arXiv:2603.02812v1 [math.OC] 3 Mar 2026

半线性椭圆方程函数空间中偏微分方程约束形状优化的 $W^{1,\infty}$-最速下降法全局收敛

Klaus Deckelnick[1],Philip J. Herbert[2],和 Michael Hinze[3]

[1]马格德堡奥托·冯·格里克大学数学系，Universit¨atsplatz 2，39106 马格德堡[2]萨塞克斯大学数学系，英国布莱顿 BN1 9RF[3]科布伦茨大学数学研究所，Universit¨atsstr. 1，D-56070 科布伦茨

2026年3月4日

摘要

我们证明了半线性椭圆偏微分方程形状优化中最速下降法在函数空间中的全局收敛性。最速下降法是在利普希茨拓扑下实现的。此外，我们还证明了二维空间中所得形状的条件收敛结果。

关键词： 偏微分方程约束形状优化， $W^{1,\infty}$-最速下降法，全局收敛，半线性椭圆偏微分方程

***MSC*学科分类**： 35Q93,49Q10, 49J20

1 引言

本文继续研究形状优化问题中最速下降法的收敛性，这项研究始于 [DHH25]。为此，我们考虑一般的偏微分方程约束形状优化问题

$$\min \mathcal{J}(\Omega) := \int_\Omega j(x, u(x), \nabla u(x))\, dx,\ \Omega \in \mathcal{S}, \tag{1.1}$$

where j 是一个实值函数，其性质将在第2节中说明，而 u 现在我们顺利求解是半线性椭圆边值问题

$$-\Delta u + g(u) = f \text{ in } \Omega, \quad u = 0 \text{ on } \partial\Omega.$$

此外，对于 $d = 2,3$， $\mathcal{S}$ 是包含在给定全集域 $D \subset \mathbb{R}^d$ 中的一族容许区域。由于通常很难计算 (1.1) 的极小化解，因此人们常采用下降法来生成一个序列 $(\Omega^k)_{k\in\mathbb{N}_0} \subset \mathcal{S}$ ，该序列在适当条件下收敛到满足 $\mathcal{J}'(\Omega) = 0$ 的驻定形状 Ω。我们将采用映射方法，并将集合 $\Omega^k \in \mathcal{S}$ 构造为 $\Omega^k = \Phi^k(\hat{\Omega})$，其中 $\Phi^k\colon \bar{D} \to \bar{D}$ 是一个双 Lipschitz 映射，而 $\hat{\Omega} \Subset D$ 是固定的参考区域。在关于 j 的适当条件下，形状导数 $\mathcal{J}'(\Omega^k)$ 是 $W^{1,\infty}_0(D, \mathbb{R}^d)$ 上的有界线性泛函，因此下降方向的自然选择为

$$V^k \in \arg\min \left\{ \mathcal{J}'(\Omega^k)[V] : V \in W^{1,\infty}_0(D, \mathbb{R}^d), |DV| \le 1 \text{ a.e. in } D \right\}. \tag{1.2}$$

这里， $|DV|$ 表示雅可比矩阵 DV 的谱范数。因此，除非 Ω^k 已经是驻定的，否则 $\mathcal{J}'(\Omega^k)[V^k] < 0$。随后，新区域 Ω^{k+1} 由 $\Omega^{k+1} = \Phi^{k+1}(\hat{\Omega})$ 得到，其中$\Phi^{k+1} = (\mathrm{id} + t_k V^k) \circ \Phi^k$，而 $t_k > 0$ 根据 Armijo 步长规则选取，详细说明见算法 2.1。本文旨在函数空间框架下研究该算法的收敛性。作为主要结果，我们将证明

- 存在适用于形状泛函的 $W^{1,\infty}$-最速下降方向的 Armijo 步长，见引理 3.1；
- 该算法在以下意义下全局收敛： $\|\mathcal{J}'(\Omega^k)\| \to 0$ 当 $k \to \infty$ 时，见定理 3.2；
- 在二维空间中，序列 $(\Omega^k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ 有一个子序列，它相对于豪斯多夫补度量收敛到 $\mathcal{J}$ 的一个驻点，前提是 $(\Phi^k)_{k\in\mathbb{N}_0}$在 $W^{1,\infty}(D, \mathbb{R}^2)$ 中有界，见定理 3.6。

这些结果以 [DHH25], 中的分析为基础并对其加以扩展。该文研究了受线性泊松问题约束的形状优化，并考察了问题 (1.1) 的有限元近似的收敛性。 [DHH25] 中的定理 3.3 证明了应用于离散化问题的最速下降方法具有全局收敛性，并在附加条件下证明了离散驻定形状的存在性。相应证明中的一个关键要素是 [DHH25，引理 3.2], ，它保证了最速下降算法中 Armijo 步长的存在。仔细考察这一结果可知，它与有限元离散参数无关，因此实际上可直接推广到我们的无限维背景。我们将利用这一观察，并将其扩展到半线性状态方程的情形，从而证明我们的最速下降法全局收敛，见下文定理 3.2。

当然，考察在什么条件下序列 $(\Omega^k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ 收敛到驻定形状 Ω 也很有意思。DHH25，定理 4.7]在映射 $(\Phi^k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ 满足以下条件的假设下，得到了一个相关结果，证明离散驻定形状序列收敛到 $\mathcal{J}$ 的一个驻定形状： [

$$\frac{1}{M}|x_1 - x_2| \le |\Phi^k(x_1) - \Phi^k(x_2)| \le M|x_1 - x_2| \quad \text{for all } x_1, x_2 \in D \text{ and all } k \in \mathbb{N}_0 \tag{1.3}$$

对某个 $M > 0$成立。在二维空间的情形下，我们将能够放宽这一条件，只假设 (1.3) 中的第二个不等式，见定理 3.6。之所以限制在二维，是因为我们充分利用了 ˇSver´ak、 [ˇSve93] 以及 Chambolle 与 Doveri， [CD97] 分别得到的两个重要结果。这些结果证明了狄利克雷问题和诺伊曼问题的 γ–收敛性，对于在状态方程和伴随方程中，以及在 $\mathcal{J}'(\Omega)$ 的表达式中取极限至关重要。这些结果的一项重要优点是，它们实质上只要求序列 $(\Omega^k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ 满足拓扑条件；在我们的情形下，这些条件由表示 $\Omega^k = \Phi^k(\hat{\Omega})$ 以及映射 Φ^k 为双利普希茨映射这一事实得以满足。

有关形状优化的更多信息，请参阅 Delfour 和 Zol´esio [DZ11], 、Sokolowski 和 Zol´esio [SZ92], 的开创性著作，以及 Allaire、Dapogny 和 Jouve 撰写的近期综述文章 [ADJ21] ，其中还提供了该主题的全面参考文献。

2 预备知识

2.1 问题设定

L设 $D \subset \mathbb{R}^d$ 为一个开、凸、有界的全集域，且具有利普希茨边界 d

$$\mathcal{S} := \{\Omega \subset D \,|\, \Omega \text{ is open }\}.$$

我们考虑形状优化问题

$$\min_{\Omega\in\mathcal{S}} \mathcal{J}(\Omega) = \int_\Omega j(\cdot, u, \nabla u)\, dx,$$

其中 $u \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ 是以下方程的唯一解

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \eta \, dx + \int_\Omega g(u)\eta \, dx = \int_\Omega f\eta \, dx \qquad \text{for all } \eta \in H_0^1(\Omega). \tag{2.1}$$

这里，'·' 表示两个向量的欧几里得内积。下文假设$f \in H^1(D)$， $g \in C^2(\mathbb{R})$，且 $g'(t) \geq 0$ 对所有 $t \in \mathbb{R}$ 成立，并且 $j \in C^2(D \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$ 满足

$$\begin{aligned}
|j(x,u,z)| + |j_x(x,u,z)| + |j_{xx}(x,u,z)| &\leq \varphi_1(x) + c_1\big(|u|^q + |z|^2\big); && (2.2)\\
|j_u(x,u,z)| + |j_{xu}(x,u,z)| &\leq \varphi_2(x) + c_2\big(|u|^{q-1} + |z|^{2-\frac{2}{q}}\big); && (2.3)\\
|j_z(x,u,z)| + |j_{xz}(x,u,z)| &\leq \varphi_3(x) + c_3\big(|u|^{\frac{q}{2}} + |z|\big); && (2.4)\\
|j_{uu}(x,u,z)| &\leq \varphi_4(x) + c_4\big(|u|^{q-2} + |z|^{2-\frac{4}{q}}\big); && (2.5)\\
|j_{zz}(x,u,z)| &\leq \varphi_5(x) && (2.6)
\end{aligned}$$

对所有 $(x,\ u,\ z) \in D \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$均成立，其中下标 x 表示对第一个变量求导， u表示对第二个变量求导， z表示对第三个变量求导。这里，当 $d = 2$时，$2 \leq q < \infty$；当 $d = 3$时，$q = 6$。此外， φ_1，.....，φ_5均为非负数，且 $\varphi_1 \in L^1(D)$ $\varphi_2 \in L^{\frac{q}{q-1}}(D)$ $\varphi_3 \in L^2(D)$ $\varphi_4 \in L^{\frac{q}{q-2}}(D)$，以及$\varphi_5 \in L^\infty(D)$。注意， q 的取值蕴含连续嵌入 $H_0^1(D) \hookrightarrow L^q(D)$，因此存在 $c > 0$ 使得

$$\|v\|_{L^q} \leq c\|v\|_{H^1} \qquad \text{for all } v \in H_0^1(D). \tag{2.7}$$

从这里开始，我们在适当之处省略对空间变量 x 的显式依赖。利用 [ADJ21], 第4.4节和第4.5节所述的技巧，可以计算 $\mathcal{J}$的形状导数

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}'(\Omega)[V] &= \int_\Omega \Big(j(\cdot,u,\nabla u)\operatorname{div} V + j_x(\cdot,u,\nabla u)\cdot V - j_z(\cdot,u,\nabla u)\cdot DV^{\mathsf{T}}\nabla u \Big)\, dx \qquad (2.8)\\
&\quad + \int_\Omega \Big(\big(DV + DV^{\mathsf{T}} - \operatorname{div} V\, I\big)\nabla u \cdot \nabla p - g(u)p \operatorname{div} V + \operatorname{div}(fV)p \Big)\, dx
\end{aligned}$$

对所有 $V \in W^{1,\infty}_0(D,\ \mathbb{R}^d)$。这里，$p \in H_0^1(\Omega)$ 是伴随问题的解

$$\int_\Omega \nabla p \cdot \nabla \eta \, dx + \int_\Omega g'(u)p\eta \, dx = \int_\Omega \big(j_u(\cdot,u,\nabla u)\eta + j_z(\cdot,u,\nabla u)\cdot\nabla\eta \big)\, dx \quad \text{for all } \eta \in H_0^1(\Omega). \tag{2.9}$$

注意，假设 (2.2)–(2.4) 确保 (2.8) 和 (2.9) 右端出现的所有积分均存在。同时，这些增长条件也保证了状态方程和伴随方程解的一致控制，如

引理 2.1. 设 $\Omega \in \mathcal{S}$。则问题 (2.1) 和 (2.9) 分别存在唯一解 $u \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ 和 $p \in H_0^1(\Omega)$。此外，存在一个常数 $c^\star$，使得

$$\|u\|_{H^1} + \|u\|_{L^\infty} + \|p\|_{H^1} \leq c^\star. \tag{2.10}$$

常数 c^* 仅依赖于 d、 D、 f、 j和 g，但与Ω无关。此外，我们将 u 和 p 视为零延拓到 D。

证明。 为了证明(2.1)存在解 $u \in H_0^1(\Omega)$，我们首先针对 $M > 0$考虑修正非线性项

$$g_M(t) := \begin{cases} g(-M), & t < -M, \\ g(t), & -M \leq t \leq M, \\ g(M), & t > M. \end{cases}$$

注意，由于 $g' \geq 0$， g_M 是递增的。利用单调算子理论，可以证明该问题

$$\int_\Omega \nabla u_M \cdot \nabla \eta \, dx + \int_\Omega g_M(u_M)\eta \, dx = \int_\Omega f\eta \, dx \qquad \forall \eta \in H_0^1(\Omega)$$

存在唯一解 $u_M \in H_0^1(\Omega)$，详见 [VM25 第 2.6] 节。接下来，我们用$v \in H^2(D) \cap H_0^1(D)$表示泊松问题的解

$$-\Delta v = f - g(0) \ \text{ a.e. in } D, \quad v = 0 \text{ on } \partial D.$$

由于 $H^2(D) \hookrightarrow C^0(\bar{D})$ 对于 $d = 2, 3$ 成立，我们推知存在 $K \geq 0$，它仅依赖于 d, D, f 和 g，使得对于所有 $x \in D$，都有 $|v(x)| \leq K$。函数 $w := v + K$ 因而还满足 $w \geq 0$ 于 D 中，以及

$$-\Delta w + g_M(w) = -\Delta v + g_M(w) = f - g_M(0) + g_M(w) \geq f \quad \text{ a.e. in } D$$

由于 g_M 单调递增且 $g_M(0) = g(0)$。将上述关系乘以 Ω 中的 $\eta \in C_0^1(\Omega)$ $\eta \geq 0$，并使用逼近论证，可得

$$\int_\Omega \nabla w \cdot \nabla \eta \, dx + \int_\Omega g_M(w)\eta \, dx \geq \int_\Omega f\eta \, dx \qquad \forall \eta \in H_0^1(\Omega),\, \eta \geq 0 \text{ a.e. in } \Omega.$$

因此，

$$\int_\Omega \nabla(u_M - w) \cdot \nabla \eta \, dx + \int_\Omega (g_M(u_M) - g_M(w))\eta \, dx \leq 0 \qquad \forall \eta \in H_0^1(\Omega), \eta \geq 0 \text{ a.e. in } \Omega.$$

由于 $w \geq 0$ 属于 D，我们有 $\eta = (u_M - w)^+ \in H_0^1(\Omega)$ $\eta \geq 0$，因此由 g_M 的单调性可得

$$\int_\Omega |\nabla (u_M - w)^+|^2 \, dx \leq 0.$$

因此，$(u_M - w)^+ = 0$，从而 $u_M \leq w = v + K \leq 2K$ 在 Ω 中几乎处处成立。类似的论证表明，$u_M \geq -2K$ 在 Ω 中几乎处处成立，因此

$$\|u_M\|_{L^\infty} \leq M \tag{2.11}$$

如果我们选择 $M = 2K$。特别地，$g_M(u_M) = g(u_M)$，且 $u = u_M$ 是（2.1）的一个解，而唯一性则源于 g 的单调性。由（2.11）可得（2.10）中 u 的 L^∞–界，而通过用 $\eta = u$ 检验（2.1），并利用 $g(u)u \geq g(0)u$ 在 Ω 中几乎处处成立，可控制 H^1–半范数。

为了证明 p 的界，我们用 $\eta = p \in H_0^1(\Omega)$ 检验（2.9），并利用以下事实：$g' \geq 0$、（2.3）、（2.4）、H¨older 不等式以及（2.7），从而得到

$$\begin{aligned}
\int_D |\nabla p|^2 \, dx &= \int_\Omega |\nabla p|^2 \, dx \\
&\leq \int_\Omega \Big[\big(\varphi_2 + c_2(|u|^{q-1} + |\nabla u|^{\frac{2(q-1)}{q}})\big)|p| + \big(\varphi_3 + c_3(|u|^{\frac{q}{2}} + |\nabla u|)\big)|\nabla p| \Big] \, dx \\
&\leq \big(\|\varphi_2\|_{L^{\frac{q}{q-1}}} + c_2(\|u\|_{L^q}^{q-1} + \|\nabla u\|_{L^2}^{\frac{2(q-1)}{q}})\big)\|p\|_{L^q} \\
&\quad + \big(\|\varphi_3\|_{L^2} + c_3(\|u\|_{L^q}^{\frac{q}{2}} + \|\nabla u\|_{L^2})\big)\|\nabla p\|_{L^2} \\
&\leq c\big(1 + \|u\|_{H^1}^{q-1}\big)\|p\|_{H^1} \leq c\big(1 + (c^*)^{q-1}\big)\|p\|_{H^1} \leq c\big(1 + (c^*)^{q-1}\big)\|\nabla p\|_{L^2},
\end{aligned}$$

其中，我们还利用了关于 D 的 Poincar´e 不等式以及 u 的界。$\|p\|_{L^2}$ 的估计现可由再次应用 Poincar´e 不等式得到。 □

2.2 下降算法

接下来，我们将引言中阐述的思想转化为空间$W^{1,\infty}(D, \mathbb{R}^d)$中的一种下降方法。为此，我们固定一个非空开参考区域 $\hat{\Omega} \Subset D$。我们将通过映射方法，利用适当的双 Lipschitz 映射 $\Phi^k : \bar{D} \to \bar{D}$，构造下降方法生成的开集，其形式为 $\Omega^k = \Phi^k(\hat{\Omega})$。

算法 2.1（采用 Armijo 线搜索的最速下降法）。设 $\gamma \in (0,\ 1)$ 为一个固定常数。

0. 令 $\Omega^0 := \hat{\Omega}, \Phi^0 := \mathrm{id}$。

对于 *k=0,1,2,...* :

1. 若 $\mathcal{J}'(\Omega^k) = 0$，则停止。*2.* 选择 $V^k \in W^{1,\infty}_0(D, \mathbb{R}^d)$ 使得

$$V^k \in \arg\min\{J'(\Omega^k)[W] \,|\, W \in W^{1,\infty}_0(D,\mathbb{R}^d),\ |DW| \le 1 \ a.e.\ in\ D\}.$$

3. 选择满足条件的最大 $t_k \in \{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots\}$

$$\mathcal{J}\big((\mathrm{id} + t_k V^k)(\Omega^k)\big) - \mathcal{J}(\Omega^k) \le \gamma t_k \mathcal{J}'(\Omega^k)[V^k].$$

4. 设置 $\Phi^{k+1} := (\mathrm{id} + t_k V^k) \circ \Phi^k$，$\Omega^{k+1} := (\mathrm{id} + t_k V^k)(\Omega^k)$。

在下面的引理中，我们汇集由算法 2 生成的映射 Φ^k 的性质 .1.

引理 2.2. 算法 *2.1* 产生一个双 *Lipschitz* 映射序列 $\Phi^k : \bar{D} \to \bar{D}$，且$\Phi^k =$ 恒等于 ∂D 上，以及开集 $\Omega^k \subset D$，满足 $\Omega^k = \Phi^k(\hat{\Omega})$。

证明。我们通过对 $k \in \mathbb{N}_0$ 作归纳法来证明这些断言。由该算法的步骤 0 可知，它们对 $k = 0$显然成立。接下来假设对某个 $k \in \mathbb{N}_0$，映射 $\Phi^k : \bar{D} \to \bar{D}$ 是双 Lipschitz 的，且 $\Phi^k =$恒等于 ∂D 上，并且 $\Omega^k = \Phi^k(\hat{\Omega})$。设 $V^k \in W^{1,\infty}_0(D, \mathbb{R}^d)$（关于 V^k 的存在性，见定理 2.1 及 [DHH24]中随后的注记），$0 \le t_k \le \frac{1}{2}$ 为步骤 3 中选取的步长。由于 $|DV^k| \le 1$ 在 D 中几乎处处成立，且D 是凸的，我们推得

$$\frac{1}{2}|x_1 - x_2| \le |(\mathrm{id} + t_k V^k)(x_1) - (\mathrm{id} + t_k V^k)(x_2)| \le \frac{3}{2}|x_1 - x_2| \qquad \forall x_1, x_2 \in D,$$

因此，$\Phi^{k+1} = (\mathrm{id} + t_k V^k) \circ \Phi^k$ 是双 Lipschitz 映射，特别是单射。此外，注意到 $V^k = 0$ 在 ∂D 上，我们有 $\Phi^{k+1} = \Phi^k = \mathrm{id}$ 在 ∂D上。

为了证明 Φ^{k+1} 是满射，我们重复使用 [DHH25] 中引理 2.1 的证明所采用的论证。对于每个 $p \in D$，我们有

$$\deg(\Phi^{k+1}, D, p) = \deg(\mathrm{id}, D, p) = 1,$$

其中 deg 表示布劳威尔度。因此，根据度的存在性，我们推知存在 $x \in D$，满足 $p = \Phi^{k+1}(x)$，从而 $D \subset \Phi^{k+1}(D)$。接下来，我们断言 D 在 $\Phi^{k+1}(D)$ 中是闭集。为此，设 $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 D 中的一个序列，满足当 $n \to \infty$ 时，$p_n \to p$ 趋于某个 $p \in \Phi^{k+1}(D)$，例如 $p = \Phi^{k+1}(x)$，其中 $x \in D$。若 $p \in \partial D$，则 $\Phi^{k+1}(x) = p = \Phi^{k+1}(p)$，这与 Φ^{k+1} 的单射性结合起来便推出 $x = p$，矛盾。因此 $p \in D$。由于 D 在 $\Phi^{k+1}(D)$ 中也是开集，且 $\Phi^{k+1}(D)$ 是连通的，我们推知 $D = \Phi^{k+1}(D)$。由于 $\Phi^{k+1} =$id 在 ∂D 上，我们得出结论：$\Phi^{k+1} : \bar{D} \to \bar{D}$ 是双射。因此，Φ^{k+1} 是从 $\bar{D}$ 到 $\bar{D}$的双 Lipschitz 映射，且 $\Phi^{k+1} =$id 在 ∂D上。此外，$\Omega^{k+1} = (\mathrm{id} + t_k V^k)(\Omega^k) = (\mathrm{id} + t_k V^k) \circ \Phi^k(\hat{\Omega}) = \Phi^{k+1}(\hat{\Omega})$。最后，集合 $\Omega^k = \Phi^k(\hat{\Omega})$ 是开集，因为 Φ^k是同胚，且 $\hat{\Omega}$ 是开集。 □

3 下降算法的收敛

本节将证明该算法的全局收敛，并说明在二维情况下，若序列 $(\Phi^k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ 在 $W^{1,\infty}(D; \mathbb{R}^2)$ 中有界，则序列 $(\Omega^k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ 存在一个收敛子序列。

3.1 全局收敛

本节的目标是证明最速下降算法 2.1 在如下意义下全局收敛：

$$\|\mathcal{J}'(\Omega^k)\| := \sup\{\mathcal{J}'(\Omega^k)[W] \,|\, W \in W^{1,\infty}_0(D,\mathbb{R}^d), |DW| \le 1 \text{ a.e. in } D\} \to 0, \quad \text{as } k \to \infty.$$

相应的结果主要依赖于以下引理，该引理证明了对于给定的下降方向，Armijo 步长的存在性。请注意，正是在这里需要用到 (2.2)–(2.6) 中关于 j 二阶偏导数的增长条件。

引理 3.1。令 $\gamma \in (0,1)$ 为一个固定常数，$\Omega \in \mathcal{S}$，且

$$V \in \arg\min\{J'(\Omega)[W] \,|\, W \in W_0^{1,\infty}(D,\mathbb{R}^d),\ |DW| \le 1 \ \ a.e.\ \ in\ D\}.$$

假设 $\mathcal{J}'(\Omega)[V] \le -\epsilon$ 对某个 $\epsilon > 0$成立。那么存在仅依赖于j、 f、 g、 D、 d、 γ和 ϵ的 $0 < \delta < 1$，使得

$$\mathcal{J}(\Omega_t) - \mathcal{J}(\Omega) \le \gamma t \mathcal{J}'(\Omega)[V] \qquad for\ all\ 0 \le t \le \delta, \ \ where\ \Omega_t = T_t(\Omega)\ \ and\ T_t = id + tV.$$

证明。 证明思路与 [DHH25, 引理 3.2], 的证明相同；该文在有限维情形下得到了相应结果，其中状态、伴随状态和变形场均属于有限元空间。不过，许多论证可直接推广到无限维情形，在适当之处，我们将引导读者参阅 [DHH25]中的相应论证。

令 $\Omega_t = T_t(\Omega)$，其中 $T_t(x) = x + tV(x)$。根据 $\mathcal{J}$的定义，我们有

$$\mathcal{J}(\Omega_t) = \int_{\Omega_t} j(\cdot, u_t, \nabla u_t)\, dx,$$

其中 $u_t \in H_0^1(\Omega_t)$ 满足

$$\int_{\Omega_t} \nabla u_t \cdot \nabla \eta_t \, dx + \int_{\Omega_t} g(u_t)\eta_t \, dx = \int_{\Omega_t} f\eta_t \, dx \qquad \forall \eta_t \in H_0^1(\Omega_t).$$

取定 $\eta \in H_0^1(\Omega)$，选择 $\eta_t := \eta \circ T_t^{-1} \in H_0^1(\Omega_t)$，由此可推得

$$\int_{\Omega_t} \nabla u_t \cdot \nabla(\eta \circ T_t^{-1})\, dx + \int_{\Omega_t} g(u_t)\eta \circ T_t^{-1}\, dx = \int_{\Omega_t} f\eta \circ T_t^{-1}\, dx \qquad \forall \eta \in H_0^1(\Omega). \tag{3.1}$$

变换到 Ω 后，我们得到

$$\int_\Omega \nabla u_t \circ T_t \cdot \nabla(\eta \circ T_t^{-1}) \circ T_t \, |\det DT_t|\, dx + \int_\Omega g(u_t \circ T_t)\eta \, |\det DT_t| dx = \int_\Omega f \circ T_t \, \eta \, |\det DT_t|\, dx \tag{3.2}$$

对所有 $\eta \in H_0^1(\Omega)$ 均成立。由于 $\det DT_t = \det(I + tDV)$ 且 $|DV| \le 1$ 属于 $\bar{D}$，容易验证

$$\det DT_t - 1 = t\mathrm{div}V + r_1, \quad \text{with } |r_1| \le ct^2, \tag{3.3}$$

其中常数 c 仅依赖于 d。这还意味着存在 $\delta_1 > 0$，使得 $\det DT_t > 0$，$0 \le t \le \delta_1$。定义 $A_t := (DT_t)^{-1}(DT_t)^{-\mathsf{T}}\det DT_t$，于是我们可知，函数 $\hat{}u_t := u_t \circ T_t \in H_0^1(\Omega)$ 满足

$$\int_\Omega A_t \nabla \hat{u}_t \cdot \nabla \eta \, dx + \int_\Omega g(\hat{u}_t)\eta \det DT_t \, dx = \int_\Omega f \circ T_t \, \eta \det DT_t \, dx \qquad \text{对所有 } \eta \in H_0^1(\Omega) \text{ 均成立。} \tag{3.4}$$

由此我们推得

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}(\Omega_t) - \mathcal{J}(\Omega) &= \int_\Omega \big(j(T_t, \hat{u}_t, DT_t^{-\mathsf{T}}\nabla\hat{u}_t)\det DT_t - j(\cdot, u, \nabla u)\big)\, dx \\
&= \int_\Omega j(\cdot, u, \nabla u)(\det DT_t - 1)\, dx + \int_\Omega \big(j(T_t, \hat{u}_t, DT_t^{-\mathsf{T}}\nabla\hat{u}_t) - j(\cdot, u, \nabla u)\big)\, dx \\
&\quad + \int_\Omega \big(j(T_t, \hat{u}_t, DT_t^{-\mathsf{T}}\nabla\hat{u}_t) - j(\cdot, u, \nabla u)\big)(\det DT_t - 1)\, dx \\
&= \sum_{j=1}^{3} T_j. \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

仿照 [DHH25, (3.7)] 的论证，并使用引理 2.1，我们得到

$$T_1 \le t\int_\Omega j(\cdot,u,\nabla u)\,\mathrm{div}\,V\,dx + ct^2. \tag{3.6}$$

项 T_2 的写法与 [DHH25, (3.8)] 中相同，因此

$$\begin{aligned} T_2 &= t\int_\Omega j_x(\cdot,u,\nabla u)\cdot V\,dx - t\int_\Omega j_z(\cdot,u,\nabla u)\cdot DV^{\mathsf T}\nabla u \\ &\quad + \int_\Omega j_z(\cdot,u,\nabla u)\cdot\big((DT_t^{-\mathsf T} - I + tDV^{\mathsf T})\nabla\hat u_t + tDV^{\mathsf T}\nabla(u-\hat u_t)\big)\,dx \\ &\quad + \int_\Omega \big(j_u(\cdot,u,\nabla u)(\hat u_t - u) + j_z(\cdot,u,\nabla u)\cdot\nabla(\hat u_t - u)\big)\,dx \\ &\quad + \int_\Omega\int_0^1 (1-s)\frac{d^2}{ds^2}\left[j(\cdot+stV, s\hat u_t + (1-s)u, sDT_t^{-\mathsf T}\nabla\hat u_t + (1-s)\nabla u)\right]ds\,dx \\ &= \sum_{j=1}^5 T_{2,j}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

积分 $T_{2,3}$ 和 $T_{2,5}$ 的处理方式与 [DHH25, (3.9), (3.17)] 中相同，因此

$$T_{2,3} + T_{2,5} \le c\big(t^2 + c\|\hat u_t - u\|_{H^1}^2\big). \tag{3.8}$$

为处理 $T_{2,4}$，我们使用 (2.9)、(2.1) 和 (3.4)，并写为

$$\begin{aligned} T_{2,4} &= \int_\Omega \nabla p\cdot\nabla(\hat u_t - u)\,dx + \int_\Omega g'(u)p(\hat u_t - u)\,dx = \int_\Omega \nabla p\cdot\nabla\hat u_t\,dx + \int_\Omega g(\hat u_t)p\,dx \\ &\quad - \int_\Omega \nabla p\cdot\nabla u\,dx - \int_\Omega g(u)p\,dx + \int_\Omega \big(g'(u)(\hat u_t - u) - g(\hat u_t) + g(u)\big)p\,dx \\ &= \int_\Omega A_t\nabla\hat u_t\cdot\nabla p\,dx + \int_\Omega g(\hat u_t)p\,\mathrm{det}DT_t\,dx - \int_\Omega \nabla p\cdot\nabla u\,dx - \int_\Omega g(u)p\,dx \\ &\quad + \int_\Omega (I - A_t)\nabla\hat u_t\cdot\nabla p\,dx + \int_\Omega g(\hat u_t)(1-\mathrm{det}DT_t)p\,dx \\ &\quad + \int_\Omega \big(g'(u)(\hat u_t - u) - g(\hat u_t) + g(u)\big)p\,dx \\ &= \int_\Omega \big(f\circ T_t\,\mathrm{det}DT_t - f\big)p\,dx + \int_\Omega (I - A_t)\nabla\hat u_t\cdot\nabla p\,dx + \int_\Omega g(\hat u_t)(1-\mathrm{det}DT_t)p\,dx \\ &\quad + \int_\Omega \big(g'(u)(\hat u_t - u) - g(\hat u_t) + g(u)\big)p\,dx =: \sum_{k=1}^4 \tilde T_k. \end{aligned}$$

仿照 [DHH25, (3.14)] 中的论证，可以证明

$$\tilde T_1 \le t\int_\Omega \mathrm{div}(fV)p\,dx + ct^2 + ct\sup_{0\le\sigma\le t}\|\nabla f\circ T_\sigma - \nabla f\|_{L^2}. \tag{3.9}$$

由于 $A_t = (DT_t)^{-1}(DT_t)^{-\mathsf T}\mathrm{det}DT_t$ 和 $|DV|\le 1$，容易验证

$$I - A_t = t\big(DV + DV^{\mathsf T} - \mathrm{div}\,VI\big) + R_2, \qquad \text{with } |R_2| \le ct^2, \tag{3.10}$$

其中 c 仅取决于 $d_\circ$ 因此

$$\begin{aligned} \tilde T_2 &= \int_\Omega (I - A_t)\nabla p\cdot\nabla u\,dx + \int_\Omega (I - A_t)\nabla p\cdot\nabla(\hat u_t - u)\,dx \\ &= t\int_\Omega \big(DV + DV^{\mathsf T} - \mathrm{div}\,VI\big)\nabla u\cdot\nabla p\,dx + \int_\Omega R_2\nabla u\cdot\nabla p\,dx \\ &\quad + \int_\Omega (I - A_t)\nabla p\cdot\nabla(\hat u_t - u)\,dx \\ &\le t\int_\Omega \big(DV + DV^{\mathsf T} - \mathrm{div}\,VI\big)\nabla u\cdot\nabla p\,dx + c\|\nabla p\|_{L^2}\big(t^2 + t\|\hat u_t - u\|_{H^1}\big), \end{aligned} \tag{3.11}$$

˜这里我们还用到了 (2.10)。为处理 T_3 ，我们使用 (3.3) 和 (2.10) 得到

$$\begin{aligned}\tilde{T_3} &= \int_\Omega g(u)p(1-\det DT_t)\,dx + \int_\Omega (g(\hat{u}_t-g(u))p(1-\det DT_t)\,dx \\ &\le -t\int_\Omega g(u)p\mathrm{div}V\,dx + ct^2 + ct\|\hat{u}_t-u\|_{L^2}\|p\|_{L^2} \\ &\le -t\int_\Omega g(u)p\mathrm{div}V\,dx + ct^2 + c\|\hat{u}_t-u\|_{L^2}^2. \end{aligned} \tag{3.12}$$

最后，由泰勒展开可得

$$g(\hat{u}_t)-g(u) = g'(u)(\hat{u}_t-u) + \int_0^1 (1-s)g''(u+s(\hat{u}_t-u))ds(\hat{u}_t-u)^2$$

因此

$$\begin{aligned}\tilde{T_4} &= -\int_\Omega p\int_0^1 (1-s)g''(u+s(\hat{u}_t-u))ds(\hat{u}_t-u)^2\,dx \\ &\le c\int_\Omega |\hat{u}_t-u|^2|p|\,dx \le c\|\hat{u}_t-u\|_{L^4}^2\|p\|_{L^2} \le c\|\hat{u}_t-u\|_{H^1}^2. \end{aligned} \tag{3.13}$$

汇总上述各项可得

$$\begin{aligned}T_{2,4} \le\ & t\int_\Omega \big(DV+DV^\mathsf{T}-\mathrm{div}\,VI\big)\nabla u\cdot\nabla p\,dx + t\int_\Omega \mathrm{div}(fV)p\,dx \\ & + ct^2 + c\|\hat{u}_t-u\|_{H^1}^2 + ct\sup_{0\le\sigma\le t}\|\nabla f\circ T_\sigma - \nabla f\|_{L^2} - t\int_\Omega g(u)p\mathrm{div}V dx. \end{aligned} \tag{3.14}$$

综上,

$$\begin{aligned}T_2 \le\ & t\int_\Omega j_x(\cdot,u,\nabla u)\cdot V\,dx - t\int_\Omega j_z(\cdot,u,\nabla u)\cdot DV^\mathsf{T}\nabla u \\ & + t\int_\Omega \big(DV+DV^\mathsf{T}-\mathrm{div}\,VI\big)\nabla u\cdot\nabla p\,dx + t\int_\Omega \mathrm{div}(fV)p - t\int_\Omega g(u)p\mathrm{div}V\,dx \\ & + ct^2 + c\|\hat{u}_t-u\|_{H^1}^2 + ct\sup_{0\le\sigma\le t}\|\nabla f\circ T_\sigma-\nabla f\|_{L^2}. \end{aligned} \tag{3.15}$$

最后， T_3 可按照 [DHH25, (3.19)], 进行估计，从而

$$T_3 \le ct\big(t+\|\hat{u}_t-u\|_{H^1}\big) \le ct^2 + c\|\hat{u}_t-u\|_{H^1}^2. \tag{3.16}$$

将估计式 (3.6)、(3.15) 和 (3.16) 代入 (3.5)，并回忆 (2.8)，可得

$$\mathcal{J}(\Omega_t)-\mathcal{J}(\Omega) \le t\mathcal{J}'(\Omega)[V] + ct\big(t+\sup_{0\le\sigma\le t}\|\nabla f\circ T_\sigma-\nabla f\|_{L^2}\big) + c\|\hat{u}_t-u\|_{H^1}^2. \tag{3.17}$$

尚需给出 $\|\hat{}u_t-u\|_{H^1}$ 的界。为此，我们利用 (2.1) 和 (3.4) 并推导

$$\begin{aligned}&\int_\Omega A_t\nabla(\hat{u}_t-u)\cdot\nabla\eta\,dx + \int_\Omega \big(g(\hat{u}_t)-g(u)\big)\eta\,dx \\ &= \int_\Omega (I-A_t)\nabla u\cdot\nabla\eta\,dx + \int_\Omega g(\hat{u}_t)\eta(1-\ \det\ DT_t)\,dx + \int_\Omega \big(f\circ T_t\det DT_t - f\big)\eta\,dx \end{aligned}$$

对所有 $\eta\in H_0^1(\Omega)$ 均成立。由 (3.10) 可知，存在 $0<\delta_2\le\delta_1$ 使得 $A_t\xi\cdot\xi\ge\frac{1}{2}|\xi|^2$ 对所有 $\xi\in\mathbb{R}^d$ 和 $0\le t\le\delta_2$ 均成立。将 $\eta=\hat{}u_t-u$ 代入上述关系，并利用 (3.10) 以及 $g'\ge 0$ 这一事实，我们得到

$$\frac{1}{2}\int_D |\nabla(\hat{u}_t-u)|^2\,dx \le ct\|\nabla u\|_{L^2}\|\nabla(\hat{u}_t-u)\|_{L^2} + ct(1+\|f\circ T_t\det DT_t-f\|_{L^2})\|\hat{u}_t-u\|_{L^2}. \tag{3.18}$$

由 [DHH25, (3.13)] 很容易推得

$$\|f \circ T_t \det DT_t - f\|_{L^2} \le c\|f\|_{H^1},$$

因此，(3.18)结合 Poincar´e 不等式可得 $\|u_t - u\|_{H^1} \le ct$。将此估计代入 (3.17)，并应用假设 $\mathcal{J}'(\Omega)[V] \le -\epsilon$，我们得到

$$\mathcal{J}(\Omega_t) - \mathcal{J}(\Omega) \le \gamma t \mathcal{J}'(\Omega)[V] - (1-\gamma)\epsilon t + ct^2 + ct \sup_{0\le\sigma\le t} \|\nabla f \circ T_\sigma - \nabla f\|_{L^2}. \tag{3.19}$$

仿照 [DHH25] 中 (3.21) 之后的推理，我们可得存在 $0 < \delta \le \delta_2$，使得

$$\sup_{0\le\sigma\le t} \|\nabla f \circ T_\sigma - \nabla f\|_{L^2} \le \frac{1}{2c}(1-\gamma)\epsilon \quad \text{for } 0 \le t \le \delta.$$

因此，对于 $0 \le t \le \delta$，由 (3.19) 可推出

$$\mathcal{J}(\Omega_t) - \mathcal{J}(\Omega) \le \gamma t \mathcal{J}'(\Omega)[V] - (1-\gamma)\epsilon t + ct\delta + \frac{1}{2}t(1-\gamma)\epsilon \le \gamma t \mathcal{J}'(\Omega)[V]$$

此外，若选择 $\delta \le \frac{1}{2c}(1-\gamma)\epsilon$，则有。— □

现在我们可以证明第一个收敛结果。

定理 3.2. 设 $(\Phi^k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ 和 $(\Omega^k = \Phi^k(\Omega))_{k\in\mathbb{N}_0} \subset \mathcal{S}$ 为算法 *2.1* 生成的序列。则当 $k \to \infty$ 时，$\|\mathcal{J}'(\Omega^k)\| \to 0$。

证明。假设 $\|\mathcal{J}'(\Omega^k)\|$ 不收敛于零。那么存在 $\epsilon > 0$ 以及一个子序列 $(\Omega^{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$，使得对所有 $j \in \mathbb{N}$，都有 $\|\mathcal{J}'(\Omega^{k_j})\| \ge \epsilon$。根据算法 2.1 中的步骤 2，令 $V^{k_j} \in W^{1,\infty}_0(D, \mathbb{R}^d)$，使得在 D 中几乎处处有 $|DV^{k_j}| \le 1$，并且

$$\mathcal{J}'(\Omega^{k_j})[V^{k_j}] = -\|\mathcal{J}'(\Omega^{k_j})\| \le -\epsilon \quad \text{for all } j \in \mathbb{N}. \tag{3.20}$$

由引理 3.1 可推得，存在一个与 $j \in \mathbb{N}$ 无关的 $\delta > 0$，使得

$$\mathcal{J}\big((\mathrm{id} + tV^{k_j})(\Omega^{k_j})\big) - \mathcal{J}(\Omega^{k_j}) \le \gamma t \mathcal{J}'(\Omega^{k_j})[V^{k_j}] \qquad \text{for all } 0 \le t \le \delta.$$

因此，在算法的步骤 3 中选取的 Armijo 步长 t_{k_j} 满足：对所有 $j \in \mathbb{N}$，都有 $t_{k_j} \ge \frac{\delta}{2}$。于是，利用 $\Omega^{k_j+1} = (\mathrm{id} + t_{k_j}V^{k_j})(\Omega^{k_j})$ 和 (3.20)，可得

$$\mathcal{J}(\Omega^{k_j}) - \mathcal{J}(\Omega^{k_j+1}) \ge -\gamma t_{k_j} \mathcal{J}'(\Omega^{k_j})[V^{k_j}] \ge \gamma t_{k_j}\epsilon \ge \gamma\frac{\delta}{2}\epsilon \qquad \text{for all } j \in \mathbb{N}.$$

结合该界以及 $\mathcal{J}(\Omega^{k+1}) \le \mathcal{J}(\Omega^k)$ 这一事实，对于 $J \in \mathbb{N}$，我们可推得

$$J\gamma\frac{\delta}{2}\epsilon \le \sum_{j=1}^{J}(\mathcal{J}(\Omega^{k_j}) - \mathcal{J}(\Omega^{k_j+1})) \le \sum_{k=0}^{k_J}(\mathcal{J}(\Omega^k) - \mathcal{J}(\Omega^{k+1})) = \mathcal{J}(\Omega^0) - \mathcal{J}(\Omega^{k_J+1}).$$

因此，当 J 足够大时，我们便得到矛盾，因为（2.2）给出

$$\mathcal{J}(\Omega^k) \ge -\int_{\Omega^k} |j(\cdot, u_k, \nabla u_k)|\, dx \ge -\int_{\Omega^k} \big(\varphi_1 + c_1\big(|u_k|^q + |\nabla u_k|^2\big)\big)\, dx \ge -c\big(1 + (c^*)^q\big)$$

其中，u_k 表示 Ω^k 中方程 (2.1) 的解，并且使用了 (2.10)。 □

3.2 二维中收敛到驻定形状

以下我们将分析范围限定在二维情形，并额外假设参考区域 Ω ˆ具有利普希茨边界。为了考察序列 $(\Omega^k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ （其中 $\Omega^k = \Phi^k(\hat{\Omega})$）的收敛性，我们需要以下概念，参见例如 [HP06]。给定两个开集 $\Omega_1,\Omega_2 \subset D$，其豪斯多夫补距离定义为

$$\rho_H^c(\Omega_1,\Omega_2) := \max_{x\in\bar{D}} |d_{\complement\Omega_1}(x) - d_{\complement\Omega_2}(x)|,$$

¯其中 $d_{\complement\Omega}(x) := \inf\{|x-y| : y \in D\setminus\Omega\}$ 对所有 $x \in D$均成立。若开集序列 $(\Omega^k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ 在豪斯多夫补度量意义下收敛到开集 Ω，即$\rho_H^c(\Omega^k, \Omega) \to 0$，$k\to\infty$，则称该序列收敛。由于我们的优化问题受到椭圆边值问题 (2.1) 的约束，因此我们要求 (2.1) 关于 Ω 在适当意义下具有连续性。为表述相应的概念，我们将 $H_0^1(\Omega)$ 视为$H_0^1(D)$ 的一个闭子空间，并将 $u \in H_0^1(\Omega)$ 中的每个元素与其零延拓 $e_0(u) \in H_0^1(D)$ 对应起来。

定义 3 .1. 设 Ω^k ,Ω是 D的开子集

。*a)* 若$(\Omega^k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ γ–收敛到Ω，即对每个 $f \in H^{-1}(D)$，均有 $e_0(u_k) \to e_0(u)$ 在 $H_0^1(D)$ 中成立。这里， u_k、 u 表示.....的解

$$\int_{\Omega^k} \nabla u_k\cdot\nabla\eta\,dx = \langle f,\eta\rangle \quad \forall\eta\in H_0^1(\Omega^k) \quad and \quad \int_{\Omega} \nabla u\cdot\nabla\eta\,dx = \langle f,\eta\rangle \quad \forall\eta\in H_0^1(\Omega),$$

分别。此外， $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是 H^{-1} 与 H_0^1之间的对偶配对。

b) 我们称$(H_0^1(\Omega^k))_{k\in\mathbb{N}_0}$莫斯科收敛到$H_0^1(\Omega)$，如果

- 对于每个 $u \in H_0^1(\Omega)$，都存在一个序列$(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$，满足 $u_k \in H_0^1(\Omega^k)$，使得 $e_0(u_k) \to e_0(u)$ 在 $H_0^1(D)$中；
- 对于每个序列$(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$，若满足$u_k \in H_0^1(\Omega^k)$ 且 $e_0(u_k) \rightharpoonup v \in H_0^1(D)$，则有$v \in H_0^1(\Omega)$。

The定理 3.3. *(*[*HP18*，命题 *3.5.5*]*)* 设$(\Omega^k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ 是 D的一个开子集序列。*Th* *en* $(\Omega^k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ γ–收敛到Ω，当且仅当$(H_0^1(\Omega^k))_{k\in\mathbb{N}_0}$ 莫斯科收敛到 $H_0^1(\Omega)$。

¯接下来，对于开集 $\Omega \subset D$，我们用 ♯Ω^c 表示 $D\setminus$的连通分支数 Ω.

定理 3.4. *(*˘*Sver* ´*ak,* [˘*Sve93*]*).* 设 $d = 2$和 $(\Omega^k)_{k\in\mathbb{N}_0}$为一个序列，满足 $\rho_H^c(\Omega^k, \Omega) \to 0, k\to\infty$ 其中某个开集 Ω。若 ♯$(\Omega^k)^c$ 一致有界，则 $(\Omega^k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ γ收敛到 Ω。

上述结果对于在形状导数公式中取极限至关重要。除了状态和伴随状态的收敛外，我们还需要示性函数 χ_{Ω^k} 收敛到 χ_Ω。这将由以下结果推出:

定理 3.5. *(Chambolle* 与 *Doveri,* [*CD97*]*).* 设 $d = 2$ 和 $(\Omega^k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ 为一列开集，满足 $\rho_H^c(\Omega^k, \Omega)$ $\to 0, k\to\infty$ 其中某个开集 Ω。假设 $\partial\Omega^k$ 的连通分支数一致有界，且 $\sup_{k\in\mathbb{N}_0}\mathcal{H}^1(\partial\Omega^k) < \infty$。对于 $f \in L^2(D)$，用 $u_\Omega \in H^1(\Omega)$ 表示诺伊曼问题的弱解

$$-\Delta u_\Omega + u_\Omega = f \ in\ \Omega, \quad \frac{\partial u_\Omega}{\partial\nu} = 0 \ on\ \partial\Omega$$

并且令 $\bar{u}_\Omega, \bar{\nabla}u_\Omega$ 为 $u_\Omega, \nabla u_\Omega$ 到 D 的平凡延拓。则 $\bar{u}_{\Omega^k}, \bar{\nabla}u_{\Omega^k}$ 属于 $L^2(D)$ 中的 $\to(\bar{u}_\Omega, \bar{\nabla}u_\Omega)^3$。

接下来，我们来表述本节的主要结果:

定理 *3.6.* 设 $(\Omega^k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ 是由算法 *2.1* 生成的序列，且 $\Omega^k = \Phi^k(\hat{\Omega})$。假设 $(\Phi^k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ 在 $W^{1,\infty}(D,\mathbb{R}^2)$ 中有界。那么，存在一个子序列 $(\Omega^{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$，它收敛到某个形状 $\Omega \in \mathcal{S}$ （$\Omega = \emptyset$ 也有可能），其中收敛是相对于豪斯多夫补度量而言的；并且对于每个 $V \in W^1,_0{}^\infty(D,\mathbb{R}^2)$，都有 $\mathcal{J}'(\Omega)[V] = 0$，即 Ω 是一个驻定形状（形式上令 $\mathcal{J}'(\emptyset) = 0$）。

证明。 我们的假设意味着存在 $M \geq 0$，使得 $\|\Phi^k\|_{W^{1,\infty}(D,\,\mathbb{R}^2)} \leq M$，因此，鉴于 D 的凸性

$$|\Phi^k(x_1) - \Phi^k(x_2)| \leq M|x_1 - x_2| \qquad \text{for all } x_1, x_2 \in \bar{D} \text{ and all } k \in \mathbb{N}_0. \tag{3.21}$$

根据阿尔泽拉-阿斯科利定理，存在一个子序列（仍记为 ( )），以及 (,), 使得一致收敛。定义 Ω := $D \setminus \Phi($ $\bar{D} \setminus \hat{}\Omega)$。显然，Ω 是开集，且 Ω $\subset D$，因此 Ω $\in \mathcal{S}$。在证明余下部分中，假设 Ω $\neq \emptyset$。我们断言

$$\rho_H^c(\Omega^k, \Omega) \leq \|\Phi^k - \Phi\|_{C^0(\bar{D};\mathbb{R}^d)}. \tag{3.22}$$

为此，令 $x \in \bar{D}$，并选取 $y \in \bar{D} \setminus \Omega$，使得 $d_{\complement\Omega}(x) = |x - y|$。由于对所有 $k \in \mathbb{N}_0$，$\Phi^k =$ 在 ∂D 上恒等，因此 $\Phi =$ 在 ∂D 上恒等，从而 $\partial D \subset \Phi(\bar{D} \setminus \hat{}\Omega)$，因此 $\bar{D} \setminus \Omega = \Phi(\bar{D} \setminus \hat{}\Omega)$。于是存在 $z \in \bar{D} \setminus \hat{}\Omega$，使得 $\Phi(z) = y$。由于 Φ^k 是双射，且 $\Omega^k = \Phi^k(\hat{}\Omega)$，我们有$y_k := \Phi^k(z) \in \bar{D} \setminus \Omega^k$，因此

$$d_{\complement\Omega^k}(x) - d_{\complement\Omega}(x) \leq |x - y_k| - |x - y| \leq |y_k - y| = |\Phi^k(z) - \Phi(z)| \leq \|\Phi^k - \Phi\|_{C^0(\bar{D};\mathbb{R}^d)}.$$

交换 Ω^k 与 Ω 的角色，我们可得 (3.22)。因此，序列 $(\Omega^k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ 关于豪斯多夫补度量收敛到 Ω。由引理 2.2，$\Phi^k : \bar{D} \to \bar{D}$ 是一个同胚，且 $\bar{D} \setminus \Omega^k = \bar{D} \setminus \Phi^k(\hat{}\Omega) = \Phi^k(\bar{D} \setminus \hat{}\Omega)$，因此我们推得 $\sharp(\Omega^k)^c = \sharp\hat{}\Omega^c$ 一致有界。于是，定理 3.4 表明 $(\Omega^k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ γ– 收敛到 Ω。根据引理 2.1，我们有

$$\|e_0(u_k)\|_{H^1} + \|e_0(u_k)\|_{L^\infty} \leq c^*, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{3.23}$$

因此存在一个子序列（仍记作原序列）以及 $v \in H_0^1(D) \cap L^\infty(D)$，使得

$$e_0(u_k) \rightharpoonup v \text{ in } H_0^1(D), \quad e_0(u_k) \to v \text{ in } L^2(D), \quad e_0(u_k) \to v \text{ a.e. in } D. \tag{3.24}$$

根据定理 3.3，我们有 $(H_0^1(\Omega^k))_{k\in\mathbb{N}_0}$ Mosco–收敛到 $H_0^1(\Omega)$，这意味着 $v \in H_0^1(\Omega)$。我们的下一个目标是证明 $e_0(u_k) \to v$ 在 $H_0^1(D)$ 中，并且 v 是 Ω 中状态方程 (2.1) 的解。首先，记 $\tilde{u}_k \in H_0^1(\Omega^k)$ 为线性方程

$$\int_{\Omega^k} \nabla\tilde{u}_k \cdot \nabla\eta \, dx = \int_{\Omega^k} (f - g(v))\eta \, dx \quad \forall\, \eta \in H_0^1(\Omega^k).$$

于是，γ–收敛意味着 $e_0(\tilde{u}_k) \to e_0(u)$，在 $H_0^1(D)$ 中，其中 $u \in H_0^1(\Omega)$ 求解

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla\eta \, dx = \int_{\Omega} (f - g(v))\eta \, dx \quad \forall\, \eta \in H_0^1(\Omega). \tag{3.25}$$

差 $\tilde{u}_k - u_k$ 满足

$$\int_{\Omega^k} \nabla(\tilde{u}_k - u_k) \cdot \nabla\eta \, dx = \int_{\Omega^k} (g(u_k) - g(v))\eta \, dx \quad \forall\, \eta \in H_0^1(\Omega^k).$$

将 $\eta := \tilde{u}_k - u_k$ 代入上述关系，并利用序列 $(u_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ 的一致有界性，我们得到

$$\|\tilde{u}_k - u_k\|_{H^1}^2 \leq c\|u_k - v\|_{L^2}\|\tilde{u}_k - u_k\|_{L^2},$$

由此可得 $\|\tilde{u}_k - u_k\|_{H^1} \to 0$。因此，在必要时再取一个进一步的子序列后，

$$e_0(u_k) \to e_0(u) \qquad \text{in } H_0^1(D) \text{ and a.e. in } D, \tag{3.26}$$

因此，根据 (3.24) $e_0(u) = v$，从而由 (3.25) 可知，u 在 Ω 中求解状态方程 (2.1)。接下来我们断言

$$j_u(\cdot, e_0(u_k), \nabla e_0(u_k)) \;\to\; j_u(\cdot, e_0(u), \nabla e_0(u)) \quad \text{in } L^{\frac{q}{q-1}}(D), \tag{3.27}$$

$$j_z(\cdot, e_0(u_k), \nabla e_0(u_k)) \;\to\; j_z(\cdot, e_0(u), \nabla e_0(u)) \quad \text{in } L^2(D, \mathbb{R}^d). \tag{3.28}$$

为证明 (3.28)，令 $f_k := |j_z(\cdot,\ e_0(u_k)\ \nabla e_0(u_k)) - j_z(\cdot,\ e_0(u)\ \nabla e_0(u))|^2$。显然，$f_k \to 0$在 D 中几乎处处成立，而 (2.4) 蕴含

$$f_k \le c\big(\varphi_3^2 + |e_0(u_k)|^q + |\nabla e_0(u_k)|^2 + |e_0(u)|^q + |\nabla e_0(u)|^2\big) =: r_k.$$

我们有 $r_k \to r := c\big(\varphi_3^2 + 2|e_0(u)|^q + 2|\nabla e_0(u)|^2\big)$ 在 D 中几乎处处成立，且当 $k \to \infty$ 时 $\int_D r_k\,dx \to \int_D r\,dx$，因此广义勒贝格控制收敛定理推出 (3.28)。（3.27）中的关系以相同方式证明。

接下来考虑伴随解序列 $(p_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$。与上文类似，我们可以假设存在一个更进一步的子序列以及 $w \in H_0^1(D)$，使得

$$e_0(p_k) \rightharpoonup w \text{ in } H_0^1(D), \quad e_0(p_k) \to w \text{ in } L^2(D), \quad e_0(p_k) \to w \text{ a.e. in } D. \tag{3.29}$$

如上所述，我们的目标是证明 $e_0(p_k) \to w$ 在 $H_0^1(D)$ 中强收敛，并且 w 在 Ω 中满足伴随方程 (2.9)。令 $h \in H^{-1}(D)$ 定义为

$$\langle h, \eta\rangle := \int_D \big(j_u(\cdot, e_0(u), \nabla e_0(u))\eta + j_z(\cdot, e_0(u), \nabla e_0(u)) \cdot \nabla\eta\big)\,dx$$

并将 $\tilde{p}_k \in H_0^1(\Omega^k)$ 的解记为

$$\int_{\Omega^k} \nabla\tilde{p}_k \cdot \nabla\eta\,dx = \langle h, \eta\rangle - \int_{\Omega^k} g'(e_0(u))w\eta\,dx \qquad \forall \eta \in H_0^1(\Omega^k).$$

利用 $(\Omega^k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ γ–收敛到 Ω 这一事实，我们可推得，当 $k \to \infty$ 时，$e_0(\tilde{p}_k) \to e_0(p)$ 于 $H_0^1(D)$ 中，其中 $p \in H_0^1(\Omega)$ 是下列方程的唯一解

$$\int_\Omega \nabla p \cdot \nabla\eta\,dx = \langle h, \eta\rangle - \int_\Omega g'(e_0(u))w\eta\,dx \qquad \forall \eta \in H_0^1(\Omega).$$

另一方面，我们有

$$\begin{aligned}\int_{\Omega^k} \nabla(p_k - \tilde{p}_k) \cdot \nabla\eta\,dx &= \int_{\Omega^k} \big(g'(e_0(u))w - g'(u_k)p_k\big)\eta\,dx \\ &+ \int_{\Omega^k} \big(j_u(\cdot, e_0(u_k), \nabla e_0(u_k)) - j_u(\cdot, e_0(u), \nabla e_0(u))\big)\,\eta\,dx \\ &+ \int_{\Omega^k} \big(j_z(\cdot, e_0(u_k), \nabla e_0(u_k)) - j_z(\cdot, e_0(u), \nabla e_0(u))\big) \cdot \nabla\eta\,dx \qquad \forall \eta \in H_0^1(\Omega^k).\end{aligned}$$

用 $\eta = p_k - \tilde{p}_k$ 检验上述关系，并回顾 (3.26)、(3.27)、(3.28) 和 (3.29)，可推知 $e_0(p_k) - e_0(\tilde{p}_k) \to 0$ 于 $H_0^1(D)$ 中，因此

$$e_0(p_k) \to e_0(p) \qquad \text{in } H_0^1(D), \tag{3.30}$$

因此 $w = e_0(p)$，即 p 满足伴随方程 (2.9)。接下来注意到 $\partial\Omega^k = \Phi^k(\partial\hat{\Omega})$，因此 $\partial\Omega^k$ 的连通分支数与相应的 $\hat{}\ \hat{}\partial\Omega$ 的连通分支数相同，故一致有界。此外，由 (3.21) 以及 Ω 具有利普希茨边界这一事实可得

$$\sup_{k\in\mathbb{N}_0} \mathcal{H}^1(\partial\Omega^k) = \sup_{k\in\mathbb{N}_0} \mathcal{H}^1(\Phi^k(\partial\hat{\Omega})) \le M\mathcal{H}^1(\partial\hat{\Omega}) < \infty.$$

将定理 3.5 应用于 $f \equiv 1$，并注意到 Ω 上相应诺伊曼问题的解由示性函数 χ_Ω 给出，我们可推得

$$\chi_{\Omega^k} \to \chi_\Omega \text{ in } L^2(D) \text{ and a.e. in } D \tag{3.31}$$

在可能进一步取子序列后。对于 $V \in W^1_{,0}{}^\infty(D, \mathbb{R}^2)$，我们有

$$\begin{aligned}\mathcal{J}'(\Omega^k)[V] \quad &= \quad \int_{\Omega^k} \big(DV + DV^\mathsf{T} - \operatorname{div} V I\big)\nabla u_k \cdot \nabla p_k\,dx + \int_{\Omega^k} \operatorname{div}(fV)p_k - g(u_k)p_k \operatorname{div} V\,dx \\ &\quad + \int_{\Omega^k} \Big(j(\cdot, u_k, \nabla u_k)\operatorname{div} V + j_x(\cdot, u_k, \nabla u_k) \cdot V - j_z(\cdot, u_k, \nabla u_k) \cdot DV^\mathsf{T}\nabla u_k\Big)\,dx \\ &=: \quad A_k + B_k + C_k.\end{aligned} \tag{3.32}$$

简记 $A := \int_\Omega \big(DV + DV^\mathsf{T} - \operatorname{div} V I\big)\nabla u \cdot \nabla p \, dx$，我们有

$$
\begin{aligned}
|A_k - A| &= \Big| \int_D \big(DV + DV^\mathsf{T} - \operatorname{div} V I\big)\big(\chi_{\Omega^k}\nabla e_0(u_k)\cdot\nabla e_0(p_k) - \chi_\Omega \nabla e_0(u)\cdot\nabla e_0(p)\big)\Big| \\
&\le C\int_D \chi_{\Omega^k}|\nabla e_0(u_k)\cdot\nabla e_0(p_k) - \nabla e_0(u)\cdot\nabla e_0(p)|\,dx + C\int_D |\chi_{\Omega^k} - \chi_\Omega|\,|\nabla e_0(u)\cdot\nabla e_0(p)|\,dx \\
&\le C\big(\|e_0(u_k) - e_0(u)\|_{H^1}\|e_0(p_k)\|_{H^1} + \|e_0(u)\|_{H^1}\|e_0(p_k) - e_0(p)\|)_{H^1}\big) + C\int_D \zeta_k\,dx \\
&\le C\big(\|e_0(u_k) - e_0(u)\|_{H^1} + \|e_0(p_k) - e_0(p)\|)_{H^1}\big) + C\int_D \zeta_k\,dx,
\end{aligned}
$$

其中我们使用了引理 2.1，并令 $\zeta_k := |\chi_{\Omega^k} - \chi_\Omega||\nabla e_0(u)\cdot\nabla e_0(p)|$。显然，鉴于 (3.31)，$\zeta_k \le 2|\nabla e_0(u)||\nabla e_0(p)| \in L^1(D)$，且 $\zeta_k \to 0$ 在 D 中几乎处处成立。因此，勒贝格控制收敛定理连同 (3.26) 和 (3.30) 表明 $\lim_{k\to\infty} A_k = A$，而类似的论证表明 $\lim_{k\to\infty} B_k = B := \int_\Omega \operatorname{div}(fV)p - g(u)\,p\operatorname{div} V\,dx$。最后，为了考察项 C_k，我们注意到，类似于 (3.28)，可以证明

$$
j(\cdot, e_0(u_k), \nabla e_0(u_k)) \to j(\cdot, e_0(u), \nabla e_0(u)),\ j_x(\cdot, e_0(u_k), \nabla e_0(u_k)) \to j_x(\cdot, e_0(u), \nabla e_0(u)) \ \text{ in } L^1(D),
$$

由此并结合 (3.28)，我们推断

$$
\lim_{k\to\infty} C_k = C := \int_\Omega \Big(j(\cdot, u, \nabla u)\operatorname{div} V + j_x(\cdot, u, \nabla u)\cdot V - j_z(\cdot, u, \nabla u)\cdot DV^\mathsf{T}\nabla u\Big)\,dx.
$$

回顾 (3.32)，我们借助定理 3.2 推出 $\mathcal{J}'(\Omega)[V] = \lim_{k\to\infty}\mathcal{J}'(\Omega^k)[V] = 0$。

□

4 数值实验

最后，我们给出一个数值示例。一方面，该示例表明，定理 3.6 的条件可以通过数值方式验证，并且在我们的示例中也得到满足；另一方面，它表明算法 2.1 中最速下降法的迭代序列可能收敛到空集。这里，我们考虑 $g = \frac{1}{2}\exp$，并设定数据 $f(x) = 1 + g(u^*(x))$，其中 $u^*(x) = \frac{4}{3\pi} - \frac{\|x\|^2}{4}$。我们还设定 $j(x, u, z) = \frac{1}{2}(u - u_d(x))^2$，其中 $u_d(x) = \frac{4}{\pi} - \|x\|^2$。该设定与 DHH25 中的实验 1] 类似，后者考虑了线性状态方程，其中形状泛函的径向对称局部极小值 $B_{\frac{4}{\sqrt{3\pi}}}(0)$ 和 $\emptyset$ 是已知的。然而，对于本文所考虑的半线性情形，我们并不了解非平凡的精确（径向对称）解。但我们预计，解的行为将与线性情形类似。

数值实验使用 DUNE [BBD+21]进行，特别是使用了 Python 绑定 [DNK20, DN18]。初始网格由 pygmsh [Sch22]构建。

在我们的数值实验中，算法 2.1以两个不同的区域作为初始值。我们采用 $\|J'(\Omega_k)\| \le 10^{-3}$作为停止准则。若以 $\Omega^0 = (-0.75, 0.75)^2$, 初始化最速下降法，该算法计算得到的迭代序列 Ω^k 似乎收敛于全局极小值 $\emptyset$，参见图1上排；而以 $\Omega^0 = (-1, 1)^2$ 初始化，则会生成一个序列 $(\Omega^k)_{k\in\mathbb{N}_0}$，它似乎收敛于一个以零为中心、接近线性情形局部极小值$B_{4\sqrt{3}}$的球。$B_{\frac{4}{\pi}}(0)$，参见图1下排。

为展示范数 $\|D\Phi_k\|_{L^\infty}$ 随迭代计数器 k增加而保持有界，在 $\Omega^0 = (-1, 1)^2$ 的情形下，我们采用级联方法：每经过 15 次算法迭代，就对相应区域的三角剖分进行一致细化。图2左侧展示了 4 个细化层级下的结果。随着 k 增加，范数似乎开始趋于稳定，这清楚地表明 $\|D\Phi_k\|_{L^\infty}$ 在细化层级增加时保持有界。在 $\Omega^0 = (-0.75, 0.75)^2$ 的情形下也观察到类似现象，如图2右侧所示，其中展示了细化层级 1–4 下的范数$\|D\Phi_k\|_{L^\infty}$。

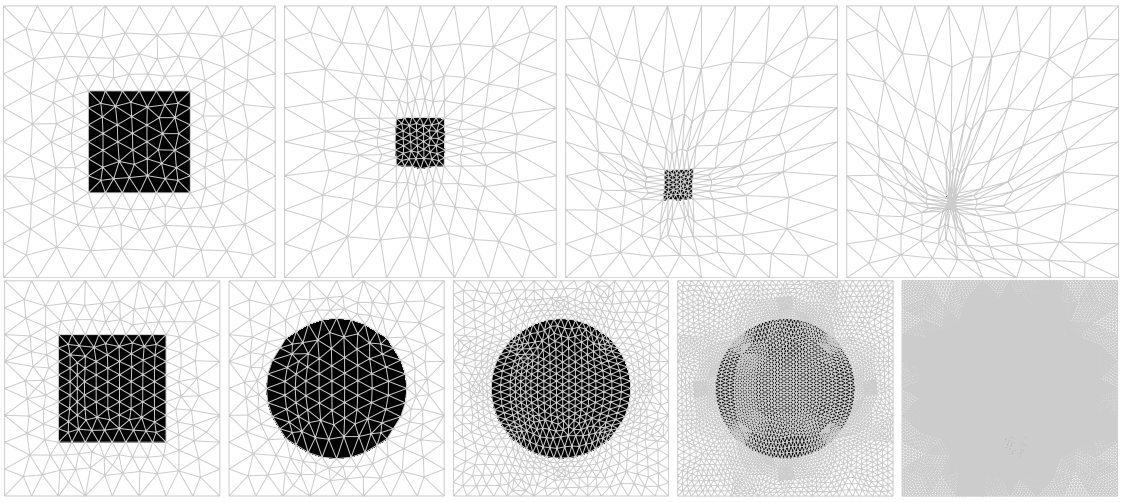

图 1：从 $\Omega^0 = (-0.75,\ 0。75)^2$ （顶行）以及 $\Omega^0 = (-1,\ 1)^2$ （底行）开始时，算法 2.1 的选定迭代结果。黑色区域表示 Ω。顶行展示了区域以及细化层级 1 上的网格。底行从左到右展示了细化层级 1-4 上的区域及其网格。

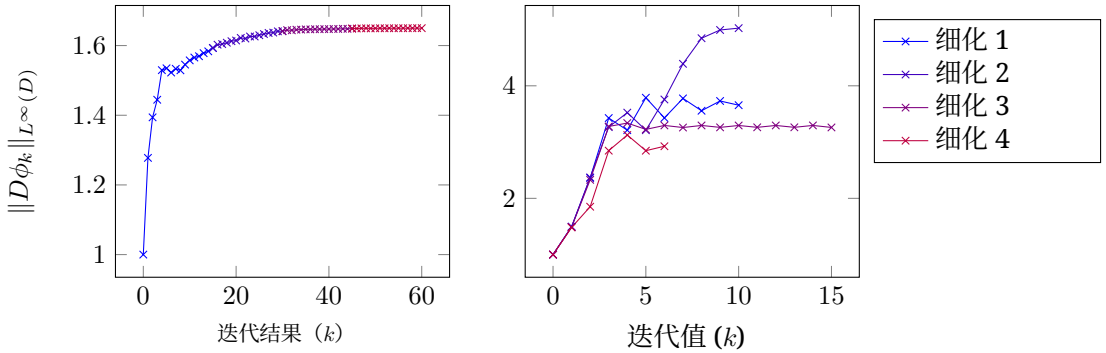

图 2：$\|D\Phi_k\|_{L^\infty(D)}$ 随迭代计数器 k 的变化情况，分别对应 $\Omega_0 = (-1,1)^2$ （非退化情形，左）和 $\Omega_0 = (-0.75,0.75)^2$ （退化情形，右）。在非退化情形中，可以看到 $\|D\Phi_k\|_{L^\infty(D)}$ 趋于平稳。在退化情形中，也可以看到 $\|D\Phi_k\|_{L^\infty(D)}$趋于平稳，或者实验因满足停止准则而终止，亦或两者兼有。

致谢

第二作者和第三作者感谢德国研究基金会在优先计划1962框架下通过项目423457678资助项目非光滑相场方法 ¨用于非定常 ¨流体形状优化。第三作者还感谢德国研究基金会通过项目543959359资助项目基于相场和利普希茨方法的流体动力学形状优化 。

参考文献

[ADJ21] G. Allaire、C. Dapogny和F. Jouve。形状与拓扑优化。载于《微分几何偏微分方程：第二部分》，《数值分析手册》第22卷，第3–124页，荷兰阿姆斯特丹，2021年。爱思唯尔。[BBD+21]P. Bastian、M. Blatt、A. Dedner、N. Dreier、C. Engwer、R. Fritze、Gr¨aser C.、C. Gr¨uninger、D. Kempf、R. Kl¨ofkorn、M. Ohlberger和O. Sander。Dune框架：基本概念与最新进展。《计算机与数学应用》，81:75–112，2021年。数值偏微分方程问题开源软件的开发与应用。[CD97] A. Chambolle和F. Doveri。变化的二维有界开集上诺伊曼线性椭圆问题的连续性。《偏微分方程通讯》，22:811–840，1997年。[DHH24] K. Deckelnick、P. J. Herbert和M. Hinze。在 W^1,∞ 拓扑中采用一阶方法与牛顿型方法的偏微分方程约束形状优化。《优化方法与软件》，0(0):1–27，2024年。[DHH25] K. Deckelnick、P. J. Herbert和M. Hinze。使用 W^1, ∞ 函数的形状优化中最速下降算法的收敛。ESAIM: M2AN，59(3):1505–1529，2025年。[DN18] A. Dedner和M. Nolte。Dune Python模块。arXiv预印本1807.05252，2018年。[DNK20] A. Dedner、M. Nolte和R. Kl¨ofkorn。DUNE-FEM模块的Python绑定，2020年。[DZ11] M. C. Delfour和J. P. Zolesio。形状与几何：度量、分析、微分学与优化，第二版。设计与控制进展。工业与应用数学学会（SIAM，3600 Market Street，6层，费城，PA 19104），2011年。[HP06] A. Henrot和M. Pierre。形状变分与优化：一种几何（g ´eom ´etrique）分析，第48卷。施普林格科学与商业媒体，2006年。[HP18] A. Henrot和M. Pierre。形状变分与优化：几何分析。EMS数学专著丛书。欧洲数学会，2018年。[Sch22] M. Schl¨omer。pygmsh：Gmsh的Python前端，2022年1月。若使用本软件，请按如下方式引用。[ˇSve93] V. ˇSver´ak。论最优形状设计。《纯粹与应用数学杂志》（Journal de math ´ematiques pures et appliqu ´ees），72(6):537–551，1993年。[SZ92] J. Soko-lowski和J.P. Zol´esio。形状优化导论：形状灵敏度分析。《计算机科学讲义》。施普林格出版社，1992年。[VM25] B. Vexler和D. Meidner。椭圆最优控制问题的数值分析，《施普林格计算数学丛书》第67卷。施普林格，尚，2025年。