arXiv:2603.02826v1 [cs.CE] 3 Mar 2026

湿热环境下短纤维增强聚合物各向异性黏弹-黏塑性断裂的相场框架

Behrouz Arash[a, b, *]、Shadab Zakavati[a]、Timon Rabczuk[c]

[a]机械、电气与化学工程系，奥斯陆大都会大学，*Pilestredet 35*，*0166* 奥斯陆，挪威[b]绿色能源实验室，机械、电气与化学工程系，奥斯陆大都会大学（*OsloMet*），挪威奥斯陆[c]结构力学研究所，魏玛包豪斯大学，*Marienstraße 15*，*99423* 魏玛，德国

摘要

本文提出了一个全面的相场框架，用于模拟有限变形条件下短纤维增强聚合物（SFRP）复合材料在湿热环境中的各向异性黏弹-黏塑性断裂。本构模型采用乘法分解，将变形梯度分解为黏弹性和黏塑性分量。本文利用结构张量建立各向异性相场公式，以描述多个纤维族引起的、随取向变化的断裂能。该耦合框架通过水分依赖性溶胀、热膨胀以及对温度和含水量敏感的材料参数，纳入湿热效应。数值研究表明，该框架能够捕捉短纤维增强聚合物中的复杂断裂现象。结果显示，纤维取向从根本上决定了裂纹驱动力的空间分布；在黏性松弛过程中，能量始终沿纤维方向达到最大积累。控制定向断裂阻力的各向异性参数显著影响裂纹路径偏转。湿热劣化会大幅降低峰值载荷和断裂能，其中吸湿和温度升高均会导致力学性能下降。该框架能够捕捉纤维力学性能对整体承载能力和裂纹扩展阻力的影响。这个统一的计算框架推动了对短纤维增强聚合物在真实环境与机械载荷条件下损伤演化的预测建模。Ke

^{y}词语：短纤维 /Epoxy Comp复合材料，Hyg湿热条件，相场模型 g,

*通讯作者电子邮箱地址：behrouza@oslomet.no (Behrouz Arash), timon.rabczuk@uni-weimar.de (Timon Rabczuk)

1. 引言

短纤维增强聚合物复合材料已成为现代工程应用中的关键材料，广泛应用于汽车、航空航天、可再生能源和结构工程领域 [1–3]。尤其是玻璃纤维增强环氧树脂复合材料，凭借其优异的成本效益比和成熟的加工技术，在市场中占据了相当大的份额 [3–5]。然而，在服役载荷条件下，其结构完整性仍在很大程度上取决于对复杂失效机制的理解与预测，尤其是对真实环境和机械载荷场景下断裂起始与扩展的理解和预测。

短纤维增强聚合物的力学响应表现出源于纤维取向分布的显著各向异性。这种微观结构各向异性从根本上不仅支配弹性性能，也支配非弹性变形机制和断裂行为 [3, 6, 7]。此外，聚合物基体表现出由耦合的粘弹性与黏塑性机制所表征的率相关行为 [8–10], ，而湿热条件通过吸湿和热循环引起显著的性能退化 [10–12]。这些多物理现象——力学各向异性、率相关非弹性、环境劣化和损伤演化——之间的相互作用，给预测建模框架带来了严峻挑战。

短纤维增强聚合物的断裂力学传统计算方法主要依赖内聚区模型 [13, 14], 单元删除技术 [15], 和扩展有限元方法 [16, 17]。尽管这些方法在特定情形下已取得成功，但在处理复杂裂纹模式、初始未损伤区域中的裂纹成核以及网格无关的裂纹路径预测时仍存在局限。相场建模已发展为一种断裂力学变分框架，从根本上解决了经典方法的局限 [18–20]。相场方法通过连续损伤场表征对尖锐裂纹界面进行正则化，从而无需显式追踪裂纹，使裂纹能够在完整材料中成核，并提供网格无关解 [21, 22]。该方法已成功扩展至多种复杂断裂现象，包括脆性 [23, 24], 延性 [25, 26], 和内聚断裂 [27, 28], ；近期的发展则纳入了各向异性断裂

能 [29–31], 动力效应 [32], 和多场耦合 [10, 33, 34]。

纤维增强复合材料中的各向异性断裂建模，比各向同性材料面临更多复杂性。断裂能本身具有方向依赖性，反映了受纤维取向影响的优先裂纹扩展路径 [35–37]。已有研究提出了多种各向异性相场公式，利用结构张量捕捉方向相关的断裂抗力 [29, 30],；另一些方法则采用与材料对称性相一致的优先断裂方向 [31, 38]。Dean及其同事 [37, 39, 40] 开发了多相场框架，以同时捕捉层合复合材料中的层内基体开裂和层间分层，并通过界面梯度项将铺层界面处的内聚区行为纳入模型。近期研究还关注了复合材料断裂的多尺度特性，基于均匀化的相场模型将微观尺度的纤维-基体脱粘与宏观裂纹扩展联系起来 [37, 41]。研究人员通过耦合工艺-结构-性能相场框架，探讨了制造诱导的纤维取向分布对断裂模式的影响 [37, 42], ；而复合材料相场模型中的湿热老化效应，则通过环境相关断裂能和刚度退化加以处理 [43, 44]。然而，现有的大多数复合材料各向异性相场模型仅考虑弹性行为或小应变弹塑性行为 [45, 46], ，较少关注聚合物基体在有限变形下特有的黏弹-黏塑耦合响应 [47, 48]。

针对聚合物基材料，多项研究已建立了纳入黏弹性行为的相场框架 [49–52], ，认识到速率相关机制在断裂过程中的关键作用。聚合物断裂的时间相关性已通过多种方法加以刻画，包括与相场损伤耦合的积分公式 [50], ，以及用于高效时间积分的代表性裂纹单元框架 [49]。具体针对聚合物纳米复合材料，Arash及其同事 [9, 53, 54] 提出了相场公式，以研究有限变形下的非线性黏弹性断裂，并通过含湿量相关材料参数和热膨胀耦合考虑湿热条件与纳米颗粒增强效应。他们的工作表明，黏弹性松弛在不同加载速率和环境条件下对断裂韧度具有重要影响。近期实验依据表明，环氧树脂及其复合材料会表现出不可逆黏塑性应变，尤其是在持续加载或热循环条件下 [8, 55]。Arash 等人 [10] 提出了一种有限变形相场公式-

以研究环氧纳米复合材料在循环加载和单体加载下的黏弹–黏塑性断裂行为。

然而，对于各向异性短纤维增强聚合物而言，在相场断裂框架中结合粘弹性和粘塑性机制仍未得到研究。此外，湿热效应是聚合物复合材料耐久性的另一项关键考量 [10, 56]。吸湿会引起溶胀、塑化以及基体主导性能的劣化，而温度波动会影响玻璃化转变行为和时间相关响应 [10, 57]。融入湿力耦合的相场模型已经出现 [10,43], ，但将其扩展到具有全面粘弹-粘塑性本构描述的各向异性纤维增强系统，相关研究仍然有限。尽管在各个方面（即各向异性相场建模、粘弹-粘塑性本构框架、湿热耦合和有限变形力学）已取得长足进展，但文献中仍缺乏一个将这些要素统一起来、适用于短纤维增强聚合物的综合框架。

基于上述考量，本文建立了一个集成式相场框架，用于在有限变形条件下对湿热环境中的短纤维增强聚合物各向异性粘弹-粘塑性断裂进行建模。本文的主要贡献和创新点包括若干关键发展。首先，构建了一个综合本构模型，将变形分解为粘弹性和粘塑性分量，从而扩展了 Arash 等人 [9, 53] 的框架，以纳入黏塑性流动。其次，采用结构张量建立了各向异性相场断裂公式，以捕捉由多个纤维族引起的取向相关断裂能，从而能够预测层状和随机分布纤维结构中的优先裂纹路径。第三，在耦合的粘弹-粘塑性-损伤框架中，通过水分依赖性溶胀、热膨胀和温度敏感材料参数纳入湿热效应。最后，开展了系统的数值研究，展示了该模型捕捉纤维取向、分布及性能对断裂行为的影响、各向异性断裂能在裂纹偏转中的作用，以及湿热老化效应对断裂抗力影响的能力。

本文其余部分安排如下。第 2 节介绍适用于短纤维增强聚合物的粘弹性-粘塑性本构模型，详细阐述运动学、应力分解、纤维族表示以及湿热耦合。第 3 节介绍各向异性相场公式。第 4 节通过具有代表性的数值算例，展示该模型，并考察纤维取向、各向异性参数及湿热

条件对断裂演化的影响。最后，第5节总结主要研究发现，并讨论未来的研究方向。

2. 短纤维增强环氧树脂复合材料的本构模型

本节介绍适用于有限变形下短纤维增强聚合物的黏弹-黏塑性本构模型。该模型能够捕捉基体相的非线性率相关行为，以及多个纤维族所提供的各向异性增强。该本构框架还纳入了湿热效应。图 1 展示了流变模型的示意图。在当前公式中，温度 θ 和含水量 w_w 被视为预先给定的均匀参数，而非独立的场变量。本文不求解热传导或水分扩散的控制方程；相反，假设这些参数在空间上均匀、在时间上恒定，以表示稳态环境条件。该方法在保持计算可行性的同时，能够捕捉湿热劣化的主要机制。

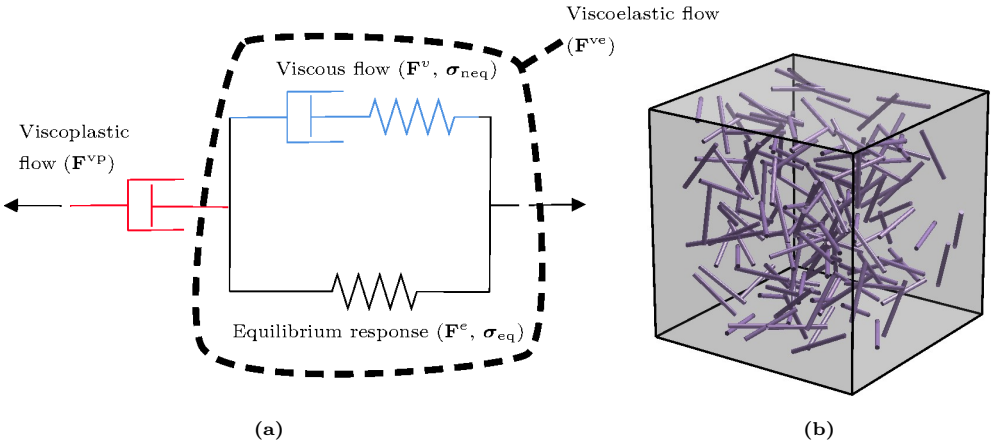


图 1： (a) 黏弹-黏塑性本构模型的一维示意图，以及 (b) 短纤维增强聚合物的代表性体积单元。

2.1. 运动学

总变形梯度可乘法分解为体积部分和偏部分，如下所示：

$$\mathbf{F} = J^{1/3}\bar{\mathbf{F}}, \tag{1}$$

¯其中 $J = \det[\mathbf{F}]$ 和 $\mathbf{F}$ 分别表示体积变形梯度和偏变形梯度。为考虑力学可压缩性、热膨胀和吸湿膨胀，进一步将体积变形分解如下：

$$J = J_m J_\theta J_w, \tag{2}$$

其中

$$J_\theta = 1 + \alpha_\theta(\theta - \theta_0), \tag{3}$$

and

$$J_w = 1 + \alpha_w w_w. \tag{4}$$

此处， α_θ 和 α_w 分别表示热膨胀和湿膨胀系数 [53]，， θ 为绝对温度， $\theta_0 = 296$ K为参考温度， w_w表示含水量。

材料响应被分解为粘弹性和黏塑性分量。黏弹性行为进一步分为平衡（超弹性）和非平衡（粘性）贡献。相应地，偏变形梯度被乘性分解为 [58]

$$\bar{\mathbf{F}} = \bar{\mathbf{F}}^{\mathrm{ve}}\bar{\mathbf{F}}^{\mathrm{vp}}, \tag{5}$$

¯ ¯其中$\mathbf{F}^{\mathrm{ve}}$ 和$\mathbf{F}^{\mathrm{vp}}$ 分别表示粘弹性变形梯度和粘塑性变形梯度。粘弹性变形梯度进一步分解为弹性和粘性部分，如下所示

$$\bar{\mathbf{F}}^{\mathrm{ve}} = \bar{\mathbf{F}}^{e}\bar{\mathbf{F}}^{v}. \tag{6}$$

相应的左柯西-格林变形张量定义为

$$\bar{\mathbf{B}} = \bar{\mathbf{F}}\bar{\mathbf{F}}^{T}, \tag{7}$$

$$\bar{\mathbf{B}}^{e} = \bar{\mathbf{F}}^{e}(\bar{\mathbf{F}}^{e})^{T}, \tag{8}$$

$$\bar{\mathbf{B}}^{\mathrm{ve}} = \bar{\mathbf{F}}^{\mathrm{ve}}(\bar{\mathbf{F}}^{\mathrm{ve}})^{T}. \tag{9}$$

.粘弹性网络的总速度梯度 $\bar{\mathbf{L}}^{\mathrm{ve}} = \dot{\bar{\mathbf{F}}}^{\mathrm{ve}}(\bar{\mathbf{F}}^{\mathrm{ve}})^{-1}$被加性分解为弹性和粘性分量：

$$\bar{\mathbf{L}}^{\mathrm{ve}} = \bar{\mathbf{L}}^{e} + \bar{\mathbf{F}}^{e}\bar{\mathbf{L}}^{v}(\bar{\mathbf{F}}^{e})^{-1} = \bar{\mathbf{L}}^{e} + \tilde{\mathbf{L}}^{v}, \tag{10}$$

其中

$$\tilde{\mathbf{L}}^{v} = \dot{\bar{\mathbf{F}}}^{v}(\bar{\mathbf{F}}^{v})^{-1} = \tilde{\mathbf{D}}^{v} + \tilde{\mathbf{W}}^{v}. \tag{11}$$

˜此处，波浪号（∼）表示中间构形中的量，$\mathbf{D}^v$ 表示黏性变形率，而$\mathbf{W}^v$ 为反对称自旋张量。按照标准做法，˜ [59], 通过指定$\mathbf{W}^v = \mathbf{0}$，使中间构形具有唯一性。

粘弹性流动速率可表示为 [60]

$$\tilde{\mathbf{D}}^v = \frac{\dot{\varepsilon}^v}{\tau_{\text{neq}}} \text{dev}\langle \boldsymbol{\sigma}'_{\text{neq}} \rangle, \tag{12}$$

其中， $\tau_{\text{neq}} = \text{kdev}[\boldsymbol{\sigma}_{\text{neq}}]\text{k}_F$表示驱动应力的弗罗贝尼乌斯范数， $\dot{\varepsilon}^v$ 为黏性应变率， $\boldsymbol{\sigma}'_{\text{neq}} = \mathbf{R}_e^T \boldsymbol{\sigma}_{\text{neq}} \mathbf{R}_e$ 表示松弛构形中作用于黏性分量上的应力。黏性应变率由 Argon 模型定义为 [61]

$$\dot{\varepsilon}^v = \dot{\varepsilon}_0 \exp\left[\frac{\Delta H}{k_b T}\left(\left(\frac{\tau_{\text{neq}}}{\tau_0}\right)^m - 1\right)\right], \tag{13}$$

其中， k_b 为玻尔兹曼常数， $\dot{\varepsilon}_0$ 为前指数因子， ΔH 为活化能，τ_0 为非热屈服应力， m 为指数材料参数，用于描述刚度 [12]的湿度或温度依赖性。

根据式（11）和（12），黏性变形梯度的演化可表示为 by

$$\dot{\bar{\mathbf{F}}}^v = (\bar{\mathbf{F}}^e)^{-1} \frac{\dot{\varepsilon}^v}{\tau_{\text{neq}}} \text{dev}\langle \boldsymbol{\sigma}'_{\text{neq}} \rangle \bar{\mathbf{F}}^{\text{ve}}. \tag{14}$$

.类似地，整体网络的总速度梯度 ¯$\mathbf{L}$ = ¯$\mathbf{F}$(¯$\mathbf{F}$)$^{-1}$可展开为

$$\bar{\mathbf{L}} = \bar{\mathbf{L}}^{\text{ve}} + \bar{\mathbf{F}}^{\text{ve}} \bar{\mathbf{L}}^{\text{vp}} (\bar{\mathbf{F}}^{\text{ve}})^{-1} = \bar{\mathbf{L}}^{\text{ve}} + \tilde{\mathbf{L}}^{\text{vp}}. \tag{15}$$

黏塑性速度梯度可加性分解为对称部分和反对称部分，表示为

$$\tilde{\mathbf{L}}^{\text{vp}} = \dot{\bar{\mathbf{F}}}^{\text{vp}} (\bar{\mathbf{F}}^{\text{vp}})^{-1} = \tilde{\mathbf{D}}^{\text{vp}} + \tilde{\mathbf{W}}^{\text{vp}}, \tag{16}$$

˜其中 $\mathbf{W}^{\text{vp}} = \mathbf{0}$。黏塑性变形率定义为

$$\tilde{\mathbf{D}}^{\text{vp}} = \frac{\dot{\varepsilon}^{\text{vp}}}{\tau_{\text{tot}}} \text{dev}[\boldsymbol{\sigma}], \tag{17}$$

其中 dev$[\boldsymbol{\sigma}]$ 为总柯西应力的偏量部分，且 $\tau_{\text{tot}} = \text{kdev}[\boldsymbol{\sigma}]\text{k}_F$。

为表征黏塑性流动，采用如下简单的唯象表述:

$$\dot{\varepsilon}^{\text{vp}} = \begin{cases} 0 & \text{if } \tau_{\text{tot}} < \sigma_0, \\ a(\varepsilon - \varepsilon_0)^b \dot{\varepsilon} & \text{if } \tau_{\text{tot}} \geq \sigma_0, \end{cases} \tag{18}$$

其中， a、 b和 σ_0 为材料参数， ε_0 为黏塑性流动开始时的应变，以格林应变张量 $\varepsilon = \mathbf{kEk}_F$ 的弗罗贝尼乌斯范数表示，其中

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T\mathbf{F} - \mathbf{I}), \tag{19}$$

且 $\dot{\varepsilon}$ 为应变率，从而使黏塑性流动具有简单的应变率依赖性。

与式 (14) 类似，粘塑性变形梯度的演化方程为

$$\dot{\bar{\mathbf{F}}}^{\mathrm{vp}} = (\bar{\mathbf{F}}^{\mathrm{ve}})^{-1}\frac{\dot{\varepsilon}^{\mathrm{vp}}}{\tau_{\mathrm{tot}}}\mathrm{dev}[\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{tot}}]\bar{\mathbf{F}}. \tag{20}$$

2.2. 隐式时间积分

式 (14) 和 (20) 中$\mathbf{F}^v$ 和$\mathbf{F}^{vp}$ 的演化方程是一阶非线性常微分方程，其右端项取决于当前时刻的柯西应力，而柯西应力本身又是 t_{n+1}处未知内变量的函数。因此，会出现两个数值难题。首先，形如$\mathbf{F}^v_{n+1} = \mathbf{F}^v_n + \Delta t\mathbf{F}^v$ 的简单加法更新无法保持等容约束 $\det(\mathbf{F}^v) = \det(\mathbf{F}^{vp}) = 1$。其次，粘性流动和黏塑性流动方向对 t_{n+1} 处未知应力的隐式依赖，要求在每个时间步内进行迭代求解。

通过对偏内部变形梯度采用指数映射积分器，可解决这两个问题。对于一般的偏速度梯度$\mathbf{L}$ （即$\mathbf{L}^v$ 或$\mathbf{L}^{vp}$），其更新公式为

$$\bar{\mathbf{F}}_{n+1} = \exp\bigl(\Delta t\,\bar{\mathbf{L}}_{n+1}\bigr)\,\bar{\mathbf{F}}_n. \tag{21}$$

由于流动法则规定速度梯度无迹，即 $\mathrm{tr}(\mathbf{L}^v) = \mathrm{tr}(\mathbf{L}^{vp}) = 0$，矩阵指数满足 $\det\bigl(\exp(\Delta t\,\mathbf{L})\bigr) = \exp\bigl(\Delta t\,\mathrm{tr}\,\mathbf{L}\bigr) = 1$。因此，在每次迭代中都能精确保留等容约束。

由于$\mathbf{L}^{n+1}$ 取决于 t_{n+1}时刻的应力，式（21）中的更新是隐式的。我们采用类似返回映射算法 [62]的不动点迭代来求解。该过程详见算法1。算法中出现的旋转张量$\mathbf{R}_e$ 由偏变形梯度弹性部分的极分解得到，

$$\bar{\mathbf{F}}^e = \mathbf{R}_e\,\mathbf{U}_e, \tag{22}$$

其中$\mathbf{R}_e$ 为正规正交，且$\mathbf{U}_e$ 为对称正定。

算法1 对 $[t_n, t_{n+1}]$ 的隐式时间积分，采用不动点迭代。 **1：** 给定：$\mathbf{F}_{n+1}$，$\mathbf{F}_n^v$，$\mathbf{F}_n^{vp}$，$\mathbf{H}_n$，时间步 Δt。 **2：** 初始化：$\mathbf{F}^v = \mathbf{F}_n^v$，$\mathbf{F}^{vp} = \mathbf{F}_n^{vp}$，容差 ε_{tol}，$\texttt{converged} =$ 假。 **3：** 当 $\texttt{converged} =$ 假时执行 **4：** 运动学：$J = \det(\mathbf{F}_{n+1})$，$\bar{\mathbf{F}} = J^{-1/3}\mathbf{F}_{n+1}$，$\bar{\mathbf{F}}^{ve} = \bar{\mathbf{F}}\,(\bar{\mathbf{F}}^{vp})^{-1}$，$\bar{\mathbf{F}}^{e} = \bar{\mathbf{F}}^{ve}(\bar{\mathbf{F}}^{v})^{-1}$。 **5：** 应力：利用本构模型（第 2.3 节）计算柯西应力 $\boldsymbol{\sigma}$。 **6：** 极分解：$\mathbf{F}^e = \mathbf{R}_e\mathbf{U}_e$，其中 $\mathbf{R}_e$ 正交，$\mathbf{U}_e$ 对称。 **7：** 旋转非平衡应力：$\boldsymbol{\sigma}'_{\mathrm{neq}} = \mathbf{R}_e^T\,\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{neq}}\mathbf{R}_e$。 **8：** 粘性流动：$\tau_{\mathrm{neq}} = \mathbf{k}\,\mathbf{dev}[\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{neq}}]\mathbf{k}_F$，$\dot{\epsilon}^v$ 由式(13)得出，$\bar{\mathbf{D}}^v = \dfrac{\dot{\epsilon}^v}{\tau_{\mathrm{neq}}}\mathbf{dev}[\boldsymbol{\sigma}'_{\mathrm{neq}}]$，$\bar{\mathbf{L}}^v = \bar{\mathbf{D}}^v$（无旋流动），$\bar{\mathbf{F}}^v_{\mathrm{new}} = \mathbf{exp}\big(\Delta t\,\bar{\mathbf{L}}^v\big)\,\bar{\mathbf{F}}^v$。 **9：** 黏塑性流动：$\tau_{\mathrm{tot}} = \mathbf{k}\,\mathbf{dev}[\boldsymbol{\sigma}]\mathbf{k}_F$，$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_{n+1}^T\mathbf{F}_{n+1} - \mathbf{I})$，$\epsilon = \mathbf{k}\mathbf{E}\mathbf{k}_F$，**10：** 如果 $\tau_{\mathrm{tot}} \geq \sigma_0$ 则 **11：** $\dot{\epsilon}^{vp}$ 由式(18)得出，$\bar{\mathbf{D}}^{vp} = \dfrac{\dot{\epsilon}^{vp}}{\tau_{\mathrm{tot}}}\mathbf{dev}[\boldsymbol{\sigma}]$，$\bar{\mathbf{L}}^{vp} = \bar{\mathbf{D}}^{vp}$，$\bar{\mathbf{F}}^{vp}_{\mathrm{new}} = \mathbf{exp}\big(\Delta t\,\bar{\mathbf{L}}^{vp}\big)\,\bar{\mathbf{F}}^{vp}$。 **12：** 否则 **13：** $\mathbf{F}^{vp}_{\mathrm{new}} = \mathbf{F}^{vp}$。 **14：** 结束如果 **15：** 收敛性检查：$\Delta^v = \mathbf{k}\mathbf{F}^v_{\mathrm{new}} - \mathbf{F}^v\mathbf{k}_F$，$\Delta^{vp} = \mathbf{k}\mathbf{F}^{vp}_{\mathrm{new}} - \mathbf{F}^{vp}\mathbf{k}_F$。 **16：** 如果 $\Delta^v + \Delta^{vp} < \varepsilon_{tol}$ 则 **17：** $\mathbf{F}^v_{n+1} = \mathbf{F}^v_{\mathrm{new}}$，$\mathbf{F}^{vp}_{n+1} = \mathbf{F}^{vp}_{\mathrm{new}}$，$\texttt{converged} =$ 真。 **18：** 否则 **19：** $\mathbf{F}^v = \mathbf{F}^v_{\mathrm{new}}$，$\mathbf{F}^{vp} = \mathbf{F}^{vp}_{\mathrm{new}}$。 **20：** 结束如果 **21：** 结束当

需要将非平衡柯西应力 $\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{neq}}$ 旋转至中间（无应力）构形，从而得到

$$\boldsymbol{\sigma}'_{\mathrm{neq}} = \mathbf{R}_e^T\,\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{neq}}\,\mathbf{R}_e, \tag{23}$$

与式(12)中的客观流动法则一致，并满足通过将黏性自旋设为零而使中间构型唯一的要求 [63]。该算法保证在收敛时精确满足等容约束 $\det(\bar{\mathbf{F}}^v_{n+1}) = \det(\bar{\mathbf{F}}^{vp}_{n+1}) = 1$，并产生与 t_{n+1} 处的粘性和黏塑性演化方程完全一致的应力状态。

2.3. 亥姆霍兹自由能与应力响应

遵循先前工作 [64], 中提出的加性分解，亥姆霍兹自由能被分解为平衡、非平衡和体积贡献，即

$$\psi(\bar{\mathbf{B}}^{\mathrm{ve}}, \bar{\mathbf{B}}^{e}, J, \phi) = g(\phi)\left[\psi_{\mathrm{eq}}(\bar{\mathbf{B}}^{\mathrm{ve}}) + \psi_{\mathrm{neq}}(\bar{\mathbf{B}}^{e})\right] + \psi_{\mathrm{vol}}(J), \tag{24}$$

其中， $g(\phi)$ 是能量退化函数，用于描述应变能随相场变量 $\phi \in [0,1]$ 的演化。该退化函数满足

$$g(0) = 1, \quad g(1) = 0, \quad g'(\phi) \leq 0, \quad g'(1) = 0. \tag{25}$$

采用满足式 (25) 中条件的单调递减函数，其形式为

$$g(\phi) = (1-\phi)^2 + k, \tag{26}$$

其中， k 是一个较小的正参数，用于确保数值稳定性，并防止完全损伤的材料点 [23] 完全失去刚度。

对于短纤维增强聚合物，平衡与非平衡自由能部分均包含基体和纤维贡献。每个纤维族的应变能密度基于一种能够表征各向异性力学响应的超弹性模型。平衡与非平衡自由能定义为 [3]

$$\rho_0\psi_{\mathrm{eq}} = \sum_{i=1}^{N_f} v_f^{(i)}\left[\psi_{\mathrm{eq}}^{\mathrm{matrix}}(\bar{\mathbf{B}}^{\mathrm{ve}}) + \psi_{\mathrm{eq}}^{\mathrm{fiber}(i)}(\bar{\mathbf{C}}^{\mathrm{ve}}, \mathbf{a}_0^{(i)})\right], \tag{27}$$

$$\rho_0\psi_{\mathrm{neq}} = \sum_{i=1}^{N_f} v_f^{(i)}\left[\psi_{\mathrm{neq}}^{\mathrm{matrix}}(\bar{\mathbf{B}}^{e}) + \psi_{\mathrm{neq}}^{\mathrm{fiber}(i)}(\bar{\mathbf{C}}^{e}, \mathbf{a}_0^{(i)})\right], \tag{28}$$

其中， N_f 表示纤维族的数量， $v_f^{(i)}$ 表示第 i 个纤维族的体积分数， $\mathbf{a}_0^{(i)}$ 是用于定义参考构形中纤维方向的单位向量， $\bar{\mathbf{C}}^{\mathrm{ve}} = (\bar{\mathbf{F}}^{\mathrm{ve}})^T\bar{\mathbf{F}}^{\mathrm{ve}}$和 $\bar{\mathbf{C}}^{e} = (\bar{\mathbf{F}}^{e})^T\bar{\mathbf{F}}^{e}$ 是右柯西-格林变形张量， ρ_0 为初始密度。自由能密度同时采用左、右柯西-格林张量表示，以体现各项贡献不同的物理来源。基体材料具有各向同性，因此自然可用当前构形中的左柯西-格林张量 $\mathbf{B}$ 来描述。纤维增强体的方向依赖性由参考构形定义，因此需要使用右 Cauchy-Green 张量 $\mathbf{C}$ ，因为纤维伸长平方应由 $\bar{I}_4^{(i)} = \mathbf{a}_0^{(i)} \cdot \bar{\mathbf{C}}\mathbf{a}_0^{(i)}$ 正确表示。

基质贡献采用新胡克超弹性模型表示为

$$\psi_{\mathrm{eq/neq}}^{\mathrm{matrix}} = \frac{1}{2}\mu_{\mathrm{eq/neq}}(\theta, w_w)(\mathrm{tr}[\bar{\mathbf{B}}^{\mathrm{ve/e}}] - 3), \tag{29}$$

其中， μ_{eq} 和 μ_{neq} 是依赖于温度和含水量的剪切模量。温度依赖性通过修正的北川模型 [65] 描述:

$$\mu_{\mathrm{eq}}(\theta, w_w) = \mu_{\mathrm{eq}}^0[2 - \exp(\alpha(\theta - \theta_0))][1 - 9.5w_w + 0.057w_w^2], \tag{30}$$

$$\mu_{\mathrm{neq}}(\theta, w_w) = \mu_{\mathrm{neq}}^0[2 - \exp(\alpha(\theta - \theta_0))][1 - 9.5w_w + 0.057w_w^2], \tag{31}$$

其中， μ_{eq}^0 和 μ_{neq}^0 是室温和干燥条件下的参考剪切模量，α 是温度敏感性参数。

纤维贡献基于一种考虑纤维拉伸和剪切的应变能函数。每个纤维族的纤维能用纤维特定不变量表示为

$$\begin{aligned}\psi_{\mathrm{fiber}}^{(i)} =& \frac{1}{2}\mu\Big[(v_m + v_f^{(i)} f(\bar{I}_4^{(i)}))(\bar{I}_4^{(i)} + 2(\bar{I}_4^{(i)})^{-1/2} - 3) \\ &+ g_1(\bar{I}_4^{(i)})(\bar{I}_5^{(i)} - (\bar{I}_4^{(i)})^2)\bar{I}_4^{(i)-1} + g_2(\bar{I}_4^{(i)})(\bar{I}_1 - (\bar{I}_5^{(i)} + 2(\bar{I}_4^{(i)})^{1/2})\bar{I}_4^{(i)-1})\Big],\end{aligned} \tag{32}$$

其中， $v_m = 1 - \sum_{i=1}^{N_f} v_f^{(i)}$ 是基体体积分数， μ 是剪切模量（即 μ_{eq} 或 μ_{neq}），纤维特定不变量为

$$\bar{I}_4^{(i)} = \mathbf{a}_0^{(i)} \cdot \bar{\mathbf{C}}\mathbf{a}_0^{(i)}, \tag{33}$$

$$\bar{I}_5^{(i)} = \mathbf{a}_0^{(i)} \cdot \bar{\mathbf{C}}^2\mathbf{a}_0^{(i)}, \tag{34}$$

分别表示纤维伸长平方和高阶纤维不变量。

式（32）中的函数 f、 g_1 和 g_2 定义为

$$f(\bar{I}_4) = a_1 + a_2 \exp\big[a_3(\bar{I}_4 - 1)\big], \tag{35}$$

$$g_1(\bar{I}_4) = \frac{(1 + v_f^{(i)})f(\bar{I}_4) + (1 - v_f^{(i)})}{(1 - v_f^{(i)})f(\bar{I}_4) + 1 + v_f^{(i)}}, \tag{36}$$

$$g_2(\bar{I}_4) = \frac{(1 + 0.4v_f^{(i)})f(\bar{I}_4) + 0.4(1 - v_f^{(i)})}{(1 - v_f^{(i)})f(\bar{I}_4) + 0.4 + v_f^{(i)}}, \tag{37}$$

其中， a_1、 a_2和 a_3 是表征纤维响应的材料参数。

自由能的体积部分定义为

$$\rho_0\psi_{\mathrm{vol}} = \frac{1}{2}k_v\left(\frac{J_m^2 - 1}{2} - \ln[J_m]\right), \tag{38}$$

其中，体积模量 k_v 随温度和含水量变化，定义为

$$k_v = k_v^0[2 - \exp(\alpha(\theta - \theta_0))][1 - 9.5w_w + 0.057w_w^2], \tag{39}$$

其中 k_v^0 为参考体积模量。

柯西应力由自由能推导得出:

$$\boldsymbol{\sigma} = g(\phi)(\boldsymbol{\sigma}_{\text{dev}} + \boldsymbol{\sigma}_{\text{vol}}), \tag{40}$$

其中，偏应力为

$$\boldsymbol{\sigma}_{\text{dev}} = J^{-1}\sum_{i=1}^{N_f} v_f^{(i)}\left[\boldsymbol{\sigma}_{\text{matrix}} + \boldsymbol{\sigma}_{\text{fiber}}^{(i)}\right], \tag{41}$$

体积应力为

$$\boldsymbol{\sigma}_{\text{vol}} = \frac{1}{2}k_v J^{-1}\left(J_m - \frac{1}{J_m}\right)\mathbf{I}. \tag{42}$$

偏应力中的基体贡献由新胡克模型给出:

$$\boldsymbol{\sigma}_{\text{matrix}} = \mu_{\text{eq}}\text{dev}[\bar{\mathbf{B}}^{\text{ve}}] + \mu_{\text{neq}}\text{dev}[\bar{\mathbf{B}}^{e}], \tag{43}$$

其中，$\text{dev}[\cdot]$ 表示偏量部分。

每个纤维族对其应力的贡献源自应变能函数，并涉及对纤维不变量的求导。纤维应力贡献为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}_{\text{fiber}}^{(i)} =& \frac{2}{J}\Big[W_1^{(i)}\text{dev}[\bar{\mathbf{B}}] + W_4^{(i)}\bar{I}_4^{(i)}(\mathbf{a}\otimes\mathbf{a} - \frac{1}{3}\mathbf{I}) \\ &+ W_5^{(i)}\bar{I}_4^{(i)}(\mathbf{a}\otimes\bar{\mathbf{B}}\mathbf{a} + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{a}\otimes\mathbf{a} - \frac{2}{3}\bar{I}_5^{(i)}\mathbf{I})\Big],\end{aligned} \tag{44}$$

其中，$\mathbf{a} = \bar{\mathbf{F}}\mathbf{a}_0^{(i)}/(J^{2/3}\bar{I}_4^{(i)})^{1/2}$是当前纤维方向，系数 $W_{(i)\,1}$、 $W_4^{(i)}$ 和 $W_5^{(i)}$ 为

$$W_1^{(i)} = \frac{1}{2}\mu g_2, \tag{45}$$

$$\begin{aligned}W_4^{(i)} =& \frac{1}{2}\mu\Big[v_f^{(i)}f'(\bar{I}_4 + 2(\bar{I}_4)^{-1/2} - 3) + (v_m + v_f^{(i)}f)(1 - (\bar{I}_4)^{-3/2}) \\ &- g_1(\bar{I}_5(\bar{I}_4)^{-2} + 1) + g_2(\bar{I}_5(\bar{I}_4)^{-2} + (\bar{I}_4)^{-3/2}) \\ &+ \frac{(\bar{I}_5 - (\bar{I}_4)^2)}{2\bar{I}_4}g_1' + \frac{1}{2}\left(\bar{I}_1 - \frac{\bar{I}_5 + 2(\bar{I}_4)^{1/2}}{\bar{I}_4}\right)g_2'\Big],\end{aligned} \tag{46}$$

$$W_5^{(i)} = \frac{\mu}{2\bar{I}_4}(g_1 - g_2), \tag{47}$$

其中，撇号表示对 $\bar{I}_4^{(i)}$ 求导。

2.4. 纤维取向与多个纤维族

在短纤维增强复合材料中，纤维通常以不同取向分布于整个材料中。为以计算上可行的方式表征这种取向分布，采用二阶取向张量 $\mathbf{A}$ 表示纤维微观结构。

二阶取向张量通过对代表性体积单元中的所有单根纤维进行平均构造为

$$\mathbf{A} = \sum_{k=1}^{N_{\text{fibers}}} w_k \, \mathbf{a}_k \otimes \mathbf{a}_k, \tag{48}$$

其中， N_{fibers} 是RVE中的纤维总数， $\mathbf{a}_k$ 是沿第 k根纤维方向的单位向量， $w_k = 1/N_{\text{fibers}}$ 是相等的权重因子，满足$\sum_{k=1}^{N_{\text{fibers}}} w_k = 1$。该张量表示材料均匀化后的内部取向状态，并刻画由纤维分布引起的各向异性。

取向张量$\mathbf{A}$ 是对称的半正定张量，其特征值反映了沿不同空间方向的取向程度。对于三维空间中完全随机的（各向同性）纤维分布， $\mathbf{A} = \frac{1}{3}\mathbf{I}$；而对于沿单一方向$\mathbf{n}$完全取向的纤维，$\mathbf{A} = \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$。

为将纤维取向纳入本构模型，采用特征值分解对取向张量进行分解，得到

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n_{\text{dim}}} \lambda_i \, \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i, \tag{49}$$

其中， λ_i 为特征值， $\mathbf{n}_i$ 为对应的正交归一特征向量， n_{dim}为空间维度（平面问题为2，一般三维问题为3）。这些特征值满足 $\sum_{i=1}^{n_{\text{dim}}} \lambda_i = 1$ ，表示沿各主方向的纤维相对浓度。

特征向量$\mathbf{n}_i$ 定义了主纤维方向，它们代表材料中的主要取向轴。这种分解有效地将复杂的多重纤维取向分布简化为少数几个主纤维族，每个主纤维族均由一个主方向表征：$\mathbf{a}_0^{(i)} = \mathbf{n}_i / \mathbf{k}\mathbf{n}_i\mathbf{k}$，以及一个取向参数 λ_i。

给定复合材料中的总纤维体积分数 v_f 以及取向张量分解得到的特征值，分配给每个主纤维族的体积分数

确定为

$$v_f^{(i)} = v_f \cdot \frac{\lambda_i}{\sum_{j=1}^{N_f} \lambda_j}, \tag{50}$$

其中， $v_f^{(i)}$ 表示第 i个纤维族的有效体积分数。该分布确保

$$\sum_{i=1}^{N_f} v_f^{(i)} = v_f, \tag{51}$$

同时保持材料中的总纤维含量不变。

基体体积分数随后计算为

$$v_m = 1 - \sum_{i=1}^{N_f} v_f^{(i)} = 1 - v_f. \tag{52}$$

这种纤维族分解对本构模型有几项重要意义。首先，材料响应呈现方向依赖性：沿特征值较大的主纤维方向，刚度和强度会得到增强 λ_i。其次，模型无需显式追踪数千根取向各异的单根纤维，而是通过少数几个主纤维族（2 或 3 个）捕捉关键的各向异性，在保留主要力学特性的同时显著降低计算成本。第三，该框架可表示任意纤维取向分布，从完全随机状态到高度定向排列状态（其中一个特征值趋近于 1，其余特征值趋近于 0），以及具有部分定向排列的中间状态。最后，根据式（27）和式（28），总应变能密度通过对各纤维族加权求和计算，每个纤维族的贡献与其体积分数成正比 $v_f^{(i)}$。因此，取向张量方法提供了一个严谨的均匀化框架，衔接微观纤维分布与宏观各向异性本构行为，从而能够准确预测短纤维增强聚合物复合材料的方向相关力学响应和断裂特性。

3. 有限变形下的相场模型

为评估所提出本构模型的预测能力，我们将其纳入短纤维增强聚合物复合材料的相场断裂框架中。本节介绍有限变形下准脆性断裂的变分相场公式，以及连续介质力学增量格式和有限元方程。

3.1. 问题场描述

耦合位移$\mathbf{u}$ 和相场变量 ϕ 的边值问题空间形式的强形式可写为

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega_t, \tag{53}$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \quad \text{on } \Gamma_t, \tag{54}$$

$$\frac{G_c}{l_0}\phi - G_c l_0 \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\hat{\mathbf{A}} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}\phi) = -g'(\phi)H \quad \text{in } \Omega_t, \tag{55}$$

$$\nabla_{\mathbf{x}}\phi \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{on } \Gamma_t, \tag{56}$$

其中， $\boldsymbol{\sigma}$ 为柯西应力， l_0 为控制弥散裂纹宽度的长度尺度参数，$\mathbf{b}$ 表示空间构形中的体力向量，$\mathbf{n}$ 为边界 Γ_t 上指向外侧的单位法向量，边界 Γ_t 围成物体 Ω_t，$\mathbf{t}$ 为牵引力。张量 $\hat{}\mathbf{A}$ 为各向异性张量，用于描述由纤维取向导致的裂纹抗力方向依赖性。该张量定义为 [22]

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{I} + \hat{\alpha}\mathbf{A}, \tag{57}$$

其中，$\mathbf{I}$ 为单位张量，$\hat{}\alpha$ 为控制各向异性程度的无量纲参数。参数 $\hat{}\alpha$ 量化纤维取向对裂纹扩展阻力的影响程度，当 $\hat{}\alpha = 0$ 时，可恢复各向同性相场模型。

式（55）中的各向异性公式确保裂纹优先沿垂直于纤维排列方向的方向扩展，这反映了沿纤维方向的增强韧性。从物理上看，与平行于纤维扩展相比，裂纹横穿纤维时需要更多能量。取向张量特征值较大的方向上纤维排列更为一致，因此这些方向上的裂纹抗力最高。

能量释放率 G_c 表示形成单位面积裂纹表面所需的临界能量。对于纤维增强复合材料，这一材料参数可通过实验断裂试验进行标定，且可能取决于纤维含量和取向。

3.2. 基于能量的裂纹驱动力

为考虑纤维增强复合材料各向异性且与速率相关的断裂行为，采用基于能量的裂纹驱动力。裂纹驱动力 $\mathbf{H}$ 定义为

加载历史中达到的最大应变能密度，定义为

$$\mathcal{H}(t) = \max_{\tau \in [0,t]} \mathcal{Y}(\tau), \tag{58}$$

其中，Y 表示驱动裂纹扩展的应变能密度。应变能密度由自由能中的平衡贡献和非平衡贡献计算得出：

$$\mathcal{Y} = \psi_{\mathrm{eq}}(\bar{\mathbf{B}}^{\mathrm{ve}}) + \psi_{\mathrm{neq}}(\bar{\mathbf{B}}^{e}) + \langle \psi_{\mathrm{vol}}(J) \rangle_{+}, \tag{59}$$

其中，$\mathbf{h}\cdot\mathbf{i}_{+} = (\cdot + |\cdot|)/2$ 表示正部算子。体积能的正部用于区分拉伸和压缩状态，从而防止在纯压缩载荷作用下裂纹增长。

体积能贡献根据雅可比分解为：

$$\langle \psi_{\mathrm{vol}}(J) \rangle_{+} = \begin{cases} \psi_{\mathrm{vol}}(J) & \text{if } J \geq 1, \\ 0 & \text{if } J < 1, \end{cases} \tag{60}$$

其中，$J \geq 1$ 对应拉伸（体积膨胀），$J < 1$ 对应压缩（体积收缩）。

该公式确保：(1) 裂纹扩展由弹性（平衡）和粘性（非平衡）能量贡献共同驱动；(2) 断裂仅在拉伸载荷条件下发生；(3) 加载历史中达到的最大能量通过历史变量 H 得以保留，从而确保裂纹增长的不可逆性。

方程（61）中的历史变量H确保相场变量正向演化，从而防止裂纹愈合。

$$\mathcal{H}^{n+1} = \max(\mathcal{H}^{n}, \mathcal{Y}^{n+1}), \tag{61}$$

其中 n 表示时间步。

3.3. 弱形式与有限元离散

为获得控制方程的弱形式，采用加权残值法。将式（53）和（55）乘以权函数，并在 Ω_t 上积分。利用散度定理并施加边界条件，可推导出控制方程的弱形式：

$$\int_{\Omega_t} \boldsymbol{\sigma} : \nabla_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\eta}_u \, dv - \int_{\Omega_t} \rho_t \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\eta}_u \, dv - \int_{\Gamma_t} \bar{\mathbf{t}} \cdot \boldsymbol{\eta}_u \, da = 0 \quad \forall \boldsymbol{\eta}_u \in H_0^1(\Omega), \tag{62}$$

and

$$\int_{\Omega_t} \left[J^{-1} g'(\phi) \mathcal{H} \eta_\phi + J^{-1} \frac{G_c}{l_0} \phi \eta_\phi + J^{-1} G_c l_0 \nabla_{\mathbf{x}} \phi \cdot \hat{\mathbf{A}} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \eta_\phi \right] dv = 0 \quad \forall \eta_\phi \in H_0^1(\Omega). \tag{63}$$

3.4. 一致增量-迭代格式

假设物体仅受变形无关载荷作用，方程（62）和（63）可用外部和内部节点力表示为

$$\mathbf{r}^u = \mathbf{f}^u_{\text{int}} - \mathbf{f}^u_{\text{ext}} = \mathbf{0}, \tag{64}$$

$$\mathbf{r}^\phi = \mathbf{f}^\phi_{\text{int}} - \mathbf{f}^\phi_{\text{ext}} = \mathbf{0}, \tag{65}$$

其中

$$\mathbf{f}^u_{\text{int}} = \int_{\Omega_t} \boldsymbol{\sigma} : \nabla_x \boldsymbol{\eta}_u \, dv, \tag{66}$$

$$\mathbf{f}^u_{\text{ext}} = \int_{\Omega} \rho_t \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\eta}_u \, dv + \int_{\Gamma_t} \bar{\mathbf{t}} \cdot \boldsymbol{\eta}_u \, da, \tag{67}$$

$$\mathbf{f}^\phi_{\text{int}} = \int_{\Omega_t} \left[J^{-1} g'(\phi) \mathcal{H} \eta_\phi + J^{-1} \frac{G_c}{l_0} \phi \eta_\phi + J^{-1} G_c l_0 \nabla_x \phi \cdot \hat{\mathbf{A}} \cdot \nabla_x \eta_\phi \right] dv, \tag{68}$$

$$\mathbf{f}^\phi_{\text{ext}} = \mathbf{0}. \tag{69}$$

将方程（64）和（65）在迭代 $i+1$ 处相对于前一次迭代 i 进行线性化，可得到一致切线刚度

$$\mathbf{r}^u_{i+1} = \mathbf{r}^u_i + \Delta \mathbf{r}^u = \mathbf{0}, \tag{70}$$

$$\mathbf{r}^\phi_{i+1} = \mathbf{r}^\phi_i + \Delta \mathbf{r}^\phi = \mathbf{0}, \tag{71}$$

其中

$$\Delta \mathbf{r}^u = D_u \mathbf{r}^u_i \cdot \Delta \mathbf{u} + D_\phi \mathbf{r}^u_i \cdot \Delta \phi, \tag{72}$$

$$\Delta \mathbf{r}^\phi = D_u \mathbf{r}^\phi_i \cdot \Delta \mathbf{u} + D_\phi \mathbf{r}^\phi_i \cdot \Delta \phi. \tag{73}$$

式(62)和式(63)在空间列式中的线性化得到

$$\int_{\Omega_t} \left(\nabla_x \Delta \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla_x \boldsymbol{\eta}_u + \nabla^s_x \boldsymbol{\eta}_u : \hat{\mathbf{c}} : \nabla^s_x \Delta \mathbf{u} \right) dv + \int_{\Omega_t} \left(\nabla^s_x \boldsymbol{\eta}_u : D_\phi \boldsymbol{\sigma} \cdot \Delta \phi \right) dv = \mathbf{f}^u_{\text{ext}} - \mathbf{f}^u_{\text{int},i}, \tag{74}$$

and

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega_t} J^{-1} g'(\phi) 2 \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{g}} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \Delta \mathbf{u}\, \eta_\phi \, dv \\ &+ \int_{\Omega_t} \left[J^{-1} g''(\phi) \mathcal{H} \Delta\phi\, \eta_\phi + J^{-1} \frac{G_c}{l_0} \Delta\phi\, \eta_\phi + J^{-1} G_c l_0 \nabla_{\mathbf{x}} \Delta\phi \cdot \hat{\mathbf{A}} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \eta_\phi \right] dv \\ &= \mathbf{f}^{\phi}_{\text{ext}} - \mathbf{f}^{\phi}_{\text{int},i},\end{aligned} \tag{75}$$

其中$\hat{\mathbf{c}}$ 为空间切线模量，定义为材料切线 $\partial_{\mathbf{S}}\partial_{\mathbf{C}}$的皮奥拉前推，$\mathbf{S}$为第二皮奥拉-基尔霍夫应力，且 $\partial_{\underline{(\cdot)}}\partial_{\mathbf{g}} = \mathbf{F}\frac{\partial(\cdot)}{\partial}_{\mathbf{C}}\mathbf{F}^T$。

3.5. 有限元公式

线性化平衡方程和相场方程组装成如下系统

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^{uu}_i & \mathbf{K}^{u\phi}_i \\ \mathbf{K}^{\phi u}_i & \mathbf{K}^{\phi\phi}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_{i+1} \\ \Delta \boldsymbol{\phi}_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}^{u}_{\text{ext}} \\ \mathbf{f}^{\phi}_{\text{ext}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{f}^{u}_{\text{int},i} \\ \mathbf{f}^{\phi}_{\text{int},i} \end{bmatrix}, \tag{76}$$

其中

$$\mathbf{K}^{uu}_i = \int_\Omega \mathbf{B}^T_u \hat{\mathbf{c}} \mathbf{B}_u \, d\Omega + \int_\Omega \mathbf{B}^T_u \boldsymbol{\sigma} \mathbf{B}_u \, d\Omega, \tag{77}$$

$$\mathbf{K}^{u\phi}_i = \int_\Omega \mathbf{B}^T_u \left(\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \phi} \right) \mathbf{N}_\phi \, d\Omega, \tag{78}$$

$$\mathbf{K}^{\phi u}_i = \int_\Omega \mathbf{N}^T_\phi J^{-1} g'(\phi) 2 \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{g}} \mathbf{B}_u \, d\Omega, \tag{79}$$

$$\mathbf{K}^{\phi\phi}_i = \int_\Omega J^{-1} \left[\mathbf{N}^T_\phi \left(g''(\phi)\mathcal{H} + \frac{G_c}{l_0} \right) \mathbf{N}_\phi + G_c l_0 \mathbf{B}^T_\phi \hat{\mathbf{A}} \mathbf{B}_\phi \right] d\Omega, \tag{80}$$

其中 $\mathbf{N}_u$ 和 $\mathbf{N}_\phi$ 分别为插值$\mathbf{u}$ 和 ϕ节点值的形函数矩阵，而$\mathbf{B}_u$ 和 $\mathbf{B}_\phi$ 分别为位移场和相场的梯度算子。

采用交错算法 [20]求解耦合相场断裂问题。在该方法中，每个载荷步内依次求解位移方程和相场方程。

3.6. 基于雅曼-扎雷姆巴应力率的一致切线模量

在有限变形分析中处理大转动时，应力张量的物质导数在叠加刚体运动下无法正确变换。为确保应力率具有客观性，公式采用雅曼-扎雷姆巴率。空间

有限元弱形式在式（77）中所需的切线模量 $\hat{\mathbf{c}}$，定义为材料切线 $\partial\mathbf{S}/\partial\mathbf{C}$ 的 Piola 推前，

$$\hat{\mathbf{c}} = \frac{1}{J}\,(\mathbf{F}\,\overline{\otimes}\,\mathbf{F}) : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{C}} : \left(\mathbf{F}^T\,\overline{\otimes}\,\mathbf{F}^T\right). \tag{81}$$

对于复杂的粘弹性-粘塑性-损伤模型，难以对式（81）进行闭式求值。因此，$\hat{\mathbf{c}}$ 分两步求得：首先，通过有限差分 [66]以数值方式计算 Jaumann 切线$\mathbf{C}^{\sigma J}$ ；然后，利用下文推导的修正项，根据$\mathbf{C}^{\sigma J}$ 解析地恢复$\hat{\mathbf{c}}$ 。

柯西应力的 Jaumann 率表示为

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{W}\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}\mathbf{W}^T = \mathbf{C}^{\sigma J} : \mathbf{D}, \tag{82}$$

其中，$\mathbf{D}$ 为变形率张量，$\mathbf{W}$ 为自旋张量。为以数值方式计算$\mathbf{C}^{\sigma J}$，对变形梯度的各分量施加微小扰动。对于 (i, j) 分量上的扰动，

$$\Delta\mathbf{F}_{ij} = \frac{\epsilon}{2}\big(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j\,\mathbf{F} + \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i\,\mathbf{F}\big), \tag{83}$$

其中，$\epsilon = 10^{-5}$ 为扰动参数，$\mathbf{e}_i$ 为笛卡尔基向量。相应的自旋张量和变形率张量扰动为

$$\Delta\mathbf{W}_{ij} = \mathbf{0}, \tag{84}$$

$$\Delta\mathbf{D}_{ij} = \frac{\epsilon}{2}\big(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i\big). \tag{85}$$

扰动后的变形梯度及由此产生的应力增量为

$$\hat{\mathbf{F}}_{ij} = \mathbf{F} + \Delta\mathbf{F}_{ij}, \tag{86}$$

$$\Delta\boldsymbol{\sigma} \approx \boldsymbol{\sigma}\left(\hat{\mathbf{F}}_{ij}\right) - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{F}). \tag{87}$$

由于 $\Delta\mathbf{W}_{ij} = \mathbf{0}$，式（82）的线性化增量形式化简为 $\Delta\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^{\sigma J} : \Delta\mathbf{D}$，因此$\mathbf{C}^{\sigma J}$ 的各分量可直接写为

$$\mathbf{C}^{\sigma J}_{ij} = \frac{1}{\epsilon}\Big[\boldsymbol{\sigma}\left(\hat{\mathbf{F}}_{ij}\right) - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{F})\Big]. \tag{88}$$

算法 2 总结了计算有限元分析所需一致切线模量的逐步方法。

算法 2 计算一致切线模量的算法。

1. 定义扰动参数： $\epsilon = 10^{-5}$

2. 计算右 Cauchy-Green 张量： $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T\mathbf{F}$

3. 使用第 2 节中的方程计算柯西应力 $\boldsymbol{\sigma}$

4. 对于 $k = 1, \ldots, 3$ **do**

5. **用于** $l = 1, \ldots, 3$ **do**

6. 初始化 $\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{F}$

7. 扰动： $\hat{F}_{kl} = \hat{F}_{kl} + \epsilon/2$

8. 扰动： $\hat{F}_{lk} = \hat{F}_{lk} + \epsilon/2$

9. 使用公式（87）计算扰动应力响应： $\Delta\boldsymbol{\sigma}$

10. **对于** $i = 1, \ldots, 3$ **do**

11. **对于** $j = 1, \ldots, 3$ **执行**

12. 计算并存储 $C^{\sigma J}{}_{ijkl}$ 以及 $C^{\sigma J}_{ijlk}$ 使用式（88）

13. **end**

14. **end**

15. **end**

16. 结束

17. 确定材料切线： $\mathbf{C}^{\sigma J}$

18. 以 Voigt 记号存储切线张量

19. 使用交错算法求解方程组

Jaumann 切线$\mathbf{C}^{\sigma J}$ 与空间切线$\hat{\mathbf{c}}$ 分别与 Jaumann 率和 Truesdell（Lie）率共轭。由 $\mathbf{C}^{\sigma J}$ 恢复$\hat{\mathbf{c}}$ 可得

$$\hat{\mathbf{c}} = \mathbf{C}^{\sigma J} - \tfrac{1}{2}\big(\mathbf{I}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{I}\,\underline{\otimes}\,\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}\,\overline{\otimes}\,\mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}\,\underline{\otimes}\,\mathbf{I}\big) + \boldsymbol{\sigma}\otimes\mathbf{I}. \tag{89}$$

切线模量的数值近似在计算上高效且准确，适用于具有黏弹性、黏塑性和损伤耦合行为的纤维增强复合材料的复杂本构行为。

4. 数值模拟

本文给出了一系列全面的数值模拟，以展示所提出框架的预测能力，并揭示粘弹性-

黏塑性本构行为、各向异性裂纹扩展与湿热环境效应在短纤维增强聚合物中的复杂相互作用。所有模拟均考察准静态载荷下的玻璃纤维增强环氧树脂复合材料。黏弹-黏塑性本构模型和相场断裂公式的材料参数汇总于表1，其数值根据文献中针对同种复合材料报告的实验数据进行标定。数值研究探讨了纤维取向、体积分数、环境条件（含水量和温度）、纤维力学性能及层合板结构对整体力学响应和裂纹路径演化的影响。在以下模拟中，饱和含水状态指含水量为1 wt%。

表1： 数值模拟中使用的材料参数。

参数	符号	数值	方程	参考文献
平衡剪切模量	μ_{eq}^{0} (MPa)	760	(29)	[55]
非平衡剪切模量	μ_{neq}^{0} (MPa)	790	(29)	[55]
体积模量	k_v^0 (MPa)	1154	(38)	[55]
黏弹性前置因子	$\dot{\varepsilon}_0$ (s^{-1})	1.0447×10^{12}	(13)	[55]
活化能	ΔH (J)	1.977×10^{-19}	(13)	[55]
应力指数	m	0.657	(13)	[55]
非热屈服应力	τ_0 (MPa)	40	(13)	[55]
粘塑性参数	a	$22\omega_w + 0.8$	(18)	–
粘塑性指数	b	1.1	(18)	–
粘塑性阈值	σ_0 (MPa)	30	(18)	–
临界能量释放率	G_c (N/mm)	0.19	(55)	[53]
长度尺度参数	l_0 (mm)	0.02	(55)	[53]
湿胀系数	α_w	0.039	(4)	[53]
热膨胀系数	α_θ (K^{-1})	4.19×10^{-5}	(3)	[53]
温度敏感性	α (K^{-1})	0.01093	(30)-(31)	[55]
纤维刚度参数	a_1	9	(35)	–
纤维刚度参数	a_2	1	(35)	–
纤维刚度参数	a_3	1	(35)	–

我们首先探究粘弹性和粘塑性能量储存机制对复合材料裂纹驱动力的不同贡献。图 2 和图 3 展示了玻璃纤维（50 wt%）/环氧树脂复合材料在施加瞬时拉伸载荷后四个时刻的裂纹驱动力 H 极坐标图，其中纤维分布各不相同。图 2 考察的是一种平衡分布：50 wt% 的纤维沿 45° 取向，另有 50 wt% 沿 -45° 取向；而图 3 研究的是

一种非平衡构型，其中 30 wt% 的纤维沿 45° 取向，70 wt% 沿 -45° 取向。通过指定初始变形梯度施加初始拉伸载荷，随后记录系统发生粘性松弛时四个时刻的裂纹驱动力——$t = 10^{-6}$ s、0.005 s、0.05 s 和 0.1 s——分别代表初始弹性响应、早期粘性松弛、中间松弛状态和近似平衡状态。分别展示总裂纹驱动力（黑色曲线）、平衡（蓝色曲线）、非平衡（绿色曲线）和体积（红色曲线）能量分量，以揭示它们各自的贡献。

对于均衡纤维分布（图2），极坐标表示呈现出四瓣模式，最大能量累积出现在 0° 和 90° 方向，而非沿纤维取向。这一行为源于对称的 $\pm 45^\circ$ 纤维排列产生了准各向同性材料响应。在初始阶段（$t = 10^{-6}$ s），沿这些方向的总裂纹驱动力达到约0.5 MPa，在准平衡（$t = 0.1$ s）时降至约0.3 MPa——由于黏性耗散降低了40%。平衡能（蓝色曲线）在整个松弛过程中保持相对恒定，而非平衡能（绿色曲线）则随着黏性机制重新分配所储存的能量而显著降低；体积分量（红色曲线）单调增加，并在后期成为主导贡献。相比之下，非均衡分布（图3）产生非对称模式，反映了70-30纤维分布所引入的方向偏置。裂纹驱动力在受主导 -45° 纤维族影响的方向上呈现出更高幅值的瓣，表明纤维分布的不对称如何打破准各向同性行为，并为裂纹扩展形成优先方向。时间演化遵循与均衡情形相似的趋势：黏性松弛在相同时间尺度上使总驱动力降低约40%，但方向各向异性在整个加载历史中持续存在，证实纤维构型从根本上控制了可用于驱动断裂的能量的大小及其空间分布。

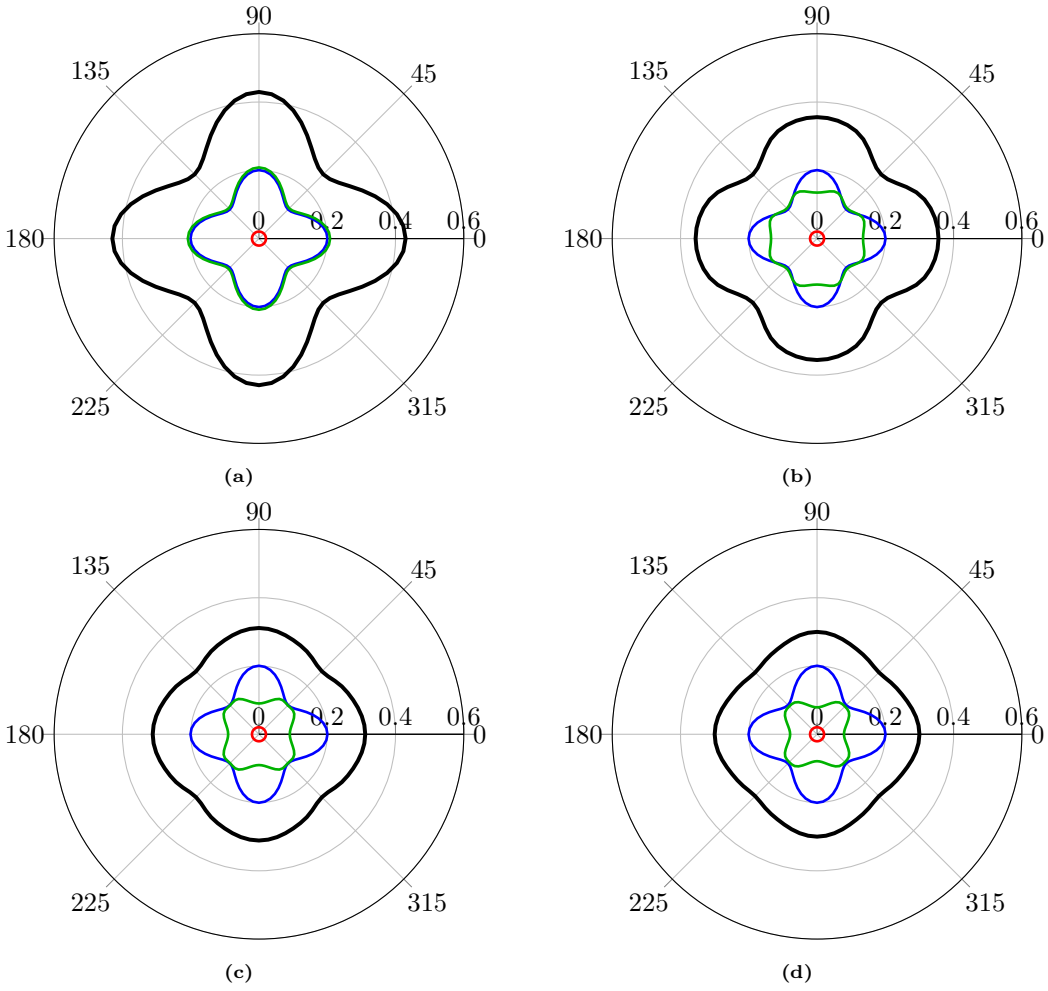


图2： 在 300 K 的湿气饱和条件下，含 50 wt% 玻璃纤维（GF）且纤维族平衡排列方向为 $\pm 45^\circ$ 的环氧树脂中，粘性松弛期间裂纹驱动力分量的空间分布。等高线显示了 (a) $t = 10^{-6}$ s 时的初始响应、(b) $t = 0.005$ s 时的早期松弛、(c) $t = 0.05$ s 时的中期松弛，以及 (d) $t = 0.1$ s 时的近平衡状态。颜色编码：总能量贡献（黑色）、平衡能量贡献（蓝色）、非平衡能量贡献（绿色）和体积能量贡献（红色）。

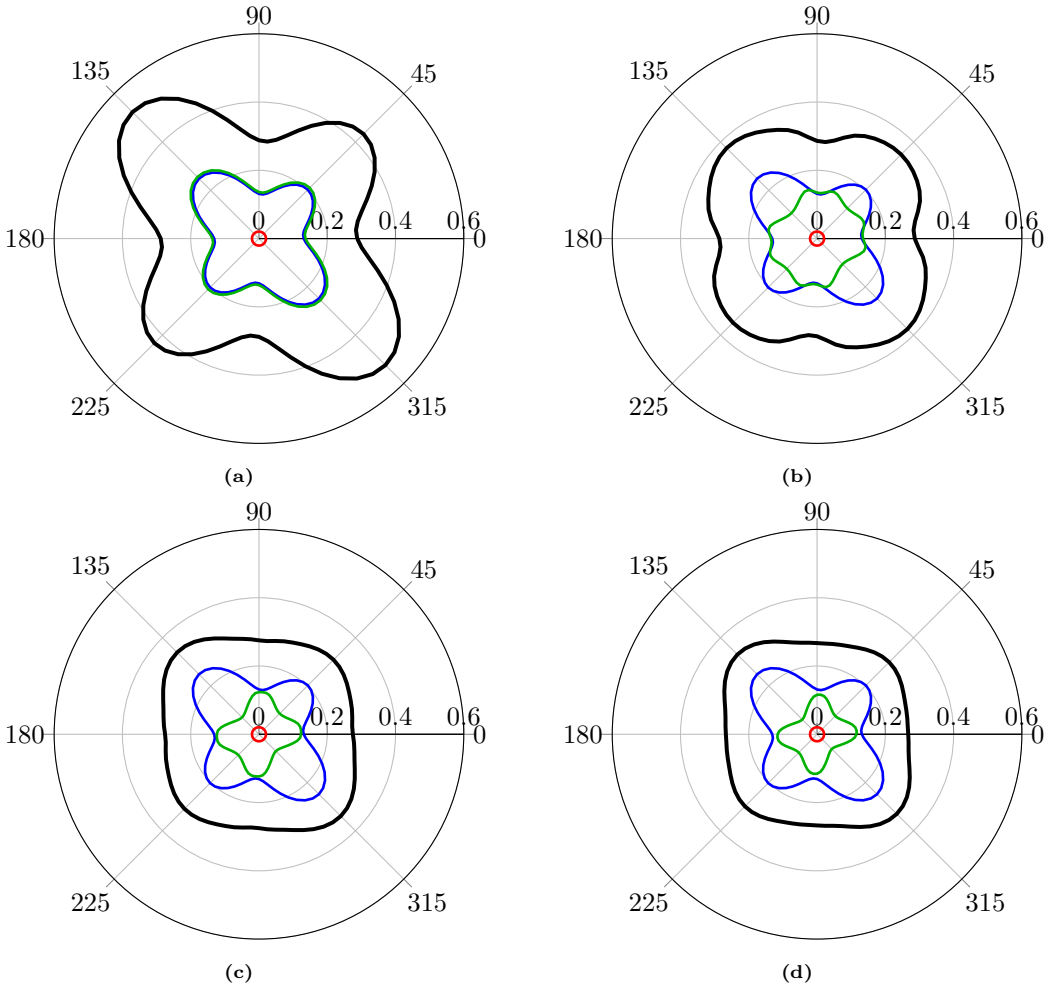


图3： 300 K 下，含水饱和的玻璃纤维（50 wt%）/环氧树脂体系在不平衡纤维分布（ -45° 处占70 wt%， $+45^\circ$ 处占30 wt%）时，黏性松弛过程中的裂纹驱动力分量空间分布。等值线显示：(a) $t = 10^{-6}$ s 时的初始响应，(b) $t = 0.005$ s 时的早期松弛，(c) $t = 0.05$ s 时的中期松弛，以及 (d) $t = 0.1$ s 时的近平衡状态。颜色编码：总能量贡献（黑色）、平衡能量贡献（蓝色）、非平衡能量贡献（绿色）和体积能量贡献（红色）。

能量贡献的时间分解进一步揭示了速率相关的断裂机制。图4展示了不平衡纤维分布下总裂纹驱动力 H 及其组成部分——平衡能、非平衡能（黏性能）和体积能——随时间的演化。初始拉伸载荷沿 45°方向施加。总驱动力先迅速增加，随后随着时间相关的粘性过程启动而逐渐演化。初始加载后，平衡能保持不变

，这反映了弹性储能能力；与此同时，随着链滑移和纤维—基体界面效应引发黏性松弛，非平衡能从初始峰值逐渐下降。体积能贡献单调增加，并在加载后期成为主导部分。这种分解揭示了黏弹-黏塑性复合材料断裂的一个基本特征，而弹性相场模型无法捕捉这一特征：裂纹驱动力由多种物理机制产生的、随时间变化的贡献构成，其中黏性能在早期占主导地位（反映速率相关的阻力），而体积能在接近失效时逐渐占据主导地位（表明材料向拉伸断裂转变）。追踪这些独立贡献的能力，为了解不同变形机制在整个加载历史中的相对重要性提供了前所未有的洞见，并有助于识别哪些物理过程控制断裂起始，哪些控制裂纹扩展。

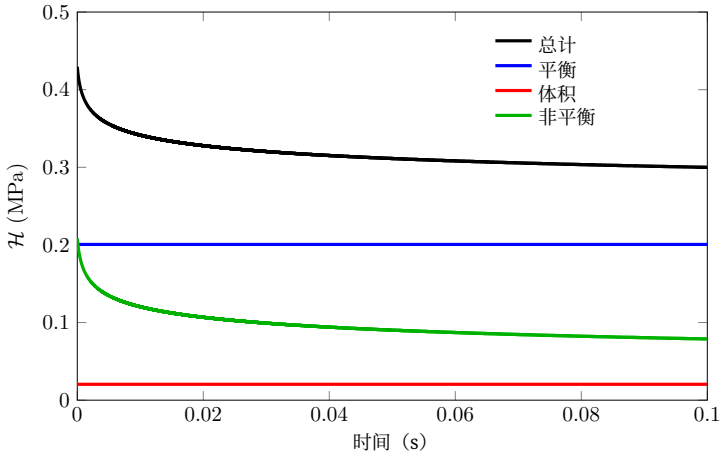


图 4： 300 K 下，沿与水平轴成 45° 的方向施加单轴拉伸载荷时，水分饱和的玻璃纤维（50 wt%）/环氧树脂复合材料（纤维分布不平衡，-45° 处为 70 wt%，$+45^\circ$处为 30 wt%）中裂纹驱动力各分量的时间演变。

所提出的相场模型预测断裂模式的能力通过开展单边缺口拉伸试验进行评估。试验的几何形状和边界条件如图5所示。拉伸载荷以 $\dot{u} = 1$ mm/min的变形速率施加，恒定位移增量为 10^{-6} mm。

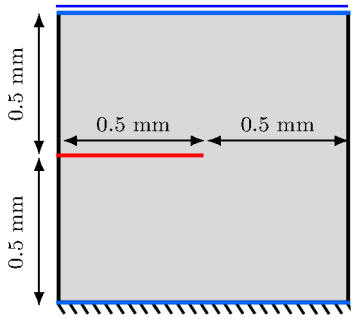
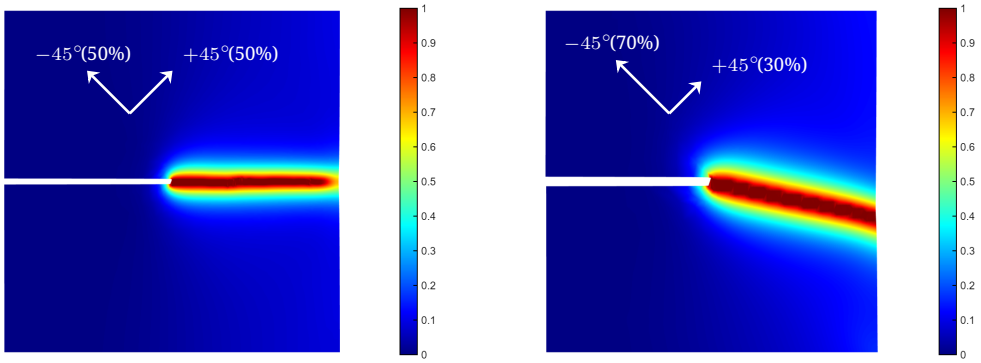


图5：单边缺口试样的几何形状和边界条件。

在300 K下，针对饱和GF（50 wt%）/环氧树脂复合材料，图6和图7考察了纤维族分布对断裂行为的影响，并比较了各向异性参数为$\hat{}\alpha = 10$的两种不同双峰纤维构型。图6a显示均衡分布，50 wt%的纤维沿 $-45°$ 取向，50 wt%沿 $45°$取向，代表对称的增强结构。相比之下，图6b给出非均衡分布，70 wt%的纤维位于$-45°$，仅30 wt%位于 $45°$，从而在复合材料的力学响应中产生方向不对称。这些构型可用于研究纤维族的相对比例——而非总纤维含量或取向角本身——如何影响裂纹路径演化和承载能力。

裂纹路径可视化结果表明，裂纹路径对纤维族分布具有显著敏感性。对于均衡的 50-50 配置（图 6a），裂纹沿水平方向直线扩展，与载荷方向垂直。这种行为反映了对称增强结构的特点：两个纤维族都不会主导裂纹偏转趋势，因此裂纹会采取折中路径，以尽量降低沿相互竞争的取向扩展所需的总能量。相比之下，非均衡的 70-30 分布（图 6b）会使裂纹显著偏向与占主导地位的纤维族垂直的方向（$-45°$）。裂纹路径明显弯曲，相对水平方向偏转约 $20°$，因为裂纹倾向于优先穿过断裂抗力较低的区域。这种偏转的原因在于，$-45°$ 处较高的纤维浓度增强了该取向垂直方向上的裂纹扩展阻力，迫使裂纹寻找能够尽量减少与占主导地位的纤维族相交的路径。



(a) (b)

图6： 300 K时纤维族成员对含水饱和的GF（50 wt%）/环氧树脂中裂纹路径的影响：(a) 均衡纤维分布（ $\mp 45^{\circ}$处为50-50），以及 (b) 非均衡分布（ -45° 处为70 wt%， $+45^{\circ}$处为30 wt%）。

图 7 对比了两种配置下的力-位移响应，从而量化了纤维族分布对力学性能的影响。均衡的 50-50 分布在位移为 0.022 mm 时达到约 28 N 的峰值载荷，表现出更强的承载能力。相比之下，非均衡的 70-30 配置在位移为 0.024 mm 时峰值载荷仅约为 26 N，强度降低约 7%，同时延性有所增加。两条曲线的初始刚度相近，证实弹性性能主要由总纤维含量而非分布决定。然而，损伤起始及随后的软化行为存在显著差异。均衡分布在峰值载荷之后表现出更突然的失效，载荷陡降表明超过临界阈值后裂纹迅速扩展。这种峰后脆性响应反映了对称构型中裂纹偏转的困难，因为两个纤维族提供的阻力相当。相反，非均衡分布呈现出更渐进的峰后软化，并带有较长的尾部，表明裂纹通过渐进损伤累积实现稳定扩展。

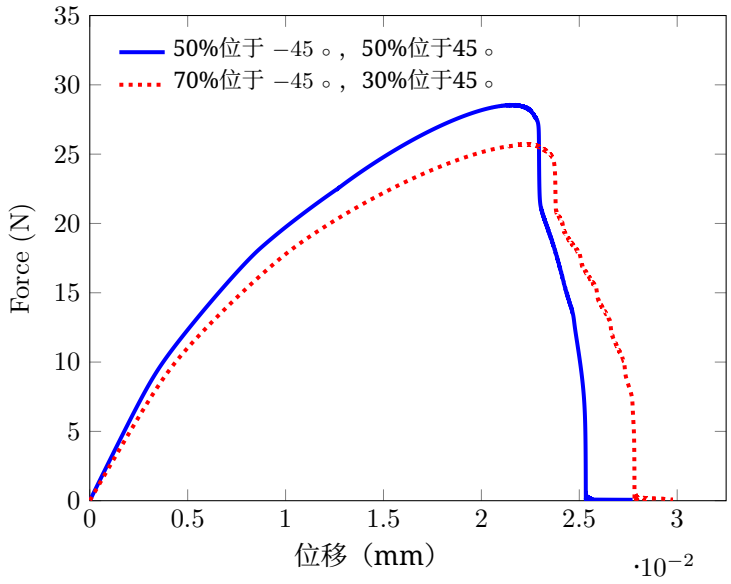


图7： $T = 300$ K时纤维族成员对含水饱和的GF（50 wt%）/环氧树脂力–位移响应的影响。

图 8a–8d 通过各向异性相场公式探讨了材料各向异性与裂纹路径偏转之间的定量关系。式（57）中的各向异性参数 $\hat{}\alpha$ 控制纤维取向对裂纹扩展阻力的影响程度，从而直接关联微观结构构型与宏观断裂行为。图 8 展示了 GF（50 wt%）/环氧树脂复合材料中这一关系；其纤维主要沿与水平方向成 30° 的方向排列，并考察了四个取值：$\hat{}\alpha = 1$，2，5，和10。当各向异性最低时，裂纹沿垂直于载荷方向的路径相对笔直地扩展，仅发生轻微偏转。随着 $\hat{}\alpha$ 增至 2，裂纹开始明显朝纤维方向偏转，导致裂纹路径偏离水平方向约 10–15°。当 $\hat{}\alpha = 5$ 时，偏转显著，裂纹路径弯曲并更趋于垂直于纤维。当各向异性最高（$\hat{}\alpha = 10$）时，裂纹发生最大偏转，路径紧随纤维构型所决定的阻力最弱方向。偏转角随 $\hat{}\alpha$ 逐步增大，证实了该参数的物理含义：控制纤维诱导定向增韧的强度。该关系具有系统性，可为利用纤维取向已知的复合材料实验断裂试验标定 $\hat{}\alpha$ 提供定量指导。

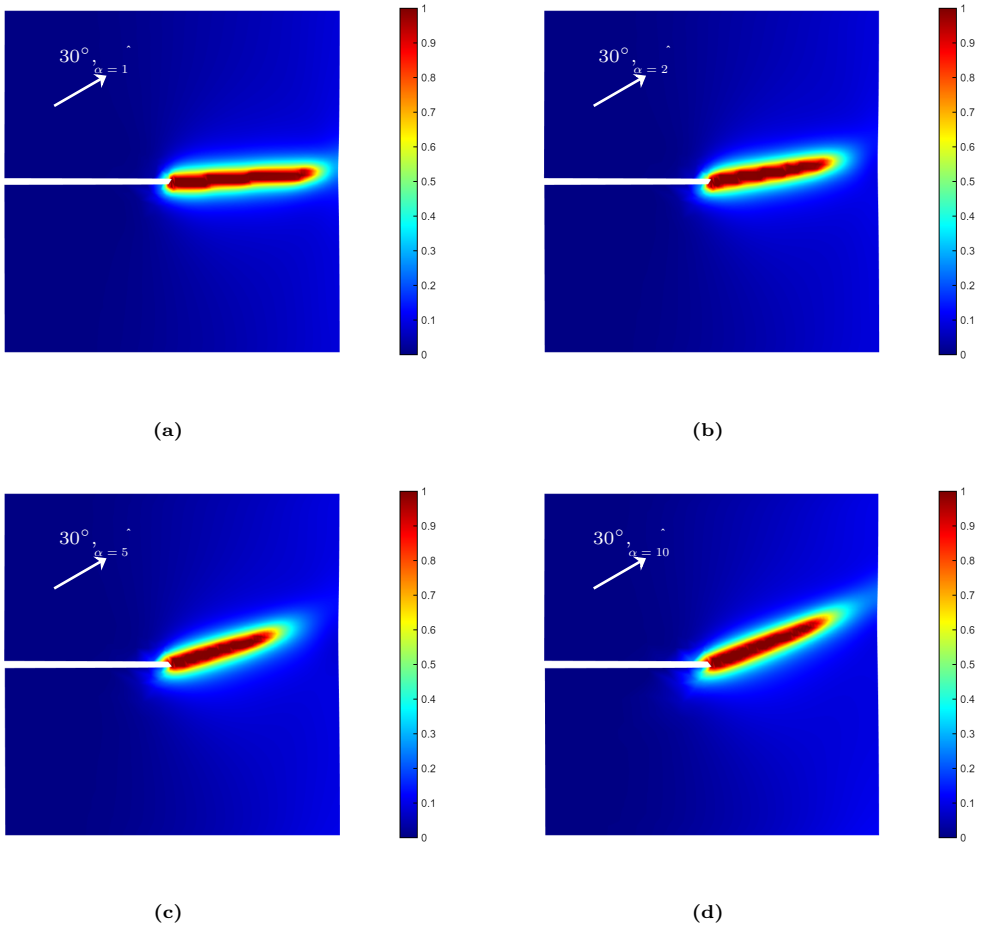


图8： $\hat{\alpha}$ 对300 K下纤维沿 30°排列的水分饱和GF（50 wt%）/环氧树脂中裂纹路径的影响：(a)$\hat{\alpha}=1$，(b)$\hat{\alpha}=2$，(c)$\hat{\alpha}=5$，以及(d)$\hat{\alpha}=10$。

图 9 中相应的力-位移响应量化了裂纹路径偏转带来的力学影响。由于各向异性参数影响的是裂纹扩展阻力，而非弹性性能，因此所有曲线的初始刚度相近。不过，峰值载荷和失效位移均随 $\hat{\alpha}$ 系统性增加：当 $\hat{\alpha}=1$ 时，峰值载荷约为 24 N，失效位移为 0.016 mm；当 $\hat{\alpha}=2$ 时，峰值载荷约为 25 N；当 $\hat{\alpha}=5$ 时，约为 26 N；当 $\hat{\alpha}=10$ 时，峰值载荷约为 27 N，失效位移为 0.017 mm。各曲线下的面积（代表总断裂能）随 $\hat{\alpha}$ 单调增加，这证实了较强的各向异性会迫使裂纹沿能量上不利的路径扩展，从而提升复合材料韧性。

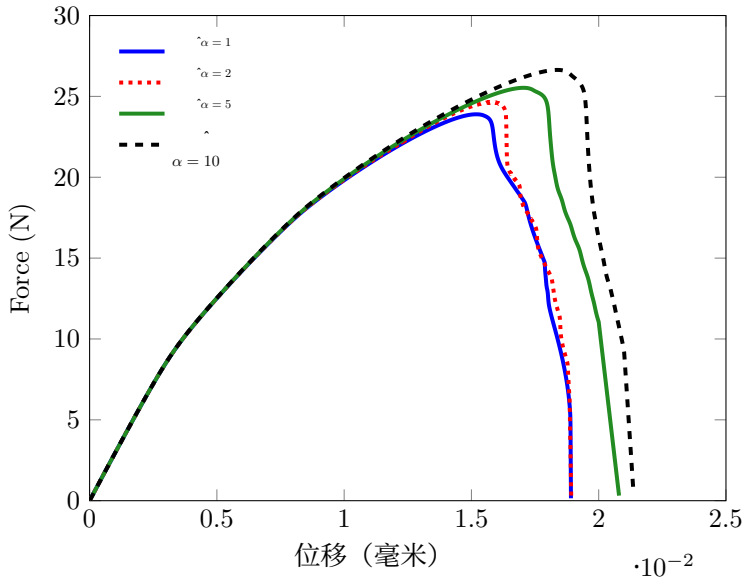


图9： 纤维取向为 $30°$ 、温度为 $T = 300$ K时，$\hat{\alpha}$ 对含水饱和的GF（50 wt%）/环氧树脂力–位移响应的影响。

为进一步展示各向异性相场公式在不同纤维取向下的普适性，图 10 和图 11 考察了在 300 K 饱和条件下，纤维主要沿水平方向成 $60°$ 取向的 GF（50 wt%）/环氧树脂复合材料。图 10 展示了四种各向异性参数下的裂纹路径演化：$\hat{\alpha} = 1$，2，5， 和 10。对于最低各向异性（$\hat{\alpha} = 1$），裂纹基本沿水平方向扩展，与载荷方向垂直；尽管纤维取向较陡，裂纹几乎没有偏转。随着 $\hat{\alpha}$ 增至 2，裂纹开始出现明显偏转，路径偏离水平方向约$20–25°$ ——这一偏转比相同各向异性参数下的 $30°$ 纤维取向情形更为显著，反映出更强的几何不相容性。当 $\hat{\alpha} = 5$ 时，裂纹出现显著偏转，弯曲幅度较大，扩展方向几乎与纤维取向垂直，同时呈现明显的波状形态和更宽的损伤区。对于最大各向异性（$\hat{\alpha} = 10$），裂纹发生极端偏转，展现了相场模型捕捉仅由材料各向异性驱动的自发路径选择的能力。

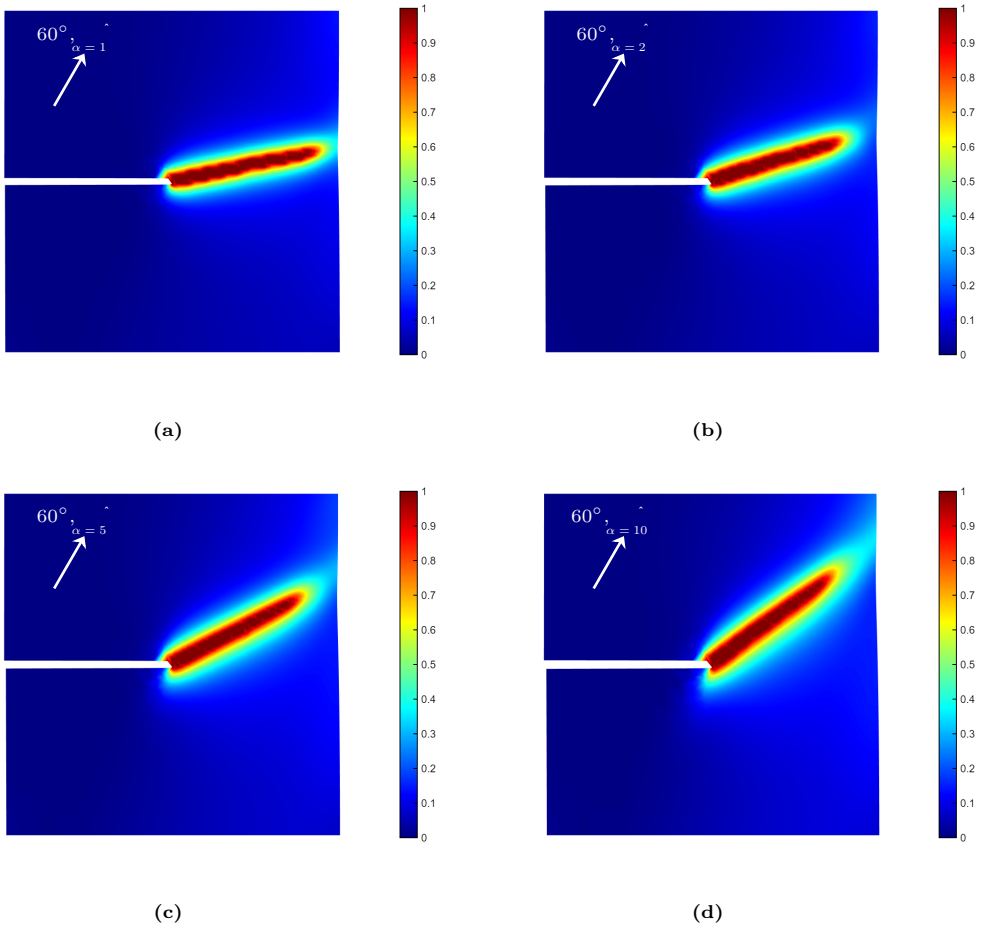


图10： 纤维在 60° 方向排列时，各向异性参数（$\hat{\alpha}$）对300 K下含水饱和的GF（50 wt%）/环氧树脂中裂纹路径的影响：(a)$\hat{\alpha}=1$，(b)$\hat{\alpha}=2$，(c)$\hat{\alpha}=5$，(d)$\hat{\alpha}=10$。

图 11 所量化的力学后果呈现出与 30° 取向结果一致的系统性趋势，但由于纤维角度更陡，数值上有所不同。随着 $\hat{\alpha}$ 增大，峰值载荷逐渐上升：$\hat{\alpha}=1$时，约在 0.016 mm 处达到 25 N；$\hat{\alpha}=2$时，约在 0.017 mm 处达到 27 N；$\hat{\alpha}=5$时，约在 0.018 mm 处达到 30 N；$\hat{\alpha}=10$时，约在 0.019 mm 处达到 32 N。这些峰值载荷高于各向异性水平相当时 30° 取向下的观测值，反映出其几何优势： 60° 纤维取向通过直接拉伸纤维，能够实现更有效的载荷传递。

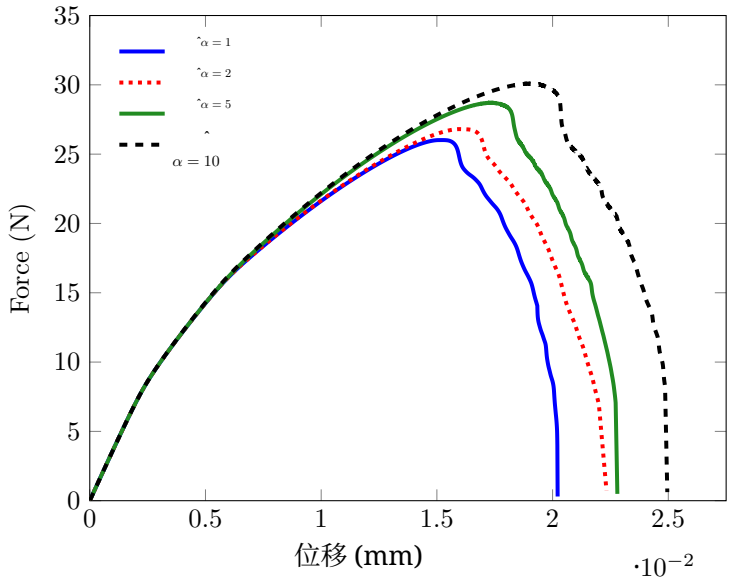


图11： 各向异性参数 $\hat{\alpha}$ 对纤维沿 60° 方向排列、温度为 $T = 300$ K 时水分饱和的GF（50 wt%）/环氧树脂力–位移响应的影响。

下面将研究纤维增强、湿热环境与断裂行为之间的多物理场耦合。图 12 考察了纤维含量对随机分布短纤维/环氧树脂复合材料力-位移响应的影响。在 $T = 300$K 下，GF（10 wt%）/环氧树脂、GF（30 wt%）/环氧树脂和 GF（50 wt%）/环氧树脂复合材料均处于饱和状态。力-位移曲线表明，随着纤维含量增加，刚度和峰值载荷均有所提高：10 wt% 时约为 21 N（0.019 mm），30 wt% 时为 23 N（0.018 mm），50 wt% 时为 25 N（0.017 mm）。值得注意的是，峰值载荷对应的位移随纤维含量增加而减小，这表明较高的纤维含量虽然提高了承载能力，但也会导致断裂行为更加脆性、延性降低。这一趋势反映了相互竞争的作用：短纤维通过将载荷传递至刚度更高的增强相来提高刚度和强度，但也会在纤维端部和界面处引入应力集中点，促使裂纹更早萌生。尽管延性降低，断裂能（曲线下方面积）仍随纤维含量增加而提高，这证实了短纤维增强总体上具有增韧效果，并表明该模型能够捕捉颗粒增强中固有的刚度–韧性–延性权衡。

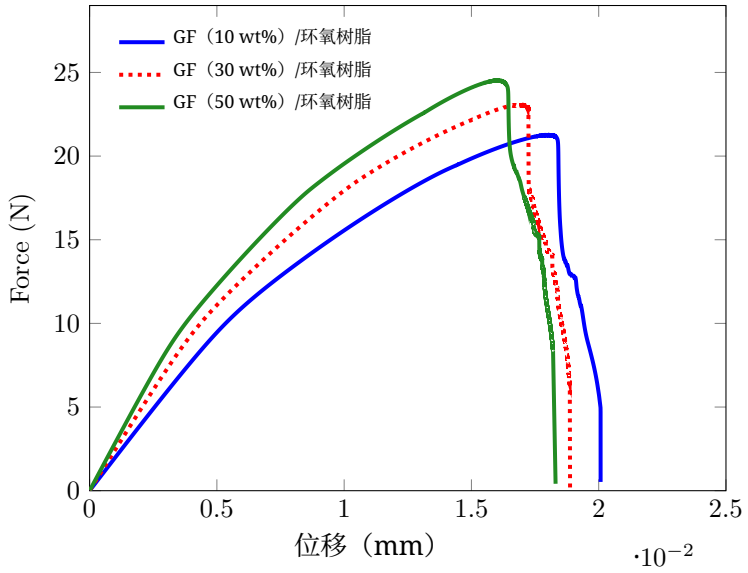


图12： 纤维含量对$T = 300$ K下水分饱和条件下随机分布的玻璃纤维/环氧树脂力–位移响应的影响。

图 13 对吸湿效应进行了量化，比较了 300 K 下 GF（10 wt%）/环氧树脂和 GF（50 wt%）/环氧树脂在干燥与饱和条件下的表现。对于 10 wt% 体系，吸湿使峰值力从约 26 N（干燥）降至 21 N（饱和），劣化幅度为 19%；同时，失效发生时的位移略有增加（0.019 mm 对比 0.017 mm），表明塑化作用提高了基体的延性。对于 50 wt% 复合材料，吸湿造成的相对劣化较小（干燥时为 27 N，饱和时为 25 N，降幅约为 7%），这表明纤维增强在一定程度上赋予材料耐湿性。不过，两种组分的绝对力降幅相近（5–6 N），说明水分主要影响基体主导性能。峰后行为也发生了显著变化：饱和试样表现出更为平缓的软化和更长的尾部，而干燥试样则出现更急剧的载荷骤降，这反映了基体塑化（提高延性）与纤维-基体界面劣化（促使脱粘和分布式损伤）之间的相互竞争。模型通过方程（30）、（31）和（39）中的温度和含水量相关模量，捕捉了这些吸湿效应，并考虑了实验观察到的随含水量增加而出现的性能下降，说明在复合材料设计与认证中考虑环境条件至关重要。

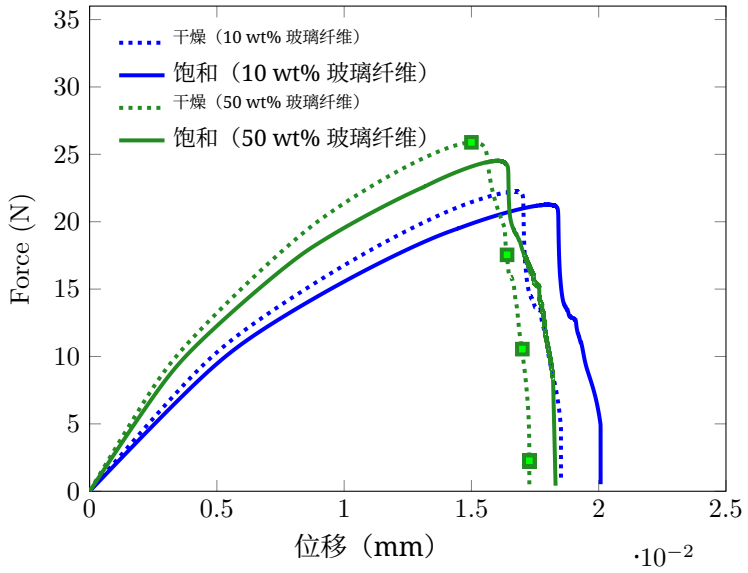


图13： 含水量对 $T = 300$ K下随机分布的玻璃纤维/环氧树脂力–位移响应的影响。

图14a–14d展示了渐进损伤演化，呈现随机分布的玻璃纤维（50 wt%）/环氧树脂在位移分别为0.015、0.0165、0.017和0.0173 mm时的四个相场变量分布快照，涵盖了图13中四个标记所示的从峰前加载到峰后软化阶段。在约为峰值载荷的最早阶段，缺口尖端处开始出现一个局部损伤区，相场变量仅达到中等值（$\phi \approx 0.2$-0.3），表明存在应力集中，但尚未发生显著的裂纹扩展。略过峰值载荷后，一条完整的裂纹沿水平方向贯穿试样宽度，沿垂直于载荷的直线路径扩展，符合I型断裂特征；不过，细微的不规则性反映了裂纹与随机纤维分布之间的局部相互作用。进入峰后阶段后期，裂纹几乎扩展至另一侧边缘，仅剩一小段韧带。这一过程表明，随机取向短纤维增强复合材料中的裂纹扩展与各向同性材料中的理想直裂纹相似。

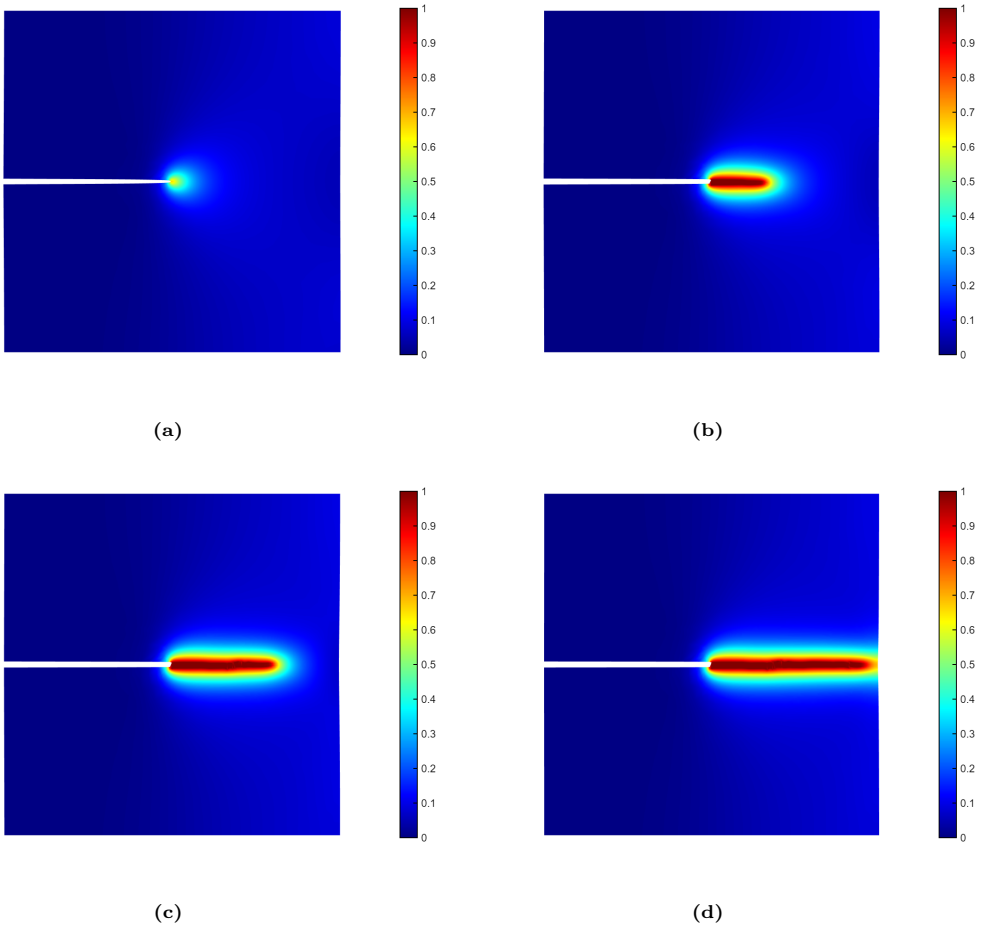


图 14： 随机分布的玻璃纤维（50 wt%）/环氧树脂中的裂纹扩展，对应位移分别为：(a) 0.015 mm、(b) 0.0165 mm、(c) 0.017 mm 和 (d) 0.0173 mm。这些快照在图 5 的力-位移响应中标出。

图15考察了饱和条件下随机分布的玻璃纤维（50 wt%）/环氧树脂在253、300和323 K时黏弹-黏塑性行为的温度依赖性。结果显示出显著的温度敏感性，这与本构模型中内嵌的热激活过程相符。在最低温度下，复合材料表现出最高的刚度和峰值力（在0.015 mm处约为29 N），这反映了分子迁移能力降低以及对粘性流动的阻力增大；同时，其脆性行为相对明显，峰后软化也较为陡峭，表明通过黏性机制耗散的能量有限。在室温下，刚度和峰值力处于中等水平（在0.016 mm处约为25 N），

观察到更为平缓的峰后软化，代表弹性机制与黏性机制均显著贡献的过渡区间。在高温下，可观察到刚度明显降低以及最低的峰值力（约20 N，对应0.017 mm），但失效位移大幅增加，表明延性增强，峰后行为更为平缓且尾部延长，表明通过热激活黏性过程发生了显著的能量耗散。温度依赖性源于剪切模量所采用的修正的北川模型（式(30)和(31)）以及Argon黏性流动速率（式(13)），从而确保随着温度升高，基体变软且黏性松弛加速，进而导致所观察到的趋势。从253 K到323 K，峰值载荷约降低30%，这表明在宽环境范围内工作的复合材料结构中温度补偿的关键重要性，并表明该模型可扩展用于预测高温下的蠕变和应力松弛——这些现象对长期结构完整性评估具有实际重要性。

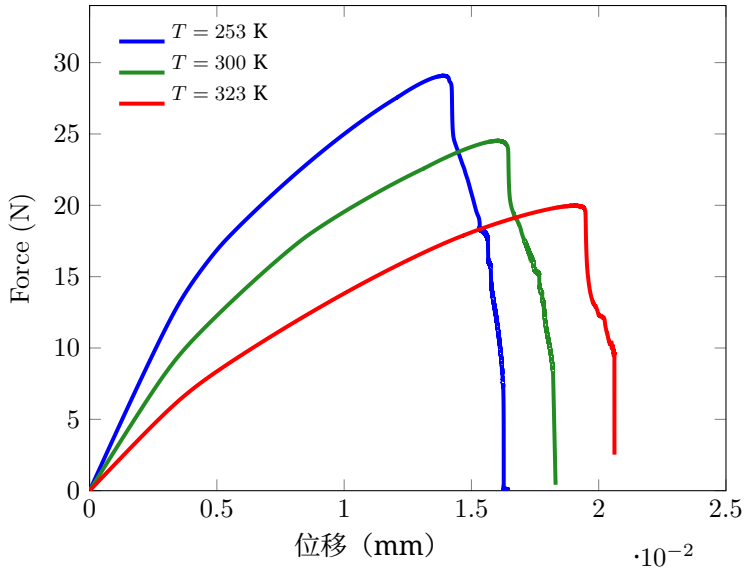


图15： 温度对湿气饱和条件下随机分布的玻璃纤维（50 wt%）/环氧树脂的力–位移响应的影响。

通过纤维应变能函数（式（35））中的参数 a_1 研究纤维力学性能的影响，该参数控制纤维族对初始刚度的贡献。图16比较了随机分布的GF（50 wt%）/环氧树脂在300 K及干燥条件下的三个取值： $a_1 = 1$ （低纤维刚度）、 $a_1 = 9$ （基准值）和$a_1 = 20$ （高纤维刚度），其中纤维体积分数和取向分布保持不变，以隔离纤维本征性能的影响。

系统性提高 a_1 会同时增强初始刚度和峰值载荷：对于 $a_1 = 1$，峰值载荷约为21 N，对应位移为0.018 mm；对于 $a_1 = 9$，峰值载荷为25 N，对应位移为0.016 mm；对于 $a_1 = 20$，峰值载荷为30 N，对应位移为0.015 mm。力-位移曲线从加载开始便立即出现分离，证实 a_1 直接影响弹性响应，而不仅仅是影响损伤演化或峰后行为。有趣的是，峰后软化也取决于a_1：较高的纤维刚度会导致峰值载荷之后更加突然的失效，这表明断裂行为更加脆性。这归因于刚度更高的纤维承载更高载荷时，纤维端部的应力集中加剧，从而促进局部基体开裂和纤维-基体脱粘。实际意义在于，尽管使用高模量纤维能够提高强度和刚度，但如果纤维-基体界面性能未得到相应改善，则可能降低损伤容限和断裂韧度。这些模拟证明了该模型评估不同增强体选择之间权衡关系的能力，并可为材料选择提供指导：对于需要高强度的应用，应优先选择高 a_1；对于需要高韧性的应用，则应选择具有良好界面粘附的中等 a_1 。

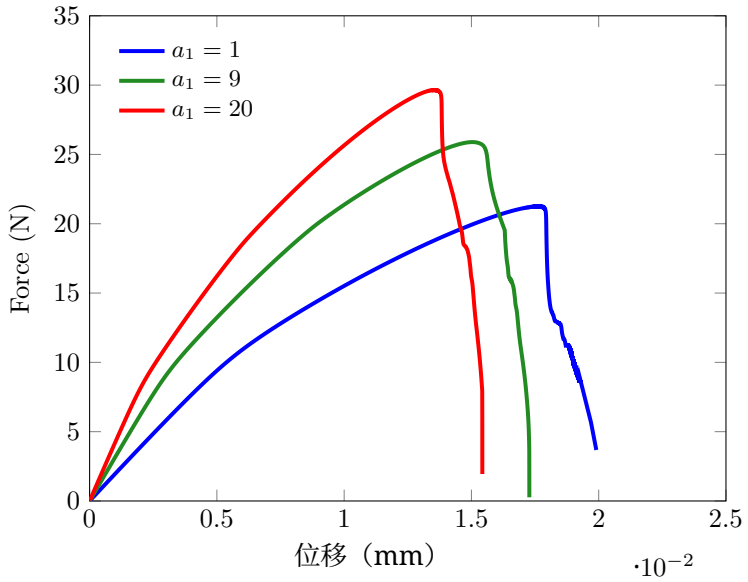


图16： 纤维性能对 300 K 干燥条件下随机分布的玻璃纤维（50 wt%）/环氧树脂力–位移响应的影响。

下图研究了裂纹在具有不同纤维取向的层状复合材料结构中的扩展——这种构型广泛应用于结构层合板。

图 17 和图 18 考察了 300 K 干燥条件下的双层 GF（50 wt%）/环氧树脂，其中上、下两半部分具有不同的纤维取向，并通过比较 $\hat{}\alpha = 2$ 和 $\hat{}\alpha = 10$，研究各向异性参数 $\hat{}\alpha$ 对裂纹在层间界面处偏转的影响。力-位移响应表明，各向异性的增强显著提高了峰值载荷（约从 25 N 增至 28 N）以及峰值载荷对应的位移（从 0.015 mm 增至 0.018 mm）。更重要的是，峰后行为存在显著差异：对于 $\hat{}\alpha = 2$，峰值载荷后不久便发生灾难性失效，载荷急剧下降；而 $\hat{}\alpha = 10$ 则表现出较为渐进的软化，并在约 27 N 处出现明显的平台区，位移范围约为 0.002 mm。这一平台表明裂纹在层状结构中稳定扩展；当裂纹遇到纤维取向不同的层间界面时，会反复偏转并改变方向——这是具有强各向异性韧性的层状复合材料所独有的现象。

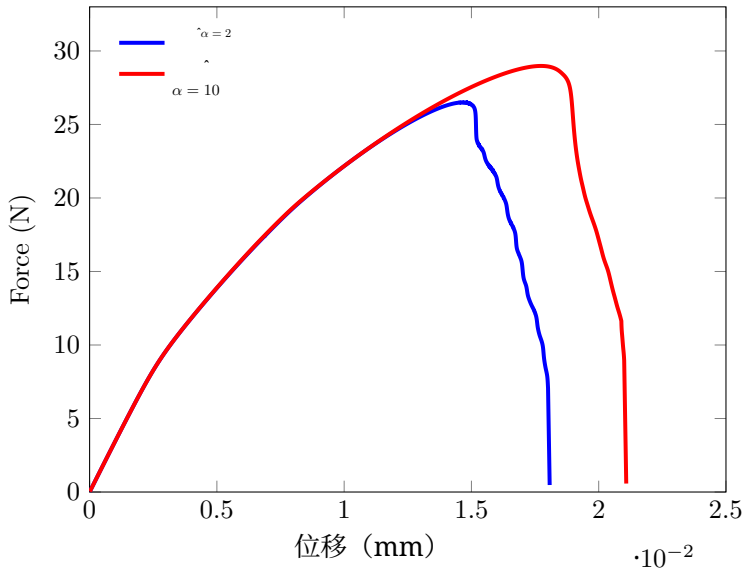
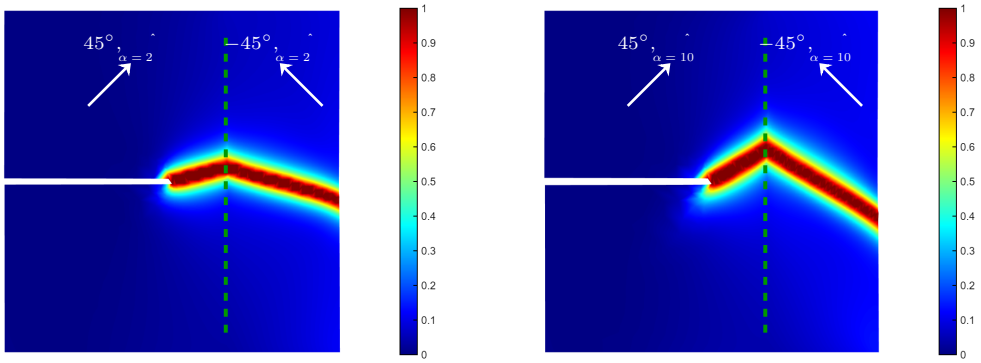


图17： 层状GF（50 wt%）/环氧复合材料在300 K干燥条件下的力–位移响应。



(a) (b)

图 18： 层状 GF（50 wt%）/环氧树脂复合材料中的裂纹扩展：(a)$\hat{\alpha} = 2$，(b)$\hat{\alpha} = 10$。绿色虚线表示层间界面。

裂纹路径可视化揭示了其潜在机制。对于 $\hat{\alpha} = 2$ （图 18a），裂纹沿相对平滑的路径扩展，穿过层间界面时仅发生轻微偏转；由于各向异性较弱，裂纹能够穿透各层，且几乎不受纤维取向失配的阻碍，因此整体轨迹近似水平。相比之下，对于 $\hat{\alpha} = 10$ （图 18b），裂纹路径出现明显偏转：在顶层向上弯曲，在底层向下弯曲，以顺应各层纤维取向所决定的优选扩展方向。图 19 和图 20 中考察的另一种层状构型呈现出相似趋势：对于 $\hat{\alpha} = 2$，裂纹发生中等程度的偏转；对于 $\hat{\alpha} = 10$，裂纹则大幅偏离原路径，并可能出现裂纹停滞和重新起裂。值得注意的是，在高各向异性情形下，裂纹似乎会在层间界面处暂时停滞，随后在第二层中重新起裂，从而形成不连续的损伤模式。这种裂纹停滞现象会导致力平台，因为施加载荷必须增大，才能克服裂纹穿过界面并重新起裂所需的额外能垒。

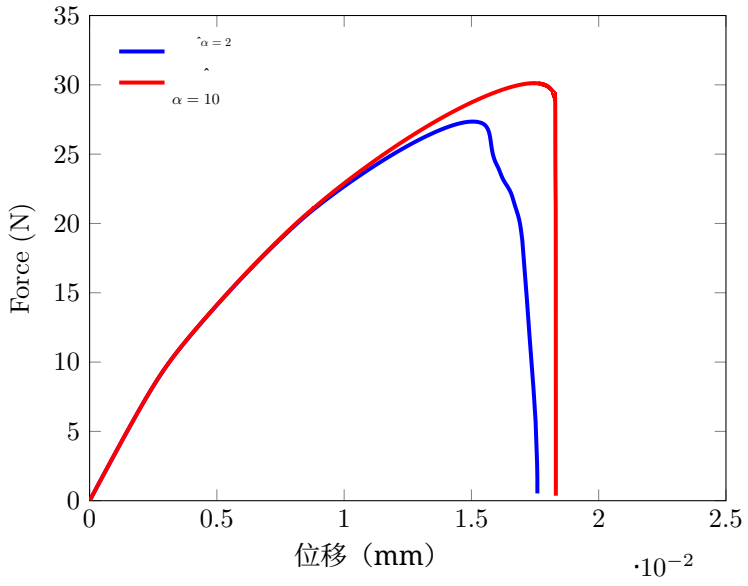
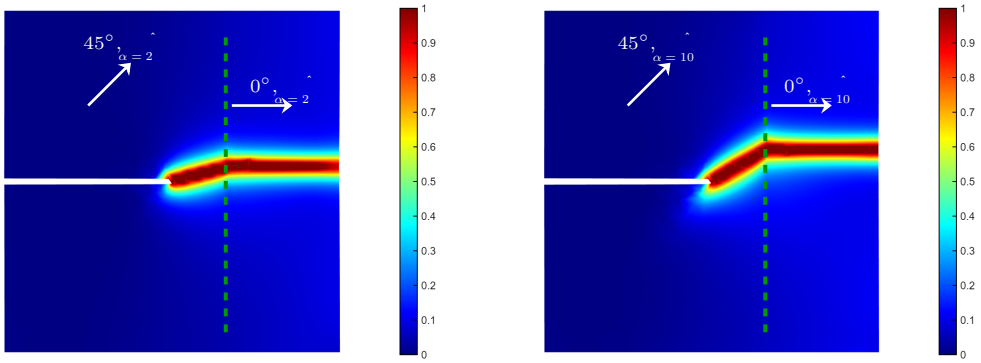


图19： 层状GF（50 wt%）/环氧复合材料在300 K和干燥条件下的力–位移响应。



(a) **(b)**

图20： 分层 GF（50 wt%）/环氧树脂复合材料中的裂纹扩展：(a)$\hat{\alpha} = 2$，以及 (b)$\hat{\alpha} = 10$。绿色虚线表示层间界面。

5. 总结与结论

本研究提出了一个综合性的相场框架，用于模拟湿热环境下短纤维增强聚合物复合材料的各向异性粘弹性-粘塑性断裂。

境下的有限变形。该框架将若干传统上分别处理的关键方面统一起来：由纤维取向引起的各向异性裂纹扩展、通过耦合黏弹-黏塑性行为实现的率相关非弹性变形，以及通过含水量和温度敏感材料参数体现的环境劣化。

在相场断裂公式中，来自多个纤维族的各向异性力学响应通过二阶取向张量分解加以刻画，从而将复杂的多纤维分布简化为由特征向量和特征值表征的主纤维族。湿热效应通过吸湿膨胀、热膨胀以及环境相关材料参数加以纳入。针对玻璃纤维增强环氧复合材料的数值研究展示了该框架的能力：

- 裂纹驱动力分解表明，纤维取向从根本上支配空间能量分布。时间演化显示，总驱动力在松弛时间尺度上降低约25%，表明了关键的时间相关影响。

- 均衡纤维分布（50-50）产生直线裂纹扩展，具有较高的峰值载荷和脆性失效，而非均衡分布（70-30）则引起显著偏转，强度降低但延性增强。各向异性参数$\hat{}\alpha$与裂纹偏转呈现系统性关系；该参数从1增至10会逐步增大偏转角和断裂能。

- 吸湿会使10 wt%复合材料的强度降低19%，使50 wt%复合材料的强度降低7%；塑化则导致逐渐软化。温度从253 K变化至323 K时，峰值载荷约降低30%；温度升高通过增强黏性耗散提高延性。

- 双层层合板中的强各向异性（$\hat{}\alpha = 10$）会导致裂纹偏转和层内重新起裂。

该框架通过以下方面推进了短纤维增强聚合物的预测建模：(1) 在相场断裂模型中实现统一的多物理场耦合，(2) 分解率相关断裂机制，以及 (3) 通过取向张量形式建立定量的微观结构-性能关系。未来研究应关注通过内聚相场公式进行显式的纤维-基体界面建模、纳入制造过程诱导的纤维分布的多尺度均匀化，以及循环加载下的疲劳损伤。从

方法论角度而言，Ren 等人的统一变分损伤模型 [67] 提出了一种长度尺度不敏感相场公式，有望提高当前粘弹性–粘塑性条件下裂纹预测对网格和正则化参数的客观性。此外，自适应深度能量最小化方法 [68]为本文采用的交错式牛顿–拉夫森求解器提供了颇具吸引力的替代方案；它可能通过基于物理信息神经网络的相场解自适应策略降低计算成本。

致谢

作者感谢挪威研究基础设施服务（NRIS）提供的资源与支持。计算工作使用了通过 Sigma2 国家电子基础设施项目 NN10041K 提供的资源完成。

参考文献

[1] J. Holbery，D. Houston，汽车应用中的天然纤维增强聚合物复合材料，Jom 58 (11) (2006) 80–86。

[2] C. Soutis，飞机制造中的碳纤维增强塑料，《材料科学与工程：A辑》412 (1-2) (2005) 171–176。

[3]B. Arash，W. Exner，R. Rolfes，纤维增强纳米颗粒填充环氧纳米复合材料的粘弹性损伤行为：多尺度建模与实验验证，复合材料 B 辑：工程 174 (2019) 107005。

[4] J. Thomason，纤维长度和浓度对玻璃纤维增强聚丙烯性能的影响：5. 注塑长短纤维聚丙烯，复合材料 A 辑：应用科学与制造 33 (12) (2002) 1641–1652。

[5] W. Nsengiyumva、S. Zhong、X. Chen、A. M. Makin、L. Chen、L. Wu、L. Zheng，面向调控短玻璃纤维增强环氧复合材料的力学与介电性能，聚合物复合材料 45 (1) (2024)535–554。

[6] A. A. Gusev，短玻璃纤维增强复合材料粘弹性刚度的有限元估算，《复合材料结构》171（2017年）53–62。

[7] Z. Wang、D. E. Smith，定向短纤维增强复合材料的黏弹性蠕变响应数值分析，《复合材料结构》229（2019）111394。[8] X. Poulain、A. Benzerga、R. Goldberg，环氧树脂的有限应变弹黏塑性行为：玻璃态下的实验与建模，《国际塑性》62（2014）138–161。[9] B. Arash、R. Unger、W. Exner、R. Rolfes，纳米颗粒/聚合物纳米复合材料的有限变形梯度增强损伤模型：原子尺度信息驱动的多尺度方法，《复合材料结构》258（2021）113211。

[10] B. Arash, S. Zakavati, B. Bahtiri, M. Jux, R. Rolfes，《含黏弹–黏塑性热固性纳米复合材料在循环加载和单体加载下的断裂相场建模》，《计算机辅助工程》41 (1) (2025) 681–701。

[11] Y. Zhou, F. Pervin, L. Lewis, S. Jeelani，《多壁碳纳米管增强环氧树脂热学和力学性能的实验研究》，《材料科学与工程：A辑》452 (2007) 657–664。

[12]B. Bahtiri, B. Arash, S. Scheffler, M. Jux, R. Rolfes，《含水量对环氧纳米复合材料适用的基于机器学习的黏弹–黏塑性模型》，《计算机方法在应用力学与工程中的应用》415 (2023) 116293。

[13]M. Ortiz, A. Pandolfi，三维裂纹扩展分析用有限变形不可逆内聚单元，《国际工程数值方法杂志》44（9）（1999）1267–1282。

[14] S. Li、M. Thouless、A. Waas、J. Schroeder、P. Zavattieri，使用内聚区模型分析纤维增强聚合物基复合材料的断裂，《复合材料科学与技术》65 (3-4) (2005) 537–549。[15] I. Lapczyk、J. A. Hurtado，纤维增强材料的渐进损伤建模，复合材料 A 辑：应用科学与制造 38 (11) (2007) 2333–2341。[16] M. G. Pike、C. Oskay，采用扩展有限元法对具有内聚界面的短微纤维增强复合材料进行建模，《分析与设计中的有限元》106 (2015) 16–31。

[17] M. Kästner、S. Müller、F. Hirsch、J.-S. Pap、I. Jansen、V. Ulbricht，胶粘连接纤维增强聚合物界面失效的扩展有限元法建模，《先进工程材料》18 (3) (2016) 417–426。[18] G. A. Francfort、J.-J. Marigo，将脆性断裂重新审视为能量最小化问题，《力学与固体物理学杂志》46 (8) (1998) 1319–1342。[19] B. Bourdin、G. A. Francfort、J.-J. Marigo，重新审视脆性断裂中的数值试验，《力学与固体物理学杂志》48 (4) (2000) 797–826。[20] C. Miehe、M. Hofacker、F. Welschinger，率无关裂纹扩展的相场模型：基于算子分裂的稳健算法实现，《计算机在应用力学与工程中的方法》199 (45-48) (2010) 2765–2778。[21] M. Ambati、T. Gerasimov、L. De Lorenzis，脆性断裂相场模型综述及一种新的快速混合公式，《计算力学》55 (2) (2015) 383–405。[22] J.-Y. Wu、V. P. Nguyen、C. T. Nguyen、D. Sutula、S. Sinaie、S. P. Bordas，断裂的相场建模，《应用力学进展》53 (2020) 1–183。[23] C. Miehe、F. Welschinger、M. Hofacker，断裂的热力学一致相场模型：变分原理与多场有限元实现，《国际工程数值方法杂志》83 (10) (2010) 1273–1311。[24] M. J. Borden、C. V. Verhoosel、M. A. Scott、T. J. Hughes、C. M. Landis，动态脆性断裂的相场描述，《计算机在应用力学与工程中的方法》217 (2012) 77–95。[25] M. Ambati、T. Gerasimov、L. De Lorenzis，延性断裂的相场建模，《计算力学》55 (2015) 1017–1040。[26] C. Miehe、S. Mauthe，多物理场问题中的断裂相场建模。第三部分：流体孔隙弹性中的裂纹驱动力与流体饱和多孔介质的水力压裂，《计算机在应用力学与工程中的方法》304 (2016) 619–655。[27] C. V. Verhoosel、R. De Borst，内聚断裂的相场模型，《国际工程数值方法杂志》

[28] S. Conti、M. Focardi、F. Iurlano，《黏聚断裂模型的相场近似》，载于：Annales de l’Institut Henri Poincaré C，非线性分析，第33卷，爱思唯尔，2016年，第1033–1067页。[29] B. Li、C. Peco、D. Millán、I. Arias、M. Arroyo，《强各向异性表面能脆性材料断裂的相场建模与模拟》，《国际工程数值方法杂志》102 (3-4) (2015) 711–727。[30] S. Teichtmeister、D. Kienle、F. Aldakheel、M.-A. Keip，《各向异性脆性固体断裂的相场建模》，《国际非线性力学杂志》97 (2017) 1–21。[31] J. Clayton、J. Knap，《各向异性多晶材料定向断裂的相场建模》，《计算材料科学》98 (2015) 158–169。[32] M. Hofacker、C. Miehe，《动态断裂的相场模型：用于分析复杂裂纹形态的稳健场更新》，《国际工程数值方法杂志》93 (3) (2013) 276–301。[33] Z. A. Wilson、M. J. Borden、C. M. Landis，《压电陶瓷断裂的相场模型》，《国际断裂力学杂志》183 (2) (2013) 135–153。[34] C. Miehe、L.-M. Schaenzel、H. Ulmer，《多物理场问题中的断裂相场建模。第一部分：热弹性固体中裂纹表面与脆性裂纹扩展失效准则的平衡》，《计算机在应用力学与工程中的方法》294 (2015) 449–485。[35] J. Bleyer、R. Alessi，《纳入多种损伤机制的各向异性脆性断裂相场建模》，《计算机在应用力学与工程中的方法》336 (2018) 213–236。[36] O. Gültekin、H. Dal、G. A. Holzapfel，《动脉壁断裂建模的相场方法：理论与有限元分析》，《计算机在应用力学与工程中的方法》312 (2016) 542–566。[37] A. Dean、P. A. V. Kumar、J. Reinoso、C. Gerendt、M. Paggi、E. Mahdi、R. Rolfes，《基于Puck失效理论的长纤维增强复合材料多相场断裂模型》，《复合材料结构》(2020) 112446。

[38] E. C. Bryant, W. Sun，采用一致运动学的各向异性岩石混合模式相场断裂模型，《计算机在应用力学与工程中的方法》342 (2018) 561–584。[39] A. Dean, J. Reinoso, N. Jha, E. Mahdi, R. Rolfes，短纤维增强复合材料延性断裂的相场方法，《理论与应用断裂力学》106 (2020) 102495。[40] A. Dean, J. Mavani, B. Bahtiri, B. Arash, R. Rolfes，一种用于预测介电纳米复合材料断裂的机电混合相场与深度学习框架，arXiv 预印本 arXiv:2508.07469 (2025)。[41] T. T. Nguyen, J. Yvonnet, Q.-Z. Zhu, M. Bornert, C. Chateau，通过微观结构直接成像模拟强非均质材料中裂纹成核与扩展的相场法，工程断裂力学 139 (2015) 18–39。[42] E. Tanné, T. Li, B. Bourdin, J.-J. Marigo, C. Maurini，脆性断裂变分相场模型中的裂纹成核，《力学与固体物理学杂志》110 (2018) 80–99。[43] K. Au-Yeung, A. Quintanas-Corominas, E. Martínez-Pañeda, W. Tan，复合材料的吸湿相场断裂建模，《计算机辅助工程》39 (6) (2023) 3847–3864。[44] P. J. Loew, B. Peters, L. A. Beex，利用黏性耗散对橡胶进行疲劳相场损伤建模：裂纹成核与扩展，《材料力学》142 (2020) 103282。[45] F. P. Duda, A. Ciarbonetti, P. J. Sánchez, A. E. Huespe，弹塑性固体脆性断裂的相场/梯度损伤模型，《国际塑性》65 (2015) 269–296。[46] J. Ulloa, P. Rodríguez, C. Samaniego, E. Samaniego，准脆性材料断裂的相场建模，地下空间 4 (1) (2019) 10–21。[47] F. Dammaß, K. A. Kalina, M. Ambati, M. Kästner，有限变形下率相关断裂现象的相场建模与分析，《计算力学》(2023) 1–25。

[48] P. K. A. V. Kumar, A. Dean, J. Reinoso, M. Paggi，基于实体壳概念的薄壁结构非线性热弹性相场断裂，《计算机在应用力学与工程中的方法》396 (2022) 115096。[49] B. Yin, J. Storm, M. Kaliske，采用代表性裂纹单元框架的黏弹性相场断裂，《国际断裂力学杂志》237 (1-2) (2022) 139– 163。[50] R. Shen, H. Waisman, L. Guo，采用修正相场法建模的黏弹性固体断裂，《计算机在应用力学与工程中的方法》346 (2019) 862–890。[51] P. J. Loew, B. Peters, L. A. Beex，橡胶的率相关相场损伤建模及其实验参数识别，《力学与固体物理学杂志》127 (2019) 266–294。[52] R. Brighenti, T. Rabczuk, X. Zhuang，模拟黏弹性弹性体失效的相场方法，《欧洲力学杂志 A：固体》85 (2021) 104092。[53] B. Arash, W. Exner, R. Rolfes，含水量对聚合物纳米复合材料非线性黏弹性断裂行为的影响：有限变形相场模型，《计算机辅助工程》39 (1) (2023) 773–790。[54] B. Arash, W. Exner, R. Rolfes, 聚合物纳米复合材料热黏弹性分析的有限变形相场断裂模型，《计算机在应用力学与工程中的方法》381 (2021) 113821。[55]B. Bahtiri, B. Arash, S. Scheffler, M. Jux, R. Rolfes，一种用于含水环氧纳米复合材料的机器学习黏弹性–黏塑性模型，《计算机在应用力学与工程中的方法》415 (2023) 116293。doi:https://doi.org/10.1016/j.cma.2023.116293.[56] J.-X. Liew, P. Zhang, M.-F. Kai, J.-G. Dai，湿气诱导的玻璃纤维增强聚合物-混凝土界面劣化特性的实验研究，《材料与设计》(2025) 114183。[57] E. Botelho, L. Pardini, M. Rezende，湿热效应对碳纤维/环氧复合材料剪切性能的影响，《材料科学杂志》41 (21) (2006) 7111–7118。

[58] S. Govindjee、S. Reese，两种大变形粘弹性模型的介绍与比较，《工程材料与技术杂志》119 (3) (1997) 251–255.[59] H. Qi、M. Boyce，热塑性聚氨酯的应力–应变行为，《材料力学》37 (8) (2005) 817–839.[60] M. C. Boyce、D. M. Parks、A. S. Argon，玻璃态聚合物的大非弹性变形。第一部分：率相关本构模型，《材料力学》7 (1) (1988) 15–33.[61] E. M. Arruda、M. C. Boyce，橡胶弹性材料大拉伸行为的三维本构模型，《力学与固体物理学杂志》41 (2) (1993) 389–412.

[62] J. C. Simo，《静态与动态乘法塑性算法：保留无穷小理论经典返回映射方案》，《计算机在应用力学与工程中的方法》99 (1) (1992) 61–112。

[63] S. Reese、S. Govindjee，《有限黏弹性理论及其数值方面》，International journal of solids and structures 35 (26-27)(1998) 3455–3482。

[64] M. Ambati、R. Kruse、L. De Lorenzis，《有限应变下延性断裂的相场模型及其实验验证》，《计算力学》57 (1) (2016年) 149–167。

[65] R. Unger、B. Arash、W. Exner、R. Rolfes，《温度对纳米颗粒/环氧纳米复合材料粘弹性损伤行为的影响：本构建模与实验验证》，《聚合物》191 (2020) 122265。

[66] W. Sun, E. L. Chaikof, M. E. Levenston，非线性超弹性材料模型有限元实现中切线模量的数值近似，《生物力学工程杂志》130 (6) (2008)。

[67] H. Ren, X. Zhuang, H. Zhu, T. Rabczuk，变分损伤模型：一种用于断裂的新型一致方法，《计算机与结构》305 (2024) 107518。

[68]S. Goswami, C. Anitescu, S. Chakraborty, T. Rabczuk，迁移学习增强的物理信息神经网络：用于断裂相场建模，《理论与应用断裂力学》106 (2020)102447。