arXiv:2603.02839v1 [math.DS] 3 Mar 2026

时变电流作用下洛伦兹力方程的可数多个周期解

谢卡[a,b]，徐鹏程[a,b,*]，郑作焕[a,b,c]

[a]中国科学院数学与系统科学研究院，中国北京市海淀区中关村东路*55*号，邮编*100190*[b]中国科学院大学，中国北京市石景山区玉泉路*19*号，邮编*100049*[c]中国科学院可靠性保障中心，中国北京市海淀区灯笼庄南路*9*号，邮编*100094*

摘要

本研究考察了由具有微小谐波调制的载流导线产生的电磁场中，受洛伦兹力方程支配的带电粒子的共振动力学。将该系统视为具有周期扰动的哈密顿系统后，采用梅尔尼科夫方法分析了未扰动系统中周期轨道的共振。研究证实，恰好存在一个周期为 T_1 的调和径向周期解，其周期与电流的周期相同。此外，研究还证明，任何其他径向周期解都必须是周期为 nT_1 的次谐波解，其中 $n > 1$为某个整数，并且对每个 n至多存在一个这样的解。从动力学角度看，这些留存的周期轨道对应于不变圆柱，它们将相空间分隔开来，并在全局范围内限制粒子的径向运动。

关键词： 洛伦兹力方程；电磁场；直导线；振荡电流；径向周期解；梅尔尼科夫方法*MSC*： 34C25, 78A35, 83A05, 34E10, 34D30

*通讯作者电子邮箱：xieka@amss.ac.cn（谢卡）、xupc@amss.ac.cn（徐鹏程）、zhzheng@amt.ac.cn（郑作焕）

1. 引言

洛伦兹力方程描述带电粒子在电磁场中缓慢加速时的运动，是数理物理中的基本方程之一。该方程由普朗克[16] 和庞加莱[17] 于1906年提出，至今仍是研究各种物理系统中粒子动力学的核心内容，涉及等离子体物理到天体物理现象等领域。许多教科书中都介绍了该方程的经典处理方法，例如 [13], [14], 和 [15]。尽管历史悠久，直到最近，人们对洛伦兹力方程解的定性和定量认识仍严重不足。已有研究采用拓扑度方法证明了满足狄利克雷条件和诺伊曼条件的解存在 [5]。近年来，人们开始运用临界点理论工具，系统研究洛伦兹力方程。更具体地说， [2] [3] 运用严格的临界点理论，证明了满足周期边界条件或狄利克雷边界条件的洛伦兹力方程存在多个解。

一种特殊的解，即周期解，因其与电磁场中反复出现且稳定的行为相关，在洛伦兹力方程的研究中受到广泛关注。许多作者研究了洛伦兹力方程周期解的存在性。对于允许存在孤立奇点的一大类势，已有研究证明了周期解的存在性[7]。这一结果通过拓扑方法得出，涵盖了库仑势和磁偶极子等重要的物理情形。对于相关的物理构型，即电场在原点处具有奇点，研究者运用Szulkin临界点理论证明了洛伦兹力方程的 T-周期解存在性 [18], ，从而进一步揭示了带电粒子在奇异电磁场中的动力学[4]。近期，Alberto Boscaggin证明，在奇异电场的背景下，洛伦兹力方程存在无穷多个 T-周期解 E[6]。该证明在非光滑临界点理论框架下，运用了Lusternik-Schnirelmann型极小极大原理。这些研究结果具有实际应用价值，包括带电粒子在Liénard-Wiechert势作用下的运动以及相对论受迫开普勒问题。此外，值得强调的是，将变分方法应用于奇异问题仍是一个有待深入研究的领域。

近年来，带电粒子在由沿无限长无限细直导线流动的时变电流所产生的电磁场中的洛伦兹力方程动力学引起了人们的兴趣。相关的非相对论动力学已得到广泛研究 [1], [10], [11], ，自洽导线分布中具有对称性的其他情形也在研究之列。当电中性导线中的电流恒定时，电场为零，磁场可通过毕奥-萨伐尔定律求得；通过麦克斯韦方程组可严谨地推导出这一结果。然而，当电流随时间变化时，系统便不再处于磁静态，毕奥-萨伐尔定律也不适用于非定常情形。因此，有必要通过求解麦克斯韦方程组来推导电磁场。对于紧支撑电流分布，可通过引入推迟势求得麦克斯韦方程组的解。然而，在此情形下，无限长导线并非紧支撑的。尽管如此，已有证明表明，相应的推迟势仍至少在分布意义下给出麦克斯韦方程组的一个解[8]。

在该模型的框架内，径向周期解是主要研究对象。这类运动描述了带电粒子在电磁场中的一种基本有界周期运动。这种周期行为可用于建模多种重要的物理现象。例如，在等离子体约束装置中，带电粒子沿磁力线流动时会表现出横向振荡。同样，在粒子加速器中，用于聚焦束流和增强稳定性的时变磁场会引起粒子在横向平面内做周期运动。此外，在某些天体物理系统中，例如对脉冲星磁层内或载流宇宙弦周围带电粒子动力学的简化模型，复杂电磁场的作用也可能导致类似的径向周期运动。在上述所有系统中，确定并刻画径向周期解，是理解振荡或非均匀电磁环境中复杂带电粒子动力学的基础。 [9] 利用拓扑度方法证明了扰动参数 k 在一个明确区间内时径向周期解的存在性。具体而言，该系统具有柱对称性，相应的线动量和角动量守恒。因此，洛伦兹力方程可约化为具有一个自由度的平面哈密顿系统。随后利用拓扑度证明径向周期解的存在性，其中扰动参数 k 的区间取决于

电流和守恒动量的取值。

然而，仍有几个问题有待解答。第一个问题是：当电流为谐函数时，对于洛伦兹力方程，有多少个周期与电流振荡周期相同的谐径向周期解？第二个问题是：是否存在周期不同于电流周期的径向周期解？系统中又有多少个周期解？第三个问题是：这些周期解位于何处？

为回答这些问题，我们分析了带有小幅谐波调制的恒定电流。在对应于恒定电流的未扰动情形下，可以证明存在一族连续的径向周期轨道，其振荡频率随能量单调变化。引入谐波调制后，系统呈现出丰富的共振现象。通过梅尔尼科夫分析，可以证明恰好存在一个谐径向周期解，它位于未扰动系统的周期轨道附近，且其径向振荡与驱动频率同步。此外，我们还证明，任何其他径向周期解都必须是周期为 nT_1 的次谐波解，其中 $n > 1$ 是一个整数，T_1 是电流的周期；并且对于每个 n，至多存在一个这样的解。这些周期解在扩展相空间中充当动力学屏障，维持着一系列不变区域，使带电粒子受困其中。

本文结构如下。第 2 节介绍预备知识，并从物理原理出发严格构建模型。第 3 节分析一个与洛伦兹力方程动力学等价的一自由度哈密顿系统的未扰动系统。研究表明，该系统存在唯一的平衡点，且此点为全局中心；围绕此中心的周期解的周期随哈密顿能量单调递增。最后，第 4 节采用梅尔尼科夫方法，证明在小幅谐波电流调制下存在可数个径向周期解。这些解的周期是电流周期的整数倍，且每个整数倍至多对应一个周期解。

2. 无限长导线中的洛伦兹力方程

不失一般性，将真空中的光速和荷质比均归一化为 1 后，本文研究的狭义相对论中的洛伦兹力方程如下：

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{q}(t)}{\sqrt{1-|\dot{q}(t)|^2}}\right) = E(t,q(t)) + \dot{q}(t)\times B(t,q(t)), \tag{1}$$

其中， $q(t)$是带电粒子， E 是电场， B 是磁场。

本文分析一根无限长无限细直导线的情形。不失一般性，假设该导线固定在 z轴上。假设导线呈电中性，即在任意时刻，导线的每一段都含有数量相同的电子和质子，因此电荷密度 ρ 为零。对于固定周期 $T_1>0$，定义巴拿赫空间 $C^n([0,T_1];\mathbb{R})$为由 T_1周期的 C^n类函数组成的空间。假设导线中通过的电流 I 具有如下形式

$$I = I_0 + kI_1(t),$$

其中， $I_0>0$、 $k\geq 0$ 为常数，且 $I_1(t)$满足

$$I_1(t)\in C^2([0,T_1];\mathbb{R}), \quad \int_0^{T_1} I_1(t)dt = 0. \tag{2}$$

因此，电流密度可表示为向量分布 $\vec{J}=(0,0,J)$，其中标量分量 J 定义为

$$J(f) = \int_{\mathbb{R}^2} [I_0 + kI_1(t)] f(t,0,0,z)\,dt\,dz,$$

对每个 $f\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^4)$ 都成立，其中 $\mathcal{D}(\mathbb{R}^4)$ 表示 $\mathbb{R}^4$ 中测试函数的空间。此外，引入电磁势 A 和 Φ，则电磁场为

$$B(t,q) = \nabla\times\vec{A}(t,q), \quad E(t,q) = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}(t,q) - \nabla\Phi(t,q), \tag{3}$$

对于特定的电荷和电流分布，能够唯一地求解麦克斯韦方程组。其中符号 ∇ 和 $\nabla\times$ 分别表示梯度和旋度

关于 q，而 ∂_t 是时间偏导数。请注意，这些导数原则上是在分布意义下定义的。在这种情况下，通过采用洛伦兹规范条件，麦克斯韦方程组被解耦为两个波动方程，其解为延迟势 Φ 和 A，其中标量势 $\Phi \equiv 0$ 和矢量势 $\vec{A}(t,q)$满足

$$\vec{A}(t,q) = A(t,r)\mathbf{e}_z, \quad A(t,r) = -\frac{\mu_0}{2\pi}\left[a_0(r) + ka(t,r)\right],$$

and

$$a_0(r) = I_0 \ln r, \quad a(t,r) = \int_0^\infty \frac{I_1[t,r,\tau]}{\sqrt{\tau^2+r^2}}\, d\tau, \tag{4}$$

其中 μ_0 是单位光速下的真空磁导率常数，r表示 XY平面中的径向变量，$\mathbf{e}_z$ 表示沿 z轴的正单位向量，括号 $[t,r,\tau] = \left(t - \sqrt{\tau^2+r^2}\right)$表示势的延迟效应。由此结果可知，若 $I_1(t) \in C^n([0,T_1];\, \mathbb{R})$，则 $a(t,r) \in C^n([0,T_1]\times\mathbb{R}^+;\, \mathbb{R})$。更多数学细节可见 [8]。

为研究洛伦兹力方程(1)，Garzón在 [9]中引入了柱坐标 $q = (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$，并将相对论径向动量、角动量和线动量分别记为 p_r、L和 p_z，其定义为

$$p_r = \frac{\dot{r}}{\sqrt{1-\dot{r}^2-r^2\dot{\theta}^2-\dot{z}^2}}, \quad L = \frac{r^2\dot{\theta}}{\sqrt{1-\dot{r}^2-r^2\dot{\theta}^2-\dot{z}^2}},$$
$$p_z = \frac{\dot{z}}{\sqrt{1-\dot{r}^2-r^2\dot{\theta}^2-\dot{z}^2}} + A(t,r).$$

显然，带电粒子的运动由其径向分量描述，并隐式依赖于 L、p_z 和 k。特别地，这使得可将(1)约化为一个平面单自由度哈密顿系统，即

$$\begin{cases} \dot{r} = \frac{p_r}{\sqrt{1+(p_z-A)^2+p_r^2+L^2r^{-2}}}, \\ \dot{p_r} = \frac{L^2r^{-3}+(p_z-A)\partial_r A}{\sqrt{1+(p_z-A)^2+p_r^2+L^2r^{-2}}}, \end{cases} \tag{5}$$

其哈密顿量为

$$H(t,r,p_r) = \sqrt{1+(p_z-A)^2+p_r^2+L^2r^{-2}}.$$

这里，对于任意 $k \geq 0$，L 和 p_z 都是方程 (1) 的第一积分。更多数学细节请参见 [9]。

为便于表示，下面的分析中定义了以下函数:

$$\begin{aligned} F_1(r,p_r,k) &= \frac{p_r}{\sqrt{1+(p_z-A)^2+p_r^2+L^2r^{-2}}}, \\ F_2(r,p_r,k) &= \frac{L^2r^{-3}+(p_z-A)\partial_r A}{\sqrt{1+(p_z-A)^2+p_r^2+L^2r^{-2}}}. \end{aligned} \tag{6}$$

因此，(5) 变为

$$\begin{cases} \dot{r} = F_1(r,p_r,k), \\ \dot{p}_r = F_2(r,p_r,k). \end{cases} \tag{7}$$

此外，根据正则摄动法，(7) 可展开为

$$\begin{cases} \dot{r} = F_1(r,p_r,0) + k\cdot\frac{\partial F_1}{\partial k}(r,p_r,0) + O(k^2), \\ \dot{p}_r = F_2(r,p_r,0) + k\cdot\frac{\partial F_2}{\partial k}(r,p_r,0) + O(k^2), \end{cases} \tag{8}$$

其中一阶摄动系数为

$$\frac{\partial F_1}{\partial k}(r,p_r,0) = -\frac{\frac{\mu_0}{2\pi}p_r\left(p_z+\frac{\mu_0}{2\pi}I_0\ln r\right)a(t,r)}{\left(1+\left(p_z+\frac{\mu_0}{2\pi}I_0\ln r\right)^2+p_r^2+L^2r^{-2}\right)^{\frac{3}{2}}},$$

and

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_2}{\partial k}(r,p_r,0) = &-\frac{\left(\frac{\mu_0}{2\pi}\right)^2 I_0 r^{-1}a(t,r)+\frac{\mu_0}{2\pi}\left(p_z+\frac{\mu_0}{2\pi}I_0\ln r\right)\partial_r a(t,r)}{\sqrt{1+\left(p_z+\frac{\mu_0}{2\pi}I_0\ln r\right)^2+p_r^2+L^2r^{-2}}} \\ &-\frac{\left[L^2r^{-3}-\frac{\mu_0}{2\pi}I_0r^{-1}\left(p_z+\frac{\mu_0}{2\pi}I_0\ln r\right)\right]\frac{\mu_0}{2\pi}\left(p_z+\frac{\mu_0}{2\pi}I_0\ln r\right)a(t,r)}{\left(1+\left(p_z+\frac{\mu_0}{2\pi}I_0\ln r\right)^2+p_r^2+L^2r^{-2}\right)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

方程 (8) 的未扰动系统为

$$\begin{cases} \dot{r} = \frac{p_r}{\sqrt{1+(p_z+\frac{\mu_0}{2\pi}I_0\ln r)^2+p_r^2+L^2r^{-2}}}, \\ \dot{p_r} = \frac{L^2r^{-3}-\frac{\mu_0}{2\pi}I_0r^{-1}(p_z+\frac{\mu_0}{2\pi}I_0\ln r)}{\sqrt{1+(p_z+\frac{\mu_0}{2\pi}I_0\ln r)^2+p_r^2+L^2r^{-2}}}. \end{cases} \tag{9}$$

系统（9）也是一个哈密顿系统，其哈密顿能量函数为

$$H(r,p_r) = \sqrt{1+(p_z+\frac{\mu_0}{2\pi}I_0\ln r)^2+p_r^2+L^2r^{-2}}. \tag{10}$$

本文研究一类特殊的解，称为径向周期解，其定义如下:

定义 1. 方程 (1) 的解 $q(t) = (r(t)\ \theta(t)\ z(t))$，其线动量为 p_z，角动量为 L，称为(L, p_z)-解。此外，若其径向以 T 为周期，则称其为径向 T-周期的

$$r(t+T) = r(t), \quad for\ every \quad t \in \mathbb{R}.$$

3. 未扰动系统的动力学

本节研究未扰动系统 (9)，它在 $k = 0$ 处由方程 (8) 表示。在这种情况下，电场消失，系统处于静磁场状态。

对于任意一对 $(L, p_z) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$，可以证明 (9) 中存在唯一的平衡点 ($\bar{r}$,0)，满足等式

$$p_z + \frac{\mu_0}{2\pi} I_0 \ln \bar{r} = \frac{2\pi}{\mu_0} \frac{L^2}{I_0} \bar{r}^{-2}. \tag{11}$$

为了分析平衡点 ($\bar{r}$,0) 的稳定性，考虑 (9) 的线性化系统，其线性化矩阵为

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{1+\left(p_z+\frac{\mu_0}{2\pi}I_0\ln\bar{r}\right)^2+L^2\bar{r}^{-2}}} \\ \frac{-2L^2\bar{r}^{-4}-\left(\frac{\mu_0}{2\pi}I_0\right)^2\bar{r}^{-2}}{\sqrt{1+\left(p_z+\frac{\mu_0}{2\pi}I_0\ln\bar{r}\right)^2+L^2\bar{r}^{-2}}} & 0 \end{bmatrix},$$

与该矩阵相关的特征方程为

$$\lambda^2 - \frac{-2L^2\bar{r}^{-4} - \left(\frac{\mu_0}{2\pi}I_0\right)^2 \bar{r}^{-2}}{1 + \left(p_z + \frac{\mu_0}{2\pi}I_0 \ln \bar{r}\right)^2 + L^2\bar{r}^{-2}} = 0.$$

显然可以推得，特征根是一对纯虚数。因此，平衡点 ($\bar{r}$，0) 是方程 (9) 的中心；由于该系统是哈密顿系统，它还是全局中心。此外，由于方程 (9) 右端函数所对应的向量场关于r轴对称，解轨道也关于 r轴对称。这

这种对称性意味着系统的动力学在关于 r轴反射时保持不变。特别是在此情形下，系统 (1) 的每个解都是径向周期的，并且存在唯一的径向平衡点。

下文将建立方程 (9) 的周期轨道的周期与其相应哈密顿能量之间的关系。由于方程 (9) 是哈密顿系统，哈密顿函数 $H(r,\ p_r)$ 沿每条轨道保持不变，这是哈密顿系统的一项基本性质。值得注意的是，每条非平凡轨道都与 r轴相交于两个不同的点，分别记为 $(r_a,\ 0)$ 和 $(r_b,\ 0)$，其中 $0 < r_a < \bar{r} < r_b$ 和 $\bar{r}$在式 (11) 中定义。对于给定的哈密顿能量 H，r_a 和 r_b 可表示为

$$H^2 = 1 + (p_z + \frac{\mu_0}{2\pi} I_0 \ln r)^2 + L^2 r^{-2}.$$

由方程 (10) 可推得

$$p_r = \sqrt{H^2 - \left(1 + (p_z + \frac{\mu_0}{2\pi} I_0 \ln r)^2 + L^2 r^{-2}\right)},$$

将该方程代入系统 (9)，可得

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{\sqrt{H^2 - 1 - (p_z + \frac{\mu_0}{2\pi} I_0 \ln r)^2 - L^2 r^{-2}}}{H}.$$

沿着从 r_a 到 r_b的路径对该方程积分，可确定哈密顿量为 H 的轨道的周期 T，即

$$T(H) = 2\int_{r_a}^{r_b} \frac{H}{\sqrt{H^2 - 1 - (p_z + \frac{\mu_0}{2\pi} I_0 \ln r)^2 - L^2 r^{-2}}} \mathrm{d}r. \tag{12}$$

后续研究的重点是确定不同的哈密顿能量是否对应不同的周期。为此，必须考察周期关于哈密顿能量的导数。在进行这一考察之前，先引入一个简化函数以便于分析，其定义如下

$$f(r) = 1 + \left(p_z + \frac{\mu_0}{2\pi} I_0 \ln r\right)^2 + L^2 r^{-2}. \tag{13}$$

因此，（12）可改写为

$$T(H) = 2\int_{r_a}^{r_b} \frac{H}{\sqrt{H^2 - f(r)}}\, \mathrm{d}r.$$

推导出的周期表达式 $T(H)$ 更便于后续计算。由于 $\bar{r}$ 被确定为函数 $f(r)$ 的最小点，因此将该点处的最小值记为 H_0^2，即 $f(r)$ 的最小值。因此，$T(H)$ 可表示为

$$T(H) = 2\int_{r_a}^{r_b} \frac{H/\sqrt{H^2 - H_0^2}}{\sqrt{1 - \frac{f(r) - H_0^2}{H^2 - H_0^2}}} \, \mathrm{d}r.$$

引入变量

$$y^2 = \frac{f(r) - H_0^2}{H^2 - H_0^2},$$
$$z = y\sqrt{H^2 - H_0^2}.$$

则 $T(H)$ 可改写为

$$T(H) = 2\int_{-1}^{1} \frac{H/\sqrt{H^2 - H_0^2}}{\sqrt{1 - y^2}} \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}z} \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} \, \mathrm{d}y.$$

根据 y 和 z的定义，可得

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} = \sqrt{H^2 - H_0^2},$$

由此得到

$$T(H) = 2\int_{-1}^{1} \frac{H}{\sqrt{1 - y^2}} \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}z} \mathrm{d}y. \tag{14}$$

由于

$$z^2 = 1 + \left(p_z + \frac{\mu_0}{2\pi} I_0 \ln r\right)^2 + L^2 r^{-2} - H_0^2,$$

我们引入函数 $g(r)$，使其满足

$$g(r) = \frac{1}{2} z^2.$$

此外，对每个 $y \in (-1,1)$，定义变量 r_1 和 r_2，使其满足$r_1 < \bar{r} < r_2$ 以及

$$y^2(H^2 - H_0^2) = 2g(r), \tag{15}$$

其中 $\bar{r}$ 已在(11)中定义。函数 $g(r)$在 $\bar{r}$处达到其最小值，并在 $\bar{r}$的两侧单调。在该定理的证明之前，先建立以下引理。

引理1。函数

$$s(r)=\frac{(g'(r))^2-2g''(r)g(r)}{(g'(r))^3},$$

在 $r\in(0,\infty)$ 上单调递增。

引理 2. 设 T_0 为方程 (9) 的周期解的最小周期，则

$$T_0=\sqrt{\frac{2\pi^2H_0^2}{\left(\frac{\mu_0}{2\pi}I_0-p_z-\frac{\mu_0}{2\pi}I_0\ln\bar{r}\right)\frac{\mu_0}{2\pi}I_0\bar{r}^{-2}+3L^2\bar{r}^{-4}}}.$$

证明. 对于每个 $y\in(-1,1)$，令 r_1, r_2 满足 $r_1<\bar{r}<r_2$ 和 (15)。由函数 $g(r)$ 的定义可得

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}z}=\frac{z}{g'(r)}.$$

因此,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}T(H)&=\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}z}H\,dy\\&=\int_{-1}^{0}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\frac{-\sqrt{2g(r_1)}}{g'(r_1)}H\,dy+\int_{0}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\frac{\sqrt{2g(r_2)}}{g'(r_2)}H\,dy.\end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}T(H_0)&=\lim_{H\to H_0}\left(\int_{-1}^{0}\frac{-\sqrt{2g(r_1)}}{g'(r_1)\sqrt{1-y^2}}H\,dy+\int_{0}^{1}\frac{\sqrt{2g(r_2)}}{g'(r_2)\sqrt{1-y^2}}H\,dy\right)\\&=\int_{-1}^{0}\lim_{H\to H_0}\left(\frac{H}{\sqrt{1-y^2}}\frac{-2\sqrt{g(r_1)}}{g'(r_1)}\right)dy\\&\quad+\int_{0}^{1}\lim_{H\to H_0}\left(\frac{H}{\sqrt{1-y^2}}\frac{\sqrt{2g(r_2)}}{g'(r_2)}\right)dy\\&=\int_{-1}^{0}\frac{H_0}{\sqrt{1-y^2}}\sqrt{\frac{2}{g''(\bar{r})}}\,dy+\int_{0}^{1}\frac{H_0}{\sqrt{1-y^2}}\sqrt{\frac{2}{g''(\bar{r})}}\,dy\\&=\frac{\pi}{2}H_0\sqrt{\frac{2}{g''(\bar{r})}}+\frac{\pi}{2}H_0\sqrt{\frac{2}{g''(\bar{r})}}\\&=\sqrt{2}\pi H_0\sqrt{\frac{1}{g''(\bar{r})}}.\end{aligned}$$

□

引理3. 设 $T(H)$ 如 (12) 所定义，则

$$T(H) \to +\infty \quad when \quad H \to +\infty.$$

证明。 由（12）可推得

$$\begin{aligned} T(H) =& 2\int_{r_a}^{r_b} \frac{H}{\sqrt{H^2 - 1 - (p_z + \frac{\mu_0}{2\pi} I_0 \ln r)^2 - L^2 r^{-2}}} \mathrm{d}r \\ >& 2(r_b - r_a). \end{aligned}$$

因此，根据 r_a 和 r_b的定义，当H 趋于无穷大时， $T(H)$也趋于无穷大。

□

由此可直接得到

定理1。 设 I_0 为正， $I_1(t) \in C^2([0, T_1]; \mathbb{R})$ 满足(2)。对于任意一对(L, p_z) $\in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$，周期函数 $T(H)$ 随哈密顿能量 H严格单调递增，且$\lim_{H\to\infty} T(H) = \infty$。

证明。 对（14）中的 $T(H)$关于 H 求导，得到

$$\frac{\mathrm{d}T(H)}{\mathrm{d}H} = 2\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \left(z \frac{H^2}{H^2 - H_0^2} \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}z^2} + \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}z} \right) \mathrm{d}y. \tag{16}$$

根据 $g(r)$的定义，可得

$$z\mathrm{d}z = g'(r)\mathrm{d}r.$$

由此可得

$$\mathrm{d}z = g'(r)\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}z}\right) + g''(r)\mathrm{d}r\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}z}\right).$$

将方程两边同时除以 $\mathrm{d}z$ ，可得

$$1 = g'(r)\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}z^2} + g''(r)\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}z}\right)^2.$$

鉴于

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}z} = \frac{z}{g'(r)},$$

由此可得

$$\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}z^2} = \frac{1 - g''(r)\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}z}\right)^2}{g'(r)}.$$

因此，方程(16)中的一些项变为

$$\begin{aligned} z\frac{H^2}{H^2 - H_0^2}\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}z^2} + \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}z} =& z\frac{H^2}{H^2 - H_0^2}\frac{1 - g''(r)\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}z}\right)^2}{g'(r)} + \frac{z}{g'(r)} \\ =& \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}z}\left(\frac{H^2}{H^2 - H_0^2}\left(1 - g''(r)\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}z}\right)^2\right) + 1\right). \end{aligned}$$

将其代入(16)，可得

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}T(H)}{\mathrm{d}H} =& 2\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}z}\left(\frac{H^2}{H^2 - H_0^2}\left(1 - g''(r)\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}z}\right)^2\right) + 1\right)\mathrm{d}y \\ =& 2\int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\frac{z}{g'(r)}\left(\frac{H^2\left(1 - g''(r_1)\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}z}\right)^2\right)}{H^2 - H_0^2} + 1\right)\mathrm{d}y \\ &+ 2\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\frac{z}{g'(r)}\left(\frac{H^2\left(1 - g''(r_2)\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}z}\right)^2\right)}{H^2 - H_0^2} + 1\right)\mathrm{d}y \\ =& 2\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\frac{-y\sqrt{H^2 - H_0^2}}{g'(r)}\left(\frac{H^2\left(1 - g''(r_1)\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}z}\right)^2\right)}{H^2 - H_0^2} + 1\right)\mathrm{d}y \\ &+ 2\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\frac{y\sqrt{H^2 - H_0^2}}{g'(r)}\left(\frac{H^2\left(1 - g''(r_2)\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}z}\right)^2\right)}{H^2 - H_0^2} + 1\right)\mathrm{d}y \\ =& 2\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\frac{-\sqrt{2g(r_1)}}{g'(r_1)}\left(\frac{H^2\left(1 - g''(r_1)\frac{2g(r_1)}{(g'(r_1))^2}\right)}{H^2 - H_0^2} + 1\right)\mathrm{d}y \\ &+ 2\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\frac{\sqrt{2g(r_2)}}{g'(r_2)}\left(\frac{H^2\left(1 - g''(r_2)\frac{2g(r_2)}{(g'(r_2))^2}\right)}{H^2 - H_0^2} + 1\right)\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

下面的目标是证明上述积分为正，从而得到周期 T 关于

哈密顿量 H 的单调性。只需证明

$$\frac{-\sqrt{2g(r_1)}}{g'(r_1)}\left(\frac{H^2}{H^2-H_0^2}\left(1-g''(r_1)\frac{2g(r_1)}{(g'(r_1))^2}\right)+1\right) + \frac{\sqrt{2g(r_2)}}{g'(r_2)}\left(\frac{H^2}{H^2-H_0^2}\left(1-g''(r_2)\frac{2g(r_2)}{(g'(r_2))^2}\right)+1\right)>0.$$

应用引理1以及

$$s(\bar{r})=-\frac{g'''(\bar{r})}{3(g''(\bar{r}))^2},$$

可以推出

$$-\frac{1}{g'(r_1)}\left(1-2\frac{g''(r_1)g(r_1)}{(g'(r_1))^2}\right)+\frac{1}{g'(r_2)}\left(1-2\frac{g''(r_2)g(r_2)}{(g'(r_2))^2}\right)\geq 0.$$

注意

$$\frac{-1}{g'(r_1)}+\frac{1}{g'(r_2)}>0,$$

该断言得以证实。结合引理3，显然该定理成立。

□

4. 受扰系统的动力学

本节利用梅尔尼科夫方法分析径向周期解的存在性。详见 [12] [19] [20] 。

在给出结果之前，先对函数 $a(t,\ r)$ 作出一个假设。注意到 $a(t,\ r)$ 是时间周期为 T_1 的周期函数。因此，合理地假设 $a(t,\ r)$ 满足 (4)，并且

$$a(t,r)=D(r)sin(\omega_1 t), \tag{17}$$

其中 $\omega_1=\frac{2\pi}{T_1}$和 $D(r)\in C^2(\mathbb{R}^+;\mathbb{R})$。随后，得到以下结果：

定理2. 设 I_0 为正， $I_1(t)\in C^2([0,T_1];\mathbb{R})$ 满足(2) 且 $T_1>T_0$。取 $0<k\ll 1$，且 $a(t,r)$ 满足(17)。对任意一对$(L,p_z)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}$，(1) 至多存在可数个径向周期解，其周期为 T_1的整数倍。此外，对每个这样的周期，至多存在一个相应的周期解。

证明. 首先，我们关注该系统

$$\begin{cases} \dot{r} = F_1(r, p_r, 0) + k \cdot \frac{\partial F_1}{\partial k}(r, p_r, 0), \\ \dot{p}_r = F_2(r, p_r, 0) + k \cdot \frac{\partial F_2}{\partial k}(r, p_r, 0), \end{cases} \tag{18}$$

其中，函数 $F_1(r, p_r, 0)$ 和 $F_2(r, p_r, 0)$ 在（6）中定义，且 $k = 0$。根据（17），引入函数 $G_1(r, p_r, 0)$ 和 $G_2(r, p_r, 0)$，可将（18）改写为

$$\begin{cases} \dot{r} = F_1(r, p_r, 0) + k \cdot G_1(r, p_r, 0) \sin(\omega_1 t), \\ \dot{p}_r = F_2(r, p_r, 0) + k \cdot G_2(r, p_r, 0) \sin(\omega_1 t), \end{cases}$$

其中

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial k}(r, p_r, 0) &= G_1(r, p_r, 0) \sin(\omega_1 t), \\ \frac{\partial F_2}{\partial k}(r, p_r, 0) &= G_2(r, p_r, 0) \sin(\omega_1 t). \end{aligned}$$

注意，两个扰动系数都是周期为 T_1 的周期函数。因此，当 k 足够小时，可以采用梅尔尼科夫方法分析方程（18）的周期解。为简化符号，以下省略 $k = 0$。注意，$(\bar{r}, 0)$ 是未扰动系统（9）的全局中心，平衡点附近周期解的最小周期为 T_0。因此，对于未扰动系统（9）中周期为 $T_1 > T_0$、哈密顿量为 H_1 的周期解 Γ_1，定义梅尔尼科夫函数如下

$$\begin{aligned} M(t_0) = \int_0^{T_1} [&F_1(r_1, p_{r_1}) G_2(r_1, p_{r_1}) \\ &- F_2(r_1, p_{r_1}) G_1(r_1, p_{r_1})] \sin\left(\omega_1 (t - t_0)\right) \mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{19}$$

如果这个函数有简单零点，那么受扰系统将存在一个周期为 T_1 的周期解，且位于 Γ_1 附近。经过简单计算可得

$$F_1 G_2 - F_2 G_1 = -\frac{\left(\frac{\mu_0}{2\pi}\right)^2 I_0 {r_1}^{-1} D(r_1) + \frac{\mu_0}{2\pi}\left(p_z + \frac{\mu_0}{2\pi} I_0 \ln r_1\right) \partial_r D(r_1)}{H_1^2} p_{r_1}.$$

注意，上述 T_1 周期函数 $F_1 G_2 - F_2 G_1$ 的傅里叶变换为

$$F_1 G_2 - F_2 G_1 = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(k\omega_1 t\right) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(k\omega_1 t\right),$$

其中

$$a_0 = \frac{1}{T_1}\int_0^{T_1}(F_1G_2 - F_2G_1)(r_1, p_{r_1})\,dt,$$
$$a_k = \frac{2}{T_1}\int_0^{T_1}(F_1G_2 - F_2G_1)(r_1, p_{r_1})\cos(k\omega_1 t)\,\mathrm{d}t,$$
$$b_k = \frac{2}{T_1}\int_0^{T_1}(F_1G_2 - F_2G_1)(r_1, p_{r_1})\sin(k\omega_1 t)\,\mathrm{d}t,$$

是傅里叶系数。将此傅里叶变换代入（19），则

$$\begin{aligned}
M(t_0) &= \int_0^{T_1}\left[a_1\cos(\omega_1 t)\sin(\omega_1(t-t_0)) + b_1\sin(\omega_1 t)\sin(\omega_1(t-t_0))\right]\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{T_1}\left[-a_1\sin(\omega_1 t_0)\cos^2(\omega_1 t) + b_1\cos(\omega_1 t_0)\sin^2(\omega_1 t)\right]\mathrm{d}t \\
&= -a_1\sin(\omega_1 t_0)\frac{T_1}{2} + b_1\cos(\omega_1 t_0)\frac{T_1}{2} \\
&= \frac{T_1}{2}\sqrt{a_1^2+b_1^2}\sin(\omega_1 t_0 + \phi),
\end{aligned}$$

其中 ϕ 是满足下列条件的常数

$$\sin\phi = \frac{b_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}, \quad \cos\phi = -\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}.$$

因此，当满足下列条件时，梅尔尼科夫函数 $M(t_0)$ 将有简单零点

$$a_1^2 + b_1^2 \neq 0.$$

由定理1可知，当 $T_1 > T_0$ 时，方程（9）存在唯一的 T_1-周期解。因此可以推得，在此情形下，系统（18）存在唯一的 T_1-周期解。

对于周期为 nT_1、哈密顿量为 H_n的未扰动系统(9)的周期解 Γ_n，其中 n 为正整数且 $n > 1$，定义梅尔尼科夫函数为

$$\begin{aligned}
M_n(t_0) = \int_0^{nT_1}&[F_1(r_n, p_{r_n})G_2(r_n, p_{r_n}) \\
&- F_2(r_n, p_{r_n})G_1(r_n, p_{r_n})]\sin(\omega_1(t-t_0))\,\mathrm{d}t. \quad (20)
\end{aligned}$$

与上述计算类似，将nT_1-周期函数（$F_1G_2 - F_2G_1$）（r_n， p_{r_n}）的傅里叶变换代入(20)，则

$$\begin{aligned} M_n(t_0) &= \int_0^{nT_1} \left[-a_n^{(n)} \sin(\omega_1 t_0) \cos^2(\omega_1 t) + b_n^{(n)} \cos(\omega_1 t_0) \sin^2(\omega_1 t)\right] \mathrm{d}t \\ &= -a_n^{(n)} \sin(\omega_1 t_0) \frac{nT_1}{2} + b_n^{(n)} \cos(\omega_1 t_0) \frac{nT_1}{2} \\ &= \frac{nT_1}{2} \sqrt{\left(a_n^{(n)}\right)^2 + \left(b_n^{(n)}\right)^2} \sin(\omega_1 t_0 + \phi^{(n)}), \end{aligned}$$

其中， $a_n^{(n)}$、 $b_n^{(n)}$是傅里叶系数，满足

$$\begin{aligned} a_n^{(n)} &= \frac{2}{nT_1} \int_0^{nT_1} (F_1G_2 - F_2G_1)(r_1, p_{r_1}) \cos(\omega_1 t) \, \mathrm{d}t, \\ b_n^{(n)} &= \frac{2}{nT_1} \int_0^{nT_1} (F_1G_2 - F_2G_1)(r_1, p_{r_1}) \sin(\omega_1 t) \, \mathrm{d}t, \end{aligned}$$

且 $\phi^{(n)}$ 是满足以下条件的常数:

$$\sin\phi^{(n)} = \frac{b_n^{(n)}}{\sqrt{(a_n^{(n)})^2 + (b_n^{(n)})^2}}, \quad \cos\phi^{(n)} = -\frac{a_n^{(n)}}{\sqrt{(a_n^{(n)})^2 + (b_n^{(n)})^2}}.$$

因此，当满足以下条件时，梅尔尼科夫函数 $M_n(t_0)$ 存在简单零点

$$(a_n^{(n)})^2 + (b_n^{(n)})^2 \neq 0,$$

由此可知，在此情形下，系统 (18) 存在一个周期为 nT_1、且位于 Γ_n 附近的周期解。此外，对于未扰动系统中具有其他周期的周期解，也存在相应的梅尔尼科夫函数，它们恒等于零，这表明受扰系统不存在具有这些特定周期的周期解。因此，根据引理 2、引理3和定理1可知，系统 (18) 至多具有可数个周期解，其周期为 T_1 的整数倍，且每个整数倍至多对应一个周期解。

另一方面，由于动力系统 (18) 至多有可数个周期解，且这些解都是双曲的，这意味着该系统是结构稳定的。因此，系统 (8) 和 (18) 的动力学性质

在 k 足够小时是一致的。因此，当电流周期为 $T_1 > T_0$ 时，系统 (5) 也至多有可数个周期解，其周期是 T_1 的整数倍。此外，对于每个这样的周期，至多存在一个对应的周期解。

□

注1. 在上述定理的证明中，使梅尔尼科夫函数为零的系数集 p_z 与 I_0 相对较小。当$0 < k \ll 1$时，对于某些参数对(L, p_z)，可能存在整数 n，使得周期为 nT_1 的周期解不存在；但如果系统(5)确实存在周期解，则其周期必须是T_1的整数倍。

注2. 在包含时间 t的扩展相空间中，未扰动系统（恒定电流）中初始能量为 $H > H_0$的带电粒子被约束在相应的不变柱面上运动。当引入小的谐波调制时，这些不变圆柱中的大多数会被破坏。只有可数的一族这样的柱面得以保持，每一柱面对应一个径向周期解，其周期为电流周期的整数倍 nT_1 ，且对每个整数$n \geq 1$至多存在一个这样的柱面。这些幸存的不变圆柱按层级组织：任意两个相邻柱面在扩展相空间中形成一个不变区域。因此，从该区域内出发的粒子在所有时间内都保持被困在相应柱面之间。这一结构意味着粒子的运动被严格组织成离散能量壳层，体现了由周期驱动所诱导的共振层级。

5. 结论

本文研究带电粒子在由一根通有时间周期振荡电流的电中性无限长直导线所产生的电磁场中的运动；对于相应的分布电流 J，该电磁场是麦克斯韦方程组的唯一解。通过将洛伦兹力方程 (1) 化简为在 [9], 中具有一个自由度的哈密顿系统 (5)，本分析揭示了谐波电流调制下产生的丰富共振结构。针对小扰动参数 k，我们利用梅尔尼科夫方法证明，未扰动系统中的连续不变圆柱族会分裂为离散且可数的周期轨道集合。具体而言，我们证明恰好存在一个调和径向周期解，并且

表明任何其他径向周期解的周期都必须是驱动电流周期的整数倍 nT_1 。此外，对于每一个这样的周期，至多存在一个相应的周期解。

从动力学的角度来看，这些结果揭示了严格的共振层级结构。这些特定周期轨道的持续存在意味着，相空间保留了结构化稳定性：在这些幸存不变圆柱之间区域内初始化的粒子，其径向运动始终受到约束。因此，这项工作从数学上严格说明了含时电磁扰动如何将带电粒子运动组织成离散能量壳层。

致谢

作者获得国家自然科学基金（编号：12090014、12031020）的资助。

附录 A. 引理1的证明

对 $s(r)$求导可得

$$s'(r) = \frac{-2g'''(r)g(r)g'(r) - 3g''(r)\left(g'(r)\right)^2 + 6\left(g''(r)\right)^2 g(r)}{(g'(r))^4}.$$

由于分母始终为正，只需证明分子非负：

$$-2g'''(r)g(r)g'(r) - 3g''(r)\left(g'(r)\right)^2 + 6\left(g''(r)\right)^2 g(r) \geq 0.$$

Co考虑方程 (13) 中定义的函数 $f(r)$。在代入 n

$$x = e^{\frac{p_z}{\frac{\mu_0}{2\pi} I_0}} r,$$

函数 f 变为

$$f(x) = 1 + I \ln^2 x + K x^{-2}, \tag{A.1}$$

其中

$$I = \left(\frac{\mu_0}{2\pi} I_0\right)^2, \quad K = L^2 e^{\frac{2p_z}{\frac{\mu_0}{2\pi} I_0}}.$$

对 (A.1) 求导，得到

$$f'(x) = 2I \ln x \cdot x^{-1} - 2K x^{-3}.$$

存在唯一的 x_0，使得 $f'(x_0) = 0$，这意味着

$$K = Ix_0^2 \ln x_0.$$

将此表达式代入 (A.1) 中的 K，得到

$$f(x) = 1 + I \ln^2 x + Ix_0^2 \ln x_0 \cdot x^{-2}.$$

因此，函数 $g(x)$ 可以写成

$$g(x) = \frac{I}{2}(\ln^2 x + x_0^2 \ln x_0 \cdot x^{-2} - \ln^2 x_0 - \ln x_0).$$

Let

$$G(x) = 2I^{-1} g(x_0 x), \quad a = \ln x_0,$$

化简后得

$$G(x) = (\ln x + a)^2 + ax^{-2} - a^2 - a,$$

其中 $a > 0$。因此，只需证明

$$-2G'''(x)G(x)G'(x) - 3G''(x)\left(G'(x)\right)^2 + 6\left(G''(x)\right)^2 G(x) \geq 0.$$

用一个新变量替换 $\log x$，不妨将其记为 x。经过化简和计算，只需证明

$$\begin{aligned}
&3\left(a + e^{2x}\left(-a + 2ax + x^2\right)\right)\left(3a + e^{2x}\left(1 - a - x\right)\right)^2 \\
&- \left(a + e^{2x}\left(-a + 2ax + x^2\right)\right)\left(-a + e^{2x}(x + a)\right)\left(-12a + e^{2x}(-3 + 2a + 2x)\right) \\
&- 3\left(-a + e^{2x}(x + a)\right)^2\left(3a + e^{2x}(1 - a - x)\right) \geq 0,
\end{aligned}$$

其中 $x \in \mathbb{R}$，$a > 0$。将上述函数定义为 $P(x,\ a)$，则该函数可以表示为关于 a 的三次多项式：

$$P(x, a) = C_3(x)a^3 + C_2(x)a^2 + C_1(x)a + C_0(x),$$

其中系数由下式给出

$$\begin{aligned}
C_3(x) &= e^{6x}(2x + 2) + e^{4x}(-8x - 10) + e^{2x}(30x + 2) + 6, \\
C_2(x) &= e^{6x}(5x^2 + x) + e^{4x}(-12x^2 + 6x - 12) + e^{2x}(15x^2 + 17x + 12), \\
C_1(x) &= e^{6x}(4x^3 - x^2 + 3x - 3) + e^{4x}(-4x^3 + x^2 + 3x + 3), \\
C_0(x) &= e^{6x}x^4.
\end{aligned}$$

由于 $a > 0$，如果每个系数 $C_i(x) \geq 0$对所有 $x \in \mathbb{R}$均成立，则 $P(x,\ a)$ 的非负性随之成立。下面将对此逐一证明。

为证明 $C_1(x) \geq 0$，代入 $x \mapsto x/2$ 后，只需证明

$$f_1(x) = e^x(2x^3 - x^2 + 6x - 12) - 2x^3 + x^2 + 6x + 12 \geq 0.$$

对 $f_1(x)$ 求导，得到

$$\begin{aligned} f_1'(x) &= e^x(2x^3 + 5x^2 + 4x - 6) - 6x^2 + 2x + 6, \\ f_1''(x) &= e^x(2x^3 + 11x^2 + 14x - 2) - 12x + 2, \\ f_1'''(x) &= e^x(2x^3 + 17x^2 + 36x + 12) - 12, \\ f_1^{(4)}(x) &= e^x(2x^3 + 23x^2 + 70x + 48). \end{aligned}$$

通过分析 $f_1^{(4)}(x)$ 的符号，可知 $f_1'''(x) > 0$当$x > 0$时，以及 $f_1'''(x) < 0$当 $x < 0$时。因此，$f_1''(x) \geq f_1''(0) = 0$。此外，由于 $f_1'(0) = 0$，$f_1(x)$ 在 $x = 0$ 处取得最小值。又因 $f_1(0) = 0$，可得对于所有 $x \in \mathbb{R}$，$f_1(x) \geq 0$，这意味着 $C_1(x) \geq 0$。

为证明 $C_2(x) \geq 0$，代入 $x \mapsto x/2$ 并定义

$$f_2(x) = e^{2x}(5x^2 + 2x) - 12e^x(x^2 - x + 4) + 15x^2 + 34x + 48.$$

对 $f_2(x)$ 求导可得

$$\begin{aligned} f_2'(x) &= e^{2x}(10x^2 + 14x + 2) - 12e^x(x^2 + x + 3) + 30x + 34, \\ f_2''(x) &= e^{2x}(20x^2 + 48x + 18) - 12e^x(x^2 + 3x + 4) + 30, \\ f_2'''(x) &= 4e^x\left(e^x(10x^2 + 34x + 21) - 3x^2 - 15x - 21\right). \end{aligned}$$

设 $g_2(x) = e^x(10x^2 + 34x + 21) - 3x^2 - 15x - 21$。则

$$\begin{aligned} g_2'(x) &= e^x(10x^2 + 54x + 55) - 6x - 15, \\ g_2''(x) &= e^x(10x^2 + 74x + 109) - 6, \\ g_2'''(x) &= e^x(10x^2 + 94x + 183). \end{aligned}$$

显然，$g_2'''(x)$ 有两个实零点。通过考察这些零点处的符号，可推知 $g_2''(x) > 0$当 $x > 0$时，以及 $g_2''(x) < 0$当 $x < 0$时。因此，$g_2'(x) \geq g_2'(0) > 0$，由此可知 $g_2(x)$ 严格递增，且在 $x = 0$ 处有唯一零点。因此，$f_2''(x) \geq f_2''(0) = 0$，故 $f_2(x)$ 为凸函数，并在 $x = 0$ 处取得唯一最小值。由于 $f_2(0) = 0$，可得 $f_2(x) \geq 0$，进而 $C_2(x) \geq 0$。

为证明 $C_3(x) \geq 0$，定义

$$f_3(x) = e^{3x}(x+2) + e^{2x}(-4x-10) + e^x(15x+2) + 6.$$

其导数为

$$f_3'(x) = e^x\left(e^{2x}(3x+7) + e^x(-8x-24) + 15x + 17\right).$$

设 $g_3(x) = e^{2x}(3x+7) + e^x(-8x-24) + 15x + 17$。则

$$g_3'(x) = e^{2x}(6x+17) + e^x(-8x-32) + 15,$$

and

$$g_3''(x) = 4e^x\left(e^x(3x+10) - (2x+10)\right).$$

定义 $h_3(x) = e^x(3x+10) - 2x - 10$。则

$$h_3'(x) = e^x(3x+13) - 2, \quad h_3''(x) = e^x(3x+16).$$

通过分析 $h_3''(x)$ 的符号，可知 $h_3'(x)$ 有唯一的实零点。因此可以直接确定 $h_3(x)$ 的符号变化，从而得出：对于所有 $x \in \mathbb{R}$，$g_3'(x) \geq 0$，且等号仅在 $x = 0$ 时成立。由于 $g_3(0) = 0$，函数 $f_3(x)$ 在 $x = 0$ 处取得最小值。计算 $f_3(0) = 0$ 得到，对于所有 x，$f_3(x) \geq 0$，因此 $C_3(x) \geq 0$。

因此，对于所有 $x \in \mathbb{R}$，系数 $C_0(x)$、$C_1(x)$、$C_2(x)$ 和 $C_3(x)$ 均非负，证明完毕。

参考文献

[1] J. Aguirre, A. Luque, D. Peralta-Salas, 对称导线构型产生的磁场中带电粒子的运动, Physica D, 239 (2010) 654–674.[2] D. Arcoya, C. Bereanu, P.J. Torres, 洛伦兹力方程的临界点理论, Arch. Ration. Mech. Anal., 232 (2019) 1685–1724.[3] D. Arcoya, C. Bereanu, P.J. Torres, 洛伦兹力方程作用量积分的 *Lusternik–Schnirelman*理论, Calc.Var.PartialDiffer. Equ. 59 (2) (2020) 1–32.[4] D. Arcoya, C. Sportelli, 带奇异势的相对论方程, Z. Angew. Math. Phys. 74 (2023) 91, 22pp.

[5] C.Bereanu, J. Mawhin, 某些带奇异 ϕ-*Laplacian*非线性系统的边值问题, J. Fixed Point Theory Appl. 4 (2008) 57–75.[6] A.Boscaggin, W.Dambrosio, D. Papini, 具有奇异电磁势的洛伦兹力方程的无穷多个周期解,J. Differ. Equ. 383 (2024),190–213.[7] M.Garzón, P.J. Torres, 带奇异势的洛伦兹力方程的周期解, NonlinearAnal., Real WorldAppl.56(2020)103162.[8] M. Garzón, S.Marò, 非稳恒电流产生的电磁场中带电粒子的运动, Phys.D, Nonlinear Phenom.424 (2021) 132945.[9] M. Garzón, P.J.Torres, 时变导线产生的电磁场在相对论状态下的周期动力学, J.Differ. Equ.362 (2023) 173–197.[10] F.G.Gascón, D. Peralta-Salas, 导线产生的磁场中电荷的运动：不可能到达导线, Phys.Lett.A333(2004) 72–78.[11] F.G.Gascón, D.Peralta-Salas, 导线的对称构型产生的磁场的一些性质, PhysicaD206(2005)109–120.[12] J.Guckenheimer, P.Holmes, 非线性振荡、动力系统与向量场分岔, 施普林格，纽约，1983。[13] D.J. Griffiths, 电动力学导论, Prentice Hall，新泽西，1962。[14] J.D.Jackson, 经典电动力学, 第三版，John Wiley & Sons，1999。[15] L.D.Landau, E.M. Lifschitz, 经典场论, 第2卷，第四版，Butterworth-Heinemann，1980。[16] M.Planck, 相对性原理与力学基本方程, Verh. Dtsch. Phys. Ges. 4 (1906年) 136–141。

[17] H. Poincaré, 关于电子动力学，巴勒莫数学杂志 21 (1906年) 129-176。[18] A. Szulkin，下半连续函数的极小极大原理及其在非线性边值问题中的应用，亨利·庞加莱研究所非线性分析年刊(C)3 (1986) 77–109。[19] S. Wiggins，应用非线性动力系统与混沌导论，施普林格，纽约，1990年。[20] K. Yagasaki，受迫振荡中次谐波的梅尔尼科夫理论及其分岔，工业与应用数学学会应用数学期刊 56 (1996) 1720-1765。