arXiv:2603.02868v1 [math.AP] 3 Mar 2026

微结构对三维磁性微极方程的稳定作用

HAIFENG SHANG

Abstract. 本文聚焦于环面 $\mathbb{T}^3$ 上具有部分黏性的三维磁性微极方程的整体稳定性。我们首先证明了零运动黏度下三维磁性微极方程的整体稳定性和指数衰减。若忽略微旋转效应，该系统便退化为三维无黏耗散磁流体力学方程，而其稳定性问题仍是一个颇具挑战性的开放问题。其次，我们证明了零运动黏度、零磁扩散的三维磁性微极方程在背景磁场附近扰动下的整体稳定性和代数衰减。忽略微结构后，该系统将变为三维理想磁流体力学方程；众所周知，要证明理想磁流体力学方程的整体适定性，必须引入加权空间。我们的结果表明，微结构能够增强耗散，有助于稳定流体。据我们所知，这是关于微结构对导电流体稳定作用的首批研究成果。

1. Introduction

本文研究周期区域 $\mathbb{T}^3$ 中的三维（3D）不可压缩磁性微极方程:

$$\begin{cases} \partial_t u + u\cdot\nabla u - (\mu+\chi)\Delta u = -\nabla p + 2\chi\nabla\times\omega + b\cdot\nabla b, \\ \partial_t \omega + u\cdot\nabla\omega + 4\chi\omega - \kappa\nabla\nabla\cdot\omega - \eta\Delta\omega = 2\chi\nabla\times u, \\ \partial_t b + u\cdot\nabla b - \nu\Delta b = b\cdot\nabla u, \\ \nabla\cdot u = 0, \nabla\cdot b = 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \omega(x,0) = \omega_0(x), b(x,0) = b_0(x), \end{cases} \tag{1.1}$$

其中， u、 ω、 b 和 p 分别表示流体速度、微旋转速度、磁场和压力。非负常数 μ、 χ 和 ν 分别为运动黏性、微旋转黏度和磁扩散率，而 κ 和 η 为角黏度。

磁性微极方程 (1.1) 可以描述具有微结构的流体（见[2, 11, 19]），而经典流体模型（如纳维–斯托克斯方程和磁流体力学（MHD）方程）无法表示这类流体。值得注意的是，该模型引入了四种新黏度 χ，其大小在某种意义上可以衡量微极性流体的流动与纳维–斯托克斯模型或 MHD 模型所描述流动之间的差异。如果微旋转黏度 $\chi = 0$，线动量守恒定律将

2010年 数学主题分类。 35Q35, 35B40, 76D03。关键词和短语。 磁性微极方程，稳定性，部分黏性，衰减估计。

不再受微结构存在与否的影响，系统 (1.1) 将简化为磁流体力学方程。

当 $\mu > 0$、$\eta > 0$ 和 $\nu > 0$ 时，[20, 24, 30] 已证明有界区域和全空间中弱解的整体存在性。众所周知，二维情形下弱解的整体正则性和强解的整体存在性都是经典结果，而三维情形下相应的问题仍然是具有挑战性的开放问题。

当 $\mu > 0$、$\eta = 0$ 和 $\nu > 0$ 时，粒子旋转过程中应力动量会丢失，微结构发挥着重要作用，因为它通常能够提高承载能力并稳定流动（见 [12, 25]）。由于缺乏微旋转速度耗散，这类磁性微极流体的整体适定性和大时间行为问题，比具有完全耗散的方程 (1.1) 更为困难。在二维空间中，Yamazaki [36] 此前充分利用系统的结构，并对解的一阶导数的勒贝格范数进行估计，从而建立了整体正则性（另见 [28]）。通过利用该系统的特殊结构，并充分利用速度耗散以及 ω 方程中的阻尼项，Niu 和 Shang [21] 得到了二维和三维情形下小初值整体经典解的存在性，以及整体解衰减估计的上下界。其他一些精彩结果可参见 [4, 7, 9, 10, 13, 26, 27, 29, 33, 35, 38]。

当 $\mu = 0, \eta > 0$ 和 $\nu > 0$ 时，系统 (1.1) 化简为以下系统

$$\begin{cases} \partial_t u + u \cdot \nabla u - \chi \Delta u = -\nabla p + 2\chi \nabla \times \omega + b \cdot \nabla b, \\ \partial_t \omega + u \cdot \nabla \omega + 4\chi \omega - \kappa \nabla \nabla \cdot \omega - \eta \Delta \omega = 2\chi \nabla \times u, \\ \partial_t b + u \cdot \nabla b - \nu \Delta b = b \cdot \nabla u, \\ \nabla \cdot u = 0, \nabla \cdot b = 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \omega(x,0) = \omega_0(x), b(x,0) = b_0(x). \end{cases} \tag{1.2}$$

本文首先研究系统 (1.2) 的全局稳定性问题。为了解该问题可能存在的困难，我们简要回顾无粘电阻磁流体力学方程的若干事实。特别地，当我们忽略流体粒子的旋转角速度的影响，即 $\chi = 0$ 时，(1.2) 化简为

$$\begin{cases} \partial_t u + u \cdot \nabla u = -\nabla p + b \cdot \nabla b, \\ \partial_t b + u \cdot \nabla b - \nu \Delta b = b \cdot \nabla u, \\ \nabla \cdot u = 0, \nabla \cdot b = 0. \end{cases} \tag{1.3}$$

即使初始数据很小，系统 (1.3) 解的整体适定性仍是一个悬而未决的问题。最近，陈、Zhang 和周 [8] 首次证明了当磁场接近满足丢番图条件的常数平衡态时，(1.3) 在环面 $\mathbb{T}^3$ 上具有全局稳定性。近期，谢、九和刘 [34] 进一步研究了背景磁场满足丢番图条件的该系统，并降低了 [8] 初始数据的正则性要求。关于部分耗散磁流体力学方程全局稳定性问题的更多结果，可参见[1, 6, 16, 17, 18, 22, 23, 32, 37, 39, 40, 41, 42]及其中的参考文献。

本文的第一个目标是研究零运动黏度下磁微极方程 (1.2) 的全局稳定性问题。利用将两个线性项 $2\chi\nabla\times\omega$ 和 $2\chi\nabla\times u$ 视为扰动这一关键观察，我们能够克服缺乏耗散的困难，并建立系统 (1.2) 的整体稳定性。更具体地，我们有如下定理。

定理 1.1. 考虑满足 $\chi > 0, \kappa \geq 0, \eta > 0$ 和 $\nu > 0$ 的系统 (1.2)。假设 $(u_0, \omega_0, b_0) \in H^3(\mathbb{T}^3)$ 满足 $\nabla \cdot u_0 = \nabla \cdot b_0 = 0$ 和 $\int_{\mathbb{T}^3} u_0 dx = \int_{\mathbb{T}^3} \omega_0 dx = \int_{\mathbb{T}^3} b_0 dx = 0$。那么存在一个常数 $\epsilon > 0$，使得若

$$\|u_0\|_{H^3(\mathbb{T}^3)} + \|\omega_0\|_{H^3(\mathbb{T}^3)} + \|b_0\|_{H^3(\mathbb{T}^3)} \leq \epsilon, \tag{1.4}$$

则系统 (1.2) 存在唯一的整体强解 (u, ω, b)，并且对任意 $t > 0$及某些正常数 C 和 C_0，满足

$$\|u(t)\|_{H^3(\mathbb{T}^3)} + \|\omega(t)\|_{H^3(\mathbb{T}^3)} + \|b(t)\|_{H^3(\mathbb{T}^3)} \leq C\epsilon, \tag{1.5}$$

$$\|u(t)\|_{H^3(\mathbb{T}^3)} + \|\omega(t)\|_{H^3(\mathbb{T}^3)} + \|b(t)\|_{H^3(\mathbb{T}^3)} \leq Ce^{-C_0 t}. \tag{1.6}$$

注 1.2. *(1)* 定理 *1.1* 揭示了微结构存在所产生的稳定化效应。微结构实际上带来了额外的平滑效应，使流动趋于稳定。特别是，动力学微旋转黏度 $\chi > 0$ 对磁性微极流体至关重要；否则，整体运动不受微旋转影响，而(1.2) 则退化为无黏、含电阻项的磁流体力学方程，其整体适定性问题仍然颇具挑战。

(2) 注意，对于二维磁性微极性方程，$\omega = (0, 0, \omega_3)$，因此，稍作技术性修改后，我们在此使用的方法也能得到二维磁性微极性方程 (1.2) 解的整体稳定性和指数衰减。

当 $\mu = 0, \eta > 0$ 和 $\nu = 0$ 时，系统 **(1.1)** 化简为以下系统

$$\begin{cases} \partial_t u + u \cdot \nabla u - \chi \Delta u = -\nabla p + 2\chi \nabla \times \omega + b \cdot \nabla b, \\ \partial_t \omega + u \cdot \nabla \omega + 4\chi \omega - \kappa \nabla \nabla \cdot \omega - \eta \Delta \omega = 2\chi \nabla \times u, \\ \partial_t b + u \cdot \nabla b = b \cdot \nabla u, \\ \nabla \cdot u = 0, \nabla \cdot b = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \omega(x, 0) = \omega_0(x), b(x, 0) = b_0(x). \end{cases} \tag{1.7}$$

如果微旋转黏度 $\chi = 0$，那么 **(1.7)** 就变为无粘磁流体力学方程

$$\begin{cases} \partial_t u + u \cdot \nabla u = -\nabla p + b \cdot \nabla b, \\ \partial_t b + u \cdot \nabla b = b \cdot \nabla u, \\ \nabla \cdot u = 0, \nabla \cdot b = 0. \end{cases} \tag{1.8}$$

目前尚不清楚二维和三维理想磁流体力学系统 **(1.8)** 的光滑解是否会在有限时间内爆破。Bardos、Sulem 和 Sulem $[3]$ 使用 Els¨asser 变量，成功证明了在强磁场作用下，**(1.8)** 对于加权 H¨older 空间中的小初始数据存在整体解。之后，Cai 和 Lei $[5]$、He、Xu 和 Yu $[14]$，以及 Wei 和 Zhang $[31]$ 进一步研究了强磁场作用下，完整扩散磁流体力学系统向理想方程的整体时间消失黏性极限。

本文的第二个目标是研究方程 **(1.7)** 在背景磁场附近的整体适定性。更具体地说，背景磁场指的是特殊的稳态解 $(u^{(0)}, \omega^{(0)}, b^{(0)})$，其中

$$u^{(0)} = 0, \ \omega^{(0)} = 0, \ b^{(0)} = \alpha$$

其中 α 满足下文引理 3.1 中定义的丢番图条件。在满足 $B = b - b^{(0)}$ 的情况下，$(u,\ \omega,\ b)$ 在 $(u^{(0)},\ \omega^{(0)},\ b^{(0)})$ 附近的任意扰动均由下式支配

$$\begin{cases} \partial_t u + u\cdot\nabla u - \chi\Delta u = -\nabla p + 2\chi\nabla\times\omega + B\cdot\nabla B + \alpha\cdot\nabla B, \\ \partial_t\omega + u\cdot\nabla\omega + 4\chi\omega - \kappa\nabla\nabla\cdot\omega - \eta\Delta\omega = 2\chi\nabla\times u, \\ \partial_t B + u\cdot\nabla B = B\cdot\nabla u + \alpha\cdot\nabla u, \\ \nabla\cdot u = 0, \nabla\cdot B = 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \omega(x,0) = \omega_0(x), B(x,0) = B_0(x). \end{cases} \tag{1.9}$$

现在我们可以陈述关于系统 (1.9) 解的整体稳定性和大时间行为的第二个主要结果。

定理 1.3. 考虑满足 $|\alpha|^2 < \chi < 2$、$\kappa \geq 0$ 和 $\eta > 0$ 的系统 (1.9)。假设 $(u_0, \omega_0, B_0) \in H^N(\mathbb{T}^3)$ 满足 $N \geq 4r + 11\,(r > 2)$ 和 $\nabla\cdot u_0 = \nabla\cdot B_0 = 0$。此外，假设 $\int_{\mathbb{T}^3} u_0 dx = \int_{\mathbb{T}^3}\omega_0 dx = \int_{\mathbb{T}^3} B_0 dx = 0$。则存在常数 $\epsilon > 0$，使得如果

$$\|u_0\|_{H^N(\mathbb{T}^3)} + \|\omega_0\|_{H^N(\mathbb{T}^3)} + \|B_0\|_{H^N(\mathbb{T}^3)} \leq \epsilon, \tag{1.10}$$

那么系统 (1.9) 存在唯一的整体解 (u, ω, B)，且对任意 $t > 0$，均满足

$$\|u(t)\|_{H^N(\mathbb{T}^3)} + \|\omega(t)\|_{H^N(\mathbb{T}^3)} + \|B(t)\|_{H^N(\mathbb{T}^3)} \leq C\epsilon, \tag{1.11}$$

$$\|u(t)\|_{H^{r+5}(\mathbb{T}^3)} + \|\omega(t)\|_{H^{r+5}(\mathbb{T}^3)} + \|B(t)\|_{H^{r+5}(\mathbb{T}^3)} \leq C(1+t)^{-\frac{3}{2}}. \tag{1.12}$$

注 1.4. *(1)* 定理 *1.3* 也揭示了微结构的稳定化效应。若忽略流体中粒子的微旋转效应，即 $\chi = 0$，则 (1.7) 退化为无粘磁流体力学方程，因此需要引入加权空间来证明整体适定性。

(2) 结构条件 $|\alpha|^2 < \chi < 2$ 的假设源于缺少运动黏度和磁扩散，以及线性项 $2\chi\nabla\times\omega$、$2\chi\nabla\times u$与扰动项 $\alpha\cdot\nabla B$、$\alpha\cdot\nabla u$之间的相互作用。一个有趣的问题是，能否去掉这一假设。

本文其余部分分为两节。第 2 节证明定理 1.1，第 3 节证明定理 1.3。最后，我们列出本文中将频繁使用的一些记号。为简化记号，我们将写作 $\int f$ 表示$\int_{\mathbb{T}^3} f dx$，$\|f\|_{L^q}$表示$\|f\|_{L^q(\mathbb{T}^3)}$，$\|f\|_{\dot{H}^s}$表示$\|f\|_{\dot{H}^s(\mathbb{T}^3)}$，以及 $\|f\|_{H^s}$表示$\|f\|_{H^s(\mathbb{T}^3)}$。

2. Proof of Theorem 1.1

本节证明定理 1.1。由于 (1.2) 在 H^3 中的局部适定性可由弗里德里希斯方法等标准方法得到，证明定理 1.1 的关键在于建立 (u, ω, b) 在 H^3 中的全局先验 界。

定理 *1.1* 的证明。 通过标准计算可得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|(u,\omega,b)\|_{L^2}^2 + \eta\|\nabla\omega\|_{L^2}^2 + \nu\|\nabla b\|_{L^2}^2 \leq 0. \tag{2.1}$$

将 ∇^3 应用于 (1.2)，并分别对所得结果与 $(\nabla^3 u,\ \nabla^3\omega,\ \nabla^3 b)$ 取 L^2-内积，可得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|(u,\omega,b)\|_{\dot{H}^3}^2+\chi\|\nabla u\|_{\dot{H}^3}^2+4\chi\|\omega\|_{\dot{H}^3}^2+\eta\|\nabla\omega\|_{\dot{H}^3}^2+\nu\|\nabla b\|_{\dot{H}^3}^2\\
&\le 4\chi\int\nabla^3(\nabla\times u)\cdot\nabla^3\omega+\int[\nabla^3,b\cdot\nabla]b\cdot\nabla^3 u-\int[\nabla^3,u\cdot\nabla]u\cdot\nabla^3 u\\
&\quad-\int[\nabla^3,u\cdot\nabla]\omega\cdot\nabla^3\omega+\int[\nabla^3,b\cdot\nabla]u\cdot\nabla^3 b-\int[\nabla^3,u\cdot\nabla]b\cdot\nabla^3 b\\
&:=K_1+K_2+K_3+K_4+K_5+K_6.
\end{aligned}\tag{2.2}$$

利用杨氏不等式，我们得到

$$K_1\le\chi\|\nabla u\|_{\dot{H}^3}^2+4\chi\|\omega\|_{\dot{H}^3}^2.$$

由 H¨older 不等式以及 [15] 的交换子估计可得

$$\begin{aligned}
K_2&\le\|[\nabla^3,b\cdot\nabla]b\|_{L^2}\|\nabla^3 u\|_{L^2}\\
&\le C\|\nabla b\|_{L^\infty}\|\nabla b\|_{\dot{H}^2}\|\nabla u\|_{\dot{H}^2}\\
&\le C\|\nabla b\|_{H^2}\|(\nabla u,\nabla b)\|_{\dot{H}^2}^2.
\end{aligned}$$

同理，我们有

$$\begin{aligned}
&K_3\le C\|\nabla u\|_{H^2}\|\nabla u\|_{\dot{H}^2}^2,\\
&K_4\le C\|(\nabla u,\nabla\omega)\|_{H^2}\|(\nabla u,\nabla\omega)\|_{\dot{H}^2}^2,\\
&K_5+K_6\le C\|(\nabla u,\nabla b)\|_{H^2}\|(\nabla u,\nabla b)\|_{\dot{H}^2}^2.
\end{aligned}$$

将上述估计代入 (2.2)，可得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|(u,\omega,b)\|_{\dot{H}^3}^2+\eta\|\nabla\omega\|_{\dot{H}^3}^2+\nu\|\nabla b\|_{\dot{H}^3}^2\\
&\le C\|(\nabla u,\nabla\omega,\nabla b)\|_{H^2}\|(\nabla u,\nabla\omega,\nabla b)\|_{\dot{H}^2}^2.
\end{aligned}\tag{2.3}$$

将 (2.1) 与 (2.3) 相加，得到

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(\|(u,\omega,b)\|_{H^3}^2+2\eta\|\nabla\omega\|_{H^3}^2+2\nu\|\nabla b\|_{H^3}^2\\
&\le C\|(\nabla u,\nabla\omega,\nabla b)\|_{\dot{H}^2}\|(u,\omega,b)\|_{H^3}^2.
\end{aligned}\tag{2.4}$$

由于缺少运动黏度，导致（2.4）中没有速度耗散效应，因此我们无法直接从（2.4）证明解的整体存在性。为克服这一困难，我们转而利用系统（1.2）的结构，建立 $\|(\nabla u,\ \nabla\omega,\ \nabla b)(t)\|_{\dot{H}^2}$ 或 $\|(\nabla\times u,\ \nabla\times\omega,\ \nabla\times b)(t)\|_{\dot{H}^2}$ 的指数衰减。将 $\nabla^2\nabla\times$ 应用于（1.2），然后如同估计（2.3）那样，我们得到

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\|(\nabla\times u,\nabla\times\omega,\nabla\times b)\|_{\dot{H}^2}^2)+2\eta\|\nabla\times\omega\|_{\dot{H}^3}^2+2\nu\|\nabla\times b\|_{\dot{H}^3}^2\\
&\le C\|(\nabla u,\nabla\omega,\nabla b)\|_{H^2}\|(\nabla\times u,\nabla\times\omega,\nabla\times b)\|_{\dot{H}^2}^2,
\end{aligned}\tag{2.5}$$

其中我们还用到了这一事实

$$\begin{aligned}\int \nabla\times(\nabla\nabla\cdot\omega)\cdot\nabla\times\omega &= \int \varepsilon_{ijk}\partial_j\partial_k(\nabla\cdot\omega)\varepsilon_{ilm}\partial_l\omega_m\\ &= \int (\partial_j\partial_k(\nabla\cdot\omega)\partial_j\omega_k - \partial_j\partial_k(\nabla\cdot\omega)\partial_k\omega_j)\\ &= 0.\end{aligned}$$

显然，公式 (2.5) 由于缺乏运动黏性，并非一个闭合微分不等式。这迫使我们在这些能量估计中加入适当的额外项。我们发现，项 $\|\nabla\times u\|_{\dot{H}^2}^2$ 完全符合我们的目的，它来自微旋转速度场 ω的方程，其中将 $2\chi\nabla\times u$ 视为扰动项。更确切地说，对 (1.2) 的第二个方程应用 ∇^2 ，将结果乘以 $\nabla^2(\nabla\times u)$，并关于空间区域积分，我们得到

$$\begin{aligned}2\chi\|\nabla\times u\|_{\dot{H}^2}^2 &= \int \nabla^2\omega_t\cdot\nabla^2(\nabla\times u) + \int \nabla^2(u\cdot\nabla\omega)\cdot\nabla^2(\nabla\times u)\\ &\quad + 4\chi\int \nabla^2\omega\cdot\nabla^2(\nabla\times u) - \kappa\int \nabla^2(\nabla\nabla\cdot\omega)\cdot\nabla^2(\nabla\times u)\\ &\quad - \eta\int \nabla^2(\Delta\omega)\cdot\nabla^2(\nabla\times u)\\ &:= J_1+J_2+J_3+J_4+J_5.\end{aligned} \tag{2.6}$$

似乎无法直接对 J_1 进行界定。我们的策略是借助速度场 u的方程来利用该项的特殊结构。这一替换会产生更多的项，但幸运的是，所有由此产生的项都可以被适当地界定。更确切地说，我们有

$$\begin{aligned}J_1 &= \frac{d}{dt}\int \nabla^2\omega\cdot\nabla^2(\nabla\times u) - \int \nabla^2\omega\cdot\nabla^2(\nabla\times u_t)\\ &= \frac{d}{dt}\int \nabla^2\omega\cdot\nabla^2(\nabla\times u) - 2\chi\int \nabla^2\omega\cdot\nabla^2\nabla\times(\nabla\times\omega) - \int \nabla^2\omega\cdot\nabla^2\nabla\times(b\cdot\nabla b)\\ &\quad + \int \nabla^2\omega\cdot\nabla^2\nabla\times(u\cdot\nabla u) - \chi\int \nabla^2\omega\cdot\nabla^2\nabla\times(\Delta u)\\ &:= \frac{d}{dt}\int \nabla^2\omega\cdot\nabla^2(\nabla\times u) + J_{11}+J_{12}+J_{13}+J_{14}.\end{aligned}$$

$\nabla\times$ 的性质蕴含

$$J_{11} = -2\chi\|\nabla\times\omega\|_{\dot{H}^2}^2.$$

利用 H¨older 不等式、交换子估计和 Poincar´e 不等式，可得

$$\begin{aligned}J_{12} &= -\int \nabla^2(\nabla\times\omega)\cdot\nabla^2(b\cdot\nabla b)\\ &\le \|\nabla^2(\nabla\times\omega)\|_{L^2}\|\nabla^2(b\cdot\nabla b)\|_{L^2}\\ &\le C\|\nabla b\|_{H^2}\|(\nabla\times\omega,\nabla\times b)\|_{\dot{H}^2}^2\end{aligned}$$

类似地，我们有

$$J_{13}\le C\|\nabla u\|_{H^2}\|(\nabla\times u,\nabla\times\omega)\|_{\dot{H}^2}^2.$$

应用分部积分和杨氏不等式，可得

$$J_{14} \leq \frac{\chi}{8}\|\nabla \times u\|_{\dot{H}^2}^2 + C\|\nabla \times \omega\|_{\dot{H}^3}^2.$$

将 J_{11}-J_{14} 的界代入 J_1，可得

$$\begin{aligned} J_1 \leq & \frac{d}{dt}\int \nabla^2\omega \cdot \nabla^2(\nabla \times u) - 2\chi\|\nabla \times \omega\|_{\dot{H}^2}^2 \\ & + C\|(\nabla u, \nabla b)\|_{H^2}\|(\nabla \times u, \nabla \times \omega, \nabla \times b)\|_{\dot{H}^2}^2 \\ & + \frac{\chi}{8}\|\nabla \times u\|_{\dot{H}^2}^2 + C\|\nabla \times \omega\|_{\dot{H}^3}^2. \end{aligned}$$

如同对 J_{12} 的估计，我们有

$$J_2 \leq C\|(\nabla u, \nabla \omega)\|_{H^2}\|(\nabla \times u, \nabla \times \omega)\|_{\dot{H}^2}^2.$$

应用杨氏不等式和 Poincar´e 不等式可得

$$\begin{aligned} J_3 &\leq \frac{\chi}{8}\|\nabla^2(\nabla \times u)\|_{L^2}^2 + C\|\nabla^2\omega\|_{L^2}^2 \\ &\leq \frac{\chi}{8}\|\nabla \times u\|_{\dot{H}^2}^2 + C\|\nabla \times \omega\|_{\dot{H}^3}^2. \end{aligned}$$

类似地,

$$J_4 + J_5 \leq \frac{\chi}{8}\|\nabla \times u\|_{\dot{H}^2}^2 + C\|\nabla \times \omega\|_{\dot{H}^3}^2.$$

将上述界代入（2.6），可推得

$$\begin{aligned} & \chi\|\nabla \times u\|_{\dot{H}^2}^2 + 2\chi\|\nabla \times \omega\|_{\dot{H}^2}^2 \\ & \leq \frac{d}{dt}\int \nabla^2\omega \cdot \nabla^2(\nabla \times u) + C_1\|\nabla \times \omega\|_{\dot{H}^3}^2 \\ & \quad + C\|(\nabla u, \nabla \omega, \nabla b)\|_{H^2}\|(\nabla \times u, \nabla \times \omega, \nabla \times b)\|_{\dot{H}^2}^2. \end{aligned} \tag{2.7}$$

将（2.5）乘以 A （其中 $A > 1$ 待定），并将所得结果与（2.7）相加，得到

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}\Big(A\|(\nabla \times u, \nabla \times \omega, \nabla \times b)\|_{\dot{H}^2}^2) - \int \nabla^2\omega \cdot \nabla^2(\nabla \times u)\Big) \\ & \quad + (2A\eta - C_1)\|\nabla \times \omega\|_{\dot{H}^3}^2 + 2A\nu\|\nabla \times b\|_{\dot{H}^3}^2 + \chi\|\nabla \times u\|_{\dot{H}^2}^2 \\ & \leq C_2 A\|(\nabla u, \nabla \omega, \nabla b)\|_{H^2}\|(\nabla \times u, \nabla \times \omega, \nabla \times b)\|_{\dot{H}^2}^2. \end{aligned} \tag{2.8}$$

下文中，利用上述估计，我们将通过自举论证完成证明。令

$$\mathcal{E}(t) = \sup_{0\leq\tau\leq t}\|(u, \omega, b)(\tau)\|_{H^3}^2 + \int_0^t \|(\nabla\omega, \nabla b)(\tau)\|_{H^3}^2 d\tau.$$

于是，对任意 $t > 0$，由（2.4）可得,

$$\mathcal{E}(t) \leq \mathcal{E}(0) + C_3\mathcal{E}(t)\int_0^t \|(\nabla u, \nabla \omega, \nabla b)(\tau)\|_{\dot{H}^2} d\tau. \tag{2.9}$$

然后我们作如下拟设：对于 $t \in [0, T]$ 且 $T > 0$,

$$\mathcal{E}(t) \leq 6\epsilon^2. \tag{2.10}$$

Let

$$\mathcal{F}(t) = A\|(\nabla \times u, \nabla \times \omega, \nabla \times b)(t)\|_{\dot{H}^2}^2 - \int \nabla^2\omega \cdot \nabla^2(\nabla \times u).$$

取$A > \frac{C_1}{\eta}$足够大，并结合Poincar´e不等式，我们有

$$\mathcal{F}(t) \geq \|(\nabla \times u, \nabla \times \omega, \nabla \times b)(t)\|_{\dot{H}^2}^2.$$

将 (2.10) 代入 (2.8)，利用庞加莱不等式，并取 ϵ充分小，我们得到

$$\frac{d}{dt}\mathcal{F}(t) + C_4\mathcal{F}(t) \leq 0, \tag{2.11}$$

这意味着

$$\mathcal{F}(t) \leq C\epsilon^2 e^{-C_4 t}. \tag{2.12}$$

由 (2.12) 和 $\nabla \cdot u = \nabla \cdot b = 0$ 可得

$$\|(\nabla u, \nabla b)(t)\|_{\dot{H}^2}^2 + \|(\nabla \times \omega)(t)\|_{\dot{H}^2}^2 \leq C\epsilon^2 e^{-C_4 t}. \tag{2.13}$$

注意到

$$\|\nabla\omega\|_{\dot{H}^2} \leq C(\|\nabla \times \omega\|_{\dot{H}^2} + \|\nabla \cdot \omega\|_{\dot{H}^2}),$$

因此，为了完成估计，我们还需要控制 $\|\nabla\cdot\omega\|_{\dot{H}^2}$。为此，将 $\nabla^2\nabla\cdot$应用于 (1.2) 的第二个方程，并对所得结果与$\nabla^2\nabla \cdot \omega$取 L^2 内积，我们得到

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla \cdot \omega\|_{\dot{H}^2}^2 + 4\chi\|\nabla \cdot \omega\|_{\dot{H}^2}^2 + \eta\|\nabla \cdot \omega\|_{\dot{H}^3}^2 \\
&\leq -\int \nabla^2\nabla \cdot (u \cdot \nabla\omega) \cdot \nabla^2\nabla \cdot \omega \\
&= -\int \nabla^2 u \cdot \nabla\nabla \cdot \omega \cdot \nabla^2\nabla \cdot \omega - 2\int \nabla u \cdot \nabla(\nabla\nabla \cdot \omega) \cdot \nabla^2\nabla \cdot \omega \\
&\quad - \int \nabla u \cdot \nabla\nabla^2\omega \cdot \nabla^2\nabla \cdot \omega - \int \nabla^3 u \cdot \nabla\omega \cdot \nabla^2\nabla \cdot \omega \\
&:= R_1 + R_2 + R_3 + R_4.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Us利用分部积分、(2.10)、(2.13) 以及 Poincar´e 不等式，我们得到 t

$$\begin{aligned}
R_1 &= \int \nabla u \cdot \nabla(\nabla\nabla \cdot \omega) \cdot \nabla^2\nabla \cdot \omega + \int \nabla u \cdot \nabla\nabla \cdot \omega \cdot \nabla^3\nabla \cdot \omega \\
&\leq \|\nabla u\|_{L^\infty}(\|\nabla(\nabla\nabla \cdot \omega)\|_{L^2}\|\nabla^2\nabla \cdot \omega\|_{L^2} + \|\nabla\nabla \cdot \omega\|_{L^2}\|\nabla^3\nabla \cdot \omega\|_{L^2}) \\
&\leq C\epsilon\|\nabla \cdot \omega\|_{\dot{H}^3}^2.
\end{aligned}$$

同样地,

$$R_2 \leq C\epsilon\|\nabla \cdot \omega\|_{\dot{H}^3}^2.$$

应用 Hölder 不等式、(2.10) 和 Poincaré 不等式，可得

$$\begin{aligned}
R_3 &\leq \|\nabla u\|_{L^\infty}\|\nabla\nabla^2\omega\|_{L^2}\|\nabla^2\nabla \cdot \omega\|_{L^2} \\
&\leq \|\nabla u\|_{L^\infty}(\|\nabla^2\nabla \times \omega\|_{L^2}\|\nabla^2\nabla \cdot \omega\|_{L^2} + \|\nabla^2\nabla \cdot \omega\|_{L^2}^2) \\
&\leq C\epsilon^2 e^{-\frac{C_4}{2}t} + C\epsilon\|\nabla \cdot \omega\|_{\dot{H}^3}^2.
\end{aligned}$$

利用 Gagliardo-Nirenberg不等式和杨氏不等式，可得

$$\begin{aligned} R_4 &\le \|\nabla^3 u\|_{L^2}\|\nabla\omega\|_{L^4}\|\nabla^2\nabla\cdot\omega\|_{L^4} \\ &\le \|\nabla^3 u\|_{L^2}\|\nabla\omega\|_{L^2}^{\frac{1}{4}}\|\nabla^2\omega\|_{L^2}^{\frac{3}{4}}\|\nabla^2\nabla\cdot\omega\|_{L^2}^{\frac{1}{4}}\|\nabla^3\nabla\cdot\omega\|_{L^2}^{\frac{3}{4}} \\ &\le C\epsilon^2 e^{-\frac{C_4}{2}t} + C\epsilon\|\nabla\cdot\omega\|_{\dot{H}^3}^2. \end{aligned}$$

代入其　　上述界代入 (2.14)，并选择 ϵ充分小，可得　　t

$$\frac{d}{dt}\|\nabla\cdot\omega\|_{\dot{H}^2}^2 + 8\chi\|\nabla\cdot\omega\|_{\dot{H}^2}^2 + \eta\|\nabla\cdot\omega\|_{\dot{H}^3}^2 \le C\epsilon^2 e^{-\frac{C_4}{2}t}. \tag{2.15}$$

应用Gronwall不等式，我们得到

$$\|\nabla\cdot\omega\|_{\dot{H}^2}^2 \le C\epsilon^2 e^{-C_5 t}. \tag{2.16}$$

那么 (2.13) 和 (2.16) 推出

$$\|(\nabla u, \nabla\omega, \nabla b)(t)\|_{\dot{H}^2}^2 + \|(\nabla\times\omega)(t)\|_{\dot{H}^2}^2 \le C_6\epsilon^2 e^{-C_7 t}.$$

将此估计、(1.4) 和 (2.10) 代入 (2.9)，对所有 $t\in[0,T]$，可得

$$\mathcal{E}(t) \le \epsilon^2 + \frac{2C_1\sqrt{C_6}}{C_7}\epsilon^3 \le 3\epsilon^2,$$

只需取 ϵ 充分小，使得$\frac{2C_1\sqrt{C_6}}{C_7}\epsilon \le 2$即可实现。因此，论证至此完成，定理 1.1 的证明也就完成了。

□

3. Proof of Theorem 1.3

本节致力于证明定理 1.3。作为准备，我们先回顾下面这个关于丢番图条件的引理；如 [8]所示，几乎所有向量 $\alpha\in\mathbb{R}^3$ 都满足该条件。

引理 3.1。 假设 $\alpha\in\mathbb{R}^3$ 满足丢番图条件，即对任意$k\in\mathbb{Z}^3\setminus\{0\}$，存在常数 $c>0$ 和 $r>2$，使得

$$|\alpha\cdot k| \ge \frac{c}{|k|^r}.$$

那么，对于任意 $s\in\mathbb{R}$，都有

$$\|f\|_{H^s(\mathbb{T}^3)} \le C\|\alpha\cdot\nabla f\|_{H^{s+r}(\mathbb{T}^3)}$$

其中 $\int_{\mathbb{T}^3} f dx = 0$。

现在我们准备证明定理 1.3。

定理 *1.3* 的证明。 证明的框架是自举论证。假定初始数据 (u_0,ω_0,B_0) 在如下意义下是小的，即

$$\|(u_0,\omega_0,B_0)\|_{H^N} \le \epsilon$$

对于某个充分小的 $\varepsilon>0$。设 $(u,\ \omega,\ B)$ 为相应的解。我们作如下拟设：对于满足 $T>0$ 的 $t\in[0,T]$，

$$\|(u,\omega,B)(t)\|_{H^N} \le \delta \tag{3.1}$$

其中 $0<\delta<1$ 将在后文确定。因此，我们的主要工作是证明以下改进的不等式对所有 $t\in[0,T]$ 均成立，

$$\|(u,\omega,B)(t)\|_{H^N}\leq\frac{\delta}{2}. \tag{3.2}$$

于是，自举论证表明 $T=\infty$ ，并且（3.2）实际上对任意$t<\infty$都成立。

证明的其余部分旨在证明（3.2）。证明略长。为清晰起见，我们将其分为三个步骤。

步骤 I. 对 $\|$（u，ω，B）$\|_{H^{r+5}}$**的估计**。
对（u，ω，B）与（1.9）取 L^2-内积，得到

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|(u,\omega,B)\|_{L^2}^2+\kappa\|\nabla\cdot\omega\|_{L^2}^2+\eta\|\nabla\omega\|_{L^2}^2\leq 0, \tag{3.3}$$

其中我们用到了以下事实

$$\int B\cdot\nabla B\cdot u+\int B\cdot\nabla u\cdot B=0,\ \int\alpha\cdot\nabla B\cdot u+\int\alpha\cdot\nabla u\cdot B=0,$$
$$4\chi\int\nabla\times u\cdot\omega\leq\chi\|\nabla u\|_{L^2}^2+4\chi\|\omega\|_{L^2}^2.$$

将 ∇^{r+5} 代入 (1.9)，然后分别对所得方程取 $(\nabla^{r+5}u,\nabla^{r+5}\omega,\nabla^{r+5}B)$ 的 L^2-内积，可得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|(u,\omega,B)\|_{\dot{H}^{r+5}}^2+\chi\|\nabla u\|_{\dot{H}^{r+5}}^2+4\chi\|\omega\|_{\dot{H}^{r+5}}^2+\kappa\|\nabla\cdot\omega\|_{\dot{H}^{r+5}}^2+\eta\|\nabla\omega\|_{\dot{H}^{r+5}}^2\\
&\leq 4\chi\int\nabla^{r+5}(\nabla\times u)\cdot\nabla^{r+5}\omega+\int\nabla^{r+5}(B\cdot\nabla B)\cdot\nabla^{r+5}u+\int\nabla^{r+5}(\alpha\cdot\nabla B)\cdot\nabla^{r+5}u\\
&\quad-\int[\nabla^{r+5},u\cdot\nabla]u\cdot\nabla^{r+5}u-\int[\nabla^{r+5},u\cdot\nabla]\omega\cdot\nabla^{r+5}\omega+\int\nabla^{r+5}(B\cdot\nabla u)\cdot\nabla^{r+5}B\\
&\quad+\int\nabla^{r+5}(\alpha\cdot\nabla u)\cdot\nabla^{r+5}B-\int[\nabla^{r+5},u\cdot\nabla]B\cdot\nabla^{r+5}B\\
&:=L_1+L_2+L_3+L_4+L_5+L_6+L_7+L_8.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

应用杨氏不等式，得到

$$L_1\leq\chi\|\nabla u\|_{\dot{H}^{r+5}}^2+4\chi\|\omega\|_{\dot{H}^{r+5}}^2.$$

Usin利用交换子估计和索伯列夫嵌入定理，可得 s

$$\begin{aligned}
L_5&\leq\|[\nabla^{r+5},u\cdot\nabla]\omega\|_{L^2}\|\nabla^{r+5}\omega\|_{L^2}\\
&\leq C(\|\nabla u\|_{L^\infty}\|\omega\|_{\dot{H}^{r+5}}^2+\|\nabla\omega\|_{L^\infty}\|u\|_{\dot{H}^{r+5}}\|\omega\|_{\dot{H}^{r+5}})\\
&\leq C\|(\nabla u,\nabla\omega)\|_{H^2}\|(u,\omega)\|_{\dot{H}^{r+5}}^2.
\end{aligned}$$

同理，我们有

$$L_4\leq C\|\nabla u\|_{H^2}\|u\|_{\dot{H}^{r+5}}^2.$$

$$L_8\leq C\|(\nabla u,\nabla B)\|_{H^2}\|(u,B)\|_{\dot{H}^{r+5}}^2.$$

注意

$$\begin{aligned} L_2 + L_6 &= \int [\nabla^{r+5}, B\cdot\nabla]B\cdot\nabla^{r+5}u + \int [\nabla^{r+5}, B\cdot\nabla]u\cdot\nabla^{r+5}B \\ &\le \|[\nabla^{r+5}, B\cdot\nabla]B\|_{L^2}\|\nabla^{r+5}u\|_{L^2} + \|[\nabla^{r+5}, B\cdot\nabla]u\|_{L^2}\|\nabla^{r+5}B\|_{L^2}, \end{aligned}$$

然后，如同对 L_5 的估计，我们得到

$$L_2 + L_6 \le C\|(\nabla u, \nabla B)\|_{H^2}\|(u,B)\|^2_{\dot{H}^{r+5}}.$$

容易看出

$$L_3 + L_7 = 0.$$

将上述估计代入 (3.4)，得到

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|(u,\omega,B)\|^2_{\dot{H}^{r+5}} + \kappa\|\nabla\cdot\omega\|^2_{\dot{H}^{r+5}} + \eta\|\nabla\omega\|^2_{\dot{H}^{r+5}} \\ &\le C\|(\nabla u, \nabla\omega, \nabla B)\|_{H^2}\|(u,\omega,B)\|^2_{\dot{H}^{r+5}}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

将 (3.3) 和 (3.5) 相加，得到

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\|(u,\omega,B)\|^2_{H^{r+5}} + 2\kappa\|\nabla\cdot\omega\|^2_{H^{r+5}} + 2\eta\|\nabla\omega\|^2_{H^{r+5}} \\ &\le C\|(u,\omega,B)\|_{H^3}\|(u,\omega,B)\|^2_{H^{r+5}}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

第二步。增强耗散 $\|u\|^2_{H^{r+5}} + \|\alpha\cdot\nabla B\|^2_{H^{r+3}}$。Thi
缺乏运动黏度和磁扩散的精确控制，我们无法将 (3.6) 式写成标准的闭合微分不等式。为此，
全矢量 Navier 队友 对 (1.9) 的第二个方程应用 ∇^k 和 $1\le k\le r+4$，将所得结果乘以 $\nabla^k(\nabla\times u)$，并在空间区域上积分，得到

$$\begin{aligned} 2\chi\|\nabla^k(\nabla\times u)\|^2_{L^2} &= \int \nabla^k\omega_t\cdot\nabla^k(\nabla\times u) + \int \nabla^k(u\cdot\nabla\omega)\cdot\nabla^k(\nabla\times u) \\ &\quad + 4\chi\int \nabla^k\omega\cdot\nabla^k(\nabla\times u) - \kappa\int \nabla^k(\nabla\nabla\cdot\omega)\cdot\nabla^k(\nabla\times u) \\ &\quad - \eta\int \nabla^k\Delta\omega\cdot\nabla^k(\nabla\times u) \\ &:= I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5. \end{aligned} \tag{3.7}$$

为估计 I_1，我们利用 u的方程得到

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{d}{dt}\int \nabla^k\omega\cdot\nabla^k(\nabla\times u) - \int \nabla^k\omega\cdot\nabla^k(\nabla\times u_t)\\
&= \frac{d}{dt}\int \nabla^k\omega\cdot\nabla^k(\nabla\times u) - \int \nabla^k\omega\cdot\nabla^k\nabla\times(-\nabla p + 2\chi\nabla\times\omega\\
&\quad + B\cdot\nabla B + \alpha\cdot\nabla B - u\cdot\nabla u + \chi\Delta u)\\
&= \frac{d}{dt}\int \nabla^k\omega\cdot\nabla^k(\nabla\times u) - 2\chi\int \nabla^k\omega\cdot\nabla^k\nabla\times(\nabla\times\omega)\\
&\quad - \int \nabla^k\omega\cdot\nabla^k\nabla\times(B\cdot\nabla B) - \int \nabla^k\omega\cdot\nabla^k\nabla\times(\alpha\cdot\nabla B)\\
&\quad + \int \nabla^k\omega\cdot\nabla^k\nabla\times(u\cdot\nabla u) - \chi\int \nabla^k\omega\cdot\nabla^k\nabla\times(\Delta u)\\
&:= \frac{d}{dt}\int \nabla^k\omega\cdot\nabla^k(\nabla\times u) + I_{11} + I_{12} + I_{13} + I_{14} + I_{15}.
\end{aligned}$$

不难看出

$$I_{11} = -2\chi\|\nabla^k(\nabla\times\omega)\|_{L^2}^2.$$

利用 H¨older 不等式和交换子估计，并结合 (3.1)，可得

$$\begin{aligned}
I_{12} &= -\int \nabla^k(\nabla\times\omega)\cdot\nabla^k(B\cdot\nabla B)\\
&\le \|\nabla^k(\nabla\times\omega)\|_{L^2}\|\nabla^k(B\cdot\nabla B)\|_{L^2}\\
&\le C\|\nabla^k(\nabla\times\omega)\|_{L^2}\|B\|_{L^\infty}\|B\|_{\dot H^{k+1}}\\
&\le \chi\|\nabla^k(\nabla\times\omega)\|_{L^2}^2 + C\delta^2\|B\|_{H^2}^2.
\end{aligned}$$

通过分部积分并利用杨氏不等式，可得

$$\begin{aligned}
I_{13} &= -\int \nabla^{k+2}\omega\cdot\nabla^{k-2}\nabla\times(\alpha\cdot\nabla B)\\
&\le C\|\nabla^{k+2}\omega\|_{L^2}\|\nabla^{k-1}(\alpha\cdot\nabla B)\|_{L^2}\\
&\le C\|\nabla\omega\|_{\dot H^{k+1}}^2 + \frac{2-\chi}{16}\|\alpha\cdot\nabla B\|_{\dot H^{k-1}}^2.
\end{aligned}$$

类似地，我们有

$$\begin{aligned}
I_{14} &\le \|\nabla^{k+1}\omega\|_{L^2}\|\nabla^k\nabla\times(u\otimes u)\|_{L^2}\\
&\le \frac{\chi}{16}\|\nabla^k(\nabla\times u)\|_{L^2}^2 + C\delta^2\|\omega\|_{\dot H^{k+1}}^2.\\
I_{15} &\le \frac{\chi}{16}\|\nabla^k(\nabla\times u)\|_{L^2}^2 + C\|\nabla\omega\|_{\dot H^{k+1}}^2.
\end{aligned}$$

将 I_{11}-I_{15} 的界代入 I_1，并结合庞加莱不等式，可得

$$\begin{aligned}
I_1 \le \frac{d}{dt}\int \nabla^k\omega\cdot\nabla^k(\nabla\times u) - \chi\|\nabla^k(\nabla\times\omega)\|_{L^2}^2\\
+ C\delta^2\|B\|_{H^2}^2 + C\|\nabla\omega\|_{\dot H^{k+1}}^2 + \frac{2-\chi}{16}\|\alpha\cdot\nabla B\|_{\dot H^{k-1}}^2 + \frac{\chi}{8}\|\nabla^k(\nabla\times u)\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

应用交换子估计和杨氏不等式，并结合（3.1），可得

$$\begin{aligned} I_2 &\le C\|\nabla^k(u\cdot\nabla\omega)\|_{L^2}\|\nabla^k(\nabla\times u)\|_{L^2}\\ &\le C(\|u\|_{L^\infty}\|\omega\|_{\dot H^{k+1}}+\|\omega\|_{L^\infty}\|u\|_{\dot H^{k+1}})\|\nabla^k(\nabla\times u)\|_{L^2}\\ &\le \frac{\chi}{16}\|\nabla^k(\nabla\times u)\|_{L^2}^2+C\delta^2\|\omega\|_{\dot H^{k+1}}^2+C\delta\|\nabla^k(\nabla\times u)\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

由杨氏不等式可得

$$I_3\le\frac{\chi}{16}\|\nabla^k(\nabla\times u)\|_{L^2}^2+C\|\omega\|_{\dot H^k}^2.$$

$$I_4+I_5\le\frac{\chi}{16}\|\nabla^k(\nabla\times u)\|_{L^2}^2+C\|\nabla\omega\|_{\dot H^{k+1}}^2.$$

将上述界代入 (3.7)，利用 Poincar´e 不等式并选取充分小的 δ，我们得到

$$\begin{aligned} &\frac{3}{2}\chi\|\nabla^k(\nabla\times u)\|_{L^2}^2+\chi\|\nabla^k(\nabla\times\omega)\|_{L^2}^2-\frac{d}{dt}\int\nabla^k\omega\cdot\nabla^k(\nabla\times u)\\ &\le C\delta^2\|B\|_{H^2}^2+C\|\nabla\omega\|_{\dot H^{k+1}}^2+\frac{2-\chi}{16}\|\alpha\cdot\nabla B\|_{\dot H^{k-1}}^2. \end{aligned}\tag{3.8}$$

与 (3.8) 的估计类似，我们推导出

$$\begin{aligned} &\frac{3}{2}\chi\|\nabla\times u\|_{L^2}^2+\chi\|\nabla\times\omega\|_{L^2}^2-\frac{d}{dt}\int\omega\cdot(\nabla\times u)\\ &\le C\delta^2\|B\|_{H^2}^2+C\|\nabla\omega\|_{\dot H^1}^2+\frac{2-\chi}{16}\|\alpha\cdot\nabla B\|_{L^2}^2. \end{aligned}\tag{3.9}$$

将 (3.8) 与 (3.9) 结合起来，并利用引理 3.1，我们得到

$$\begin{aligned} &\frac{3}{2}\chi\|\nabla\times u\|_{H^{r+4}}^2+\chi\|\nabla\times\omega\|_{H^{r+4}}^2-\frac{d}{dt}\sum_{k=0}^{r+4}\int\nabla^k\omega\cdot\nabla^k(\nabla\times u)\\ &\le\Big(C\delta^2+\frac{2-\chi}{16}\Big)\|\alpha\cdot\nabla B\|_{H^{r+3}}^2+C\|\nabla\omega\|_{H^{r+5}}^2. \end{aligned}\tag{3.10}$$

随后，为了完成估计，我们将 ∇^k 与 $1\le k\le r+3$ 代入 (1.9) 的第一个方程，用 $\nabla^k(\alpha\cdot\nabla B)$ 乘所得结果，并在 $\mathbb{T}^3$ 上对结果积分，得到

$$\begin{aligned} \|\nabla^k(\alpha\cdot\nabla B)\|_{L^2}^2 &= \int\nabla^k u_t\cdot\nabla^k(\alpha\cdot\nabla B)+\int\nabla^k(u\cdot\nabla u)\cdot\nabla^k(\alpha\cdot\nabla B)\\ &\quad-\chi\int\nabla^k(\Delta u)\cdot\nabla^k(\alpha\cdot\nabla B)-2\chi\int\nabla^k(\nabla\times\omega)\cdot\nabla^k(\alpha\cdot\nabla B)\\ &\quad-\int\nabla^k(B\cdot\nabla B)\cdot\nabla^k(\alpha\cdot\nabla B)\\ &:= M_1+M_2+M_3+M_4+M_5. \end{aligned}\tag{3.11}$$

与对 I_1 的估计相同，我们利用 (1.9) 中关于 B 的方程的特殊结构，并作代换 $\partial_t B = B\cdot\nabla u + \alpha\cdot\nabla u - u\cdot\nabla B$。于是， M_1 可以写为

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{d}{dt}\int \nabla^k u\cdot\nabla^k(\alpha\cdot\nabla B) - \int \nabla^k u\cdot\nabla^k(\alpha\cdot\nabla B_t) \\ &= \frac{d}{dt}\int \nabla^k u\cdot\nabla^k(\alpha\cdot\nabla B) + \int \nabla^k u\cdot\nabla^k(\alpha\cdot\nabla(B\cdot\nabla u)) \\ &\quad + \int \nabla^k u\cdot\nabla^k(\alpha\cdot\nabla(\alpha\cdot\nabla u)) - \int \nabla^k u\cdot\nabla^k(\alpha\cdot\nabla(u\cdot\nabla B)) \\ &:= \frac{d}{dt}\int \nabla^k u\cdot\nabla^k(\alpha\cdot\nabla B) + M_{11} + M_{12} + M_{13}. \end{aligned}$$

通过分部积分，利用交换子估计、(3.1) 和 Poincar´e 不等式，可得

$$\begin{aligned} M_{11} &\le \|\nabla^{k+2}u\|_{L^2}\|\nabla^{k-2}(\alpha\cdot\nabla(B\cdot\nabla u))\|_{L^2} \\ &\le C\|\nabla^{k+2}u\|_{L^2}(\|\nabla^{k-1}B\|_{L^\infty}\|\nabla u\|_{L^2} + \|B\|_{L^\infty}\|\nabla^k u\|_{L^2}) \\ &\le C\delta\|\nabla u\|^2_{\dot H^{k+1}}. \end{aligned}$$

同理，我们有

$$M_{13} \le C\delta\|\nabla u\|^2_{\dot H^{k+1}}.$$

应用 $\nabla\cdot u = 0$ 可得

$$M_{12} \le |\alpha|^2\|\nabla u\|^2_{\dot H^k}.$$

因此我们得到

$$M_1 \le \frac{d}{dt}\int \nabla^k u\cdot\nabla^k(\alpha\cdot\nabla B) + C\delta\|\nabla u\|^2_{\dot H^{k+1}} + |\alpha|^2\|\nabla u\|^2_{\dot H^k}.$$

与 I_2 的估计类似,

$$\begin{aligned} M_2 &\le C\|\nabla^k(u\cdot\nabla u)\|_{L^2}\|\nabla^k(\alpha\cdot\nabla B)\|_{L^2} \\ &\le C\|u\|_{L^\infty}\|u\|_{\dot H^{k+1}}\|\nabla^k(\alpha\cdot\nabla B)\|_{L^2} \\ &\le \frac{2-\chi}{16}\|\nabla^k(\alpha\cdot\nabla B)\|^2_{L^2} + C\delta^2\|\nabla u\|^2_{\dot H^{k+1}}. \end{aligned}$$

同理，我们有

$$M_5 \le \frac{2-\chi}{16}\|\nabla^k(\alpha\cdot\nabla B)\|^2_{L^2} + C\delta^2\|B\|^2_{H^2}.$$

由杨氏不等式,

$$M_3 \le \frac{\chi}{2}\|\nabla u\|^2_{\dot H^{k+1}} + \frac{\chi}{2}\|\nabla^k(\alpha\cdot\nabla B)\|^2_{L^2}.$$

$$M_4 \le \frac{2-\chi}{16}\|\nabla^k(\alpha\cdot\nabla B)\|^2_{L^2} + C\|\nabla\omega\|^2_{\dot H^k}.$$

将上述界代入 (3.11)，可得

$$\begin{aligned} &\frac{2-\chi}{4}\|\nabla^k(\alpha\cdot\nabla B)\|^2_{L^2} - \frac{d}{dt}\int \nabla^k u\cdot\nabla^k(\alpha\cdot\nabla B) \\ &\le (\frac{\chi}{2} + C\delta^2)\|\nabla u\|^2_{\dot H^{k+1}} + |\alpha|^2\|\nabla u\|^2_{\dot H^k} + C\|\nabla\omega\|^2_{\dot H^k} + C\delta^2\|B\|^2_{H^2}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

与 (3.12) 的估计类似,

$$\begin{aligned}&\frac{2-\chi}{4}\|\alpha\cdot\nabla B\|_{L^2}^2-\frac{d}{dt}\int u\cdot(\alpha\cdot\nabla B)\\&\leq C\delta\|\nabla u\|_{\dot{H}^1}^2+|\alpha|^2\|\nabla u\|_{L^2}^2+C\|\nabla\omega\|_{L^2}^2+C\delta^2\|B\|_{H^2}^2.\end{aligned}\tag{3.13}$$

将 (3.12) 和 (3.13) 相加，并结合引理 3.1，可得

$$\begin{aligned}&\frac{2-\chi}{4}\|\alpha\cdot\nabla B\|_{H^{r+3}}^2-\frac{d}{dt}\sum_{k=0}^{r+3}\int\nabla^k u\cdot\nabla^k(\alpha\cdot\nabla B)\\&\leq(\frac{\chi}{2}+C\delta^2)\|\nabla u\|_{H^{r+4}}^2+|\alpha|^2\|\nabla u\|_{H^{r+3}}^2+C\|\nabla\omega\|_{H^{r+3}}^2+C\delta^2\|B\|_{H^2}^2\\&\leq(\frac{\chi}{2}+C\delta^2+|\alpha|^2)\|\nabla u\|_{H^{r+4}}^2+C\|\nabla\omega\|_{H^{r+5}}^2+C\delta^2\|\alpha\cdot\nabla B\|_{H^{r+3}}^2.\end{aligned}\tag{3.14}$$

通过选取足够小的 δ，并注意到 $|\alpha|^2<\chi<2$，则由 (3.10) 和 (3.14) 可知，存在 $C_0>0$ 使得

$$\begin{aligned}&C_0(\|u\|_{H^{r+5}}^2+\|\alpha\cdot\nabla B\|_{H^{r+3}}^2)-\frac{d}{dt}\sum_{k=0}^{r+4}\int\nabla^k\omega\cdot\nabla^k(\nabla\times u)\\&\quad-\frac{d}{dt}\sum_{k=0}^{r+3}\int\nabla^k u\cdot\nabla^k(\alpha\cdot\nabla B)\\&\leq C_1\|\nabla\omega\|_{H^{r+5}}^2.\end{aligned}\tag{3.15}$$

第三步。完成自举论证。

首先，由 (3.6)、(3.15) 和 (3.1) 可得

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\Big(\gamma\|(u,\omega,B)\|_{H^{r+5}}^2-\sum_{k=0}^{r+4}\int\nabla^k\omega\cdot\nabla^k(\nabla\times u)-\sum_{k=0}^{r+3}\int\nabla^k u\cdot\nabla^k(\alpha\cdot\nabla B)\Big)\\&\quad+(2\eta\gamma-C_1)\|\nabla\omega\|_{H^{r+5}}^2+C_0(\|u\|_{H^{r+5}}^2+\|\alpha\cdot\nabla B\|_{H^{r+3}}^2)\\&\leq C\gamma\|(u,\omega,B)\|_{H^3}\|(u,\omega,B)\|_{H^{r+5}}^2\\&\leq C\gamma\delta\|(u,\omega)\|_{H^{r+5}}^2+C\gamma\|(u,\omega,B)\|_{H^3}\|B\|_{H^{r+5}}^2,\end{aligned}\tag{3.16}$$

其中 $\gamma>1$ 将在后文确定。

利用 Poincar´e 不等式和引理 3.1,

$$\|u\|_{H^3}\leq C\|u\|_{H^{r+5}},\ \|\omega\|_{H^3}\leq C\|\nabla\omega\|_{H^{r+5}},\ \|B\|_{H^3}\leq C\|\alpha\cdot\nabla B\|_{H^{r+3}}.$$

应用 Gagliardo-Nirenberg不等式，并结合引理 3.1 和 (3.1)，我们得到

$$\|B\|_{H^{r+5}}\leq C\|B\|_{H^3}^{\frac{1}{2}}\|B\|_{H^N}^{\frac{1}{2}}\leq C\delta^{\frac{1}{2}}\|\alpha\cdot\nabla B\|_{H^{r+3}}^{\frac{1}{2}}$$

只要 $N\geq 2r+7$。

因此,

$$\|(u,\omega,B)\|_{H^3}\|B\|_{H^{r+5}}^2\leq C\delta(\|u\|_{H^{r+5}}^2+\|\alpha\cdot\nabla B\|_{H^{r+3}}^2+\|\nabla\omega\|_{H^{r+5}}^2).$$

接着，在 (3.16) 中分别取 $\gamma >$最大值 $\left\{1, \frac{C_1}{\eta}\right\}$ 和 $\delta <$最小值 $\left\{\frac{\eta}{C\gamma}, \frac{C_0}{2C\gamma}\right\}$，
可得

$$\frac{d}{dt}E(t) + D(t) \leq 0, \tag{3.17}$$

其中

$$E(t) = \gamma\|(u,\omega,B)(t)\|^2_{H^{r+5}} - \sum_{k=0}^{r+4}\int \nabla^k\omega\cdot\nabla^k(\nabla\times u) - \sum_{k=0}^{r+3}\int \nabla^k u\cdot\nabla^k(\alpha\cdot\nabla B),$$

$$D(t) = (\gamma-1)\eta\|\nabla\omega(t)\|^2_{H^{r+5}} + \frac{C_0}{2}(\|u(t)\|^2_{H^{r+5}} + \|(\alpha\cdot\nabla B)(t)\|^2_{H^{r+3}}).$$

显然，我们可以取 $\gamma > 1$ 使得

$$E(t) \geq \|(u,\omega,B)(t)\|^2_{H^{r+5}}.$$

此外，若取 $N \geq 4r+11$，则由Gagliardo-Nirenberg不等式与引理 3.1可得

$$\|B\|_{H^{r+5}} \leq C\|B\|^{\frac{3}{4}}_{H^3}\|B\|^{\frac{1}{4}}_{H^N} \leq C\|\alpha\cdot\nabla B\|^{\frac{3}{4}}_{H^{r+3}}\|B\|^{\frac{1}{4}}_{H^N}$$

这与(3.1)及Poincar´e不等式一起给出

$$E(t) \leq C\delta^{\frac{1}{2}}D(t)^{\frac{3}{4}}.$$

由此及(3.17)可得

$$\frac{d}{dt}E(t) + C_2E(t)^{\frac{4}{3}} \leq 0.$$

这立即得到

$$E(t) \leq C(1+t)^{-3}. \tag{3.18}$$

与估计式 (3.6) 一样，我们有

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\|(u,\omega,B)\|^2_{H^N} + 2\eta\|\nabla\omega\|^2_{H^N}\\ &\leq C\|(u,\omega,B)\|_{H^3}\|(u,\omega,B)\|^2_{H^N}.\end{aligned}$$

利用 Gronwall不等式和 (3.18)，我们推得

$$\begin{aligned}\|(u,\omega,B)(t)\|^2_{H^N} &\leq \|(u_0,\omega_0,B_0)\|^2_{H^N}e^{C\int_0^t\|(u,\omega,B)(\tau)\|_{H^3}d\tau}\\ &\leq C\epsilon^2e^{C\int_0^t(1+\tau)^{-\frac{3}{2}}d\tau}\\ &\leq C\epsilon^2.\end{aligned}$$

取 ϵ 足够小，使得 $C\epsilon^2 < \frac{\delta}{2}$，则上述不等式对所有 $t\in[0,T]$ 都蕴含 (3.2)。随后，自举论证表明 $T=\infty$，且 (3.2) 对所有 $t<\infty$ 都成立。因此，定理 1.3 的证明完成。

□

Acknowledgements

本工作得到国家自然科学基金委员会（编号 12371232）的资助。

References

[1] H. Abidi, P. Zhang, 关于初始数据接近平衡态的三维磁流体力学系统的整体解, 《纯粹与应用数学通讯》 70 (2017年), 1509-1561.[2] G. Ahmadi, M. Shahinpoor, 磁性微极流体运动的普适稳定性, 《国际工程科学杂志》 12 (1974年), 657-663.[3] C. Bardos, C. Sulem, P.-L. Sulem, 强磁场存在下导电流体的长期动力学, 《美国数学会汇刊》 305 (1988年), 175-191.[4] P. Braz e Silva, F.W. Cruz, L.B.S. Freitas, P.R. Zingano, 关于三维非对称流体方程弱解的 L^2 衰减, 《微分方程杂志》 267 (2019年), 3578-3609.[5] Y. Cai, Z. Lei, 不可压缩磁流体力学的整体适定性, 《合理力学与分析档案》 3 (2018年), 969-993.[6] C. Cao, J. Wu, 具有混合偏耗散与磁扩散的二维磁流体力学方程的整体正则性, 《数学进展》 226 (2011 年), 1803-1822.[7] Q. Chen, C. Miao, 临界 Besov 空间中微极流体系统的整体适定性, 《微分方程杂志》 252 (2012年), 2698-2724.[8] W. Chen, Z. Zhang, 和 J. Zhou, 周期区域中具有部分扩散的三维磁流体力学方程的整体适定性, 《中国科学：数学》 65 (2022年), 309-318.[9] B. Dong, J. Li, J. Wu, 二维微极方程的整体适定性与长时间衰减, 《微分方程杂志》 262 (2017年), 3488-3523.[10] B. Dong, Z. Zhang, 角黏性为零的二维微极流体流动的整体正则性, 《微分方程杂志》 249 (2010 年), 200-213.[11] A. Eringen, 微极流体理论 , 《数学与力学杂志》 16 (1966 年), 1-18.[12] C. Ferrari, R. Gilbert, 关于结构化流体的润滑, 《应用分析》 15 (1983年), 127-146.[13] R.H. Guterres, W.G. Melo, C.J. Niche, C.F. Perusato, P.R. Zingano, 三维微极流动中微旋转与涡量的强对齐, 《非线性》 38 (2025年), No. 015006.[14] L. He, L. Xu, P. Yu, 关于三维磁流体力学的整体动力学：Alfv´en 波的非线性稳定性, 《偏微分方程年刊》 4 (2018年), No. 5.[15] C.E. Kenig, G. Ponce, L. Vega, 科尔特韦格–德弗里斯方程初值问题的适定性, 《美国数学会杂志》 4 (1991年), 323-347.[16] Z. Lei, Y. Zhou, 零黏度磁流体力学的 BKM 判据与整体弱解, 《离散与连续动力系统》 25 (2009年), 575-583.[17] F. Lin, L. Xu, P. Zhang, 二维不可压缩磁流体力学系统的整体小解, 《微分方程杂志》 259 (2015年), 5440-5485.[18] F. Lin, P. Zhang, 磁流体力学型系统的整体小解：三维情形, 《纯粹与应用数学通讯》 67 (2014年), 531-580.[19] G. ˙Lukaszewicz, 微极性流体。理论与应用。科学、工程与技术中的建模与仿真。Birkh¨auser 波士顿公司，波士顿，马萨诸塞州，1999年。[20] M. Li, H. Shang, 三维磁性微极方程解的大时间衰减, 《非线性分析：真实世界应用》 44 (2018年), 479-496.[21] D. Niu, H. Shang, d 维磁性微极方程衰减的上下界, 《数学物理杂志》 65 (2024年), No. 121501.[22] R. Pan, Y. Zhou, Y. Zhu, 周期盒上无磁扩散的三维黏性磁流体力学系统的整体经典解, 《合理力学与分析档案》 227 (2018年), 637-662.[23] X. Ren, J. Wu, Z. Xiang, Z. Zhang, 无磁扩散的二维磁流体力学方程光滑解的整体存在性与衰减, 《泛函分析杂志》 267 (2014年), 503-541.[24] M. Rojas-Medar, J. Boldrini, 磁性微极流体运动：弱解的存在性, 《康普顿斯数学评论》 11 (1998年), 443-460.[25] V. Sastry, T. Das, 微极性流体中库埃特流与迪恩流的稳定性, 《国际工程科学杂志》 23 (1985年), 1163-1177.[26] H. Shang, C. Liu, 三维各向异性微极方程的整体适定性与大时间行为, 《微分方程杂志》 421 (2025年), 531-557.[27] H. Shang, W. Song, 零运动黏度微极方程的稳定性与指数衰减, 《应用数学快报》 177 (2026年), No. 109902.

[28] H. Shang, J. Wu, 二维分数阶磁性微极性方程的整体正则性, 《数学杂志》297 (2021), 775-802. [29] H. Shang, J. Zhao, 仅含微旋转速度耗散与磁扩散的二维磁性微极性方程的整体正则性, 《非线性分析》150 (2017年), 194-209.[30] Z. Tan, W. Wu, J. Zhou, 磁性微极性流体方程解的整体存在性与衰减估计, 《微分方程杂志》266 (2019年), 4137-4169.[31] D. Wei, Z. Zhang, 均匀磁场中磁流体力学方程的整体适定性, 《偏微分方程分析》10 (2017年), 1361-1406.[32] D. Wei, Z. Zhang, 带磁扩散的二维磁流体力学方程的整体适定性, 《数学研究通讯》36 (2020), 377-389.[33] W. Wu, Y. Zhang, 带/不带磁扩散与自旋黏性的不可压磁性微极性流体解的非一致衰减, 《数学物理杂志》64 (2023), No. 111502.[34] Y. Xie, Q. Jiu, J. Liu, 无黏性或磁扩散的不可压磁流体力学方程的尖锐衰减估计与渐近稳定性, 《变分法与偏微分方程》63 (2024年), No. 191.[35] L. Xue, 二维微极性流体方程的适定性与微旋转黏性趋零极限, 《数学方法与应用科学》34 (2011年), 1760-1777.[36] K. Yamazaki, 角黏性为零的二维磁性微极性流体系统的整体正则性, 《离散与连续动力系统》35 (2015年), 2193-2207.[37] W. Ye, Z. Yin, 临界 Besov 空间中带磁扩散的无黏性磁流体力学方程的整体适定性, 《数学学报（英文版）》38 (2022年), 1493-1511.[38] B. Yuan, Y. Qiao, 带部分耗散与分数阶耗散的二维磁性微极性方程的整体正则性, 《计算与应用数学》76 (2018年), 2345-2359.[39] X. Zhai, 仅含磁扩散的二维不可压磁流体力学方程的稳定性, 《微分方程杂志》374 (2023), 267-278.[40] T. Zhang, 具有大背景磁场的二维有黏无电阻磁流体力学系统的整体解, 《微分方程杂志》260 (2016), 5450-5480.[41] Y. Zheng, Y. Zhu, 仅含垂直磁扩散的二维无黏性磁流体力学方程在 $\mathbb{T}^2$ 上的稳定性, 《数学物理杂志》64 (2023), No. 111508.[42] Y. Zhou, Y. Zhu, 周期区域上仅含磁扩散的二维磁流体力学系统的整体经典解, 《数学物理杂志》59 (2018年), No. 81505.

School of Mathematics and Statistics、 Northeastern University at Qinhuangdao、Qinhuangdao，066004， China电子邮箱地址：hfshang@163.com