arXiv:2603.02844v1 [math.OC] 3 Mar 2026

含 Gas 费用的恒定函数做市商间最优路由

C. Escudero* F. Lara† M. Sama‡

March 4, 2026

摘要。 我们研究基于恒定函数做市商的去中心化交易中的最优路由问题，其中交易可以拆分到多个异构资金池中执行，且执行会产生固定的链上成本（Gas 费用）。以往的路由建模通常忽略固定激活成本，而现实中的链上执行会产生不可忽视的 Gas 费用。在不变函数满足凹性/凸性假设时，这些模型也会变为凸模型。我们提出一个通用优化框架，允许使用全局凸性之外的可微不变函数，并通过一个引入激活阈值的混合整数模型纳入固定 Gas 费用。随后，我们提出该模型的一种松弛形式，并据此推导必要最优性条件，得到一个明确的 Karush-Kuhn-Tucker 系统，用以关联价格、费用与激活。我们还利用广义凸性（伪凹性/伪凸性和拟线性）的工具，建立充分最优性条件，从而在无需交易函数为凸函数的情况下，给出可验证的最优性刻画。最后，我们通过提供明确的近似界，量化松弛所导致的效用差距，从而联系松弛问题的解与原混合整数模型。我们的结果拓展了路由的数学理论，并针对存在 Gas 费用的碎片化链上市场，给出了不交易条件。

Keywords：去中心化金融；恒定函数做市商；最优路由；Gas 费用；Karush-Kuhn-Tucker 条件；广义凸性。

*基础数学系，西班牙马德里国立远程教育大学。电子邮件：cescudero@mat.uned.es，ORCID-ID：0000-0001-9144-9097。

†阿里卡大学高等研究院（IAI），智利阿里卡。电子邮件：felipelaraobreque@gmail.com;flarao@academicos.uta.cl。网站：www.felipelara.cl，ORCID-ID：0000-0002-9965-0921。

‡西班牙马德里国立远程教育大学应用数学系 I。电子邮件：msama@ind.uned.es。

1 引言

去中心化金融（DeFi）已成为一种新范式，通过无需许可且透明的基于区块链的协议提供金融服务 [23, 31]。去中心化金融市场的核心构件是自动做市商（AMM），它们以受确定性定价规则约束的链上流动性池取代传统订单簿机制。在各类 AMM 中，恒定函数做市商（CFMM）因其数学可处理性与经济相关性而备受关注。在恒定函数做市商中，流动性池的状态由储备向量刻画，其演化受不变函数约束，资产价格则由该不变函数的梯度内生地产生。

从数学角度来说，恒定函数做市商会维持一组包含 n 种不同资产的储备（$R^1, \ldots,$ R^n），使某个给定函数保持不变

$$\varphi(R^1, \ldots, R^n) = k,$$

以下称为交易函数。通常假设该函数连续可微，且具有明确定义的凸性。常数 $k > 0$ 由恒定函数做市商的初始化过程确定。示例包括 Uniswap v2 [2] 中使用的恒定乘积公式 $\varphi(x, y) = xy$（有关 Uniswap 的较新版本，请参见 [1, 3, 4]），以及恒定和形式 $\varphi(x, y) = x + y$，后者是稳定币交易的理论基准 [20]。这种结构决定了用户与恒定函数做市商之间如何进行兑换。尤其是，它允许对资产进行自主的相对估值，并给出一条隐含定价规则，该规则由梯度 $\nabla\varphi(R^1, \ldots, R^n)$ 推导而来，而梯度决定了边际兑换率。因此需要假设函数可微。恒定函数做市商的其他示例还包括 Balancer [28] 和 Curve [20]。

近年来，恒定函数做市商的数学基础已得到严格发展。特别是，Angeris、Chitra 及其合作者 [6, 7, 9] 将恒定函数做市商交易形式化为一个凸优化问题，前提是其不变函数满足适当的正则性和凸性假设，并由此为定价、套利和最优交易执行提供了基础性见解。后续研究将这一框架拓展至多资产池、跨多个市场的路由以及算法执行策略 [8, 16, 19]。

在现实的 DeFi生态系统中，正如最后三篇参考文献所概述的那样，交易并不发生在单一流动性池内。相反，交易者面对的是由异构 CFMM 组成的碎片化市场，每个 CFMM 都具有自身的不变函数、储备构成和费用结构。因此，最优执行可能需要将一笔交易拆分到多个资金池中，由此产生最优路由问题。此前的这些表述基于凸优化技术，通过对不变函数施加全局凸性或凹性假设 [5, 9]。这些假设限制了 CFMM 的可行设计空间，在经济或技术层面也并不总是合理。然而，大多数现有理论结果都依赖凸性假设，因为这些假设能够保证全局最优性 [25]。这使得分析的适用范围局限于更狭窄的一类不变函数，但可以通过非凸优化方法加以规避

ysis 将分析范围缩小到一类更窄的不变函数，但可通过非凸优化方法 [22] 来规避。

去中心化市场中另一项对标准模型构成挑战的结构性特征，是固定执行成本的存在。链上交易会产生*Gas* 费用，每当一笔交易与某个流动性池交互时，无论交易量大小，都必须支付这笔费用。这些成本从根本上改变了最优路由决策。从金融角度来看，Gas 费用会扩大无交易区域、抑制套利机会，并与流动性碎片化产生复杂的相互作用。相关现象已在文献中得到讨论，包括矿工可提取价值（MEV）以及去中心化金融市场中的其他低效问题[13, 14, 15]。然而，尽管固定执行成本十分重要，它们往往被忽略或仅通过启发式方法处理 [18], ；据我们所知，它们与 CFMM 底层数学结构之间的相互作用仍未得到充分理解。

本文旨在通过构建一个针对多个异质 CFMM 之间最优路由的一般优化理论框架，来解决这些局限。该框架（i）允许使用超出全局凸性假设范围的可微不变函数；（ii）通过市场激活变量和容量约束，明确纳入 Gas 费用。

我们的贡献

本工作的贡献可概括如下。

- 我们在存在固定 Gas 费用且不作凸性假设的情况下，构建了跨多个 CFMM 的最优路由问题。为此，我们引入了市场激活变量和有界交易约束。所得模型捕捉了链上执行的一些关键特征，同时通过引入松弛近似，仍可进行严格的数学分析。

- 对于松弛后的路由问题，我们在适应 CFMM 交易约束结构的 Kurcyusz-Robinson-Zowe 型约束资格条件下，以 Karush-Kuhn-Tucker（KKT）系统的形式推导出必要最优性条件。这一刻画明确建立了边际效用、池价格、费用与激活之间的联系。

- 借助广义凸性工具，我们在不假设不变函数具有全局凸性的情况下，建立了充分最优性条件 。特别地，在效用函数具有伪凹性且交易函数具有拟线性的情况下，KKT 条件被证明既是必要的，也是全局最优性的充分条件。

- 我们分析了松弛路由问题与带有固定激活成本的原始混合整数形式之间的关系。我们推导了显式近似界，量化了由松弛引起的效用损失，并对松弛路由解给出了严格解释。

总体而言，我们的结果将CFMM路由的数学理论拓展至凸模型之外，并提供了一个数学框架，用于理解Gas 费用对碎片化去中心化市场中最优交易和无交易条件的影响。

2 预备知识

我们分别记 $\mathbb{R}_+ := [0, +\infty[$ 和 $\mathbb{R}_{++} :=]0, +\infty[$，因此 $\mathbb{R}^n_+ := (\mathbb{R}_+)^n$ 和 $\mathbb{R}^n_{++} := (\mathbb{R}_{++})^n$。我们采用逐分量运算的常用记号 $\geq$（参见 [21]），即

$$\begin{aligned} x \geq y &\iff x_i \geq y_i, \\ x \gneq y &\iff x_i \geq y_i,\ x \neq y, \\ x > y &\iff x_i > y_i, \end{aligned}$$

对每个 $i = 1, \ldots, n$。

给定任意广义实值函数 $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$，用 $\operatorname{epi} h := \{(x,\ t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} :\ h(x) \leq t\}$ 表示 h的上图，用 $S_\lambda(h) := \{x \in \mathbb{R}^n :\ h(x) \leq \lambda\}$ 表示 h 在高度 $\lambda \in \mathbb{R}$处的下水平集，用 $W_\lambda(h) := \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) \geq \lambda\}$ 表示 h 在高度 $\lambda \in \mathbb{R}$ 处的上水平集，并用 $\operatorname{argmin}_{\mathbb{R}^n} h$ 表示 h 在 $\mathbb{R}^n$上的所有极小点构成的集合。

定义域为凸定义域的函数 h称为

(a) 凸函数：若对任意 $x, y \in \operatorname{dom} h$，则

$$h(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda h(x) + (1-\lambda)h(y),\ \forall\ \lambda \in [0,1],$$

(b) 拟凸函数：若对任意 $x, y \in \operatorname{dom} h$，则

$$h(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \max\{h(x), h(y)\},\ \forall\ \lambda \in [0,1],$$

每个凸函数都是拟凸函数，但反之并不成立，函数 $h(x) = x^3$ 便说明了这一点。回顾一下，

$$\begin{aligned} h \text{ is convex} &\iff \operatorname{epi} h \text{ is a convex set;} \\ h \text{ is quasiconvex} &\iff S_\lambda(h) \text{ is a convex set for all } \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

拟凸函数在许多不同领域的应用中都会出现，例如经济学和金融理论，尤其是在消费者偏好理论中（见 [17, 29]），因为拟凹性是对消费者具有多样化倾向这一自然假设的数学表述。

若 h 是拟线性的，则 h 是拟凸的，且 $-h$ 是拟凸的。因此，对于所有 $\lambda \in \mathbb{R}$，其下水平集 $S_\lambda(h)$ 和上水平集 $W_\lambda(h)$ 都是凸集（见 [12, 定理 3.31]）。

设 $K \subseteq \mathbb{R}^n$ 是一个凸集，且 $h\colon K \to \mathbb{R}$ 是一个可微函数。那么，以下断言成立：

(*i*) h 是拟凸的，当且仅当对于任意 $x,\ y \in K$，我们有（参见 [10] 和[11, 定理 3.11]）：

$$h(x) \le h(y) \implies \langle \nabla h(y), x-y \rangle \le 0; \tag{2.1}$$

(*ii*) h 是拟线性的，当且仅当对每个 $x, y \in K$，我们有（见 [12, 定理 3.3.6]）

$$h(x) = h(y) \implies \langle \nabla h(y), x-y \rangle = 0. \tag{2.2}$$

设 $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 为可微函数。则称 h 为伪凸（见 [27]），如果

$$\langle \nabla h(x), y-x \rangle \ge 0 \implies h(y) \ge h(x). \tag{2.3}$$

函数 h 是伪凹的，如果 $-h$ 是伪凸的。此外，如果 h是伪凸的，则每个局部最小值都是全局最小值 [12, 定理 3.2.5],这是拟凸函数所不具备的性质。

关于广义凸性的进一步研究，我们参考 [10, 11, 12, 24, 27, 30]等。

3 含 Gas 费用的最优路由

我们的基本框架是 [8], 的框架，现总结如下。我们考虑一个由 $m \in \mathbb{N}$、 $m \ge 1$ 个 CFMM 组成的系统，这些 CFMM 交易来自 $n \in \mathbb{N}$、 $n \ge 2$ 种代币全集中的多种代币（或加密资产）。设 n 为我们能够交易的代币的具体数量。每个市场 i 拥有 $n_i \in \mathbb{N}$ 种代币，对每个 $i \in \{1, \dots, m\}$有 $n_i \in \{2, \dots, n\}$，并且每个市场 i关联一个连接矩阵 $A^i \in \mathbb{R}^{n \times n_i}$，其中 $i \in \{1, \dots, m\}$，该矩阵将代币的全局索引与其局部索引联系起来。具体而言， $A^i_{jk} = 1$，当全局代币 j对应于每个 CFMM i中的局部索引 $k \in \{1, \dots, n_i\}$ 时。

每个恒定函数做市商 i 都有一定数量的储备 $R^i \in \mathbb{R}^{n_i}_+$，并且每笔交易都需要支付相对税费 $\gamma_i \in]0,\ 1[$。回顾一下，当交易函数 $\varphi_i : \mathbb{R}^{n_i}_+ \to \mathbb{R}$满足以下条件时，恒定函数做市商 i会接受提议的交易（$x^i,\ y^i$） $\in \mathbb{R}^{n_i}_+ \times \mathbb{R}^{n_i}_+$

$$\varphi_i(R^i + \gamma_i y^i - x^i) = \varphi_i(R^i). \tag{3.1}$$

根据 [8, 第 5], 节，我们希望找到一组有效交易，使交易者 u 的效用最大化： $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 同时考虑 Gas 费用$q \in \mathbb{R}^m_+$，其中每个 $q_i \in \mathbb{R}_+$ 对应一个恒定函数做市商（CFMM） i。燃料费是将交易记录到区块链网络中的成本，为简便起见，假设其为固定值。我们还引入 $b^i \in \mathbb{R}^{n_i}_{++}$，其中 b^i_k 是交易者可以从恒定函数做市商（CFMM） i购买的资产 k 的最大数量。因此，最优路由

含燃料费的路由问题可表示为（参见 [8, 第 5]节）

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & u(\Psi) - \langle q, \eta \rangle \\ \text{subject to} \quad & \Psi = \sum_{i=1}^{m} A^i (x^i - y^i), \\ & \varphi_i(R^i + \gamma_i y^i - x^i) = \varphi_i(R^i), \\ & 0 \le x^i \le R^i, \\ & 0 \le y^i \le \eta_i b^i, \\ & \eta_i \in \{0,1\},\ \forall\ i \in \{1,\dots,m\}. \end{aligned} \tag{$\mathcal{P}(\mathbf{b}, q)$}$$

在此模型中， $\eta_i \in \{0,1\}$ 是恒定函数做市商i的二元激活指示变量：在资金池 i 中执行交易时取值为 $\eta_i = 1$ ，否则取值为 $\eta_i = 0$。不等式约束 $y^i \le \eta_i b^i$ 通过在激活时（$\eta_i = 1$）将交易数量 y^i 限制在 b^i 以内，并在未激活时要求 $y^i = 0$ ，从而平滑地实现市场激活。我们的记法强调了分析中至关重要的参数$\mathbf{b} := (b^1, \dots, b^m)$（激活界限）和 q（燃料费向量），它们是分析的基础。

此外，我们假设对于所有 $i \in \{1,\dots,m\}$，都有 $b^i \in \mathbb{R}^{n_i}_{++}$，即

$$b^i_k \neq 0, \quad \forall\ i \in \{1,\dots,m\},\ \forall\ k \in \{1,\dots,n_i\}. \tag{3.2}$$

假设（3.2）意味着每个恒定函数做市商 $i \in \{1,\dots,m\}$ 都允许对加密资产 $k \in \{1,\dots,n_i\}$进行正的最大注入量 b^i_k。

根据 [8]，，我们放宽参数 $0 \le \eta_i \le 1$，以获得更便于计算的问题形式，即:

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & u(\Psi) - \langle q, \eta \rangle \\ \text{subject to} \quad & \Psi = \sum_{i=1}^{m} A^i (x^i - y^i), \\ & \varphi_i(R^i + \gamma_i y^i - x^i) = \varphi_i(R^i), \\ & 0 \le x^i \le R^i, \\ & 0 \le y^i \le \eta_i b^i, \\ & 0 \le \eta_i \le 1,\ \forall\ i \in \{1,\dots,m\}. \end{aligned} \tag{$\mathcal{P}^r(\mathbf{b}, q)$}$$

我们采用以下记号

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \eta) = (x^1, \dots, x^m, y^1, \dots, y^m, \eta_1, \dots, \eta_m) \in \prod_{i=1}^{m} \mathbb{R}^{n_i}_{+} \times \prod_{i=1}^{m} \mathbb{R}^{n_i}_{+} \times [0,1]^m,$$

$_m$其中 $[0,1]^m := \prod [0,1]$ 当 $\mathbf{x} := (x^1, \dots, x^m)$、$\mathbf{y} := (y^1, \dots, y^m)$ 以及 $\eta := {}_{i=1}(\eta_1, \dots, \eta_m)$ 分别表示潜在交易和市场激活松弛参数向量。需要强调的是，松弛激活变量本身并不代表可执行策略，而是作为分析代理，用于刻画最优性和近似性质。

$_m$同理，我们用 $A := (A^1, \ldots, A^m) : \prod \mathbb{R}^{n_i} \to \mathbb{R}^n$ 表示由下式定义的线性 $_{i=1}$算子

$$A(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} A^i x^i,$$

那么，问题 $(\mathcal{P}^r(\mathbf{b}\ q))$ 可等价地写为：

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & (u \circ A)(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - \langle q, \eta \rangle \\ \text{subject to} & \varphi_i(R^i + \gamma_i y^i - x^i) - \varphi_i(R^i) = 0, \\ & 0 \le x^i \le R^i, \\ & y^i - \eta_i b^i \le 0, \\ & 0 \le y^i, \\ & 0 \le \eta_i \le 1, \ \forall\ i \in \{1, \ldots, m\}, \end{array}$$

我们可以将其建模为一个具有等式约束和不等式约束的等价最小化问题：

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \eta) := (-u \circ A)(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \langle q, \eta \rangle \\ \text{subject to} & G_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \eta) := y^i - \eta_i b^i \le 0, \\ & H_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \eta) := \varphi_i(R^i + \gamma_i y^i - x^i) - \varphi_i(R^i) = 0, \qquad (\mathcal{P}^r(\mathbf{b}, q)) \\ & \forall\ i = 1, \ldots, m, \\ & (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \eta) \in \widehat{\mathbf{S}}, \end{array}$$

^{m} $_m$其中 f：
$\prod_{i=1} \mathbb{R}^{n_i}_+ \times \prod_{i=1} \mathbb{R}^{n_i}_+ \times [0,1]^m \to \mathbb{R}$，$G_i$：$\prod_{i=1} \mathbb{R}^{n_i}_+ \times \prod_{i=1m} \mathbb{R}^{n_i}_+ \times [0,1]^m \to \mathcal{Z}$，
$_m H_i$：
$\prod \mathbb{R}^{n_i}_+ \times \prod \mathbb{R}^{n_i}_+ \times [0,1]^m \to \mathbb{R}^m$，可行集为$_{i=1}$ $_{i=1}$

$$\hat{\mathbf{S}} := \left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \eta) : 0 \le x^i \le R^i,\ 0 \le y^i,\ 0 \le \eta_i \le 1,\ \forall\ i \in \{1, \ldots, m\} \right\}.$$

3.1 必要最优性条件

在所述条件下，所有问题均可通过应用标准结果求解（例如，参见 [26, 定理 2.3]）。

本文中，我们假设效用函数 u和市场函数 φ_i对每个 $i = 1, \ldots, m$ 均可微，$(\bar{\mathbf{x}}\ \bar{\mathbf{y}}\ \bar{\eta}) \in \hat{\mathbf{S}}$ 是问题 $(\mathcal{P}^r(\mathbf{b}\ q))$ 的一个解，并且 $(\mathbf{x}, \mathbf{y}\ \eta)$ $\in \prod \mathbb{R}^{n_i} \times \prod \mathbb{R}^{n_i} \times [0,1]^m$ 分别是一个任意方向。我们还考虑以下假设：

- 储备的正性和提交篮子的最大值，

$$\mathbf{R}, \mathbf{b} \in \prod_{i=1}^{m} \mathbb{R}^{n_i}_{++}. \tag{3.3}$$

- 非重叠支持（参见 [5, 第3节2]），即对每笔交易都满足以下互补条件

$$0 \le \bar{x}^i \perp \bar{y}^i \ge 0 \iff \bar{x}^i \ge 0,\ \bar{y}^i \ge 0,\ \bar{x}^i_j\, \bar{y}^i_j = 0,\ \forall\ i, j, \tag{3.4}$$

其中 $i \in \{1,\ldots,m\}$ 和 $j \in \{1,\ldots,n_i\}$。

- 交易和效用函数的递增性质（见 [22]）：

$$\nabla u(x) \geq 0 \ \text{ for every } x \in \mathbb{R}^n, \tag{3.5}$$

$$\nabla \varphi_i(x) \gneq 0 \ \text{ for every } x > 0 \text{ and every } i \in \{1,\ldots,m\}, \tag{3.6}$$

其中，最后一个条件意味着 φ_i 至少关于一个分量严格递增，特别是，

$$x \geq y > 0 \implies \varphi_i(x) \geq \varphi_i(y) \text{ for every } i = 1,\ldots,m.$$

我们定义价格向量（见 [5]）和更新后的价格向量如下：

$$P^i := \nabla \varphi_i(R^i), \ \text{ for every } i = 1,\ldots,m,$$

$$\bar{P}^i := \nabla \varphi_i(R^i + \gamma_i \bar{y}^i - \bar{x}^i), \text{ for every } i = 1,\ldots,m.$$

在条件 (3.6) 下， P^i， $\bar{P}^i \neq 0$ 对每个 $i = 1,\ldots,m$ 都成立。

注释 3.1。 在所述条件下，问题 $(\mathcal{P}^r(\mathbf{b}\ q))$ 可解，并且至少有一个解 $(\bar{\mathbf{x}}\ \bar{\mathbf{y}}\ \bar{\eta})$，这可由标准结果得出（例如，见 *[26,*定理 *2.3]*）。此外，若 $\bar{\eta}_i = 0$，则 $\bar{x}^i = \bar{y}^i = 0$。

反过来，若对每个 $i \in \{1,\ldots,m\}$ 都有 $\bar{x}^i = \bar{y}^i = 0$，即 $\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{y}} = \mathbf{0}$，则 $\bar{\eta} = 0$。否则，若某个 $0 < \bar{\eta}_r \leq 1$，则有

$$f(\mathbf{0},\mathbf{0},0) = -u\left(A(\mathbf{0})\right) < -u\left(A(\mathbf{0})\right) + q_r \bar{\eta}_r \leq f(\mathbf{0},\mathbf{0},\bar{\eta}),$$

这违背了最优性。

必要条件由标准的乘子规则 [26, 定理 5.3]给出：假设 $(\bar{\mathbf{x}}\ \bar{\mathbf{y}}\ \bar{\eta})$ 是问题 $(\mathcal{P}^r(\mathbf{b}\ q))$ 的解，并且满足约束资格条件；特别地，如果 Kurcyusz-Robinson-Zowe（KRZ）约束资格条件得到验证：

$$\begin{pmatrix} \nabla G(\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{y}},\bar{\eta}) \\ \nabla H(\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{y}},\bar{\eta}) \end{pmatrix} \operatorname{cone}(\hat{\mathbf{S}} - (\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{y}},\bar{\eta})) + \operatorname{cone} \begin{pmatrix} \prod_{i=1}^m \mathbb{R}^{n_i}_+ + \{G(\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{y}},\bar{\eta})\} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \prod_{i=1}^m \mathbb{R}^{n_i} \\ \mathbb{R}^m \end{pmatrix}, \tag{3.7}$$

则可验证以下乘子规则：求 $\left((\bar{\mathbf{x}}\ \bar{\mathbf{y}}\ \bar{\eta})\ \left(\mu^1,..,\mu^m\right),\lambda\right) \in \hat{}\mathbf{S} \times \left(\prod_{i=1}^m \mathbb{R}^n_+\right) \times \mathbb{R}^m$ 使得

$$\left(\nabla f(\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{y}},\bar{\eta}) + \sum_{i=1}^m (\mu^i)^\top \nabla G_i(\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{y}},\bar{\eta}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla H_i(\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{y}},\bar{\eta})\right)(\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}},\mathbf{y}-\bar{\mathbf{y}},\eta-\bar{\eta}) \geq 0,$$

$$(\mu^i)^\top G_i(\bar{\mathbf{x}}\ \bar{\mathbf{y}}\ \bar{\eta}) = 0, \text{ 对每个 } i = 1,\ldots,m, \tag{3.8}$$

$H_i(\bar{\mathbf{x}}\ \bar{\mathbf{y}}\ \bar{\eta}) = 0$ 对任意 $i = 1,..,m$, 以及 $(\mathbf{x},\mathbf{y}\ \eta) \in \hat{}\mathbf{S}$ 均任意。

下文中，我们通过直接计算可知

$$\nabla f(\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{y}},\bar{\eta})(\mathbf{x},\mathbf{y},\eta) = \sum_{i=1}^{m} \nabla u\left(A(\bar{\mathbf{x}}-\bar{\mathbf{y}})\right) A^i y^i - \sum_{i=1}^{m} \nabla u\left(A(\bar{\mathbf{x}}-\bar{\mathbf{y}})\right) A^i x^i + q\cdot\eta,$$
$$\nabla G_i(\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{y}},\bar{\eta})(\mathbf{x},\mathbf{y},\eta) = y^i - \eta_i b^i,$$
$$\nabla H_i(\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{y}},\bar{\eta})(\mathbf{x},\mathbf{y},\eta) = -\nabla\varphi_i(\mathbf{R}+\gamma\bar{\mathbf{y}}-\bar{\mathbf{x}})x^i + \gamma_i\nabla\varphi_i(\mathbf{R}+\gamma\bar{\mathbf{y}}-\bar{\mathbf{x}})y^i,$$

对于每个 $i\in\{1,\ldots,m\}$。

在下一个结果中，我们将建立使约束资格条件 (3.7) 得以验证的条件。

命题 *3.1*。假设性质 *(3.3)* 和 *(3.6)* 成立。设 $(\bar{x}\ \bar{y}\ \bar{\eta})$ 是 $(\mathcal{P}^r(b\ q))$ 的一个满足 *(3.4)* 的解。那么，约束资格条件 *(3.7)* 在 $(\bar{x}\ \bar{y}\ \bar{\eta}) = (0,0,0)$ 处成立。此外，当 $(\bar{x}\ \bar{y}\ \bar{\eta}) \neq (0,0,0)$ 时，若以下附加性质成立，条件 *(3.7)* 也成立：

$$0 < b_j^i - \bar{y}_j^i \le \frac{2}{\gamma_i} R_j^i \ \text{with}\ \bar{y}_j^i > 0,\ \forall\ j\in\{1,\ldots,n_i\},\ \forall\ i\in\{1,\ldots,m\}. \tag{3.9}$$

证明。条件 (3.7) 等价于：对于每个 $((z^1,\ldots,z^n)\ t)\in\prod_{i=1}^{m}\mathbb{R}^{n_i}\times\mathbb{R}$，我们都可以取 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}_+$、$(\mathbf{x},\mathbf{y}\ \eta)\in\hat{}\mathbf{S}$ 以及 $c,d\in\prod_{i=1}^{m}\mathbb{R}_+^{n_i}$，使得

$$z^i = \nabla G_i(\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{y}},\bar{\eta})(\alpha(x^i-\bar{x}^i,y^i-\bar{y}^i,\eta_i-\bar{\eta}_i)) + \beta(c^i+\{G_i(\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{y}},\bar{\eta})\}),$$
$$t_i = \nabla H_i(\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{y}},\bar{\eta})(\alpha(x^i-\bar{x}^i,y^i-\bar{y}^i,\eta_i-\bar{\eta}_i)).$$

事实上，经过直接计算，后者等价于：存在 $0\le x^i\le R^i$、$0\le y^i$ 和 $0\le\eta_i\le 1$，使得

$$z_j^i = \alpha\left((y_j^i-\bar{y}_j^i)-(\eta_i-\bar{\eta}_i)b_j^i\right)+\beta(c_j^i+\bar{y}_j^i-\bar{\eta}_i b_j^i), \tag{3.10a}$$
$$t_i = \alpha(\bar{P}^i)^\top\left(-(x^i-\bar{x}^i)+\gamma_i(y^i-\bar{y}^i)\right), \tag{3.10b}$$

对于每个 $i\in\{1,\ldots,m\}$ 和每个 $j\in\{1,\ldots,n_i\}$，均成立。

不失一般性，接下来我们考虑一个固定的 $i\in\{1,\ldots,m\}$。根据假设 (3.6)，我们可以假设

$$\bar{P}_k^i \neq 0,$$

对于某个 $k\in\{1,\ldots,n_i\}$ 成立。然后，我们考虑以下几种情况：

如果 $\bar{\eta}_i = 0$，则根据注释 3.1，$(\bar{x}^i,\ \bar{y}^i) = (0,\ 0)$。在这种情况下，方程 (3.10a) 和 (3.10b) 化简为

$$z^i = \alpha\left(y^i-\eta_i b^i\right)+\beta c^i, \tag{3.11a}$$
$$t_i = \alpha(\bar{P}^i)^\top\left(-x^i+\gamma_i y^i\right). \tag{3.11b}$$

令 $\alpha = \beta$，方程 (3.11a) 化简为

$$z^i = \alpha \left(y^i + c^i - \eta_i b^i \right). \tag{3.12}$$

我们可以假设 $\eta_i b^i - y^i \in \text{int}(\mathbb{R}^{n_i}_+)$，例如选择满足 $\eta_i > 0$ 的 $y^i = \frac{1}{2}\eta_i b^i \in \text{int}(\mathbb{R}^{n_i}_+)$。另一方面，我们可以定义：

$$c^i = \eta_i b^i - y^i + \frac{1}{\alpha} z^i = \frac{1}{2}\eta_i b^i + \frac{1}{\alpha} z^i \geq 0, \tag{3.13}$$

对于足够大的 α，该式成立，因此存在 $\alpha_1 > 0$，使得对于每个 $\alpha \geq \alpha_1$，式 (3.13) 均成立。

令 $x^i = \gamma_i y^i - \frac{1}{\alpha} \frac{t_i}{\bar{P}^i_k} e^k = \frac{1}{2}\gamma_i \eta_i b^i - \frac{1}{\alpha} \frac{t_i}{\bar{P}^i_k} e^k$，其中 e^k（满足 $e^k_j = \delta_{jk}$）是第 k 个标准基向量。不失一般性，我们考虑 $y^i = \frac{1}{2}\eta_i b^i \leq R^i$。因此，取足够小的 η_i，可得

$$x^i = \gamma_i y^i - \frac{1}{\alpha} \frac{t_i}{\bar{P}^i_k} e^k \leq \frac{1}{2}\gamma_i \eta_i b^i \leq R^i.$$

同时，存在足够大的 $\alpha_2 > 0$，使得

$$x^i = \gamma_i y^i - \frac{1}{\alpha} \frac{t_i}{\bar{P}^i_k} e^k \geq 0, \text{ for all } \alpha \geq \alpha_2. \tag{3.14}$$

取 $\alpha := \max\{\alpha_1, \alpha_2\} > 0$，并将 (3.13) 和 (3.14) 代入 (3.12) 和 (3.11b)，可得：

$$\alpha(y^i + (\eta_i b^i + \frac{z^i}{\alpha} - y^i) - \eta_i b^i) = z^i, \tag{3.15}$$

$$\alpha(\bar{P}^i)^\top(-(\gamma_i y^i - \frac{1}{\alpha} \frac{t_i}{\bar{P}^i_k} e^k) + \gamma_i y^i) = t_i. \tag{3.16}$$

因此，方程 (3.11a) 和 (3.11b) 得到满足，也就是说，约束资格条件在 $(\bar{\mathbf{x}}\ \bar{\mathbf{y}}\ \bar{\eta}) = (0, 0, 0)$ 处成立。

我们来分析 $\bar{\eta}_i \neq 0$ 的情况。如果 $\bar{\eta}_i \neq 0$，那么按照与之前类似的推理，我们考虑 $\alpha = \beta$，因此代入 (3.10a) 和 (3.10b)，得到

$$z^i = \alpha(y^i - \eta_i b^i + c^i), \tag{3.17a}$$

$$t_i = \alpha(\bar{P}^i)^\top(-(x^i - \bar{x}^i) + \gamma_i(y^i - \bar{y}^i)). \tag{3.17b}$$

在这种情况下，若 $y^i = \frac{1}{2}(\bar{y}^i + b^i)$ 且 $\eta_i = 1$，则根据 (3.9)，$y^i - \bar{y}^i = \frac{1}{2}\left(b^i - \bar{y}^i\right) \in \text{int}(\mathbb{R}^{n_i}_+)$，并且我们可以确保 $c^i := \frac{1}{2}\left(b^i - \bar{y}^i\right) + \frac{z^i}{\alpha} \in \mathbb{R}^{n_i}_+$ and

$$x^i := \bar{x}^i + \gamma_i(y^i - \bar{y}^i) - \frac{1}{\alpha} \frac{t_i}{\bar{P}^i_k} e^k = \bar{x}^i + \frac{\gamma_i}{2}(b^i - \bar{y}^i) - \frac{1}{\alpha} \frac{t_i}{\bar{P}^i_k} e^k \in \mathbb{R}^{n_i}_+,$$

对于足够大的 $\alpha > 0$。此外，我们可以确保 $x^i \le R^i$ if

$$\bar{x}^i + \frac{\gamma_i}{2}(b^i - \bar{y}^i) \le R^i \iff 2\bar{x}^i + \gamma_i(b^i - \bar{y}^i) \le 2R^i. \tag{3.18}$$

根据互补条件 (3.4)，关系 (3.18) 等价于：对于满足 $\bar{x}^i_j > 0$ 的每个 j， $2\bar{x}^i_j \le 2R^i_j$，这显然成立；并且对于 $\bar{y}^i_j > 0$， $\gamma_i(b^i_j - \bar{y}^i_j) \le 2R^i_j$，这由假设 (3.9) 得出。

□

在下面的结果中，我们给出 KKT 系统 (3.22) 的显式形式。此外，为避免与变量混淆，我们强调，偏导数记作

$$D_k u \equiv \partial u / \partial x_k.$$

定理 *3.1.* 假设性质 *(3.3)*、*(3.5)* 和 *(3.6)* 成立。此外，设 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\eta}) \in \hat{S}$ 是 $(\mathcal{P}^r(b, q))$ 的一个解，并且当 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\eta}) \neq (0, 0, 0)$ 时满足 *(3.4)* 和 *(3.9)*。那么，存在 $\mu = (\mu^1, \dots, \mu^m) \in \prod_{i=1}^m \mathbb{R}^{n_i}_+$ 和 $\alpha \in \mathbb{R}^m_+$，使得对每个 $i \in \{1, \dots, m\}$，都有：

(*a*) 如果 $\bar{\eta}_i = 0$，那么 $(\bar{x}^i, \bar{y}^i) = (0,0)$，相应的 *KKT* 条件为

$$\begin{gathered} \alpha_i(\bar{P}^i)^\top \ge \nabla u(\mathbf{0}) A^i \ge \gamma_i \alpha_i (\bar{P}^i)^\top - (\mu^i)^\top, \\ q_i - (\mu^i)^\top b^i \ge 0. \end{gathered} \tag{3.19}$$

(*b*) 如果 $\bar{\eta}_i \neq 0$，那么相应的 *KKT* 条件为

$$\begin{aligned} &\alpha_i \bar{P}^i_j \ge \textstyle\sum_{k=1}^n D_k u(A(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}})) A^i_{kj} \ge \gamma_i \alpha_i \bar{P}^i_j + \mu^i_j, && \text{when } \bar{x}^i_j = \bar{y}^i_j = 0, \\ &\textstyle\sum_{k=1}^n D_k u(A(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}})) A^i_{kj} = \gamma_i \alpha_i \bar{P}^i_j + \mu^i_j, && \text{when } \bar{x}^i_j = 0, \bar{y}^i_j > 0, \\ &\textstyle\sum_{k=1}^n D_k u(A(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}})) A^i_{kj} = \alpha_i \bar{P}^i_j, && \text{when } 0 < \bar{x}^i_j < R^i_j, \ \bar{y}^i_j = 0, \\ &\textstyle\sum_{k=1}^n D_k u(A(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}})) A^i_{kj} \ge \alpha_i \bar{P}^i_j, && \text{when } \bar{x}^i_j = R^i_j, \ \bar{y}^i_j = 0, \\ &(\mu^i)^\top \left(\bar{y}^i - \bar{\eta}_i b^i\right) = 0, \\ &q_i - (\mu^i)^\top b^i = 0, \\ &\varphi_i(R^i + \gamma_i \bar{y}^i - \bar{x}^i) = \varphi_i(R^i). \end{aligned} \tag{3.20}$$

证明。 根据命题 3.1，约束资格条件（KRZ）成立，并应用 [26, 定理 5.6], 可知，系统（3.8）对（$\bar{\mathbf{x}}$ $\bar{\mathbf{y}}$ $\bar{\eta}$）成立。因此，

存在（μ^1，.....，μ^m）$\in \prod_{i=1}^m \mathbb{R}_+^{n_i}$和 $\lambda \in \mathbb{R}^m$，使得

$$\sum_{i=1}^m \Big[\nabla u(A(\bar{\mathbf{x}}-\bar{\mathbf{y}}))A^i(-(x^i-\bar{x}^i)+(y^i-\bar{y}^i))+q_i(\eta_i-\bar{\eta}^i)$$
$$(\mu^i)^\top\left[(y^i-\bar{y}^i)-(\eta_i-\bar{\eta}_i)b^i\right]+\lambda_i(\bar{P}^i)^\top(-(x^i-\bar{x}^i)+\gamma_i(y^i-\bar{y}^i))\Big]\geq 0,$$
$$(\mu^i)^\top(\bar{y}^i-\bar{\eta}_i b^i)=0,\quad \text{for every } i=1,\dots,m, \tag{3.21a}$$
$$\varphi_i(R^i+\gamma_i\bar{y}^i-\bar{x}^i)=\varphi_i(R^i)\quad \text{for every } i=1,\dots,m,$$
$$\text{and } (\mathbf{x},\mathbf{y},\eta)\in\hat{\mathbf{S}} \text{ arbitrary.}$$

这等价于

$$\sum_{i=1}^m\left[(-\nabla u(A(\bar{\mathbf{x}}-\bar{\mathbf{y}}))A^i-\lambda_i(\bar{P}^i)^\top)\left(x^i-\bar{x}^i\right)\right]+\sum_{i=1}^m\left[\left(q_i-(\mu^i)^\top b^i\right)(\eta_i-\bar{\eta}_i)\right]$$
$$+\sum_{i=1}^m\left[(\nabla u(A(\bar{\mathbf{x}}-\bar{\mathbf{y}}))A^i+\gamma_i\lambda_i(\bar{P}^i)^\top+(\mu^i)^\top)\left(y^i-\bar{y}^i\right)\right]\geq 0, \tag{3.22a}$$
$$(\mu^i)^\top\left(\bar{y}^i-\bar{\eta}_i b^i\right)=0,\quad \text{for every } i=1,\dots,m, \tag{3.22b}$$
$$\varphi_i(R^i+\gamma_i\bar{y}^i-\bar{x}^i)=\varphi_i(R^i)\ \text{对每个}\ i=1,\dots,m,$$
$$\text{且}\ (\mathbf{x},\mathbf{y}\ \eta)\in\hat{}\mathbf{S}\ \text{任意。} \tag{3.22c}$$

由于第一个不等式对所有 $x^i,y^i\in\mathbb{R}_+^{n_i}$ 和所有 $\eta\in[0,1]^m$ 均成立，因此可以在每个市场上等价地研究前述条件。因此，对于每个市场 $i=1,\dots,m$，以下条件必须成立:

$$\left(-\nabla u(A(\bar{\mathbf{x}}-\bar{\mathbf{y}}))A^i-\lambda_i(\bar{P}^i)^\top\right)\left(x^i-\bar{x}^i\right)\geq 0\quad \text{for all } x^i\geq 0, \tag{3.23}$$
$$\left(\nabla u(A(\bar{\mathbf{x}}-\bar{\mathbf{y}}))A^i+\gamma_i\lambda_i(\bar{P}^i)^\top+(\mu^i)^\top\right)\left(y^i-\bar{y}^i\right)\geq 0\quad \text{for all } y^i\geq 0, \tag{3.24}$$
$$\left(q_i-(\mu^i)^\top b^i\right)(\eta_i-\bar{\eta}_i)\geq 0\quad \text{for all } \eta_i\geq 0, \tag{3.25}$$
$$(\mu^i)^\top(\bar{y}^i-\bar{\eta}_i b^i)=0, \tag{3.26}$$

对于前两个方程，也等价地对每项资产成立，

$$\left(-\sum_{k=1}^n D_k u((A(\bar{\mathbf{x}}-\bar{\mathbf{y}}))A^i_{kj}-\lambda_i\bar{P}^i_j\right)\left(x^i_j-\bar{x}^i_j\right)\geq 0\quad \text{for all } x^i_j\geq 0, \tag{3.27}$$
$$\left(\sum_{k=1}^n D_k u(A(\bar{\mathbf{x}}-\bar{\mathbf{y}}))A^i_{kj}+\gamma_i\lambda_i\bar{P}^i_j+\mu^i_j\right)\left(y^i_j-\bar{y}^i_j\right)\geq 0\ \text{ for all } y^i_j\geq 0, \tag{3.28}$$
$$\left(q_i-(\mu^i)^\top b^i\right)(\eta_i-\bar{\eta}_i)\geq 0 \text{ for all } \eta_i\geq 0, \tag{3.29}$$
$$(\mu^i)^\top(\bar{y}^i-\bar{\eta}_i b^i)=0, \tag{3.30}$$

对于每个 $j=1,\ \dots,\ n_{i\circ}$

一般而言，如果 $\bar{\eta}_i > 0$，那么 $\eta_i - \bar{\eta}_i$ 可能为严格正值，也可能为严格负值。因此，由 (3.29) 和 (3.30) 可得

$$q_i - (\mu^i)^\top b^i = 0, \tag{3.31}$$

$$(\mu^i)^\top \bar{y}^i = \bar{\eta}_i (\mu^i)^\top b^i. \tag{3.32}$$

另一方面，若 $\bar{\eta}_i = 0$，则由 (3.29) 可得 $(q_i - (\mu^i)^\top b^i)\eta_i \geq 0$对所有 $\eta_i \geq 0$ 均成立，因此 (3.29) 等价于

$$q_i - (\mu^i)^\top b^i \geq 0. \tag{3.33}$$

因此，我们可以根据市场激活情况区分两种情形。

(*i*)：当 $\bar{\eta}_i = 0$ 时，即市场 i 处于非激活状态，因此注释 3.1 表明$\bar{x}^i = \bar{y}^i = 0$。如前所述，条件 (3.29) 等价于 (3.31)，而条件 (3.30) 自动成立。

另一方面，条件 (3.27) 和 (3.28) 等价于

$$\begin{aligned} -\nabla u(\mathbf{0}) A^i - \lambda_i (\bar{P}^i)^\top \geq 0, \\ \nabla u(\mathbf{0}) A^i + \gamma_i \lambda_i (\bar{P}^i)^\top + (\mu^i)^\top \geq 0. \end{aligned}$$

由第一个不等式可得 $-\lambda_i (\bar{P}^i)^\top \geq \nabla u(\mathbf{0}) A^i$，这意味着：

$$-\lambda_i \bar{P}^i_j \geq \sum_{k=1}^{n} D_k u(\mathbf{0}) A^i_{kj} \quad \text{for every } j \in \{1, \ldots, n_i\}.$$

由于 $D_k u(\mathbf{0}) \geq 0$, $\bar{P}^i_j \geq 0$ 根据假设 (3.5) 和 (3.6) 成立，且 $A^i_{kj} \geq 0$ 根据定义成立，因此可得 $\lambda_i \leq 0$。由此，(3.1) 可改写为

$$|\lambda_i| (\bar{P}^i)^\top \geq \nabla u(\mathbf{0}) A^i \geq \gamma_i |\lambda_i| (\bar{P}^i)^\top - (\mu^i)^\top.$$

这证明了 KKT系统 (3.21a) 等价于 (3.19)。

(*ii*)：当 $\bar{\eta}_i \neq 0$ 时，我们区分交易资产指标。对于每个 $j \in \{1, \ldots, n_i\}$，根据互补条件 (3.4)，有以下几种情况：

- If $\bar{x}^i_j = \bar{y}^i_j = 0$, then

$$\begin{aligned} -\sum_{k=1}^{n} D_k u(A(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}})) A^i_{kj} - \lambda_i \bar{P}^i_j \quad &\geq \quad 0, \\ \sum_{k=1}^{n} D_k u(A(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}})) A^i_{kj} + \gamma_i \lambda_i \bar{P}^i_j + \mu^i_j \quad &\geq \quad 0, \end{aligned}$$

并且，按照之前相同的推理，这等价于

$$|\lambda_i| \bar{P}^i_j \geq \sum_{k=1}^{n} D_k u((A(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}})) A^i_{kj} \geq \gamma_i |\lambda_i| \bar{P}^i_j + \mu^i_j. \tag{3.35}$$

• 如果 $\bar{x}_j^i = 0$ 且 $\bar{y}_j^i > 0$，那么（3.27）和（3.28）等价于

$$\begin{aligned} -\sum_{k=1}^{n} D_k u(A(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}}))A_{kj}^i - \lambda_i \bar{P}_j^i &\geq 0, \\ \sum_{k=1}^{n} D_k u(A(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}}))A_{kj}^i + \gamma_i \lambda_i \bar{P}_j^i + \mu_j^i &= 0. \end{aligned} \tag{3.36}$$

与之前一样，由第一个方程可推得 $\lambda_i \leq 0$。此外，由于等式成立，因此不等式成立：

$$\sum_{k=1}^{n} D_k u(A(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}}))A_{kj}^i = \gamma_i |\lambda_i| \bar{P}_j^i - \mu_j^i \leq \gamma_i |\lambda_i| \bar{P}_j^i \leq |\lambda_i| \bar{P}_j^i = -\lambda_i \bar{P}_j^i,$$

因此，(3.36) 等价于

$$\sum_{k=1}^{n} D_k u(A(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}}))A_{kj}^i + \gamma_i \lambda_i \bar{P}_j^i + \mu_j^i = 0. \tag{3.37}$$

• 如果 $R_j^i > \bar{x}_j^i > 0$ 且 $\bar{y}_j^i = 0$，那么 (3.27) 和 (3.28) 等价于

$$\begin{aligned} -\sum_{k=1}^{n} D_k u(A(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}}))A_{kj}^i - \lambda_i \bar{P}_j^i &= 0, \\ \sum_{k=1}^{n} D_k u(A(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}}))A_{kj}^i + \gamma_i \lambda_i \bar{P}_j^i + \mu_j^i &\geq 0. \end{aligned} \tag{3.38}$$

将 (3.5) 代入第一个方程，可推得 $\lambda_i \leq 0$，并且

$$\sum_{k=1}^{n} D_k u(A(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}}))A_{kj}^i = |\lambda_i| \bar{P}_j^i \geq \gamma_i |\lambda_i| \bar{P}_j^i \geq \gamma_i |\lambda_i| \bar{P}_j^i - \mu_j^i. \tag{3.39}$$

• 如果 $\bar{x}_j^i = R_j^i$ 且 $\bar{y}_j^i = 0$，那么这种情况不可能对每一种资产都成立，也就是说，存在 $k \neq j$ 使得 $x_k^i = R_k^i$。事实上，若不然，即 $\bar{x}^i = R^i$，那么 $\varphi_i(R^i) = \varphi_i($ 0)，这与 (3.6) 矛盾。这意味着 $\lambda_i \leq 0$。

由于在这种情况下，(3.27) 和 (3.28) 等价于

$$\begin{aligned} -\sum_{k=1}^{n} D_k u(A(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}}))A_{kj}^i - \lambda_i \bar{P}_j^i &\leq 0, \\ \sum_{k=1}^{n} D_k u(A(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}}))A_{kj}^i + \gamma_i \lambda_i \bar{P}_j^i + \mu_j^i &\geq 0, \end{aligned}$$

于是，条件可简化为

$$\sum_{k=1}^{n} D_k u(A(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}}))A_{kj}^i \geq |\lambda_i| \bar{P}_j^i. \tag{3.40}$$

最后，由 (3.35)、(3.37)、(3.39)、(3.40) 和条件 (3.27) 可得关系式 (3.20)。

□

下面我们分析定理 3.1 的 KKT 条件。

注 3.2. 从 *KKT* 条件中可以得出一些有用的见解。例如，考虑定理 *3.1* 的 *(a)* 部分。在与该定理相同的假设下，最优性系统给出了乘子的如下上界：

$$\mu_j^i \leq \frac{q_i}{b_j^i},\ \forall\ j \in \{1,\ldots,n_i\},\ \forall\ i \in \{1,\ldots,m\}. \tag{3.41}$$

定理 *3.1* 的 *(a)* 部分的核心结果是方程 (3.19)，它刻画了完全不进行交易的最优性。从这一条件可以清楚地看出，乘子的正值越大，无交易区域就越大。此外，不等式 (3.41)表明，每个乘子都有一个上界，该上界与燃料费成正比，与激活上界成反比。因此，*Gas* 费用会扩大无交易区域，这一影响是合理的。关于哪些条件有利于不进行交易的进一步讨论将在第 *4* 节继续。

此外，定理 *3.1* 的 *(b)* 部分对应于情形 $\bar{\eta}_i > 0$。此时，*KKT* 条件 $(\mu^i)^\top(\bar{y}^i - \bar{\eta}_i b^i) = 0$ 等价于

$$\mu_j^i \bar{y}_j^i = \mu_j^i \bar{\eta}_i b_j^i,$$

因此，与严格为正的乘子相关的最优交易是确定的，

$$\mu_j^i > 0 \implies \bar{y}_j^i = \bar{\eta}_i b_j^i. \tag{3.42}$$

注3.3。 技术假设(3.9)具有重要的金融含义：

(i) 整数解惩罚：条件 $b - \bar{y} > 0$ 在 *(3.9)* 中会对整数解施加惩罚，当 $\bar{\eta}_i$，$q_i > 0$ 时，因为它必然意味着对于所有 $i \in \{1,\ldots,m\}$ 都有 $\bar{\eta}_i \neq 1$ 。从这个意义上说，在假设 *(3.9)* 下，问题 $(\mathcal{P}^r(b\ q))$ 的每个解 $(\bar{x}\ \bar{y}\ \bar{\eta}) \in \hat{S}$ 都是定理 *3.1* 所述的 *KKT* 点。因此，如果 $\bar{\eta}_i > 0$，则由 *(3.42)* 可得 $\bar{\eta}_i \neq 1$（除非 $\mu^i = 0$）。在此情况下，根据条件 *(3.20)*，$q_i = 0$ ，这对应于一个没有燃料费的市场。因此，对于存在燃料费和交易的市场，必然有$\bar{\eta}_i \neq 1$，且至少有一笔交易满足 $\bar{y}_j^i = \bar{\eta}_i b_j^i$。然而，需要强调的是，这并不一定意味着所有正交易都已饱和，即 $\bar{y}_j^i = \bar{\eta}_i b_j^i$；事实上，数值示例显示，存在交易为 $\bar{y}_j^i \in (0, \bar{\eta}_i b_j^i)$的情形。

(ii) 投标规模上限：条件$b_j^i - \bar{y}_j^i \leq \frac{2}{\gamma_i} R_j^i$ 对最大投标规模施加了一个上界。当 $b^i \leq \frac{2}{\gamma_i} R^i$时，这一点尤其成立。 —

3.2 充分最优性条件

我们给出了充分条件，既不对效用函数 u 也不对交易函数 φ_i作凸性假设。为此，设 $K \subseteq \mathbb{R}^n$ 和$C \subseteq \mathbb{R}^m$ 为两个非空集合，且 $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 为可微映射。

若对于所有 $x \in K$（见 [26, 定义 5.12]），以下蕴含关系均成立，则称 g 在 $x \in K$ 处关于 K 是 C-拟凸的：

$$g(x) - g(\bar{x}) \in C \implies \nabla g(\bar{x})(x - \bar{x}) \in C. \tag{3.43}$$

下一个结果给出了一个充分最优性条件。

定理 3.2. 假设对于每个 $i = 1,\ f$都是伪凹的（因此 $-f$是伪凸的），且 φ_i是拟线性的。若 $(\bar{\mathbf{x}}\ \bar{\mathbf{y}}\ \bar{\eta}) \in \hat{\mathbf{S}}$满足最优性系统 (3.19) 和 (3.20)，则它是问题 $(\mathcal{P}^r(\mathbf{b}\ q))$的解。

证明。 我们应用 [26, 推论 5.15]。首先，给定集合

$$\widehat{C} := (\mathbb{R}_- \backslash \{0\}) \times \left(-\left(\prod_{i=1}^{m} \mathbb{R}_+^{n_i} \right) + \operatorname{cone}(\{G(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}, \bar{\eta})\}) - \operatorname{cone}(\{G(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}, \bar{\eta})\}) \right) \times \{0\},$$

我们来证明 $(-f, G, H)$ 在 $(\bar{\mathbf{x}}\ \bar{\mathbf{y}}\ \bar{\eta})$ 处关于 $\hat{\mathbf{S}}$是 $\widehat{C}$-拟凸的。也就是说，我们将证明对于每个 $(\mathbf{x},\mathbf{y}\ \eta) \in \hat{\mathbf{S}}$，都有

$$\begin{aligned} &(-f, G, H)(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \eta) - (-f, G, H)(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}, \bar{\eta}) \in \widehat{C} \\ \implies\ &\nabla(-f, G, H)(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}, \bar{\eta})\,(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}, \eta - \bar{\eta}) \in \widehat{C}. \end{aligned} \tag{3.44}$$

关系式 (3.44) 可用分量表示如下：

(*i*) 如果 $-f(\mathbf{x},\ \mathbf{y}\ \eta) + f(\bar{\mathbf{x}}\ \bar{\mathbf{y}}\ \bar{\eta}) \in \mathbb{R}_- \backslash \{0\}$，那么

$$-\nabla f(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}, \bar{\eta})\,(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}, \eta - \bar{\eta}) \in \mathbb{R}_- \backslash \{0\}.$$

(*ii*) 如果

$$\begin{aligned} &G_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \eta) - G_i(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}, \bar{\eta}) \in \\ &-\left(\prod_{i=1}^{m} \mathbb{R}_+^{n_i} \right) + \operatorname{cone}(\{G_i(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}, \bar{\eta})\}) - \operatorname{cone}(\{G_i(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}, \bar{\eta})\}), \end{aligned}$$

then

$$\begin{aligned} &\nabla G_i(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}, \bar{\eta})(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}, \eta - \bar{\eta}) \in \\ &-\left(\prod_{i=1}^{m} \mathbb{R}_+^{n_i} \right) + \operatorname{cone}(\{G_i(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}, \bar{\eta})\}) - \operatorname{cone}(\{G_i(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}, \bar{\eta})\}) \end{aligned}$$

对于每个 $i = 1, \ldots, m$。

(iii) 若 $H_i(\mathbf{x},\mathbf{y}\ \eta) = H_i(\bar{\mathbf{x}}\ \bar{\mathbf{y}}\ \bar{\eta})$，则 $\nabla H_i(\bar{\mathbf{x}}\ \bar{\mathbf{y}}\ \bar{\eta})(\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}},\mathbf{y}-\bar{\mathbf{y}}\ \eta-\bar{\eta}) = 0$ 对于每个 $i = 1,\ldots,m$。

接下来，让我们逐一证明前述条件：

(*i*)：设 $(\mathbf{x},\mathbf{y}\ \eta) \in \hat{\mathbf{S}}\,(\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ 恒成立)。那么，由于 f 是伪凹的，

$$\begin{aligned}-f(\mathbf{x},\mathbf{y},\eta) + f(\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{y}},\bar{\eta}) \in -\mathbb{R}_-\backslash\{0\} &\Longleftrightarrow -f(\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{y}},\bar{\eta}) > -f(\mathbf{x},\mathbf{y},\eta)\\ &\overset{(2.3)}{\Longrightarrow} -\nabla f(\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{y}},\bar{\eta})(\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}},\mathbf{y}-\bar{\mathbf{y}},\eta-\bar{\eta}) < 0\\ &\Longleftrightarrow -\nabla f(\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{y}},\bar{\eta})(\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}},\mathbf{y}-\bar{\mathbf{y}},\eta-\bar{\eta}) \in -\mathbb{R}_-\backslash\{0\},\end{aligned}$$

因此 **(*i*)** 成立。

(*ii*)：设 $(\mathbf{x},\mathbf{y}\ \eta) \in \hat{\mathbf{S}}$。由于 G_i 是凸的（仿射的），我们有

$$\begin{aligned}\nabla G_i(\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{y}},\bar{\eta})(\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}},\mathbf{y}-\bar{\mathbf{y}},\eta-\bar{\eta}) &= G_i(\mathbf{x},\mathbf{y},\eta) - G_i(\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{y}},\bar{\eta})\\ &= y^i - \bar{y}^i - (\eta_i - \bar{\eta}_i)\,b^i,\end{aligned}$$

对于每个 $(\mathbf{x},\mathbf{y}\ \eta) \in \hat{\mathbf{S}}$，因此该蕴含显然成立。

(*iii*)：设 $(\mathbf{x},\mathbf{y}\ \eta) \in \hat{\mathbf{S}}$。那么，应用 φ_i 的拟线性性质，我们有

$$\begin{aligned}&H_i(\mathbf{x},\mathbf{y},\eta) = H_i(\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{y}},\bar{\eta}) \Longleftrightarrow \varphi_i(R^i + \gamma_i y^i - x^i) = \varphi_i(R^i + \gamma_i \bar{y}^i - \bar{x}^i)\\ &\overset{(2.2)}{\Longrightarrow} \nabla\varphi_i(R^i + \gamma_i \bar{y}^i - \bar{x}^i)(\gamma_i(y^i - \bar{y}^i) - (x^i - \bar{x}^i)) = 0\\ &\Longleftrightarrow \gamma_i \nabla\varphi_i(R^i + \gamma_i \bar{y}^i - \bar{x}^i)(y^i - \bar{y}^i) - \nabla\varphi_i(R^i + \gamma_i \bar{y}^i - \bar{x}^i)(x^i - \bar{x}^i) = 0\\ &\Longleftrightarrow \nabla H_i(\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{y}},\bar{\eta})(\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}},\mathbf{y}-\bar{\mathbf{y}},\eta-\bar{\eta}) = 0,\end{aligned}$$

并且 **(*iii*)** 成立。

因此，$(-f,\ G,\ H)$ 在 $(\bar{\mathbf{x}}\ \bar{\mathbf{y}}\ \bar{\eta})$ 处是 C-拟凸的；因此，若该点满足 KKT 条件 (3.19) 和 (3.20)，则根据 [26, 推论 5.15]，点 $(\bar{\mathbf{x}}\ \bar{\mathbf{y}}\ \bar{\eta})$ 是问题 $(\mathcal{P}^r(\mathbf{b}\ q))$ 的最优解。 □

根据定理3.1和3.2，我们可以建立问题 $(\mathcal{P}^r(\mathbf{b}\ q))$ 的最优点的一般刻画。

定理 3.3。 假设性质 (3.3)、(3.5) 和 (3.6)均成立， f 是伪凹的，并且对于每个 $i = 1$、.....、 m， φ_i 是拟线性的。设 $(\bar{\mathbf{x}}\ \bar{\mathbf{y}}\ \bar{\eta}) \in \hat{\mathbf{S}}$ 满足 (3.4) 和 (3.9)。那么，以下断言等价：

(a) $(\bar{\mathbf{x}}\ \bar{\mathbf{y}}\ \bar{\eta})$ 求解问题 $(\mathcal{P}^r(\mathbf{b}\ q))$。

(b) $(\bar{\mathbf{x}}\ \bar{\mathbf{y}}\ \bar{\eta})$ 验证了最优性系统 (3.19) 和 (3.20)。

在下一条注释中，我们将分析近似问题（$\mathcal{P}^r(\mathbf{b}\ q)$）相对于问题（$\mathcal{P}(\mathbf{b}\ q)$）的适用范围。

注3.4. 松弛问题$(\mathcal{P}^r(\mathbf{b}\ q))$的近似解$(\bar{\mathbf{x}}\ \bar{\mathbf{y}}\ \bar{\eta}) \in \mathbf{S}$在不同方面有别于原问题$(\mathcal{P}(\mathbf{b}\ q))$的解$(\tilde{\mathbf{x}}\ \tilde{\mathbf{y}}\ \tilde{\eta})$。例如，这种近似无法纳入固定燃气费惩罚，因为 $\bar{\eta}_i$ 不一定属于 $\{0,1\}$。事实上，若方程(3.9) 成立，那么我们在注*3.3*中看到，对于所有$i \in \{1,\dots,m\}$， $\bar{\eta}_i < 1$ 。在这种情况下，相应的费用 $\sum_{i=1}^m q_i\bar{\eta}_i$与实际费用 $\sum_{\tilde{\eta}_i>0} q_i$不一致，可能导致效用权衡。

为了正确比较这些解，让我们考虑任意可行点

$$(\mathbf{x},\mathbf{y},\eta) \in \prod_{i=1}^m [0,R^i] \times \prod_{i=1}^m [0,b^i] \times \{0,1\}^m$$

的$(\mathcal{P}(\mathbf{b}\ q))$，根据构造，它对于$(\mathcal{P}^r(\mathbf{b}\ q))$也是可行的。对于此类点，下列不等式成立：

$$-u(A(\bar{\mathbf{x}}-\bar{\mathbf{y}})) + \sum_{i=1}^m q_i\bar{\eta}_i \le -u(A(\mathbf{x}-\mathbf{y})) + \sum_{i=1}^m q_i\eta_i.$$

也就是说，

$$\begin{aligned}
-u(A(\bar{\mathbf{x}}-\bar{\mathbf{y}}))\ -(-u(A(\mathbf{x}-\mathbf{y}))) &\le \sum_{i=1}^m q_i\,(\eta_i-\bar{\eta}_i) = \sum_{\eta_i>0} q_i\,(1-\bar{\eta}_i) - \sum_{\eta_i=0} q_i\bar{\eta}_i \\
&\le q_{\max}\sum_{\eta_i>0} 1 - q_{\min}\sum_{i=1}^m \bar{\eta}_i \ =\ q_{\max}\|\eta\|_0 - q_{\min}\|\bar{\eta}\|_1 \\
&= q_{\max}(\|\eta\|_0 - \|\bar{\eta}\|_1) + (q_{\max}-q_{\min})\|\bar{\eta}\|_1,
\end{aligned}$$

其中 $q_{\max} = \max_{i=1,\dots,m} q_i$, $q_{\min} = \min_{i=1,\dots,m} q_i$, $\|\eta\|_0 = \#\{i :\ \eta_i > 0\}$ 是 ℓ_0伪范数，而$\|\eta\|_1 = \sum_{i=1}^m |\eta_i|$ 是 ℓ_1范数。就效用最大化而言，这对应于

$$u(A(\bar{\mathbf{x}}-\bar{\mathbf{y}})) \ge u(A(\mathbf{x}-\mathbf{y})) - (q_{\max}(\|\eta\|_0 - \|\bar{\eta}\|_1) + (q_{\max}-q_{\min})\|\bar{\eta}\|_1). \quad (3.45)$$

这对每个 $(\mathbf{x},\mathbf{y}\ \eta)$ 都成立。特别地，我们可以令 $(\mathbf{x},\mathbf{y})$ 为以下效用最大化问题的解，该问题考虑由 η 给出的活跃市场，也就是说，

$$\begin{aligned}
&\textit{maximize} \quad u(\Psi) \\
&\textit{subject to} \quad \Psi = \sum_{i=1}^m A^i(x^i-y^i), \\
&\qquad\qquad\ \ y^i \le \mathbf{1}_{\{\eta>0\}} b^i, \\
&\qquad\qquad\ \ \varphi_i(R^i+\gamma_i y^i - x^i) = \varphi_i(R^i), \\
&\qquad\qquad\ \ 0 \le x^i \le R^i, \quad 0 \le y^i,\ \forall\ i \in \{1,\dots,m\},
\end{aligned} \qquad (\mathcal{P}^\eta(\mathbf{b},q))$$

其中

$$1_{\{\eta>0\}} := \begin{cases} 1 & \eta_i > 0, \\ 0 & otherwise. \end{cases}$$

若 $\varepsilon = q_{\max}(\|\eta\|_0 - \|\bar{\eta}\|_1) + (q_{\max} - q_{\min})\|\bar{\eta}\|_1 > 0$，则$(\bar{\mathbf{x}}\ \bar{\mathbf{y}})$对应于该问题的一个$\varepsilon$-近似解。若 $\varepsilon \le 0$，则该解对应于精确情形。令$(\tilde{\mathbf{x}}\ \tilde{\mathbf{y}})$表示问题$(\mathcal{P}^{\bar{\eta}}(\mathbf{b}\ q))$的解，即允许交易，但须满足 $\bar{\eta}_i > 0$。于是，由(3.45)可得

$$u(A(\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{y}})) \ge u(A(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}})) \ge u(A(\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{y}})) - \varepsilon(q, \bar{\eta})\ , \tag{3.46}$$

其中

$$\varepsilon(q, \bar{\eta}) := q_{\max}(\|\bar{\eta}\|_0 - \|\bar{\eta}\|_1) + (q_{\max} - q_{\min})\|\bar{\eta}\|_1. \tag{3.47}$$

由于 $\|\bar{\eta}\|_\infty \le 1$, $\|\bar{\eta}\|_0 - \|\bar{\eta}\|_1 \ge 0$，且每个 $|\bar{\eta}_i| \le 1$ 都意味着 $\|\bar{\eta}\|_1 \le \|\bar{\eta}\|_0$，因此 $\varepsilon(q, \bar{\eta}) \ge 0$ 和$(\bar{\mathbf{x}}\ \bar{\mathbf{y}})$构成$(\mathcal{P}^{\bar{\eta}}(\mathbf{b}\ q))$的一个 $\varepsilon(q, \bar{\eta})$-近似解。该近似解对于问题$(\mathcal{P}^{\bar{\eta}}(\mathbf{b}\ q))$是否可接受，取决于 $\varepsilon(q, \bar{\eta})$的大小。

我们在以下结果中对这一观察进行形式化。

定理*3.4.* 设 $(\check{\mathbf{x}}\ \check{\mathbf{y}}\ \check{\eta}) \in \prod_{i=1}^m [0, R^i] \times \prod_{i=1}^m [0, b^i] \times \{0,1\}^m$ 和 $(\bar{\mathbf{x}}\ \bar{\mathbf{y}}\ \bar{\eta}) \in \prod_{i=1}^m [0, R^i] \times \prod_{i=1}^m [0, b^i] \times [0,1]^m$ 分别是问题 $(\mathcal{P}^r(\mathbf{b}\ q))$ 和 $(\mathcal{P}(\mathbf{b}\ q))$ 的解。设 $(\tilde{\mathbf{x}}\ \tilde{\mathbf{y}}\ 1_{\{\bar{\eta}>0\}}) \in \prod_{i=1}^m [0, R^i] \times \prod_{i=1}^m [0, b^i] \times \{0,1\}^m$，其中 $(\tilde{\mathbf{x}}\ \tilde{\mathbf{y}})$ 对应于问题 $(\mathcal{P}^{\bar{\eta}}(\mathbf{b}\ q))$ 的解。那么，

$$|h(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}, \bar{\eta}) - h(\check{\mathbf{x}}, \check{\mathbf{y}}, \check{\eta})| \le \varepsilon(q, \bar{\eta}), \tag{3.48}$$

其中 $h(\mathbf{x}, \mathbf{y}\ \eta) := u(A(\mathbf{x} - \mathbf{y})) - \sum_{\eta_i>0} q_i$，对应于问题 $(\mathcal{P}(\mathbf{b}\ q))$ 的目标泛函，也就是说，$(\tilde{\mathbf{x}}\ \tilde{\mathbf{y}}\ 1_{\{\bar{\eta}>0\}})$ 是问题 $(\mathcal{P}(\mathbf{b}\ q))$ 的一个 $\varepsilon(q, \bar{\eta})$-近似解，其中 $\varepsilon(q, \bar{\eta}) = q_{\max}(\|\bar{\eta}\|_0 - \|\bar{\eta}\|_1) + (q_{\max} - q_{\min})\ \|\bar{\eta}\|_1$。

证明。 考虑到 $(\bar{\mathbf{x}}\ \bar{\mathbf{y}}\ \bar{\eta})$ 和 $(\check{\mathbf{x}}\ \check{\mathbf{y}}\ \check{\eta})$ 的最优性，

$$u(A(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}})) - \sum_{i=1}^m \bar{\eta}_i q_i \ge u(A(\check{\mathbf{x}} - \check{\mathbf{y}})) - \sum_{\check{\eta}_i>0} q_i \ge u(A(\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{y}})) - \sum_{\bar{\eta}_i>0} q_i, \tag{3.49}$$

我们可以将其改写为

$$h^r(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}, \bar{\eta}) \ge h(\check{\mathbf{x}}, \check{\mathbf{y}}, \check{\eta}) \ge h(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}, \bar{\eta}),$$

其中 $h^r(\bar{\mathbf{x}}\ \bar{\mathbf{y}}\ \bar{\eta}) := u(A(\bar{\mathbf{x}}\ -\ \bar{\mathbf{y}}))\ - \sum \bar{\eta}_i q_i$.

由此，

$$|h(\check{\mathbf{x}}, \check{\mathbf{y}}, \check{\eta}) - h(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}, \bar{\eta})| \le |h^r(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}, \bar{\eta}) - h(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}, \bar{\eta})|. \tag{3.50}$$

现在，由于 $u(A(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}})) \le u(A(\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{y}}))$，我们得到

$$\begin{aligned} |h^r(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}, \bar{\eta}) - h(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}, \bar{\eta})| &= h^r(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}, \bar{\eta}) - h(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}, \bar{\eta}) \\ &= u(A(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}})) - u(A(\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{y}})) + \sum_{\bar{\eta}_i>0} q_i - \sum_{\bar{\eta}_i>0} \bar{\eta}_i q_i \\ &\le \sum_{\bar{\eta}_i>0} (1 - \bar{\eta}_i) q_i \end{aligned}$$

根据注3.4, $\sum_{\bar{\eta}} \quad (1-\bar{\eta}_i)q_i \le \varepsilon(q,\ \bar{\eta})$，利用 (3.50) 最终得到$_{>0}$

$$|h^r(\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{y}},\bar{\eta}) - h(\tilde{\mathbf{x}},\tilde{\mathbf{y}},\bar{\eta})| \le \varepsilon(q,\bar{\eta}).$$

□

我们以以下关于复合函数 $f=-u\circ A$ 的伪凸性技术假设的注记结束本节。

注记 3.5。在定理 *3.2* 和 *3.3* 中，我们假设函数f（$\mathbf{x}$、$\mathbf{y}$ η）$=-u\circ A$（$\mathbf{x}-\mathbf{y}$）$+\langle q,\eta\rangle$ 是伪凸的。如下文所分析，这一假设并不具有限制性。事实上，为简化记号，若 $v:\ \mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ 是伪凸的（$v\equiv -u$），且 $A:\ \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 是线性算子，则函数$h:=v\circ A$ 是伪凸的。令 x_1,$x_2\in\mathbb{R}^m$ 满足 h（x_1）$<h$（x_2）。于是，

$$\begin{aligned} h(x_1)<h(x_2) &\iff v(Ax_1)<v(Ax_2)\\ &\implies \nabla v(Ax_2)(Ax_1-Ax_2)<0 \ \textit{(v pseudoconvex)}\\ &\implies \nabla v(Ax_2)A(x_1-x_2)<0\\ &\iff \nabla h(x_2)(x_1-x_2)<0, \end{aligned}$$

且 $h=v\circ A$ 是伪凸的。

4 含 Gas 费用的无交易刻画

无交易条件通过确保对于问题 $(\bar{\mathbf{x}}\ \bar{\mathbf{y}}\ \bar{\eta})\in\hat{}\mathbf{S}$ 的每个解，我们都有 $(\bar{\mathbf{x}}\ \bar{\mathbf{y}})=(\mathbf{0},\ \mathbf{0})$，从而根据注释 3.1 得出 $\bar{\eta}=0$，以此防止套利。因此，我们得到最优路由问题中无交易的如下定义。

定义 4.1。如果在最优路由问题中，$(\bar{\mathbf{x}}\ \bar{\mathbf{y}}\ \bar{\eta})=(\mathbf{0},\ \mathbf{0},\ 0)$ 是 $(\mathcal{P}(\mathbf{b}\ q))$ 的唯一解，则称无交易条件在该最优路由问题中成立。

由于 $(\mathbf{0},\ \mathbf{0},\ 0)$ 是问题 $(\mathcal{P}^r(\mathbf{b}\ q))$ 的一个可行解，因此如果无交易条件成立，它确实是一个有效解。因此，我们可以将先前的分析应用于问题 $(\mathcal{P}^r(\mathbf{b}\ q))$，以便在假设无交易条件成立的前提下推导其性质。

定理 4.1. 假设性质 (3.3)、(3.5)和(3.6) 均成立。考虑以下陈述：

(a) 无交易条件成立。

(b) $\bar{P}^i\in K_i^{\gamma_i,q_i,b^i}$ *for every* $i\in\{1,\dots,m\}$, *where*

$$K_i^{\gamma_i,q_i,b^i}:=\left\{\begin{array}{l} z\in\mathbb{R}^n:\ \alpha_i z\ge (A^i)^\top\nabla u(\mathbf{0})^\top\ge\gamma_i\alpha_i z-\mu^i,\\ \textit{for some } (\alpha_i,\mu^i)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+^n \textit{ and } q_i\ge(\mu^i)^\top b^i \end{array}\right\}. \quad (4.1)$$

那么，$(a)\Rightarrow(b)$。此外，若对于每个 $i=1$，...，m，f 都是伪凹的，且 φ_i 是拟线性的，那么 $(b)\Rightarrow(a)$。

证明。 $(a) \Rightarrow (b)$：我们应用定理 3.1（必要的 KKT 条件）。点 $(\bar{\mathbf{x}}\ \bar{\mathbf{y}}\ \bar{\eta}) = (\mathbf{0},\ \mathbf{0},\ 0)$ 显然满足 (3.4) 和 (3.9)，因为根据条件 (3.3)，$b^i >> 0$。在此情形下，对于每个 $i = 1,\ ...,\ m$，$\bar{\eta}_i = 0$。

对于一般的 $i \in \{1, \ldots, m\}$，以下条件成立

$$\begin{cases} \alpha_i(\bar{P}^i)^\top \geq \nabla u(\mathbf{0}) A^i \geq \gamma_i \alpha_i (\bar{P}^i)^\top - (\mu^i)^\top, \\ q_i - (\mu^i)^\top b^i \geq 0. \end{cases} \tag{4.2}$$

且此条件等价于 (4.2)。

$(b) \Rightarrow (a)$：直接应用定理 3.2（充分 KKT 条件）即可得出。 □

注 4.1。 定理 *4.1*(b) 的几何解释是，式(4.1) 中的集合意味着价格属于：

$$P^i \in K_i^{\gamma_i} + \prod_{j=1}^{n} \left[-\frac{q_i}{b_j^i}, 0 \right],\ \forall\ i \in \{1, \ldots, m\}, \tag{4.3}$$

其中 $K_i^{\gamma_i} := \{z \in \mathbb{R}^n :\ \ \gamma_i \nu_i z \leq A_i \nabla u(0)\ \leq \nu_i z,$ 对于某个 $\nu_i \in \mathbb{R}\}$。因此，每个价格 P^i 都属于集合 $K_i^{\gamma_i}$，并受到一个区间的扰动，该区间取决于市场的固定成本 q_i 和交易限额 b_j^i，对所有 $j \in \{1, \ldots, n_i\}$ 均成立。

这可以从(4.1)中的第二个不等式推导出来。事实上，由(4.1)可得

$$-\sum_{k=1}^{n} \mu_k^i b_k^i \geq -q_i \Longrightarrow -\mu_j^i \geq -\frac{q_i}{b_j^i} + \sum_{k \neq j} \mu_k^i \frac{b_k^i}{b_j^i} \geq -\frac{q_i}{b_j^i},\ \forall\ j = 1, \ldots, n_i.$$

因此，

$$\begin{aligned} &\alpha_i(\bar{P}^i)^\top \geq \nabla u(0) A^i \geq \gamma_i \alpha_i (\bar{P}^i)^\top - (\mu^i)^\top \\ \overset{(4.2)}{\Longrightarrow}\ &\alpha_i \bar{P}_j^i \geq (\nabla u(0) A^i)_j \geq \gamma_i \alpha_i \bar{P}_j^i - \frac{q_i}{b_j^i}. \end{aligned}$$

于是，(4.3)成立。

注 4.2。 据我们所知，即使在单市场情形下，带燃料费的最优路由模型的无交易刻画也是对现有文献的一项新贡献。以往研究在不同假设下推导出了无交易条件：

(i) 在 *[8,* 第 *3],* 节中，针对不含燃料费的最优路由问题的凸松弛形式建立了无交易条件，因此市场条件更简单。(ii) 对于单市场情形，*[5]* 推导出了松弛后的凸问题的无交易条件，而 *[22]*则将这一结果扩展到了原始的非凸形式。

在所有情况下，当燃料费为零时，我们的模型均恢复了无交易条件，从而扩展了先前的结果。这也与注记 *3.2* 和 *4.1* 一致，证实 *Gas* 费用会在无交易区域中引入一个额外项，从而扩大该区域并阻止套利机会。

5 诠释与数值实验

在本节中，我们描述了为举例说明理论结果而进行的两项数值实验。其结果有助于对前几节中的论述作出金融解释。

例 5.1. 在第一个例子中，我们研究燃料费对无交易区域的影响。为此，我们考虑一个简单模型，其中包含单个市场$m = 1$、六种代币 $n = 6$和线性效用 $u(z) = \pi^T z$，该模型基于 *[5,* 第 *5.3],* 节提出并在 *[22,* 第 *5.2]* 节研究的模型。在当前语境下，我们可以将问题写成问题 $(\mathcal{P}^r(\mathbf{b}\ q))$ 的一个特例，但为简化记法，我们省略上标，因此问题可写为：

$$\begin{array}{ll} \textit{maximize} & \pi^T(x-y) - q\eta \\ \textit{subject to} & y - \eta b \le 0, \\ & \varphi(R + \gamma y - x) - \varphi(R) = 0, \\ & 0 \le x \le R,\ 0 \le y^i,\ 0 \le \eta \le 1. \end{array} \tag{5.1}$$

相较于模型 *[5],*，本文考虑了三个新要素：激活变量 $\eta \in \mathbb{R}$、燃料费 $q \in \mathbb{R}$以及投标篮子界 $b \in \mathbb{R}^6$。我们采用与参考文献相同的数据，包括折现率 $\gamma = 0.9$ 和储备向量

$$R = (1, 3, 2, 5, 7, 6).$$

根据注*3.3*，我们取 $b = 2R/\gamma$，这与理论一致。向量 $\pi \in \mathbb{R}^6$ 表示交易者私人价格；按照 *[22],* 中给出的例子，我们假设这些价格由以下参数化：

$$\pi = \pi(t, s) \equiv (tp_1, sp_2, ..., p_6) \textit{ for some scalars } t, s \in [0, 2]\,,$$

其中，缩放后的市场价格向量 $p \in \mathbb{R}^6$ 由其分量$p_i = P_i/P_6 = \nabla\varphi(R)_i/\nabla\varphi(R)_6$给出。这样，当 $s = t = 1$时，市场价格与交易者价格一致，因此无交易区域预计位于该值附近。我们比较两种类型的市场函数。一种是几何平均数

$$\varphi_{\mathrm{gm}}(x) = \prod_{i=1}^{n} x_i^{1/n}$$

另一种是 *[22],*中介绍的加权拟算术平均

$$\varphi_{\mathrm{qm}}(x) = \exp\left(W_0\left\{ \frac{2}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} (x_i + 1)^2 \ln(x_i + 1) \right] \right\} \Big/ 2 \right) - 1,$$

其中，$W_0(\cdot)$是兰伯特欧米伽函数的主支。*[22],* 中介绍了引入这一市场函数的动机，这与它既非凸也非凹这一事实有关。

在这两种情况下，定理 *4.1* 陈述中 *(a)* 与 *(b)* 之间等价性的全部假设均已得到验证，因为 u是递增且线性的，因此

伪凸的，且 φ_{gm} 和 φ_{qm} 是递增且拟线性的，参见 *[22]*。我们通过对划分 $[0,2]\times[0,2]$ 的等距网格点以及不同燃料费取值求解相应问题(5.1)，数值计算最优交易；然后确定无交易条件何时成立。在展示结果之前，我们指出，某些参数值在实践中可能并不现实，因为我们选择它们只是为了便于说明。数值问题借助 *SciPy*优化库 *[32]*求解。

图 *1* 和图 *2* 中的数值结果证实，在这两种情况下，*Gas* 费用都会扩大无交易区域。比较市场函数可以发现，对于这个具体示例，加权拟算术平均会产生更大的无交易区域。就市场激活函数 $\eta\,(t,s)$ 而言，几何平均数产生的曲线更平滑，而拟算术平均则呈现分段常数且不光滑的模式。这一差异使得在无交易区域边界附近，市场激活（$\eta\,(t,s)\;=1$）更为频繁，对比图 *3* 和图 *4* 即可看出。

示例 5.2。在第二个示例中，我们考虑一个涉及 $m=5$ 个市场和 $n=3$ 种代币的最优路由问题。在本例中，我们分析第 *4]* 节中研究的线性效用模型；具体而言，我们考虑相同的网络拓扑（见图 *6*），其中市场（以及市场函数和储备）采用罗马数字系统编号。折现率取为 $\gamma_i=0.99$，这是实践中一个较小的值，但我们选择它是为了说明无交易条件。有关这些数据以及其余数据，请参见表 *1*。我们考虑以下具体的线性效用问题：

$$\begin{array}{ll} \textit{maximize} & \pi^T\left(\sum_{i=1}^{5}A^i(x^i-y^i)\right)-\sum_{i=1}^{5}q_i\eta_i \\ \textit{subject to} & y^i\le\eta_i b^i, \\ & \varphi_i(R^i+\gamma_i y^i-x^i)=\varphi_i(R^i), \\ & 0\le x^i\le R^i,\ 0\le y^i, \\ & 0\le\eta_i\le 1,\ \forall\ i\in\{1,\dots,5\}. \end{array} \tag{5.2}$$

与前一个例子一样，我们取 $b^i=2R^i/\gamma_i$，这与注*3.3*中的理论一致。为了进行与之前类似的实验，我们考虑以下对应于各个市场的局部价格向量：

$$\begin{aligned} P^1&=(0.16881825,1.68818239,0.16881823),\\ P^2&=(0.15811388,1.58113882),\\ P^3&=(1.58113882,0.15811388),\\ P^4&=(0.79056903,0.3162274),\\ P^5&=(1,1), \end{aligned}$$

这些数值已通过数值计算得出。我们将交易者对这三种不同代币的私人价格建模为市场*1*中局部价格的单参数扰动，具体而言，

$$\pi=(tP_1^1,P_2^1,P_3^1)\ \textit{for some}\ t\in[0.2,9].$$

燃料费固定为 $q_i = 0.01$。与之前一样，定理 ***4.1*** 的假设均已满足，因此我们可以应用该定理，找出无交易的条件。具体来说，令 $t = 1$ ，并使用方程 (4.3)给出的几何方法，无交易条件意味着存在一个向量 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) \in \mathbb{R}^5_+$ ，使得以下不等式对每个市场均成立：

Market 1

$$\begin{cases} \alpha_1\gamma_1 P_1^1 - \frac{q_1}{b_1^1} \le P_1^1 \le \alpha_1 P_1^1, \\ \alpha_1\gamma_1 P_2^1 - \frac{q_2}{b_2^1} \le P_2^1 \le \alpha_1 P_2^1, \\ \alpha_1\gamma_1 P_3^1 - \frac{q_3}{b_3^1} \le P_3^1 \le \alpha_1 P_3^1. \end{cases}$$

Market 2

$$\begin{cases} \alpha_2\gamma_2 P_1^2 - \frac{q_2}{b_1^2} \le P_1^1 \le \alpha_2 P_1^2, \\ \alpha_2\gamma_2 P_2^2 - \frac{q_2}{b_2^2} \le P_2^1 \le \alpha_2 P_2^2. \end{cases}$$

Market 3

$$\begin{cases} \alpha_3\gamma_3 P_1^3 - \frac{q_3}{b_1^3} \le P_2^1 \le \alpha_3 P_1^3, \\ \alpha_3\gamma_3 P_2^3 - \frac{q_3}{b_2^3} \le P_3^1 \le \alpha_3 P_2^3. \end{cases}$$

Market 4

$$\begin{cases} \alpha_4\gamma_4 P_1^4 - \frac{q_4}{b_1^4} \le P_1^1 \le \alpha_4 P_1^4, \\ \alpha_4\gamma_4 P_2^4 - \frac{q_4}{b_2^4} \le P_3^1 \le \alpha_4 P_2^4. \end{cases}$$

Market 5

$$\begin{cases} \alpha_5\gamma_5 P_1^5 - \frac{q_5}{b_1^5} \le P_1^1 \le \alpha_5 P_1^5, \\ \alpha_5\gamma_5 P_2^5 - \frac{q_5}{b_2^5} \le P_3^1 \le \alpha_5 P_2^5. \end{cases}$$

通过直接计算，我们验证参数值 $\alpha_1 = 1$、$\alpha_2 = \alpha_3 = \frac{P_1^2}{P_2^2} = \frac{P_1^2}{P_1^3} \approx 1.0677$、 $\alpha_5 = P_1^1$满足市场*1*、*2*、*3*和*5*的无交易条件，而市场*4*则出现无法求解的条件。第二个不等式要求：

$$\alpha_4 \ge \max\left\{\frac{P_1^1}{P_1^4}, \frac{P_3^1}{P_2^4}\right\} \approx 0.53385, \tag{5.3}$$

这与第一个方程相矛盾。数值验证证实了这种不相容性：

$$\alpha_4\gamma_4 P_1^4 - \frac{q_4}{b_4^1} \ge 0.53385 \times 0.7115 - 2.25 \times 10^{-4} > 0.1688 = P_3^1. \tag{5.4}$$

因此，在 $t = 1$ 的邻域内，市场*1*、*2*、*3*和*5*均无交易活动，而市场*4*存在套利机会。数值

实验使用200点网格证实了这一行为，见图 5。此外，当 $t \in [0.2, 0.9]$. 时，市场5仍未激活。这也可以通过市场激活情况进行验证，见图7，其中 $\bar{\eta}_3(t) \approx 0.25$ 对于 $t \in [0.2, 0.9]$。我们可以确认，没有市场处于完全激活状态，$\bar{\eta}_i(t) < 1$，因此对于每个 $i = 1, \ldots\ldots, 5$，$\bar{y}^i < b^i$，并且约束资格条件(3.7)在整个参数范围内成立，而最优性条件仍然有效。因此，交易行为可由注3.3.(i)推出，这一点已通过图8中的市场1数值验证。对于市场4，要满足无交易条件，需要降低折现率 γ_4 或提高燃料费 q_4.。在第二种情况下，我们可以通过取

$$q_4 \geq \max\left\{\left(\frac{P_3^1}{P_2^4}\gamma_4 P_1^4 - P_1^1\right) b_1^4, \left(\frac{P_3^1}{P_2^4}\gamma_4 P_2^4 - P_3^1\right) b_2^4\right\} = 9.3788. \tag{5.5}$$

设置 $q_4 = 9.4$ 建立了一个无交易区域，从而有效地停用了市场4，见图9。无交易区间的数值计算结果为

$$[0.907537688442211, 1.0844221105527638], \tag{5.6}$$

见图10。

在第二个实验中，我们对注3.4以及由此得到的定理3.4进行了数值验证。给定松弛问题 $(\mathcal{P}^r(b\ q))$ 的一个解 $(\bar{x}\ \bar{y}\ \bar{\eta})$，我们将 $(\bar{x}\ \bar{y})$ 与问题 $(\mathcal{P}^{\bar{\eta}}(b\ q))$ 的解 $(\tilde{x}\ \tilde{y})$ 进行比较，其中市场激活由 $\bar{\eta}$ 决定。我们考虑不同的恒定燃料费 $q_i \in \{0.01, 0.1, 0.5, 1\}$。根据注3.4，解 $(\bar{x}\ \bar{y})$ 是 $\mathcal{P}^{\bar{\eta}}(b\ q)$ 的一个 $\varepsilon(q, \bar{\eta})$-近似解，其中

$$\varepsilon(q, \bar{\eta}) := q\left(\|\bar{\eta}\|_0 - \|\bar{\eta}\|_1\right). \tag{5.7}$$

这意味着两个解之间的效用差异应该很小，并且根据稳定性论证，当 q 足够小时，对于数量适中的市场，交易应满足 $(\bar{x}\ \bar{y}) \approx (\tilde{x}\ \tilde{y})$，我们的示例正是如此。这个结果具有实际意义，因为根据定理3.4，$\left(\tilde{x}\ \tilde{y}\ 1_{\{\bar{\eta}>0\}}\right)$是原问题 $(\mathcal{P}(b\ q))$ 的一个 $\varepsilon(q, \bar{\eta})$-近似解，其中 $\varepsilon(q, \bar{\eta})$ 是一个先验可计算界。在相同实验条件下进行的数值计算证实了这些理论观察。图11和图12表明，对于 $q = 0.01$，效用函数和交易几乎完全相同。然而，随着 Gas 费用增加且 $\varepsilon(q, \bar{\eta})$ 显著增大，我们观察到这些量之间出现了明显差异。从这个意义上说，图 11 中某些图表里的阶梯状不连续性，可以用 ℓ_0 伪范数的性质以及项 $\sum_{i>0} q_i$ 来解释

$\bar{\eta}$

6 结论

我们研究了存在用于建模 Gas 费用的固定执行成本时，跨多个异构 CFMM 的最优路由问题。结果——

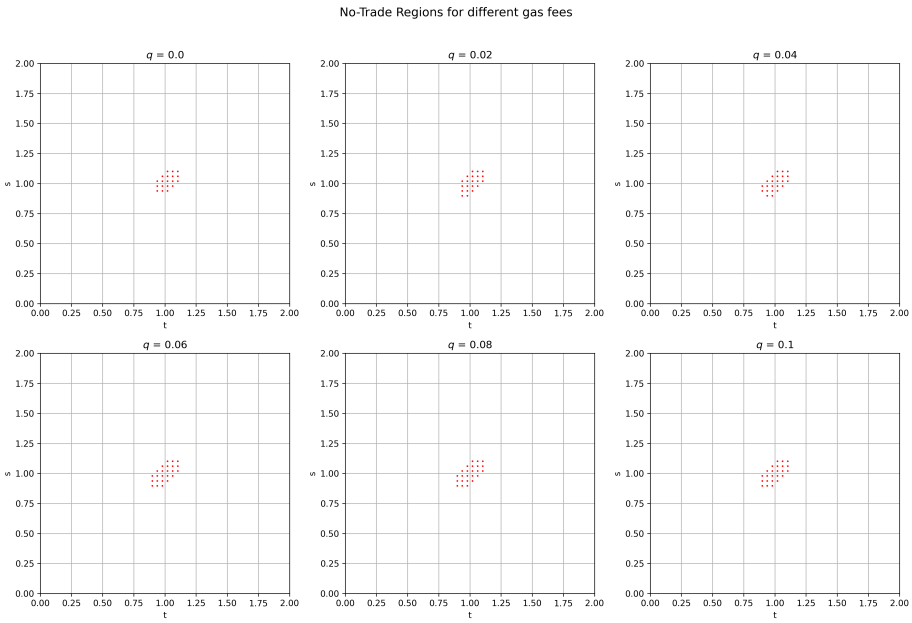


图1：示例1：几何平均函数 φ_{gm} 的无交易区域。

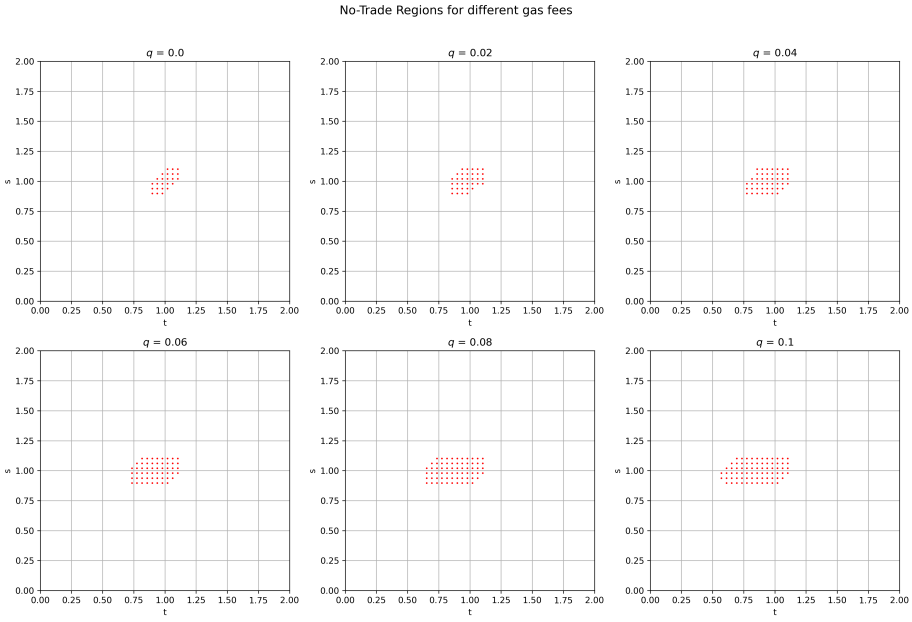


图2：示例1：加权准算术平均函数 φ_{qm} 的无交易区域。

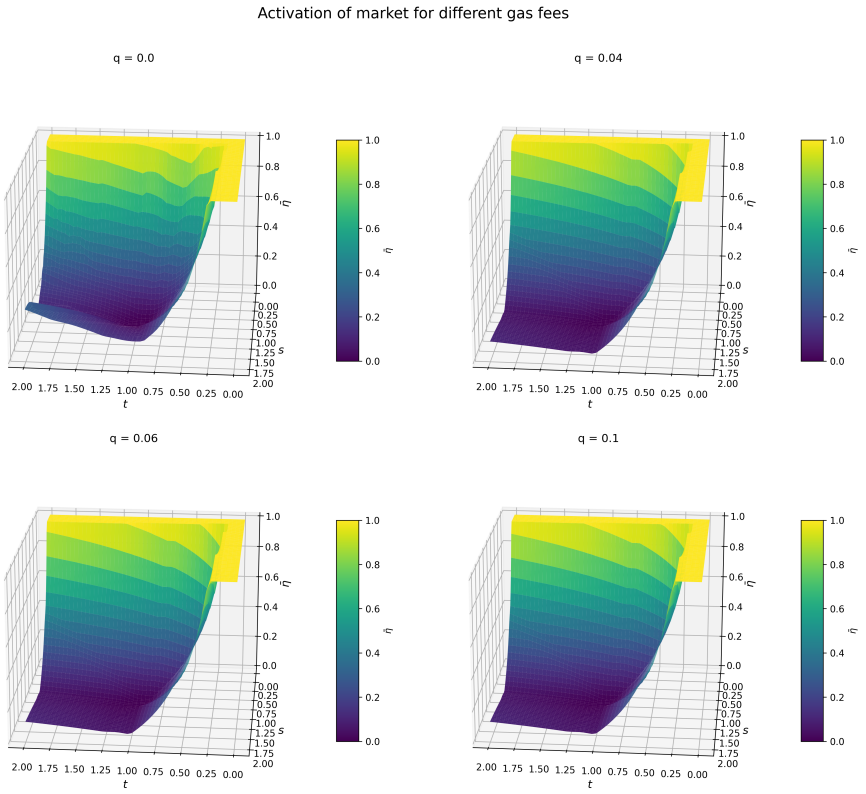


图3：示例1： φ_{gm}的市场激活。

表1：示例 2：本地市场数据。

CFMM	交易函数 φ_i	折现率 γ_i	本地储备 R^i
I	$\varphi_1(R) = (R_1^{w_1} R_2^{w_2} R_3^{w_3})^{1/(w_1+w_2+w_3)}$ (加权几何平均数)，$w = (3, 2, 1)$	0.99	$(3, 0.2, 1)$
II	$\varphi_2(R) = \sqrt{R_1 R_2}$ (几何平均数)	0.99	(10, 1)
III	$\varphi_3(R) = \sqrt{R_1 R_2}$ (几何平均数)	0.99	$(1, 10)$
IV	$\varphi_4(R) = \sqrt{R_1 R_2}$ (几何平均数)	0.99	(20, 50)
V	$\varphi_5(R) = R_1 + R_2$ (算术平均数)	0.99	(10, 10)

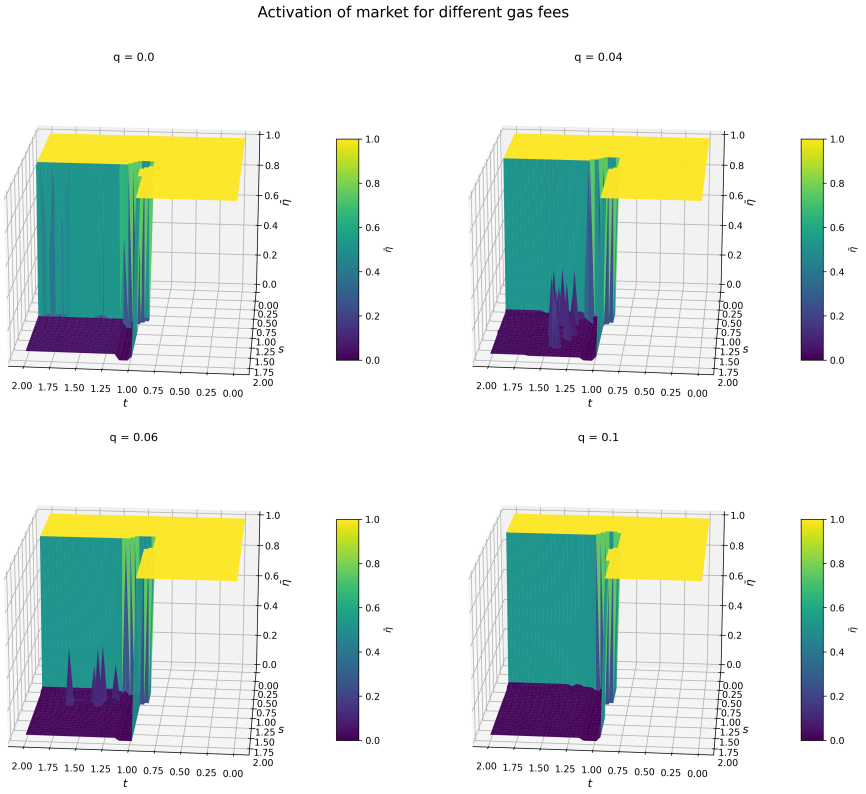


图4：示例1： φ_{qm}市场的激活。

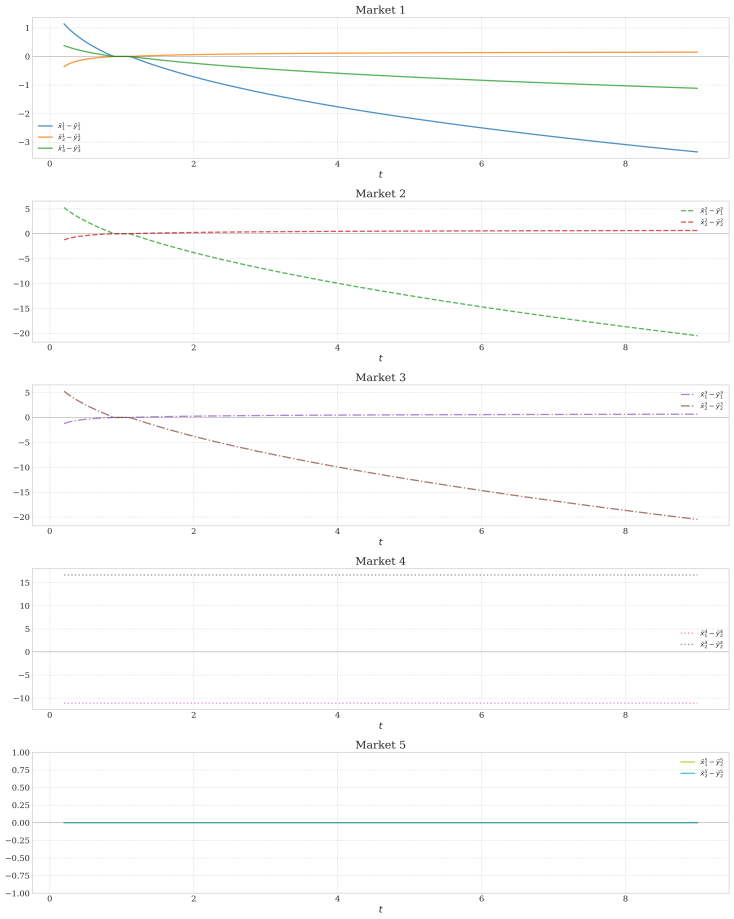


图 5：示例 2：最优交易（$q_i = 0.01$）。

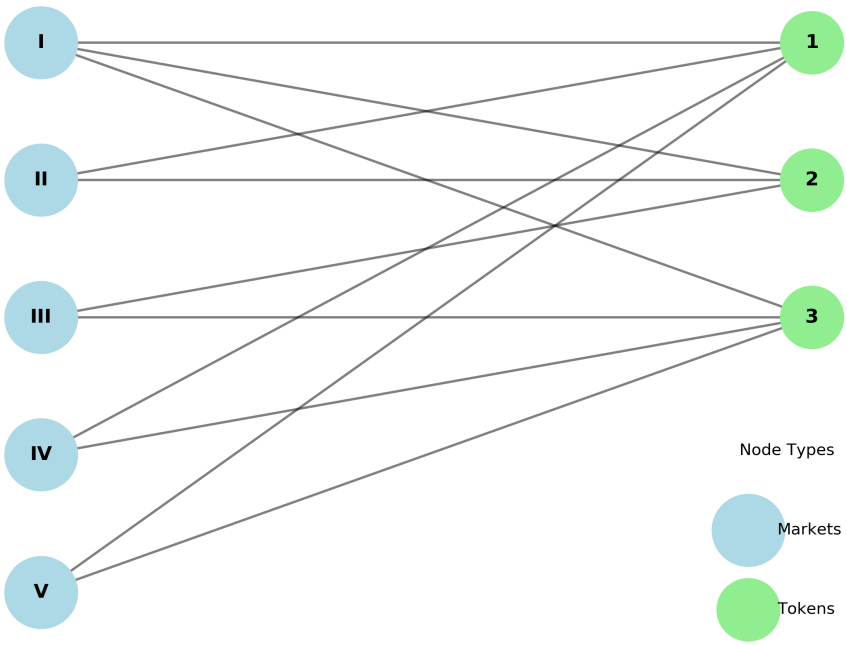


图6：示例 2：市场网络拓扑。

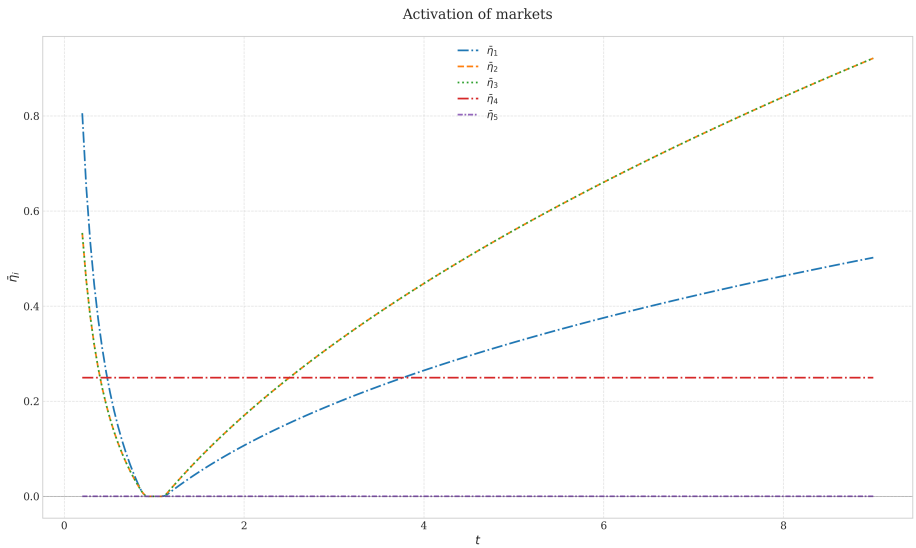


图7：示例 2：市场激活（$q_i = 0.01$）。

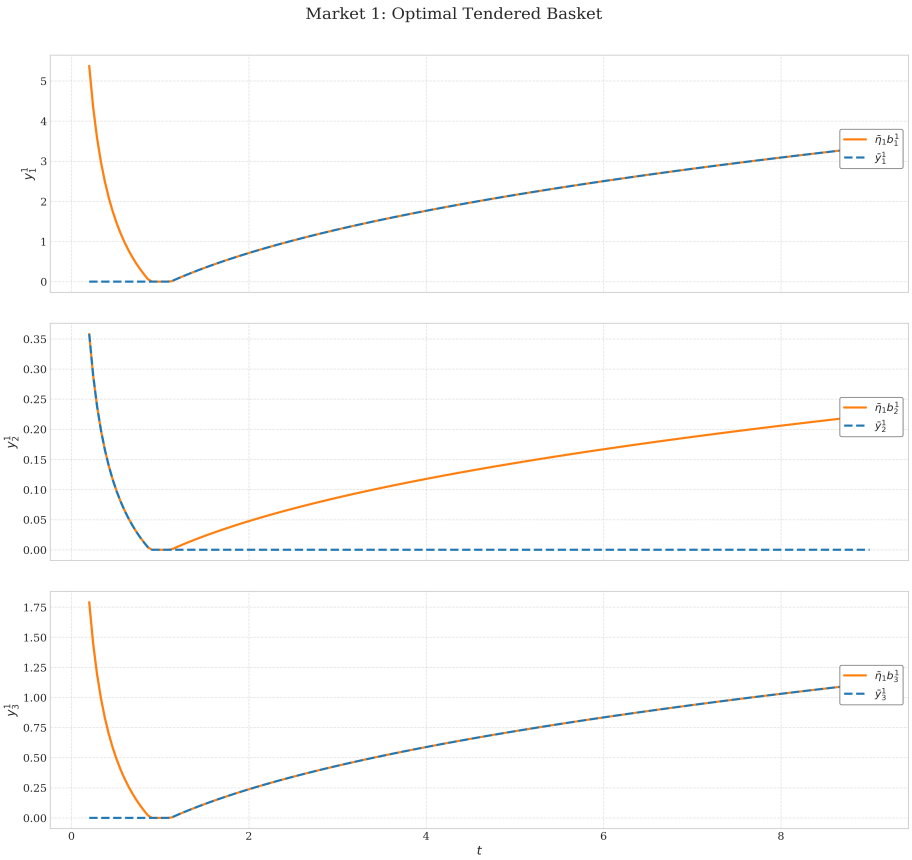


图8：示例 2：市场1中的最优提交篮子（$q_i = 0.01$）。

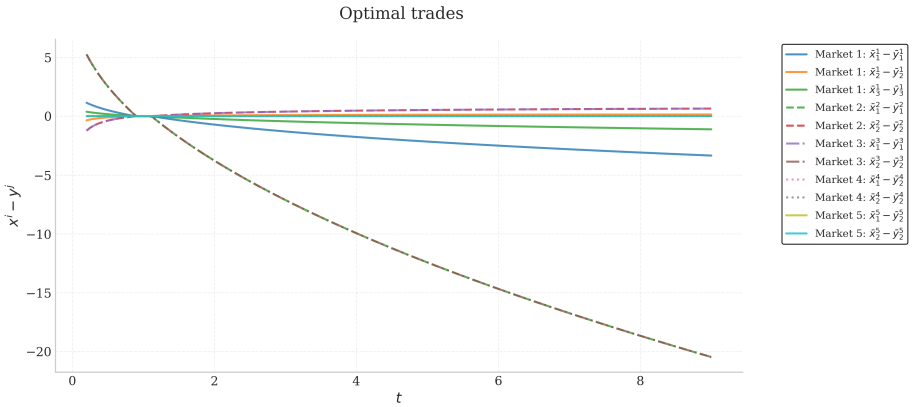


图9：示例 2：最优交易（$q_i = 0.01,\ i \neq 4, q_4 = 9.4$）。

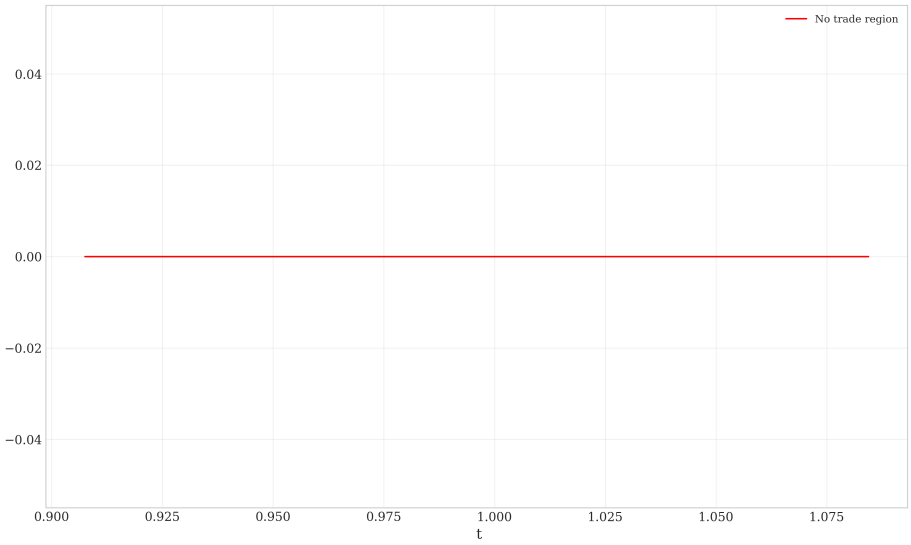
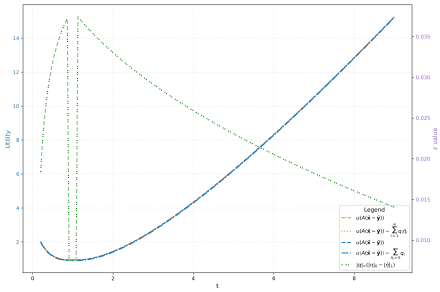
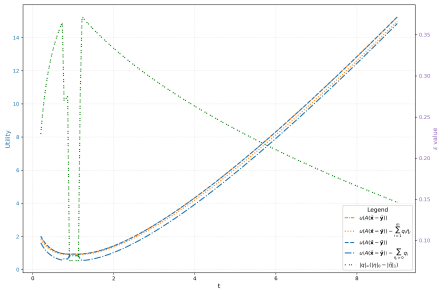


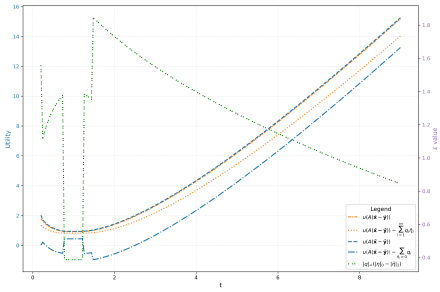
图10：示例 2：无交易区域（$q_i = 0.01,\ i \neq 4;\quad q_4 = 9.4$）。



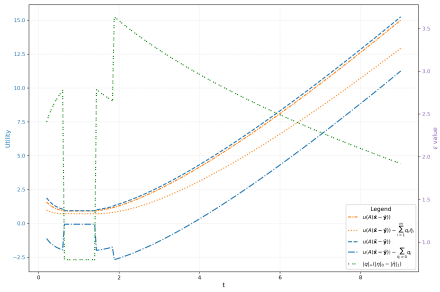
（a） $q_i = 0.01$



（b） $q_i = 0.1$

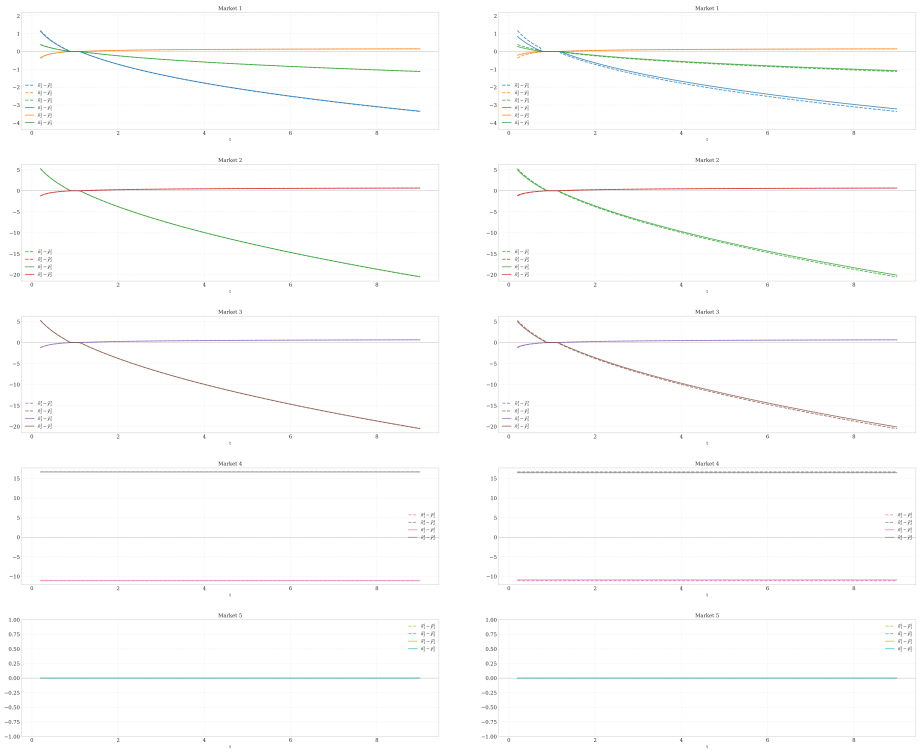


（c） $q_i = 0.5$



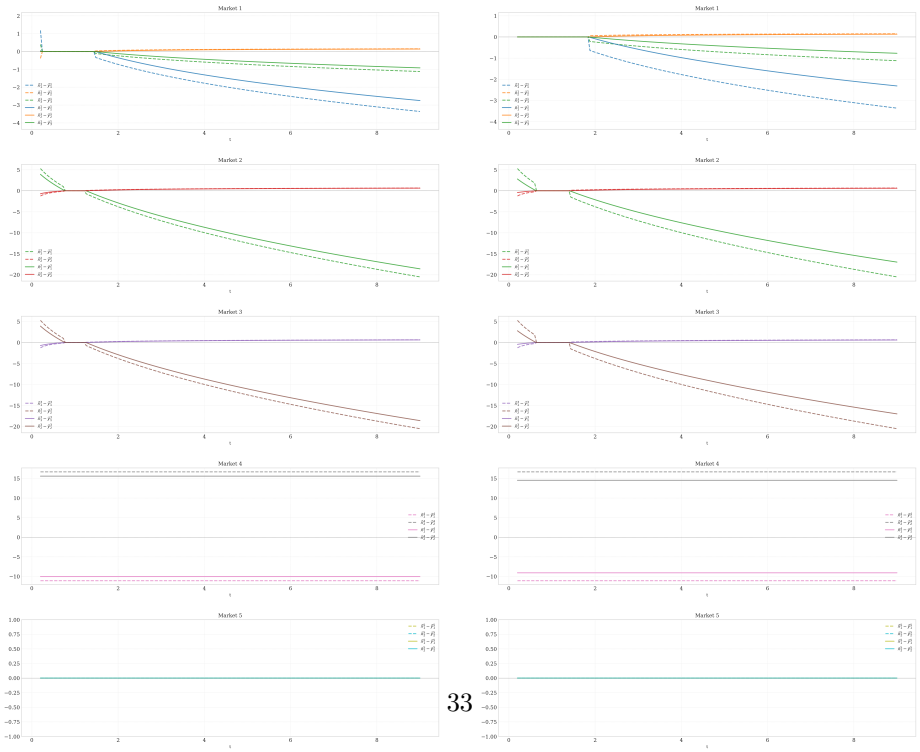
（d） $q_i = 1$

不同燃料费 q_i 数值下的效用图。



(a) $q_i = 0.01$

(b) $q_i = 0.1$



(c) $q_i = 0.5$

(d) $q_i = 1$

图12：不同燃料费 q_i 数值下的交易比较。

这一优化问题有别于经典凸优化形式，因为它将非凸交易约束与市场激活决策结合起来，后者旨在体现这些费用的影响。

我们的首项贡献是在较弱的正则性假设下，为路由问题的松弛近似推导出必要最优性条件。通过在适当的 KRZ 约束资格条件下建立 KKT系统，我们明确刻画了最优交易与边际效用、池价格、费用及激活变量之间的关系。这项分析凸显了 Gas 费用在扩大无交易区域，以及塑造碎片化流动性池之间最优路由决策方面的作用。

我们进一步证明，无需对不变函数施加全局凸性假设，也能刻画全局最优性。借助广义凸性工具，我们在效用函数伪凹、交易函数拟线性的条件下，建立了充分最优性条件。这一结果将现有的恒定函数做市商路由理论拓展至凸模型之外，在保持最优性的同时，允许采用更广泛的可容许不变函数。

本文还对松弛路由问题与包含固定激活成本的原始混合整数形式进行了严格比较。我们推导出明确的近似界，量化了松弛所导致的效用差距，并阐明了松弛解在何种条件下能够对原问题作出有意义的近似。这项分析也为基于松弛的方法可能应用于相关问题提供了理论依据。

从金融角度来看，我们的研究结果从数学上阐释了固定执行成本如何抑制去中心化交易所中的套利机会。因此，本文提出的框架有助于加深我们对去中心化金融市场中无交易条件和执行摩擦的理解。

总而言之，我们的研究结果丰富了优化理论与去中心化市场设计之间日益增长的交叉研究，揭示了即使在确定性的链上环境中，执行摩擦也会从根本上改变最优交易行为。由此自然引出了若干未来研究方向。将模型扩展至随机效用形式，或研究不确定性下的动态路由，将进一步丰富该模型。此外，纳入其他执行约束或协议特定特征，或可进一步加深我们对去中心化金融系统中最优交易与市场设计的认识。

致谢： 作者在2025年3月和4月访问越南高等数学研究院（VIASM）期间开展了本研究的部分工作；作者感谢VIASM在此期间给予的热情接待。本研究部分获得了智利国家研究与发展署通过Fondecyt常规项目1241040（Lara）提供的资助；大学、研究与创新部 / 国家研究署 / 10.13039 / 501100011033 / 以及欧盟通过欧洲区域发展基金（项目PID2024- 156273NA-I00（Sama）和PID2024-158823NB-I00（Escudero））提供的资助；大学、研究与创新部 / 国家研究署 / 10.13039 / 501100011033 / 欧盟下一代 / 复苏、转型与韧性计划（项目CPP2024-011557（Escudero和Sama））提供的资助；以及欧洲科技合作（

科学与技术合作）通过COST行动Stochastica CA24104（Escudero）提供的资助。

参考文献

[1] H. Adams, M. Salem, N. Zinsmeister, S. Reynolds, A. Adams, W.Pote, M. Toda, A. Henshaw, E. Williams, D. Robinson, Uniswap v4核心协议 [草案]。技术报告，（2023）。[2] H. Adams, N. Zinsmeister, D. Robinson, Uniswap v2核心协议。技术报告，（2020）。[3] H. Adams, N. Zinsmeister, M. Salem, R. Keefer, D. Robinson, Uniswap v3核心协议。技术报告，（2021）。[4] H. Adams, N. Zinsmeister, M. Toda, E. Williams, X. Wan, M.Leibowitz, W. Pote, A. Lin, E. Zhong, Z. Yang, R. Campbell, A.Karys, D. Robinson, UniswapX。技术报告，（2023）。[5] G. Angeris, A. Agrawal, A. Evans, T. Chitra, S. Boyd, 恒定函数做市商：通过凸优化进行多资产交易。载于：D.A. Tran 等（编）《区块链手册》，Springer优化及其应用丛书，第194卷，Springer，（2022）。[6] G. Angeris, T. Chitra, 改进价格预言机：恒定函数做市商。载于：第2届 ACM 金融科技进展会议论文集，第80–91页，https://doi.org/10.1145/3419614.3423251，（2020）。[7] G. Angeris, T. Chitra, A. Evans, 尾巴何时摇动狗？曲率与做市，《加密经济系统》，2（1），https://doi.org/10.21428/58320208.e9e6b7ce，（2022）。[8] G. Angeris, A. Evans, T. Chitra, S. Boyd, 恒定函数做市商的最优路由。载于：EC ’22：第23届 ACM 经济计算会议论文集，2022年7月，第115–128页，（2022）。[9] G. Angeris, H.-T. Kao, R. Chiang, C. Noyes, T. Chitra, Uniswap市场分析，《加密经济系统》，0（1），https://doi.org/10.21428/58320208.c9738e64，（2021）。
[10] K.J. Arrow, A.C. Enthoven, 拟凹规划，《计量经济学》，29，779–800，（1961）。[11] M. Avriel, W.E. Diewert, S. Schaible, I. Zang。《广义凹性》。SIAM，费城，（2010）。[12] A. Cambini, L. Martein。《广义凸性与优化》。Springer-Verlag，柏林-海德堡，（2009）。

[13] A. Capponi, R. Jia, 基于区块链的去中心化交易所的采用, arXiv:2103.08842, （2021）。[14] A. Capponi, R. Jia, Y. Wang, 公有区块链中的最大可提取价值与配置低效, 《金融经济学杂志》, 172, 104132, （2025）。[15] A. Capponi, R. Jia, B. Zhu, 去中心化交易所中即时流动性的悖论：更多提供者有时反而意味着更少流动性, arXiv:2311.18164, （2023）。[16] T. Chitra, K. Kulkarni, K. Srinivasan, 存在钩子时的最优路由：三个案例研究, arXiv: 2502.02059, （2025）。[17] G. Debreu。《价值理论》。John Wiley, 纽约, （1959）。[18] T. Diamandis, G. Angeris, 网络流的凸几何, arXiv:2408.12761, （2024）。[19] T. Diamandis, M. Resnick, T. Chitra, G. Angeris, 一种通过恒定函数做市商实现最优路由的高效算法。载于：F. Baldimtsi 和 C. Cachin（编）《金融密码学与数据安全》。计算机科学讲义, 第13951卷, Springer, Cham, （2024）。[20] M.Egorov, StableSwap——稳定币流动性的高效机制, https://berkeley-defi.github.io/assets/material/StableSwap.pdf, （2019）。[21] M. Ehrgott。《多准则优化》。第491卷, Springer Science & Business Media, （2005）。[22] C. Escudero, F. Lara, M. Sama, 多资产加密金融市场的最优交易刻画, arXiv: 2405.06854, （2024）。[23] E. Gobet, A. Melachrinos, 去中心化金融与区块链技术, SIAM金融数学与工程 2023, （2023）。[24] N. Hadjisavvas, S. Komlosi, S. Schaible。《广义凸性与广义单调性手册》。Springer-Verlag, 波士顿, （2005）。[25] J.-B. Hiriart-Urruty, C. Lemaréchal。《凸分析基础》。Springer-Verlag, 柏林, 第二版, （2004）。[26] J. Jahn。《非线性优化理论导论》。Springer Nature, （2020）。[27] O.L. Mangasarian, 伪凸函数, 《SIAM 控制学会期刊 A 辑》, 3, 281–290, （1965）。

[28] F. Martinelli, N. Mushegian，一种非托管型投资组合管理者、流动性提供者和价格传感器，https://docs.balancer.fi/whitepaper.pdf，（2019）。[29] A. Mas-Colell, M.D. Whinston, J.R. Green。《微观经济理论》。牛津大学出版社，牛津，（1995）。[30] S. Schaible, W.T. Ziemba。《优化与经济学中的广义凹性》。学术出版社，（1981）。[31] D.A. Tran, M.T. Thai, B. Krishnamachari，《区块链手册》。Springer优化及其应用丛书，第**194**卷，Springer，（2022）。[32] P. Virtanen等，SciPy 1.0：Python科学计算的基础算法，《自然·方法》，**17**(13)，261–272，（2020）。