arXiv:2603.02859v1 [math.HO] 3 Mar 2026

Vop$\check{}$enka 的替代集合论：作为可行数的框架

Zuzana Hanikov´a 捷克科学院计算机科学研究所

2026年3月4日

摘要

Vop$\check{}$enka 的替代集合论一直被视为一种对模糊概念进行建模的框架。本文探讨与数字相关的可行性——这一议题见于 Yessenin- Volpin 的部分著作——并尝试评估如何在替代集合论中对这一概念建模。本文详细探讨的路径，是尝试对 Dummett 的弱无限总体和弱有限总体进行建模；Dummett 认为，这些总体的一致性对于 Yessenin-Volpin 的整体基础构想是否一致具有决定性意义。具体分析所得出的结论是否定的：替代集合论或可作为 Yessenin-Volpin 可行数某些特征的模型，但无法涵盖其全部特征。鉴于本文只探讨了一种特定方法，这一结论对于超有限主义立场是否一致这一更一般的问题，乃至可行数建模的可能性，影响有限。

1 引言

我认为超有限主义 和严格有限主义 是同义词，或者至少足够接近同义词，因此可以尝试在以各种名称展开的不同讨论之间寻找共同点。与超直觉主义 或人类学主义一样，[1] 这些名称以及人们对其中某一名称的偏好，可能源于倡导者各自不同的语言背景。

超有限主义曾被作为一种基础立场加以讨论：值得注意的是，Yessenin-Volpin 在其提出的纲领《Es´enine-Volpine[1961], Yessenin-Volpin [1970]》中，强调了超有限主义的修正主义面向。早在此之前，Bernays 在后来以 Bernays[1935] 为题发表的讲演中指出，直觉主义作为一种基础立场，或许是修正主义纲领的典型例子（尽管并非所有构造主义或直觉主义数学的倡导者都持修正主义观点）；如果按字面理解其原则，或者以实践中获得的证据取代原则上可获得的证据，那么这种立场可能会显得不稳定。Bernays 的这些评论并非意在为超有限主义辩护或削弱直觉主义；相反，它们给人的印象是，Bernays 持多元主义立场。尽管这场讲演并不打算强力捍卫任何一种单一的基础观点，却批评了直觉主义者的修正主义态度，并试图表明，同时保留实在论立场和直觉主义立场的价值。正如 Hallett [1986], 所指出的，早在 Bernays 之前，康托尔就会通过指出我们生成并证明自然数为大而有限的集合的能力在实践上存在局限，来为他关于集合的（实在论）立场辩护。

[1]王浩提出的这个术语，明确被称为是对 Kreisel 先前讨论的严格有限主义的一种“更鲜活”的说法。

这些评论旨在说明人们为何可能会对此事感兴趣：Bernays 指出了偏离主流数学、转向构造主义的方向（他将主流数学称为“柏拉图主义”）[2]，并提出了这样一个问题：数学家在多大程度上能够接受沿着这一特定方向偏离主流数学。

本文以 Yessenin-Volpin 的代表性概念——“可行数”——为切入点。该概念见于 Es´enine-Volpine [1961], Yessenin-Volpin [1970], 。本文尝试借助替代集合论所固有的概念对其进行建模。替代集合论由 Vopˇenka 及其合作者和一群研究者发展，并首次以完整形式呈现于专著 Vopˇenka [1979]。本文立足于对 Vopˇenka 著作的熟悉来展开。我感兴趣的一个问题是，Vopˇenka 的工作在何种意义上、于多大程度上可被理解为对超有限主义数学的贡献。本文无意全面回答这一更广泛的问题；本文旨在以替代集合论为背景，分析可行数这一议题。

将 Yessenin-Volpin 与 Vopˇenka 联系起来绝非新鲜事：Vopˇenka 的著作 Vopˇenka [1979] 引用了 Yessenin-Volpin 的一篇俄文作品。Vopˇenka 还受到 Rieger 的影响，这一点也需要纳入考量；不过，目前对此影响的梳理远不如人们所希望的那样全面。Vopˇenka 年轻时常去听 Rieger 的研讨会。[3] Rieger 在华沙莫斯托夫斯基学派访问之后，致力于数理逻辑和基础主题的研究，[4] 并参加了[5] 1959年在华沙举行的 无穷方法 大会，Yessenin-Volpin 也参加了该会议，参见 Es´enine- Volpine [1961]。[6]

2 Yessenin-Volpin 对可行数的看法

在这里，引用 Yessenin-Volpin 开篇的几段文字会很有帮助 [1970] 。

> 让我们来考察可行数的序列 F ，也就是能够数到的那些数。0 是可行的；如果 n 可行，那么 $n < 10^{12}$ 也可行，因此 n' 同样可行。每个可行数都可以从 0 开始，通过加上′得到；所以 F 构成一个自然数序列。但 10^{12} 不属于 F。（第 5 页）

对此有两点评论。Yessenin-Volpin 说，可行性是一种“经验概念”。因此，特别是，它不是一个算术谓词，所以归纳法未必适用于它。Parikh 对可行性的开创性数学研究体现了这一关键事实[1971]。

另一件值得注意的事，是自然数序列这一概念。使用不定冠词，体现了 Yessenin-Volpin 所采取的立场：他考虑的不仅是一条自然数序列，而是多条这样的序列。他明确阐述了自己的观点，将“ T1. 自然数序列的唯一性（在同构意义下）”列为一系列假设之一，并表示计划“仅仅因为它们是假设”而加以批评（这些是假定成立的、经典的、“传统的”数学中的假设）。因此， F 表示可行数的序列，而 N 表示一条包含 10^{12} 的自然数序列。

[2]王浩 [1958] 评论说，这一立场体现了一种“存在的数学”。[3]Rieger 于 1963年去世后，Vopˇenka 开始举办自己的公理集合论研讨班，参见 Vopˇenka [2009]。[4]参见 Koz´akov´a [2006]。[5]参见 Rieger [1961]。[6] Yessenin-Volpin 又在 Yessenin-Volpin [1970], 中提到了 Rieger，以及其他一些据称都对自然数的范畴性观点持怀疑态度的人。

> 认为 N 中的某些数是可行数，而数 10^{12} 不是，似乎相当自然。我自己上文也这么说过。但这样看待 F中的数，会导致一种情况：有限集 N 的数 $\{0, 1, \ldots, 10^{12}\}$ 包含一个无限部分 F。这也许并非荒谬，却会带来许多困难。如果有人遍历这个 N 数集合，就会穷尽这个无限部分，但我更愿意说，无限过程无法被穷尽。如果我们区分 F数与和它们等价的 N数，这个困难便会消失。但有时，把属于不同序列的这些数视为相同会更方便。这是很常见的做法；有时我们会把在其他情况下有所区分的对象视为相同。这样做的规则必须以严谨的方式确立。（第7页）

Yessenin-Volpin 的著作并未遵循公理数学通常恪守的一项准则——或许也是其主要特征之一——即严格限制词汇的使用。其论述依赖于大量概念，其中一些可能带有隐喻性质。然而，他的理论中有一些重要的核心概念并非隐喻性的（与经典数学几乎总是如此的情形相反）：反映时间流逝的术语。毋庸置疑，这是刻意为之，因为 Yessenin-Volpin 承认，直觉主义是他背离经典数学的出发方向："我接受布劳威尔的传统直觉主义批评，并且更进一步。"因此，他为自己对基础的修订所选的名称是，超直觉主义。

可行性这一核心概念登场时，保留了其日常意义中关于行动的全部内涵。因此，Yessenin-Volpin 的分析将涉及王浩所说的"做数学"。我们还可以列举许多例子，说明这一现象：各种类型的构造 、穷尽概念、据称存在的比对 理论（即认同与区分）、芝诺式情境、关于策略、行动及其可能性的论述，或许还有自由主义／专制主义的两极对立。让我再引用一段话。

> 基于传统的直觉主义批评，我们必须将自然数序列视为无限过程，而不是已完成的总体。但若不使用时态来区分过去的事件与未来的事件，就无法准确地谈论任何过程。对于自然数序列而言，在每个阶段，它的无限性都属于未来的领域，因此在推理中必须阐明将将来时转换为现在时或过去时的规则。（第 12 页）

正是鉴于这段引文，我想简要讨论一下 Yessenin-Volpin 的无穷概念，这一概念在文中被频繁使用。

鉴于上述（超）直觉主义背景，不能想当然地认为"有限"和"无限"在通常（即经典）的意义上是互补概念，也就是说：凡是其中一个术语可以有意义地使用之处，另一个术语也同样可以使用；而其应用领域中的每个对象要么有限，要么无限，绝不会同时兼具两者。仔细考察后会发现，对 Yessenin-Volpin 而言，无限 是一个元数学概念；我们遇到的无穷，是作为序列（当说 Yessenin-Volpin 拒绝自然数的范畴观点时，"序列"一词被解释为"结构"）或过程的属性出现的，具体而言，是指那种"无法穷尽"的序列或过程。

无法数到 10^{12}。但文本中还有其他例子表明，我们应当把序列理解为一种发生过程，或者也许是其成员的生成（这一过程以"步骤"进行），因此尤其是，该过程可以在一个人

说话时仍在进行。于是，成员的出现便是“事件”。一个序列可以相当短：“设 N_1 短于 b_{20}，这意味着在N_1中永远不会有 a_{20} 这样的实体。”序列中的数彼此不同这一点很重要：“在所有情形中，事件在出现时都必须与所有先前的事件区分开来；而这一要求的满足应由一个带有参数 m 、针对先前各数的单一行动来给出。”（第 26 页）因此，不能通过总是提供同一个成员来得到一个序列。

在第二段引文中，其作者承认，要把一个无限序列（例如 F）纳入有限的数集 $\{0, 1, \ldots, 10^{12}\}$，“会带来许多困难”。他的要点在于强调：把 F-数与 N-数加以等同（姑且这么说）是一种可以选择（也可以不选择）的做法；如果选择这样做，就应当明确说明，并可能为此种等同提供一些规则。

Yessenin-Volpin 的工作颇具影响力；或者也许应该说，它引起了注意。Parikh[1971] 提及了 Yessenin-Volpin 的主张。Parikh 工作的另一重要灵感来源似乎是 Bernays [1935]。[7] 如前所述，Yessenin-Volpin 的工作也在捷克语数理逻辑学派中得到了考虑，而且早在该学派肇始于 Rieger 之时便已如此。近来，Dean [2018] 对严格有限主义进行了一项重要研究。在其诸多贡献之中，该文详细阐述了一个合适的框架（弱的二种类算术），使得有可能表述关于一元记数法中的数与二进制记数法中的数之间存在双射的陈述，并给出了一个不能推出该双射存在陈述的公理理论。

3 Dummett 对严格有限主义的分析

我的意图是运用论文王氏悖论中提出的严格有限主义分析，即 Dummett [1975], 的分析，通过替代集合论中的可数半集，来阐释 Yessenin-Volpin 的可行数。Dummett 那篇颇具影响力的论文发表于《$Synthese$》的一期特刊，该特刊专门探讨模糊性。他并非要研究可行性；其研究的核心问题是评估一种挥之不去的担忧。这种担忧可追溯到 Bernays [1935],：支持直觉主义的论证，尤其是按字面理解时，与支持严格有限主义的论证相似。这使得直觉主义夹在柏拉图主义与严格有限主义之间，所能占据的空间狭窄得令人不安。论文最终驳斥了这种担忧。

Dummett 没有提供任何引文，但 Dean [2018]提到了 Es´enine-Volpine [1961]和 Yessenin-Volpin [1970]，将他们视为 Dummett 的资料来源。[8]

Dummett 熟悉维特根斯坦的著作《数学基础札记》，并在 Dummett [1959] 中发表了对该书的评价。众所周知，维特根斯坦的《评论》也受到 Hilbert 著作的影响——尤其可参见 M¨uhlh¨olzer [2006]和 Floyd [2023]。据我所知，目前还没有人对 Yessenin- Volpin 在这方面的著作进行过同样详尽的分析。Dummett [1959] 简略提到 Bernays [1935] ，并写道：“按照 Bernays 的阐述，它 [即严格有限主义] 将着重关注实践可能性，而非理论可能性。我试图说明，对维特根斯坦而言，这并非正确的对比方式。”（第 343–344 页）另一方面，在王氏悖论中，实践受到重视，正是 Dummett 所归于 Yessenin-Volpin 的严格有限主义的鲜明特征。

[7] Parikh 的研究很可能会在本书的其他文章中得到分析。[8] Dummett 的尾注 [1975] 指出，文中记录的是一场于 1970 年 举行的演讲；而 Dummett [1975] 据以重构的 Yessenin- Volpin 的两项研究，分别是在 1959 年 和 1968年 的会议上发表的。

Dummett [1975] 开篇便承认，严格有限主义立场允许存在多个自然数总体。

> 因为“自然数”必须理解为我们实际上能够表示的数。显然，表示自然数的能力取决于允许使用的记数法，因此，在柏拉图主义观点中是现实的、在传统构造主义观点中是潜在的，但在两种观点中都同样是唯一且确定的那个无限自然数总体，便让位于多个总体；每个总体都由一种特定的自然数记数法所界定。（第302页）

但在论文开篇不久，Dummett便转而考虑一个单一的自然数总体，并选择一种记数法（例如以大于1的任意整数为底数的位值记数法），这种记数法具有如下性质：如果数 n 能用这种记数法表示，那么所有小于 n的数也都能表示。这似乎排除了将指数函数作为一般工具，尽管并未完全排除考虑Yessenin-Volpin提出的数值 10^{12} ，因为人们可以希望只用一元记数法和乘法来表示它，同时仍能传达其意义。但Yessenin-Volpin更倾向于考虑多个总体；在特定方式和条件下，这些总体或许可以彼此映射。[9]

Dummett 引入了两个关键概念：弱无限总体和弱有限总体。严格有限主义立场能否自洽，取决于是否存在一个既弱无限又弱有限的总体，作为模糊谓词的外延：“正如叶先宁-沃尔平实际上所指出的，这类总体——即被刻画为模糊谓词外延的总体——既可以是弱有限的，也可以是弱无限的。”（第 313 页）正是基于对 Yessenin-Volpin 意图的这种解读，Dummett 最终否定了严格有限主义：“就严格有限主义而言，常识得到了证实：不存在既弱有限又弱无限的总体，因此严格有限主义是一种站不住脚的立场。”（第 323 页）

转而借助 Dummett 作为调和的桥梁时，我想做的是取用他引入讨论的概念，并尝试在替代集合论中重新诠释它们。采取这一步有多种理由：例如，Dummett [1975] 影响深远，他所引入的概念也比 Yessenin-Volpin 早期著作中的设定，乃至 Vopˇenka 替代集合论中的设定，更可能为读者所熟知。我尝试调和的主要理由同样在于熟悉程度：只要将总体理解为一个集合，替代集合论就能相对轻易地描述弱无限、弱有限总体。换言之，Dummett 的研究之所以相关，是因为它将讨论转向了更为熟悉的领域。我并非意在暗示两者之间存在直接影响。Vopˇenka [1979] 并未提及 Dummett 的研究。Dummett 之所以相关，在于他凸显了外延观点，更进一步凸显了集合及其良序的观点；这一点直接使讨论主题能够运用集合论（包括替代集合论）的技术手段与方法加以处理。

根据 Dummett，一个总体是

- 弱无限，如果存在它的一个没有最后元的良序；并且
- 弱有限，如果对于某个有限序数 n，存在它的一个良序，其中没有第 n 个成员。

[9]参见 Yessenin-Volpin [1970]第 9 页的脚注：“通常这被表述为‘如果 $m \simeq n$ 则 $m' \simeq n'$。但这类表述忽视了 $m' \simeq n'$ 只能在 $m \simeq n$ 出现之后才能出现这一事实。这种疏忽可能导致对种类为 $m \simeq n$的所有等价关系的领域的柏拉图主义表述。当然，我必须拒绝这一点，[...]”

Dummett 的贯穿性例子——取自叶′先宁-沃尔平 [1961], 第203页——是我童年中的心跳总体，按时间上的发生次序排列。Dummett 告诉我们："根据叶先宁-沃尔平，这样的总体是弱无限的：对于我童年中的每一次心跳，当我的下一次心跳发生时，我仍处于童年之中。"另一方面，人们可以给出一个数 n（读作：一个闭算术项，例如 10^{12}），使得该总体不包含第 n 个成员。Dummett 还提到，一个总体成为强有限意味着什么：即拥有最后一个成员，"就像我一生中的心跳集合"；以及强无限：并非有限有界，"就像通常所设想的自然数集合，或者，可能是我后代的心跳集合。"具有后两种属性之一的总体是 确定的；并且人们或许能够成功地把一个模糊的、弱无限且弱有限的总体嵌入一个更大的、确定的总体之中。[10]

不妨在这些例子上稍作停留，冒险玩个文字游戏。Dummett 的定义要求一个总体，我将其理解为一个集合。在论文的关键部分，Dummett 承诺要对 Yessenin-Volpin 的观点作出真正的分析，我们读到：

> 那么，我们通常应该说，一个弱有限总体不可能同时也是弱无限的。如果坚持这种观点，我们就无法认真对待模糊性。换句话说，模糊表达式的意义只是部分得到明确；因此，模糊谓词并不对应于某个特定的总体作为其外延，而是对应于许多个总体，数量之多，恰如该谓词所有可接受的精确化各自作为外延的总体之多。然而，认真对待模糊性，就意味着假定一个模糊表达式可能具有完全确定、尽管是模糊的意义；因此，模糊谓词的外延将是一个单一且确定的总体。（第 312–313 页）

所展示的忧虑（在 Dummett 的著作语境中，超出了王氏悖论 的讨论范围）关乎模糊谓词的外延——正如他本人所承认的，这是弗雷格留下的遗产。

除了考虑一个总体之外，Dummett 还建议考虑它的一个或多个良序。因此，如果要寻找一个既弱无限又弱有限的总体，所要寻找的实体类型是：（a）一个集合，比如 C；（b）它的一个良序，比如 WO_1，且没有最后一个元素；以及（c）该集合的另一个良序 WO_2，再加上一个背景序数尺度和技术工具，使人能够表达出 WO_2 在此尺度上没有第 n 个成员。进行这些考量的背景理论因而允许指涉有限性：也就是说，一个"有限"序数 n。赖特[1982]在第5节展示了与这一要求相关的一些困难——即如何在背景理论中维持一种合适的有限性概念，并使其受制于与相关基础立场相契合的逻辑原则。Dummett 谈到有序总体中的隶属关系 时，指的不仅仅是作为集合的一个元素，而是指在该集合的良序中的一个位置 。

Dummett最终认为，将Yessenin-Volpin的观点解读为主张弱无限、弱有限总体存在，是不连贯的，因此予以驳斥。他的分析立足于观察谓词的不连贯性，因而这些谓词尤其无法受一致逻辑支配，尽管人们曾对此寄予厚望。反过来，许多作者质疑Dummett的分析是否适用于真正的严格有限主义观点，不过他们无人试图恢复Yessenin-Volpin的观点。事实上，如果赖特 [1982] 承认有人是严格有限主义的倡导者，那便是维特根斯坦，而非Yessenin-Volpin（另见马里翁[1991] 对维特根斯坦《评论》的深入研究）。在Dean [2018], 一文中，作者考虑了

[10]"因此，如果试图针对一个模糊谓词进行归纳法，而该谓词实际上确定了一个较大确定总体的真初始段；这个真初始段既是弱有限的，也是弱无限的，那么归纳法的前提都将为真，但结论将为假。"（第313页）

Yessenin- Volpin明确拒绝某些假设（即“传统数学”的假设）这一点，而Dummett的部分分析正是以这些假设为基础的。

4 论 Vopˇenka 的替代集合论

替代集合论[11] 由 Vopˇenka 及其合作者群体在 20 世纪 70 年代和 80 年代发展而成。这一时期出版了 Vopˇenka 所著的两部不同专著：替代集合论中的数学——Vopˇenka [1979]——于1979年以英语出版，以及´替代集合论´中的´数学´导论——Vopˇenka [1989]——于1989以斯洛伐克语出版。合作者中尤为突出的是 Anton´ın Sochor，他在论文序列 Sochor [1979, 1982, 1983]中研究了元数学，并（合）著了大量关于该理论中各类数学专题的论文，以及若干动机性著作 Sochor [1976,1984] 和综述 Sochor [1989]。除少数例外，有关该理论的论文均来自捷克斯洛伐克境内的作者；而在1989之后，Vopˇenka 将兴趣转向其他课题，关于 AST 的出版物便逐渐减少。该理论的灵感来自多个方向[12], ，尤其是半集合理论，即 Vopˇenka 与 H´ajek [1972] ，它与之共享关键的半集 概念，以及 Robinson[1966] 中的 Robinson 的非标准分析。

从逻辑学家的观点来看，替代集合论可以扼要地描述为一种在经典逻辑中发展起来的、关于集合与类的一阶公理化非标准理论：其集合片段正是遗传有限集的理论[13], ，而类这一层则具有针对非正规公式的概括公理、一条迫使非标准性的延拓公理，以及对类的良序公理。“非标准”一词是在 Skolem 的皮亚诺算术非标准模型这一意义上使用的。还有一种意义，在此意义上上述逻辑学家会认为该理论相当普通：它不过是经典逻辑中的一种特定公理理论。

Vopˇenka [1979] 说：“我们的集合概念与康托尔的相似，但从康托尔的观点来看，我们的所有集合都是有限的。我们不承认实无限集合这一虚构。”（（第17页））替代集合论中关于集合的公理证明了理论 $\mathrm{ZF}_{\mathrm{fin}}$的所有陈述（该理论通过将无穷公理替换为其否定，并用 $\in$-基础模式代替正则性公理而得到）。反之亦然：理论 $\mathrm{ZF}_{\mathrm{fin}}$ 证明了 AST 的集合片段中的全部公理。特别地，这些公理可被视为引入理论 $\mathrm{ZF}_{\mathrm{fin}}$ 的一种方式（参见 Vopˇenka [1979]第一章第1节）。替代集合论的最初倡导者有时称集合是形式有限 的。此外，人们还可以（在 ZF 中）证明 AST 对 ZFfin 作保守扩张；参见 Sochor [1983]。

半集是集合的子类，因此是类的一种特殊类型（此外，每个集合都是类，所以类属于全域类型）。半集的这一界定与先前在半集论（TSS）中给出的定义一致。这两种理论都阻止了用通常的方法来否定真

[11]我将把“替代集合论”作为专名首字母大写，并经常使用缩写“AST”。这或许有悖于最初倡导者的惯例。至于大小写，许多关于该理论的重要资料只有捷克语或斯洛伐克语版本，而这两种语言的大小写规范与英语不同。尤其值得一提的是，有一种做法是仅将充当专名的短语中的第一个词首字母大写。在一些捷克语资料中，词组“alternativn´ı teorie mnoˇzin”（“替代集合论”）完全不大写。英文资料，尤其是经典的 Vopˇenka [1979], ，也遵循这一惯例，即不大写。这一点意义重大，因为它将 *alternative set theory* 标示为一场更广泛的运动，而不仅仅是一种公理理论。使用缩写 AST 则沿袭了 Sochor [1976]等人的做法；最初的传统或许只将其用于某个特定的公理系统。本文中，我将不区分二者。[12]Hanikov´a [2022]对此进行了研究。[13]特别是，通常所说的无穷公理的否定是一个定理。

半集的存在（依据替换公理）。在这两种理论中，半集的存在都以非形式化的方式论证：论证对象是那些已经或多或少认可集合与类的存在、熟悉集合论基本思想，并且现在愿意关注是否存在真半集这一问题的人。人们还可以问，真半集是否必然存在；在 AST 中，答案是肯定的，这是由延拓保证的。

TSS 和 AST 都是可行公理系统的例子，其中集合与类的区分并不遵循大小限制判据。Fletcher [2007],[14] 通过引用 Hallett [1986] 和 Mayberry [2000]指出了这一点。[15] 相反，Vopˇenka 强调，集合与类的区分源自可区分性。这是 Vopˇenka [1991]中的一个核心主题。

在 AST 中，如果一个类的每个子类都是集合，那么这个类就是有限的；否则，它就是无限的。因此，每个有限类都是集合。真半集的存在蕴含着无限集的存在，而无限集的存在又蕴含着无限自然数的存在（每个集合都与唯一的一个自然数存在一一集合双射）。Sochor [1976] 将 AST 中的无限自然数称为“不可达”。[16] 按照 Vopˇenka [1979], 的记数法，$\hat{}\approx$ 表示集合双射，而 $\approx$ 表示类双射。一个有用的定理刻画了 AST 中的无限集：它指出，集合 x 是无限的，当且仅当 $x \approx x \cup \{y\}$ 对每个 $y \notin x$ 都成立（第 37 页）。因此，如果相关映射是类映射，那么该理论中的无限集可以说允许一种初级版本的希尔伯特旅馆。该定理的一个变体指出，集合是无限的，当且仅当它与其某个真子集存在类双射。

在 AST 中，类 X 是可数的，当且仅当它是无限的，且存在一个关系 R，该关系是 X 上的全序，并且对于每个 $x \in X$，片段 $\{y \in X \mid R(y,\ x)$ 都是有限的。这种序型称为 ω。[17] 因此，没有有限类是可数的。延拓公理指出，任何可数函数都可以延拓为集合函数。一个简单的推论是，每个可数类都是一个真半集：事实上，任何可数类 C 都可以作为某个完全集合序集 a的真初始段得到；这是因为在证明其可数性的那个序中，C 不可能有最后一个元素（参见 [Vopˇenka，1979年，第 42] 页），而集合上的全序总有最后一个元素（[Vopˇenka，1979年，第 32] 页）。因此，可数类可以视为代表一种新的基数，它“插入”有限类与诸如 V（全类）或 N（自然数）这样的类之间；后两者不可数。

著作 Vopˇenka [1979]在 AST 中发展了自然数。Vopˇenka 分离出那些可以在遗传有限集的理论 $\mathrm{ZF}_{\mathrm{fin}}$ 中陈述并证明的事实（不使用类，除非作为诸如 V 或实际上 N（即自然数的类）之类的简写）。配备后继运算、序数加法与乘法以及通常序（$x \leq y$ 当且仅当 $x \in y$或 $x = y$）的类 N 产生结构 N，该结构给出皮亚诺算术在 $\mathrm{ZF}_{\mathrm{fin}}$中的一个解释。对每个集合 x，由归纳法（第 59 页）存在唯一的 $\alpha \in \mathrm{N}$，使得 $x \hat{}\approx \alpha$。在此之上（现在使用类语言），AST 具有有限自然数 FN。它们构成 N 的一个在后继下封闭的真初始段（一个真割）。该割是真的，因为由延拓存在一个无限集，它与某个自然数之间存在集合双射，而这个数不可能是有限的，而 FN 恰好是有限自然数的类。类 FN 同样在加法和乘法下封闭，因此，在配备这些运算与序的限制之后，便得到一个结构 FN，它给出皮亚诺算术的一个解释。为了定义乘方

[14]Fletcher 只考虑 AST，而不考虑 TSS。[15]Sochor 很早就指出了这一点 [1976]: “无穷已经存在于（形式上的）有限集中”。[16]此外，延拓的一种变体被称为“延拓公理”，而类 FN 则被称为“绝对数”。[17]下文中，我们将再次遇到 ω，它是最小的无限序数。

在 N 上，令 α^β 为（唯一的）自然数 γ，使得 $\gamma\hat{\approx}\{f$：定义域$(f)=\beta$ 且值域(f) $\subseteq\alpha\}$。于是 FN 在乘方下封闭（参见 [Vopˇenka，1979，第 62].[18] 页）。类 FN 是无限的，并且是可数真半集的一个典型例子。

5 可行数与替代集合论

Fletcher [2007] 指出，Vopˇenka 的替代集合论是他所知的、将可行性建模为标准性的最全面尝试；该理论足够适合且具有足够的表达能力，能够指称标准自然数和非标准自然数。

> 事实证明，在 AST 中，可行性谓词可以用类来定义：自然数 n 是可行的，当且仅当 $\{0,1,\ldots,n\}$ 的所有子类都是集合。（第 562 页）

他还提到，这与 Yessenin-Volpin 早先的方法存在一个关键偏离：在 AST 中，任何闭算术项的值都可以证明是有限的，即 FN 的一个元素。例如，AST 证明 Bernays 数 $67^{257^{729}}$ 是 FN 的一个元素。Fletcher 建议分步骤执行 10^{1000} 的可行性证明，将步骤$F(n)$ 重复 10^{1000} 次 $\to F(n')$（其中 F是可行性谓词，$'$表示后继函数）。Vopˇenka 还联系见证宇宙这一概念谈到了证明的长度：该概念假定“某个具体集合”中存在一个真半集。[19]

> 对见证宇宙的研究比对极限宇宙的研究更为困难。见证宇宙理论在经典意义上实际上是不一致的。如果 c是一个完全具体的集合（例如，小于 $67^{257^{729}}$, 的所有自然数构成的集合），那么它可以通过依次添加单个元素，从空集经有限个步骤得到；因此 c 是有限的。另一方面，如果 c有一个真半子集，那么 c 在我们的意义上就是无限的。然而，我们关于 c 是有限的这一事实的证明本身包含无限多个步骤（按我们的意义而言）；因此，这个证明并不令人信服。

不过，AST 可以构造一个相当简短的证明，证明 $67^{257^{729}}$ 是有限的。这个证明是对一般事实“FN 在乘方运算下封闭”的证明的一个实例化。要得到 $67^{257^{729}}$ 是有限的证明，只需将普遍有效的定理及其证明实例化，其中 67、257 和 729 这些数以某种方式在皮亚诺算术中表示，并使用数码和算术运算；所得证明相当简短。[20] 尽管 Vopˇenka [1979], 中提到了见证宇宙，但据我所知，Vopˇenka 或该领域的其他研究者都尚未对见证宇宙展开研究。

概括而言，若要勾勒 AST 是否以及如何对可行数建模，可以说，可行数由理论中可定义的 N 上的真割 FN 建模。

[18]其封闭性源于有限集合类对其他运算的封闭性，尤其是幂集和笛卡尔积（参见 Vopˇenka [1979]，第 36–37 页）。于是，对于 α，$\beta\in$FN，由 $P(P(P(\alpha\cup\beta))))$ 通过分离可得 α^β，一个有限集合。它映射到唯一的 $\gamma\in$N，而后者必定是有限的（第 36 页的定理适用）。因此 $\alpha^\beta\in$FN；这一定理在书中用了数段篇幅证明。[19]引文中，我采用了 Bernays [1935],的“Bernays 数”，而原文使用的是另一个例子。[20]存在一些 AST 模型，其中 FN 含有非标准元素。Sochor [1989] 评论道：“一个有趣的问题是元数学自然数与 FN 中元素之间的关系。显然，每个元数学数（的形式化）都是 FN 的一个元素；然而，从纯逻辑的观点来看，FN 可以‘更长’ [。. .] FN 代表我们最小的视界，而元数学自然数系统构成一个视界，因此，接受这样一个原则是方便的：FN 恰好形式化了元数学自然数系统（尽管这一原则几乎无法形式化）。”（第 66 页）。Pudl´ak 和 Sochor [1984] 的著作给出了 PA 可数模型中此类截段的刻画。

类存在模式保证 FN 存在；延拓公理保证 FN 不同于 N（见上文）。

Vopˇenka [1979]中从未使用“可行”一词。另一方面，以 Yessenin-Volpin [1970]（该文为英文）开创、由 Parikh [1971]延续的研究脉络中所用的“可行”一词，布拉格集合论研讨班的成员都很熟悉，因为 H´ajek [1973]在 TSS 中对 Parikh 关于几乎相容理论的研究所作的重新诠释中使用了这个词。因此，考虑到 H´ajek 也是将 Vopˇenka [1979] 译成英文的译者，这个词或许就此进入了该书。我们不妨推测，由于 Es´enine-Volpine [1961]中“可行”一词的法语同源词是“r´ealisable”，至少 Vopˇenka [1979], 在开篇——其中对经典集合论提出了严厉批评——确实出现了一个同源词：

> 康托尔集合论应对数学这种有害的增长负责；另一方面，它为数学设定了无法轻易超越的界限。数学所研究的一切结构都是先验完成且僵硬的，数学家的角色仅仅是描述它们的观察者。这就是为什么数学家在把握本质上不精确的事物时如此无能为力，例如可实现性、连续与离散的关系，等等。（第9页）

这一思考可以沿着概念翻译及其意义可能发生转变的领域继续深入，尽管这或许有些趣味，我将留待另一次机会再谈。

ˇ有一条由Svejdar开展的历史研究线索，尤其在ˇSvejdar [2018]中得到概述，并在ˇSvejdar [2025]中延续。这项工作凸显了Vopˇenka与H´ajek [1973] 这一结果的重要性：作者证明G¨odel–Bernays集合论GB具有真可定义割（而ZF中不存在真可定义割）。这项历史研究将该陈述追溯到Vopˇenka 1964年的特许任教资格论文，因此他与H´ajek在Vopˇenka与H´ajek [1973]发表之前很可能已经知道这一点有一段时间了。人们自然会想，这一洞见是否在AST的演进中发挥了作用。

此时似乎正是宣布结案的恰当时机。已经确定，Yessenin-Volpin 所阐述的可行数的一个鲜明特征——即 10^{12}, 不可行——并未在所谓的 AST 模型中得到忠实体现。对此，Vopˇenka 或许会指出，上述论述仅涉及“极限宇宙”；在极限宇宙中，确实不存在由闭算术项给出的自然数真子类（即子半集合），因为极限宇宙是一种理想化。另一方面，他的书中所举的例子涉及见证宇宙。

然而，若就此结案，便会留下一个与 Dummett 的弱无限、弱有限总体相关的自然问题得不到解答。AST 中引入的真半集，是否存在既可证明为弱无限、又可证明为弱有限的？这个问题自然源于这样一个事实：AST 中的集合“在经典意义上是有限的”，换言之，是“形式有限的”。一种诱人的做法是诉诸每个自然数 $\alpha \in \mathrm{N}$ 的形式有限性，然后选取一个 $\alpha \in \mathrm{N} \setminus \mathrm{FN}$, 让它扮演 Dummett 对弱有限总体定义中所要求的有限序数 n，并试图证明 FN 既是弱无限的，又是弱有限的；只要能够确定 FN 的某个超类上的一个良序，使 FN 没有第 n 个成员即可。毕竟，按该词的一种恰当意义，FN 是有界的 。此外，替代集合论的最初倡导者也曾提出过类似的主张：

> 经典集合论只将无穷置于有限集「之外」，而替代集合论也将其置于形式有限集「之中」，因为存在包含无限子类的集合。（Sochor [1984]）

最后但同样重要的是，我们可以将这种在 AST 中容纳可行数的路径，视为与 Yessenin-Volpin 将可行数序列叠加到包含元素 10^{12} 的序列上的方式相平行。

还值得一提的是，在这一点上，Vopˇenka 多次提出模糊性问题，不过使用的是“不精确性”或“不确定性”等不同术语：

> 自然无穷是对通向不确定且模糊现象边界之路径的抽象。既然我们是通过把握现象的边界来准确理解各种现象的（参见拉丁语“definitio”），那么自然无穷的研究也可以成为不确定性科学的一种可能基础（第 122 页）。（Vopˇenka[1991]）

Vopˇenka [1979] 已经提供了一些关于半集的启发性例子，可以将其视为发展模糊性数学理论的一项计划。他的一个例子涉及物种演化，即猿与达尔文之间延续的世代。文中提到了堆垛悖论：“真半集的例子早已为人所知，但它们被视为反常现象，例如‘秃头悖论’。然而，每当我们考察某些对象的某种属性，并强调其内涵而非外延时，都会遇到真半集。（第 34 页）”（Vopˇenka [1979]）Dean [2018] 指出，Vopˇenka 试图通过非标准性来把握模糊性的提议，在这方面颇为独特。

5.1 在 AST 中尝试构造弱无限、弱有限总体

可以预先坦言，本小节的结论将是否定的：在 AST 中找不到 Dummett 所说的弱无限、弱有限总体。下文所呈现的结果针对 AST，以及尝试在其中重新诠释 Dummett 的概念；这就需要承认经典逻辑（AST 的底层逻辑）的推理手段。因此，这并未说明在更一般的框架中（该框架可能不受经典逻辑支配）是否存在弱无限、弱有限总体。（可以合理地假定，Dummett 的考量旨在服务于构造性推理。）

我在此旨在指出主要障碍。如前所述，预期重构的第一步是将总体 理解为类。因此，接下来我将不再采用弱无限总体，而改用弱无限类；弱有限性的情形也同样如此。

在 AST 中，类通常被视为全域类型（参见 Sochor [1979]）；或者，也可以将该理论视为具有集合与类这两种类型，但这样一来就需要说明每个集合同时也是一个类（参见 [Vopˇenka，1979年，第 28] 页）。无论采用哪种方式，仔细考虑仅使用集合语言能够表达什么都非常有用——甚至是至关重要的。因此，我将讨论两种视角：

- 集合视角 （能够通过集合公式表达的陈述），以及
- 类视角 （能够通过 AST 语言的任意公式表达的陈述，即使用类，也可以按需使用集合）。

Dummett 对弱无限总体和弱有限总体（即类）的定义，都要求在给出所考虑的类的同时，给出一个良序。让我们回顾一下 AST 中良序的定义（[Vopˇenka，1979年，第 30] 页）： R 是 A 的良序，当且仅当 R 是 A的全序，并且 A的每个非空子类 都有一个首元素。

为避免平凡解，只应考虑非空类。在 AST 中，可以自由地将量词读入定义。类 A可以被称为弱

无限，只要它存在一个良序 R，且没有最后一个成员。良序是定义域上的二元关系，因此在 AST 中它是一个类。若存在有限序数 n，以及对 B 的一个良序 S，且其中没有第 n 个成员，则类 B 可被称为弱有限。对于弱有限性，还有一项要求也很有用：如果 S 良序排列 B，且定义域中存在一个序数 n，使得 S 中没有 n 个成员，那么 n 在 S 的意义上是 B 所有元素的上界。否则，我们可以取任意一个定义域足够大的良序 S，选取 S 的最小元素，例如 0，并将 B 注入 Dom(S) $\setminus 0$。

文中谈到了序数；特别是，在序 S中， B 的第 n个成员不存在，因此 B 和 S 的定义域都必须包含在序数之中。我就假设 AST 中的序数类 Ω 满足这一点。[21] 也就是说， B 的弱有限性按如下方式定义：

- $B \subseteq$Ω（B 是序数类，或与某个序数类存在双射，因此 B 继承了该序），并且

- 存在一个序数 α，使得 $b < \alpha$ 对每个 $b \in B$（B 都由 α界定），并且

- α 是有限的。

如果 A 是 AST 中的非空类， A 由 R良序，且 A 在 R下没有 R个末元素，那么 A就是无限的（按 AST 的术语）。为说明这一点，请注意， A 由 R良序，而 FN 由 $\leq$良序。根据 [Vopˇenka，1979，第 31], 页，两个良序类之一同构于另一个的某个初始片段。反设由 R 排序的 A 同构于由 $\leq$排序的 FN 的一个真初始段；令 B 表示 FN 的这个真初始段，并由 $\leq$ 排序。注意， B 在 FN 中按 $\leq$ 排序时没有末元素。令 $c \in$ FN $\setminus B$，则 B 也是 c 在 $\leq$ 下的一个真初始段，且没有末元素。现在 c 是一个集合，而 c 上的 $\leq$ 是集合序，所以如果 B 是集合，它在 $\leq$下就有一个末元素，矛盾。因此， B 不是集合，故 B 是 c中的真半集；但这与 c 有限矛盾。由此我们得出结论：由 $\leq$ 良序的 FN 同构于由R 良序的 A 的一个初始片段，因此 A是无限的。

已知类 A 是无限的，那么它也可能是弱有限的吗？对弱有限 AST 类的探究一直局限于 AST 中序数的定义域，也就是 Ω 的元素所构成的定义域。因此，问题在于是否存在一个由序数构成的类 A，它既是弱无限的，又是弱有限的。我们知道，按 AST 的说法，这样的类是无限的。

Ω 中的任意序数类，要么在 Ω 中共尾，要么是可数或有限的。要看出这一点，可以注意到 Ω 本身作为序数类，其序型为 Ω（参见 [Vopˇenka，1979年，第 69] 页）：也就是说，对每个 $\beta \in$Ω，区间 $\{\gamma \in \Omega \mid \gamma \leq \beta\}$ 都是可数或有限的（参见序型 Ω 的定义， [Vopˇenka，1979年，第 50] 页）。

现在，我们所讨论的类 A不可能在 Ω 中共尾，因为假定它从上方被某个序数所界定。因此， A 是可数的，因而是一个真半集。为了进一步讨论，我将固定这样一个可数真半集，即类 FN。这样做真的不会失去一般性吗？FN 是 Ω 的一个真初始段，而 Ω 中其他可数序数的真半集未必如此。不过，如果结果表明 FN 不 能被某个有限序数从上方界定，那么其他任何可数序数也同样不能。因此，我们可以在不失一般性的前提下，将注意力限制在 FN 上。

以下事实已被证明与论证相关。

1. 任意弱无限类（按 Dummett 的说法）都是无限的（按 AST 的说法） .

[21]参见 Vopˇenka [1979], 第二章第三节中的定义。

2. FN 是弱无限类的一个例子，因为它由 $\leq$ 良序。3. FN 是一个真类，具体而言，是一个可数半集。4. 从集合视角看不到 FN。5. 任意无限自然数 $\alpha \in$ N \FN 都是 FN 的上界。6. 没有任何 $\alpha \in$ N \FN 在类视角下是良序的，例如，类 $\alpha \setminus$ FN 没有最小元素。7. 从集合视角看，每个 $\alpha \in$N 都是有限的。8. AST 中的序数组成 N 的一个子类（$\Omega \subseteq$ N）。有限序数也属于 FN。9. 序数类 Ω 由（某个序的限制）$\leq$ 良序。10. 存在一个序数 $\omega \in \Omega$，使得 $n \in \omega$ 对于每个 $n \in$FN。序数 ω 是 $\Omega \setminus$ FN 的首元素（参见 [Vopˇenka，1979年，第 69]页）。11. 可以为 FN 找到一个没有 α 个元素的良序：取序数 $\omega + 1$，并令 $\alpha := \omega$。12. 按 AST 的说法，ω 在 Ω 中有无限多个前驱。13. 从集合视角看不到类 Ω。14. 集合 ω 从集合视角看是可见的。

让我们更详细地考察序数 ω。由于 $\omega \in$N，按照 AST 倡导者过去的说法，它是“形式有限”的。这种形式有限性可以借助 AST 的技术手段，尤其是其集合片段，明确表述出来。例如，可以说，在集合视角下，ω 是戴德金有限的。作为集合，ω 也满足通常构成序数定义的所有条件；但当然，在集合视角下，无法表述 $\omega \in \Omega$ 这一命题。

这一系列事实似乎打破了 FN 既是弱无限又是弱有限的任何希望。也就是说，FN 是无限的（2.），且在集合视角下不可见（4.）。它受序数 ω（10.）所界定，但不受某个闭算术项所界定；更重要的是，在类视角下，小于 ω 的序数类是无限的（12.）。也就是说，它在使 FN 可见的同一视角下是无限的。换言之，若试图利用诸如 $\omega + 1$ 这样的序数来证明存在一种良序，其中 FN 没有第 n个元素，并选择 $n = \omega$，那么只能在类视角下进行；这会揭示 ω 有无限多个前驱（即，类 FN $= \{\alpha \in \Omega \mid \alpha \leq \omega\}$ 是无限的）。

我们是否真的必须采用同一种视角（即类视角）来论证 ω的弱有限性？一方面，我们采用了AST中给定的良序定义，而该定义要求所有非空子类都有最小元素，因此它要求类视角。这就是为什么Vopˇenka发出警告，称“$\leq$ 并非N的良序”（[Vopˇenka，1979，第 58]页）。但另一方面，严格从集合视角（即理论ZF_{fin}的视角）来看，N无疑是良序的——也就是说，N的每个非空子集都有最小元素。

更广泛地说，也许此时不妨不再借助 Dummett 的著作作为中介，因为现在看来，他那些要求良序的概念并未有助于

解决这个问题。因此，这里尝试一种新方法。固定一个 $\alpha \in \mathrm{N} \setminus \mathrm{FN}$。FN（可行数）的所有元素都由 α (5.)从上方界定，因此 α 有一个无限部分。 α 是一个（形式上）有限的自然数（7.）。这种有限性概念不同于另一种有限性概念，后者曾被用来证明 FN 是无限的。因此，这种尝试完全是在“有限”与“无限”意义相互分离的前提下进行的。二者并非互补；若用外延来表述这一点，并将它们应用于集合，那么二者各自的外延可能有非空交集，而它们的并集也未必构成整个集合宇宙（即全类）。换言之，不能用“有限”来引入“无限”。这是为了在 AST 中容纳可行数而必须付出的代价。

如果 Vopˇenka 团体赞同这种或类似的可行性建模方法，他们完全可以提出这种方法。据我所知，他们从未这样做。恰恰相反，Vopˇenka [1979] 在导论中指出，作者对于自己的理论与 Yessenin-Volpin 的提议有何关联，几乎无话可说：“我们理论中某些方法的动机令人想起 A. S. Esenin-Volpin 的思想；但作者觉得自己无法对这些关联作更详细的分析。” Fletcher 的措辞也很谨慎：“现在，如果我们改变术语，用‘可行’替代‘标准’，那么我们就可以将此重新诠释为一个关于所有自然数的理论，其中可行数构成一个子系统。” Vopˇenka 和 Sochor 在这方面推介他们的理论时，似乎从未失言。特别是，Sochor 谨慎地在“替代集合论将它 [也就是无穷]列入形式有限集合‘之中’”这句话里加上了“形式上”（Sochor [1984]）。

从这个意义上说，所谓的“形式有限性”是一个误称。引入一种新的无穷概念（Vopˇenka 的自然无穷）之后，形式有限性便退居为一套可用于集合的工具。AST 的集合片段是一种弱理论（即 $\mathrm{ZF}_{\mathrm{fin}}$）。集合上可以进行幂集运算（但不能一致地对类进行幂集运算）。集合上的全序有一个最大元素，等等。具体而言，我们称为 ω 的集合，在集合视角下会产生另一个集合 $P(\omega)$。

另一方面，一旦恢复“有限”和“无限”必须是互补概念这一要求，AST 中的序数 ω 就不能被视为有限，其理由与经典集合论中序数 ω 不能被视为有限的理由非常相似。事实上，Vopˇenka 指出 [Vopˇenka，1979，第 68] 页，他的理论中的序数对应于康托尔集合论中的可数序数。因此，特别是，AST 中的 ω 会以这种方式（即作为一种良序型）对应于 ZFC 中通常所说的第一个无穷序数（按照该理论所采用的无穷意义）。

6 结语

上述在 AST 中对可行数进行建模的方法，是通过 Dummett 的弱无限、弱有限总体实现的。从某种意义上说，这种尝试逆流而行。我先前曾指出，超有限主义被视为（至少 Yessenin-Volpin 本人也这样看待它）一种背离柏拉图主义、转向建构主义的立场，只不过它更加彻底（正如 Yessenin-Volpin 所说，它“走得更远”）。由于 AST 是一种采用经典逻辑的理论，因此随时都可能仅因此被判定为完全不适用，即便是要容纳 Dummett 的思想也不行，更不用说 Yessenin-Volpin 的思想了。

然而，Vopˇenka 提到了 Yessenin-Volpin，称其为灵感来源。此外，Yessenin-Volpin 的著作中提出了一项核心问题：如何确定其所讨论的各种数列（中的元素）的同一性；这一问题在经典逻辑领域可以得到有趣的处理。Dean [2018]分析了弱系统中一元记数法与位值记数法之间的关系

二阶算术。Pudl´ak [2013]也纳入了类似的想法。Dean 的著作详细探讨了一种应对堆垛悖论（或者说，如果这些应对成功的话，便是表面悖论）的思路：指出用于确定“上界”的工具，与可用于“逐步从下方逼近它”的工具，本质上有所不同。

我已经提出论证，说明不应将 AST 中的可数半集视为弱无限、弱有限总体的例子。该论证基于 AST 中良序的定义；这一概念是在类视角下提出的（每个非空类 都有一个最小元素）。我也试图放弃一条更直接的路径，即用有限性的两种不同概念来处理这个问题。（当然，在 Dummett 的探究中，弱无限与弱有限并非互补的概念。）因此，实际上，我一直在尝试划定一些界限，说明 AST 对可行数及其模型（如果存在的话）这一理念能够作出什么贡献，另一方面又不能作出什么贡献。

Kreisel 和 Ehrenfeucht 在评论 Yessenin-Volpin 的著作 Es´enine-Volpine [1961]时提出的一个问题是： [1967]

> 我们能否找出直观的可行数概念中存在问题的性质，即该概念所满足的公理，而这些公理 [.. .] 又能在其他传统集合论中证明为相容?

我的目标之一是进一步阐明 AST 对可行数若干重要方面的刻画；具体而言，类 FN 是 N 上一个可在该理论中定义的真割。AST 是相对相容的，而且在许多方面都适合用于发展数学。

作为附带效果，本文或许也引起了人们对 AST 及 Vopˇenka 更广泛的学术工作的其他特点的关注。AST 中新颖的无穷概念、AST 对集合与类的构想（不遵循大小限制原则），以及 GB 中真可定义割的思想，都是这类特点的重要例子。

致谢。本文的研究工作得到了捷克科学基金会项目 25-16489S 的资助。

参考文献

Paul Bernays。《论数学中的柏拉图主义》。*L’enseignement mathm´ematique, 1ers´er.*, 34，1935。Charles Parsons 的英文译文发表于《数学哲学：精选读本》，Paul Benacerraf 和 Hilary Putnam 编，剑桥大学出版社第二版，1983 年，第 258–271 页。

Walter Dean. 严格有限主义、可行性与堆垛悖论。《符号逻辑评论》，11(2): 295–346, 2018.

迈克尔·达米特. 维特根斯坦的数学哲学。《哲学评论》，68 (3):324–348, 1959年.

迈克尔·达米特. 王氏悖论。*Synthese*，30:301–324, 1975年.

Alexander Es´enine-Volpine。《数学基础的超直觉主义纲领》。载于《无穷方法：数学基础研讨会论文集》，第201–223页，华沙，1961年。国际数学联盟与波兰科学院数学研究所。

Peter Fletcher。《无穷》。载于 D. Jacquette 编，《逻辑哲学》，第5卷《手册 o》 f 科学哲学，第523–585页。爱思唯尔，阿姆斯特丹，2007年。Juliet Floyd。《Hilbert、维特根斯坦与图灵的“可综览性”》。《style id='3'>Philosophies，8(6):1–24，2023年。网址：https://doi.org/10.3390/philosophies8010006。Petr H´ajek。《为何要有半集》。《style id='6'>Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae，14(3):397–420，1973。Michael Hallett。《style id='8'>康托尔集合论与大小限制，牛津逻辑指南丛书第10卷。克拉伦登出版社，1986年。Zuzana Hanikov´a。《二十世纪数学经典中的替代集合论》。《style id='17'>哲学期刊´》，70:485–504，2022。Eli˘ska Koz´akov´a。《style id='24'>Ladislav Svante Rieger 1916—1963年》。博士论文，布拉格查理大学，2006年。G. Kreisel和A. Ehrenfeucht。书评：A. S. ´Es´enine-Volpine的《数学基础的超直觉主义纲领》。《style id='28'>符号逻辑杂志，32(4):517，1967。ISSN 00224812。网址：http://www.jstor.org/stable/2270182。Georg Kreisel。书评：《维特根斯坦论数学基础》。《style id='30'>英国科学哲学杂志，9(34):135–158，1958。Mathieu Marion。《style id='32'>量化与有限主义：维特根斯坦数学哲学研究。博士论文，牛津大学，1991年。John P. Mayberry。《style id='34'>集合论中的数学基础。剑桥大学出版社，2000年。Felix M¨uhlh¨olzer。《“数学证明必须可综览”：维特根斯坦对此的含义及其推论》。《style id='38'>Grazer Philosophische Studien，71(1):57–86，2006年。doi：10.1163/18756735-07101005。Rohit Parikh。《算术中的存在与可行性》。《style id='40'>符号逻辑杂志，36(3):494–508，1971。P. Pudl´ak和A. Sochor。《替代集合论的模型》。《style id='43'>符号逻辑杂志，49(2):570–585，1984。Pavel Pudl´ak。《style id='46'>数学的逻辑基础与计算复杂性：浅要导论。施普林格数学专著。施普林格，2013。L. Rieger。《关于自然数问题》。载于《无穷方法：数学基础研讨会论文集》，第225–233页，华沙，1961年。国际数学联盟与波兰科学院数学研究所。Abraham Robinson。《style id='51'>非标准分析。北荷兰出版公司，阿姆斯特丹，1966年。A. Sochor。《替代集合论及其对康托尔集合论的处理》。载于S. Trillas、H. J. Skala、E. Termini编，《style id='53'>模糊性的诸方面，第161–203页。D. Reidel出版公司，1984年。

A. Sochor。《替代集合论基础》。载于Josef Ml˘cek、M´aria Bene˘sov´a和Blanka Vojt´a˘skov´a编，《style id='5'>替代集合论数学第一届研讨会论文集，第1章，第43–70页。斯洛伐克数学家与物理学家协会（JSMF），1989。Anton´ın Sochor。《替代集合论》。载于W. Marek、M. Srebrny和A. Zarach编，《集合论与分层理论：纪念安德热·莫斯托夫斯基文集》，数学讲义第537卷，第259–271页。施普林格出版社，1976年。Anton´ın Sochor。《替代集合论元数学 I》。《style id='13'>Commentationes Mathe- maticae Universitatis Carolinae，20(4):697–722，1979年。Anton´ın Sochor。《替代集合论元数学 II》。《style id='16'>Commentationes Mathe- maticae Universitatis Carolinae，23(1):55–79，1982年。Anton´ın Sochor。《替代集合论元数学 III》。《style id='19'>Commentationes Mathe- maticae Universitatis Carolinae，24(1):137–154，1983。˘V´ıt˘ezslav Svejdar。《现代捷克逻辑：Vop˘enka与H´ajek、历史与背景》。《style id='23'>期刊

l

应用逻辑，5(6):1261–1271，2018。

˘V´ıt˘ezslav Svejdar。Petr Vop˘enka，集合论的一些早期成果。已投稿，2025年。

Petr Vop˘enka。 Teubner，莱比锡，1979年。

´Petr Vop˘enka。 替代集合论中的数学。Alfa，布拉迪斯拉发，1989。

Petr Vop˘enka。替代集合论的哲学基础。国际一般系统期刊，20(1):115–126，1991年。

˘ Petr Vop˘enka。布拉格集合论研讨班。载于 P. Cintula、Z. Hanikov´a 和 V. Svejdar 编，见证岁月：纪念 *Petr H´ajek*，第 10 卷，*Tributes*，第 5–8 页。College Publications，2009年。

Petr Vop˘enka 和 Petr H´ajek。《半集合理论》。Academia Praha/北荷兰出版公司，1972。Petr Vop˘enka 和 Petr H´ajek。Gödel–Bernays 集合论的广义语义模型的存在。波兰科学院通报，*S´*系列：数学、天文学与物理学，XXI(12):1079–1086，1973。

王浩。基础研究八十年。*Dialectica*，12(3/4):466–497，1958年。

克里斯平·赖特。严格有限主义。*Synthese*，51(2):203–282，1982年。

亚历山大·叶森宁-沃尔平。超直觉主义批判与数学基础的反传统纲领。载于 A. Kino、J. Myhill 和 R.E. Vesley 编《直觉主义与证明论：1968年纽约州布法罗夏季会议论文集》，第3–45页。North Holland，1970年。