 L^2-正交的。残余散度只能包含高阶模态（在 ξ 或 η中的二次及以上项）。

注 A.1。$(\pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{1}{2})$点并非任何标准求积公式的高斯点。在这些位置使用四点求积公式，其多项式精确性不足：乘积 $[(\nabla\cdot\boldsymbol{v})\ \det(\boldsymbol{J})]\cdot q$的次数为（3，3），但位于$(\pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{1}{2})$的四个点只能精确积分至（1，1）次。因此，正交条件（52）不成立，散度残差会保留低频成分（其中可能包括非零的单元平均值），并可能在整个网格上相干累积。

A.5 对组装系统的影响

正交 性性质（52）解释了图 7 中观察到的三个特征：

1. 单元间抵消。采用 2×2 高斯公式时，每个单元的散度残差都仅包含高阶项：其平均值、一阶矩和双线性矩均为零。高阶残差会发生符号振荡，并在相邻单元之间相互抵消；这些单元的自由度通过单元间连续性相互关联。若不具备这种正交性，低频残差（尤其是非零的单元平均散度）便会在整个网格上同向叠加，这解释了为何逐单元最优的（$\pm\frac{1}{2}$，$\pm\frac{1}{2}$）点会产生更大的全局散度。 – –

2. 速度精度。通过将散度残差限制在高阶模态中，2×2高斯公式避免在速度场中引入虚假的低阶误差。鞍点系统（26）中的拉格朗日乘子 $\boldsymbol{\lambda}$仍能得到良好确定，约束解保留了双二次空间的全部 $O(h^3)$ 逼近能力。

3. 过约束格式。增加配点数量（5 个或 8 个高斯点）会使动量方程可用的未受约束自由度过少，从而降低性能。 2×2 公式是能够提供所需 4 个约束、使每个单元保留 $18-4=14$ 个自由度的最低阶高斯公式；其多项式精确性恰好满足正交性质（52）的要求。

A.6 协调单元级分析与组装分析

单单元泄漏分析与组装计算衡量的是不同的量：

- **逐单元泄漏**（第 A.1–A.3 节）考察单个孤立单元上所有具有任意自由度的 Null($\boldsymbol{A}$) 速度场中，最坏情况下的 $\int (\nabla \cdot \boldsymbol{v})^2 \, d\Omega$。按此指标，$(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2})$ 点是最优的。

- **组装散度**（图 7）衡量的是在同时施加约束并满足动量方程的耦合单元上，特定偏微分方程数值解的积分散度。按此指标，高斯公式 2×2 更优。

差异源于组装解所处的子空间受到高度约束，且该子空间仅是单元级可容许集合的一部分：单元间连续性、动量方程和边界条件都会限制实际形成的速度场。在这个受限空间中，散度残差的多项式结构（其低频成分是否已消除）比最坏情况下的振幅上界更为重要。高斯公式 2×2 并非单元级最优解，但它对残差的滤除方式恰好适用于组装系统。

参考文献

[1] Alexandre Joel Chorin. 纳维–斯托克斯方程的数值解. *Mathematicsof Computation*, 22(104):745–762, 1968.[2] Wang Chang, Francis Giraldo, and Blair Perot. 精确分步法分析. *Journal of Computational Physics*, 180(1):183–199, 2002.[3] Jean-Luc Guermond, Peter Minev, and Jie Shen. 不可压缩流投影方法综述. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(44–47):6011–6045, 2006.[4] Ivo Babuška. 带拉格朗日乘子的有限元法. *NumerischeMathematik*, 20(3):179–192, 1973.[5] Franco Brezzi. 关于拉格朗日乘子产生的鞍点问题的存在性、唯一性与近似. *Revue française d'automatique, informatique,recherche opérationnelle. Analyse numérique*, 8(R2):129–151, 1974.[6] Haithem E. Taha, Cody Gonzalez, and Mohamed Shorbagy. 不可压缩流体力学的极小化原理. *Physics of Fluids*, 35(12):123110, 2023.[7] 卡尔·弗里德里希·高斯. 关于力学的一条新的普遍基本定律. *Journalfür die reine und angewandte Mathematik*, 4:232–235, 1829.[8] Paul Appell. 关于动力学方程的一种一般形式. *Journal für diereine und angewandte Mathematik*, 121:310–319, 1900.

[9] Cody Gonzalez and Haithem E. Taha. 升力变分理论. 流体力学杂志, 941:A58, 2022.[10] Alexander N. Brooks and Thomas J. R. Hughes. 针对对流主导流的流线迎风/Petrov–Galerkin公式，特别强调不可压缩纳维–斯托克斯方程. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engi-neering*, 32(1–3):199–259, 1982.[11] Thomas J. R. Hughes, Leopoldo P. Franca, and Marc Balestra. 用于计算流体力学的一种新有限元公式：V. 绕过Babuška–Brezzi条件：适用于等阶插值的斯托克斯问题稳定Petrov–Galerkin公式. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 59(1):85–99, 1986.[12] Philip M. Gresho and Robert L. Sani. 不可压缩流与有限元方法. 威立, 奇切斯特, 1998.[13] Michele Benzi, Gene H. Golub, and Jörg Liesen. 鞍点问题的数值解. 数值学报, 14:1–137, 2005.[14] Leslie S. G. Kovasznay. 二维网格后的层流. 剑桥哲学学会数学会刊, 44(1):58–62, 1948.[15] Urmila Ghia, Kirti N. Ghia, and C. T. Shin. 使用纳维–斯托克斯方程和多重网格法求解不可压缩流的高雷诺数解. *Journal of ComputationalPhysics*, 48(3):387–411, 1982.[16] Bassem F. Armaly, Franz Durst, J. C. F. Pereira, and Bernhard Schönung. 后向台阶流的实验与理论研究. 流体力学杂志, 127:473–496, 1983.[17] S. C. R. Dennis and Gau-Zu Chang. 雷诺数不超过100时圆柱绕流定常流的数值解. 流体力学杂志, 42(3):471–489, 1970.[18] David J. Tritton. 低雷诺数下圆柱绕流的实验. 流体力学杂志, 6(4):547–567, 1959.[19] C. H. K. Williamson. 圆柱尾流中的涡动力学. 流体力学年度评论, 28:477–539, 1996.[20] Ercan Erturk, Thomas C. Corke, and Cihan Gökçöl. 高雷诺数下二维定常不可压缩驱动方腔流的数值解. 国际流体数值方法杂志, 48(7):747–774, 2005.[21] Mark Ainsworth and J. Tinsley Oden. 有限元分析中的后验误差估计. 威立, 2000.

[22] Rüdiger Verfürth。《有限元方法的后验误差估计技术》。牛津大学出版社，2013年。[23] Christophe Geuzaine 和 Jean-François Remacle。Gmsh：具有内置前处理和后处理功能的三维有限元网格生成器。国际工程数值方法杂志，79(11):1309–1331，2009年。[24] Maziar Raissi、Paris Perdikaris 和 George Em Karniadakis。物理信息神经网络：用于求解涉及非线性偏微分方程的正问题和逆问题的深度学习框架。*Journal of Computational Physics*，378:686–707，2019年。[25] Maziar Raissi、Alireza Yazdani 和 George Em Karniadakis。隐式流体力学：从流动可视化中学习速度与压力场。《科学》，367(6481):1026–1030，2020年。[26] Alexandros Kontogiannis、Scott V. Elgersma、Andrew J. Sederman 和 Matthew P. Juniper。从测速数据中学习非牛顿流体的流变参数。流体力学杂志，1011:R3，2025年。[27] Fabrice Pierron 和 Michel Grédias。《虚拟场方法：从全场变形测量中提取本构力学参数》。施普林格，纽约，2012年。[28] Abraham Savitzky 和 Marcel J. E. Golay。通过简化的最小二乘程序对数据进行平滑和微分。《分析化学》，36(8):1627–1639，1964年。