类型 A、 B和 D的受限欧拉多项式与半欧拉多项式之间的组合关系

Zhong-Xue Zhang

海军工程大学基础部数学教研室，中国湖北武汉430030

电子邮箱： zhzhx@mail.nankai.edu.cn

arXiv:2603.02875v1 [math.CO] 3 Mar 2026

摘要。 本文从组合观点研究了几类欧拉多项式之间的关系。我们建立了类型 A 和 B的受限欧拉多项式之间的一个恒等式。作为应用，我们给出一个涉及类型 A 和类型 B的欧拉多项式的新恒等式的双射证明，解决了Zhang最近提出的一个公开问题。此外，我们推导出类型 B 和类型 D的半欧拉多项式之间的一个恒等式。利用这一恒等式，我们进一步得到另一个关于类型 A 和类型 B的欧拉多项式的关系，以及一个联系类型 D 的受限欧拉多项式与类型 A 和 B的欧拉多项式的递推公式。

美国数学会数学主题分类 *2020*：05A05,05A19
关键词：欧拉多项式、受限欧拉多项式、半欧拉多项式、递推关系、双射证明。

1 引言

欧拉多项式是代数组合学和几何中的基本对象，文献中对其进行了大量推广和变体研究（参见 [2, 8, 18, 22,26] 及其中的参考文献）。本文聚焦于其中两种变体：受限欧拉多项式（以排列以一个固定元素结尾为条件）和半欧拉多项式（以排列以正元素或负元素结尾为条件）。尽管类型 A 和 B 的欧拉多项式之间存在已知恒等式，但受限欧拉多项式与半欧拉多项式之间的组合关系尚未得到系统确立。本文通过推导这些多项式之间的显式组合关系来填补这一空白。

设 $\mathfrak{S}_X$ 表示全序 n元集合 X的排列集合。对于排列 $\pi = \pi_1\pi_2\cdots\pi_n \in \mathfrak{S}_X$，我们定义下降集下降集$(\pi) = \{\, i \in [n-1] \mid \pi_i >$

$\pi_{i+1}\}$ 并记$\mathrm{des}(\pi) = |$下降集$(\pi)|$。设 $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$。若 $X = [n]$，则我们将 $\mathfrak{S}_n$记为 $\mathfrak{S}_{[n]}$。A 型欧拉多项式为

$$A_n(t) = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} t^{\mathrm{des}(\pi)}.$$

给定一个全序有限集 Y，可以定义 Y 的约化，记作 red(Y)，即将 Y 的第 i 小元素替换为 i 后所得的集合。同样地，可以定义任意排列 $\pi \in \mathfrak{S}_Y$ 的约化，记作 red(π)。显然，我们有 Des(π) =Des(red(π))。众所周知，$A_n(t)$ 是实根的，这一结论最初由 Frobenius [10] 证明。此外，$A_{n-1}(t)$ 与 $A_n(t)$ 交错；见 [4, 14, 15]。这些多项式自然地出现在几何学中：它们的系数构成了 A 型 Coxeter复形的 h-向量；更多细节见 [15] 。这一几何视角自然地延伸到其他有限Coxeter群。特别地，B 型欧拉多项式对应于 B [15] 型 Coxeter复形的 h-向量。

给定一个由 X 个正整数组成的有限集，令 $\mathfrak{B}_X$ 表示 X 的所有带符号排列的集合，令 $\mathfrak{C}_X$ 表示 X 的所有带符号集合的集合。超八面体群 $\mathfrak{B}_{[n]}$，记作 $\mathfrak{B}_n$，由 $[n]$ 的所有带符号排列 $\pi = \pi_1\pi_2\cdots\pi_n$ 组成，并采用窗口 $^-$ 记号。为方便起见，我们有时使用 i 表示 $-i$。对于 $\pi \in \mathfrak{B}_n$，令 $\pi_0 := 0$。B 型下降集为 $\mathrm{Des}_B(\pi)$ $= \{\, i \in \{0, 1, \ldots, n-1\} \mid \pi_i > \pi_{i+1} \,\}$，并令 $\mathrm{des}_B(\pi) = |\mathrm{Des}_B(\pi)|$。相应的 B 型欧拉多项式为

$$B_n(t) = \sum_{\pi \in \mathfrak{B}_n} t^{\mathrm{des}_B(\pi)},$$

它是实根的 [2], ，并且 $B_{n-1}(t)$交错 $B_n(t)$；参见 [4, 11]。对于具有互不相同的绝对值的整数集合 Y，我们将 Y的约化（记为red(Y)）定义为由 Y 把绝对值第 i小的元素按其符号替换为 i 或$-i$ 后得到的集合。同样，我们可以定义排列$\pi \in \mathfrak{S}_Y$的约化，并将其记为red(π)。例如，若 $Y = \{\bar{2}, 4, \bar{5}, 9\}$ 且 π =(4, $\bar{5}$, $\bar{2}$, 9)，则red(Y) $= \{\bar{1}, 2, \bar{3}, 4\}$ 且 red(π) =$(2, \bar{3}, \bar{1}, 4)$。对于 Y的任意排列 π，令下降集$_B(\pi)$ = 下降集$_B$(red(π))，且下降数$_B(\pi)$ = 下降数$_B$(red(π))。$A_n(t)$与 $B_n(t)$之间的一个重要恒等式可在 [15] 中找到如下：

$$2B_n(t^2) = (1+t)^{n+1}A_n(t) + (1-t)^{n+1}A_n(-t). \tag{1.1}$$

Santocanale 为此恒等式提供了双射证明 [19]。

令 $\mathfrak{D}_n \subset \mathfrak{B}_n$ 表示由含偶数个负项的带符号排列组成的子群。对于 $\pi \in \mathfrak{D}_n$，类型 D 的下降集为

$$\mathrm{Des}_D(\pi) = \{0 \mid \pi_1 + \pi_2 < 0\} \cup \{\, i \in \{1, 2, \ldots, n-1\} \mid \pi_i > \pi_{i+1} \,\},$$

其中 $\mathrm{des}_D(\pi) = |\mathrm{Des}_D(\pi)|$。类型 D 的欧拉多项式为

$$D_n(t) = \sum_{\pi \in \mathfrak{D}_n} t^{\mathrm{des}_D(\pi)}.$$

关于 $D_n(t)$的实根性由 Brenti 提出猜想 [2]，并由 Savage 和 Visontai 首次证明 [20]。类似地，从几何角度看，欧拉多项式$D_n(t)$对应于 h型 Coxeter 复形的 -向量 D；参见 [15]。型 D 欧拉多项式可以通过型 A 和型 B [21]欧拉多项式作基本分解：

$$D_n(t) = B_n(t) - n2^{n-1} t A_{n-1}(t). \tag{1.2}$$

Santocanale [19] 也给出了这个恒等式的双射证明。

最近，Zhang [25] 给出了型 A 欧拉多项式与型 B欧拉多项式之间的一个新关系。

定理1.1 ([25,定理2.7])。对于正整数 n，有

$$B_n(t) = \sum_{m_1+2m_2+\cdots+nm_n=n} \frac{n!(t+1)^{m_1}}{\prod_{j=1}^{n} j^{m_j} \cdot m_j!} \cdot \prod_{i=1}^{n-1} \left(\frac{tA_i(t)2^{i+1}}{i!} \right)^{m_{i+1}}. \tag{1.3}$$

Zhang [25, 问题2.8]提出了定理1.1的双射证明问题。本文通过考察相应受限欧拉多项式之间的关系，回答 Zhang 的问题。

让我们继续回顾类型A、 B和 D的限制欧拉多项式的定义。令$\mathfrak{S}_{n,j}$ 为 $\mathfrak{S}_n$ 中所有以 j结尾的元素构成的子集。类型 A 的限制欧拉多项式为

$$\mathbf{A}_{n,j}(t) = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_{n,j}} \pi^{\mathrm{des}(\pi)}.$$

Dey [6] 证明了 $A_{n,j}(t)$ 是实根的，且 $A_{n-1,j}(t)$ 与 $A_{n,j}(t)$ 交错。Conger[5] 指出，$A_{n,j}(t)$ 与 [17], 中研究的限制欧拉多项式相同，后者是从几何角度定义的。此外，$A_{n,j}(t)$ 也与 s-欧拉多项式 $E_n^{(\mathbf{s})}{}_{,n-j}(t)$（其中 $\mathbf{s} = (1, 2, \ldots, n)$ [20]）的一个细化相同。关于 $A_{n,j}(t)$ 的更多信息，参见 [3, 9, 13, 23]。

类似地，对于超八面体群 $\mathfrak{B}_n$，令 $\mathfrak{B}_{n,\ j} = \{\, \pi_1 \cdots \pi_n \in \mathfrak{B}_n \mid \pi_n = j \,\}$，其中 $j \in \{\pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n\}$。类型 B 的限制欧拉多项式为

$$\mathbf{B}_{n,j}(t) = \sum_{\pi \in \mathfrak{B}_{n,j}} t^{\mathrm{des}_B(\pi)}.$$

Dey、Shankar 和 Sivasubramanian [7] 得到了$\mathbf{B}_{n,\,j}(t)$ 的递推关系，并证明了其具有实根性。据我们所知，$\mathbf{A}_{n,\,j}(t)$ 与$\mathbf{B}_{n,\,j}(t)$ 之间尚未建立任何关系。本文得到以下结果。

定理 1.2。 对于正整数 n 和 $1 \leq i \leq n$，我们有

$$\mathbf{B}_{n,i}(t) = 2^{n-i} \sum_{j=0}^{i-1} \binom{i-1}{j} \mathbf{A}_{n,i-j}(t). \tag{1.4}$$

对于 $j \in \{\pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n\}$，令 $\mathfrak{D}_{n,\,j} = \{\, \pi_1 \cdots \pi_n \in \mathfrak{D}_n \mid \pi_n = j \,\}$。类型 D 的限制欧拉多项式定义为

$$\mathbf{D}_{n,j}(t) = \sum_{\pi \in \mathfrak{D}_{n,j}} t^{\mathrm{des}_D(\pi)}.$$

我们还考虑类型 B 和类型 D的半欧拉多项式。令 $\mathfrak{B}_n^+ = \{\pi_1 \cdots \pi_n \in \mathfrak{B}_n \mid \pi_n > 0\}$ 和 $\mathfrak{B}_n^- = \{\pi_1 \cdots \pi_n \in \mathfrak{B}_n \mid \pi_n < 0\}$。类型 B 的半欧拉多项式为

$$B_n^+(t) = \sum_{\pi \in \mathfrak{B}_n^+} \pi^{\mathrm{des}_B(\pi)}, \quad B_n^-(t) = \sum_{\pi \in \mathfrak{B}_n^-} \pi^{\mathrm{des}_B(\pi)}.$$

类似地，令 $\mathfrak{D}_n^+ = \{\pi_1 \cdots \pi_n \in \mathfrak{D}_n \mid \pi_n > 0\}$ 和 $\mathfrak{D}_n^- = \{\pi_1 \cdots \pi_n \in \mathfrak{D}_n \mid \pi_n < 0\}$，类型 D 的半欧拉多项式为

$$D_n^+(t) = \sum_{\pi \in \mathfrak{D}_n^+} \pi^{\mathrm{des}_D(\pi)}, \quad D_n^-(t) = \sum_{\pi \in \mathfrak{D}_n^-} \pi^{\mathrm{des}_D(\pi)}.$$

在 [12], Hyatt 建立了类型 B 和类型 D的半欧拉多项式的递推关系，并证明了它们具有实根性。后来， [24]给出了这一性质的另一种证明。Abram 和 Bastidas [1] 证明了 $B_n^+(t)$ 与某些基本平行多面体的 Ehrharth^*-多项式相同。基于这一对应关系，Abram 和 Bastidas 进一步证明了 $B_n^+(t)$ 的实根性。在 [16], Ma、Ma、Yeh 和 Yeh 研究了类型B 的半欧拉多项式与半交错游程多项式之间的联系。在本文中，我们证明以下定理。

定理 1.3. 对于任意正整数 n，有

$$B_n^+(t) = D_n^+(t) + nB_{n-1}^-(t), \qquad B_n^-(t) = D_n^-(t) + ntB_{n-1}^+(t). \tag{1.5}$$

本文组织如下。在第 2 节中，我们给出定理 1.1 的双射证明，以及定理 1.2 的证明。第3 节给出定理 1.3 的证明，并介绍类型 A 与类型 B 欧拉多项式之间的新关系。

定理 1.1 与定理 1.2 的双射证明

本节旨在给出定理 1.1 的双射证明，从而回答 Zhang 的问题 [25, 问题 2。8]。为此，我们首先运用双射原理证明定理1.2 。

我们先给出以下结果的组合证明。

引理 2.1. 固定 $1 \leq i \leq n$，令 X_i 为一个满足以下条件的 n 元集合：

- ***(i)*** $\{1, 2, \ldots, i\} \subseteq X_i \subseteq \{1, 2, \ldots, i, \pm(i+1) \ldots, \pm n\}$;
- ***(ii)*** 对于每个 $r \in \{i+1, i+2, \ldots, n\}$， r 和 $-r$ 中恰有一个属于 X_i。

若我们令

$$\mathfrak{R}_{n,X_i} = \{\pi_1 \cdots \pi_n \in \mathfrak{S}_{X_i} \mid \pi_n = i\}, \tag{2.1}$$

then

$$\sum_{\pi \in \mathfrak{R}_{n,X_i}} t^{\mathrm{des}_B(\pi)} = \mathbf{A}_{n,i}(t).$$

证明。 为了完成证明，只需构造一个从$\mathfrak{R}_{n,X_i}$到 $\mathfrak{S}_{n,i}$的保下降双射。令 $X_i = \{a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_n\}$，其中 $a_1 = 1, a_2 = 2, \ldots, a_i = i < a_{i+1} < a_{i+2} < \cdots < a_{i+l}$ 且 $a_{i+l+1} < a_{i+l+2} < \cdots < a_n < 0$。定义双射 ϕ： $X_i \to [n]$，令任意 $1 \leq r \leq n$满足 $\phi(a_r) = r$。接着定义 Φ_{X_i} :$\mathfrak{R}_{n,X_i} \to \mathfrak{S}_{n,i}$ 如下：

$$\Phi_{X_i}(\pi_1\pi_2 \cdots \pi_{n-1}\pi_n) = \phi(\pi_1)\phi(\pi_2) \cdots \phi(\pi_n).$$

由此构造不难验证，对于任意 $\pi \in \mathfrak{R}_{n,X_i}$，都有 $\Phi_{X_i}(\pi) \in \mathfrak{S}_{n,i}$ 。显然， Φ_{X_i} 也是双射。还需证明 $\mathrm{des}(\Phi_{X_i}(\pi)) = \mathrm{des}_B(\pi)$。

设 $W = \{a_1, a_2, \ldots, a_{i+l}\}$ 和 $W' = \{a_{i+l+1}, a_{i+l+2}, \ldots, a_n\}$。注意，对于任意 a, $b \in W$，当且仅当 $\phi(a) > \phi(b)$ 时，我们有 $a > b$。对于 W' 中的元素，同样的性质也成立。对于任意 $\pi \in \mathfrak{S}_{X_i}$，我们用 $\mathrm{W}_j(\pi)$（若底层排列明确，则简记为 W_j）表示包含在 W 中的某个极大连续子序列。类似地，我们用 $\mathrm{W}'_j(\pi)$（简记为 W'_j）表示包含在 W' 中的某个极大连续子序列。这样， π 可以表示为字母表 $\{\mathrm{W}_1, \mathrm{W}2, \ldots, \mathrm{W}'_1, \mathrm{W}'_2, \ldots\}$ 中的一个词。用 $\Phi(\mathrm{W}_j)$（分别用 $\Phi(\mathrm{W}'_j)$）表示对应于子序列 W_j （分别为 W'_j）的 $\Phi_{X_i}(\pi)$ 的像。为了比较 $\mathrm{des}(\Phi_{X_i}(\pi))$ 和 $\mathrm{des}_B(\pi)$，我们不得不考察 π 的首个位置，以及 W 中某个元素紧接在 W' 中某个元素之后或反之的那些位置。由于 $\mathfrak{R}_{n,X_i}$ 的每个元素 π 都以 $i \in W$ 结尾，因此需要考虑两种情况：

- 情况 1。 π 以 W 中的一个元素开头，其形式如下

$$\mathbf{W}_1\mathbf{W}'_1\cdots\mathbf{W}_{r-1}\mathbf{W}'_{r-1}\mathbf{W}_r$$

对某个 $r \geq 1$。回想一下，对任意 $w \in W$、 $w' \in W'$，我们有 $w > 0 > w'$和 $0 < \phi(w) < \phi(w')$。因此，

$$\mathrm{des}_B(\pi) = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{des}(\mathbf{W}_i) + \sum_{i=1}^{r-1} \mathrm{des}(\mathbf{W}'_i) + (r-1),$$

其中最后一项 $r-1$ 由那些 $r-1$ 有序对 (W_i, W'_i) $(1 \leq i \leq r-1)$ 贡献，因为 W_i 的最后一个元素总是大于 W'_i的第一个元素。同样显然，

$$\mathrm{des}(\Phi_{X_i}(\pi)) = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{des}(\Phi(\mathbf{W}_i)) + \sum_{i=1}^{r-1} \mathrm{des}(\Phi(\mathbf{W}'_i)) + (r-1),$$

其中最后一项 $r-1$ 由那些 $r-1$ 有序对 $(\Phi(W'_i)\ \Phi(W_{i+1}))$ $(1 \leq i \leq r-1)$ 贡献，因为 $\Phi(W'_i)$ 的最后一个元素总是大于 $\Phi(W_{i+1})$ 的第一个元素。

- 情况 2。 π 以 W' 中的一个元素开头，形如

$$\mathbf{W}'_1\mathbf{W}_1\mathbf{W}'_2\mathbf{W}_2\cdots\mathbf{W}'_r\mathbf{W}_r$$

对某个 $r \geq 1$。由于 π_1 为负，我们有

$$\mathrm{des}_B(\pi) = 1 + \sum_{i=1}^{r} \mathrm{des}(\mathbf{W}_i) + \sum_{i=1}^{r} \mathrm{des}(\mathbf{W}'_i) + r - 1.$$

与情况 1 类似，可以看出

$$\mathrm{des}(\Phi_{X_i}(\pi)) = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{des}(\Phi(\mathbf{W}_i)) + \sum_{i=1}^{r} \mathrm{des}(\Phi(\mathbf{W}'_i)) + r.$$

注意，对每个 $i \geq 1$，$\mathrm{des}(\mathbf{W}_i) = \mathrm{des}(\Phi(\mathbf{W}_i))$，且 $\mathrm{des}(\mathbf{W}'_i) = \mathrm{des}(\Phi(\mathbf{W}'_i))$。这说明，对于这两种情况，$\mathrm{des}(\Phi_{X_i}(\pi)) = \mathrm{des}_B(\pi)$ 均成立。由于 Φ_{X_i} 是双射，我们得到

$$\sum_{\pi \in \mathfrak{R}_{n,X_i}} t^{\mathrm{des}_B(\pi)} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{n,i}} t^{\mathrm{des}(\sigma)} = \mathbf{A}_{n,i}(t).$$

证明至此完成。 □

我们想指出，尽管 i 是固定的，但上述引理中的 X_i 并不唯一。事实上，第二个条件为选择集合 X_i 提供了一定的灵活性。我们提供以下示例来说明这一证明。

例 2.2。 取 $n=8$ 和 $i=3$，考虑 $X_3=\{1,2,3,5,8,\bar{7},\bar{6},\bar{4}\}$。引理 ϕ 中的映射 *2.1* 是

$$\phi(1)=1,\ \phi(2)=2,\ \phi(3)=3,\ \phi(5)=4,\ \phi(8)=5,\ \phi(\bar{7})=6,\ \phi(\bar{6})=7,\ \phi(\bar{4})=8.$$

对于 $\pi=\bar{4}21\bar{7}\bar{6}583\in Y$，我们有 $\Phi_{X_3}(\pi)=82167453$ 以及 下降$_B(\pi)$ = 下降$(\Phi_{X_3}(\pi))=4$。

基于引理2.1，我们可以给出一个更一般的结果。这个推广的证明同样是双射的。

引理2.3。 固定两个整数 i 和 j，其中 $1\le i\le n$ 为任意 $0\le j<i$，令 X_i^j 为 $\{\pm1,\pm2,\ldots,\pm(i-1)\ i,\pm(i+1)\ldots,\pm n\}$ 的一个子集，并满足以下两个条件：

- *(i)* 对于任意 $1\le r\le n$，r 和 $-r$ 中恰有一个属于 X_i^j；
- *(ii)* 集合 $\{\pm1,\pm2,\ldots,\pm(i-1)\}$ 中恰有 j 个负数属于 X_i^j。

若令

$$\mathfrak{T}_{n,X_i^j}=\{\pi_1\cdots\pi_n\in\mathfrak{S}_{X_i^j}\mid\pi_n=i\},\tag{2.2}$$

then

$$\sum_{\pi\in\mathfrak{T}_{n,X_i^j}}t^{\mathrm{des}_B(\pi)}=\mathbf{A}_{n,i-j}(t).$$

证明。令

$$X_i^j=\{\bar{a}_1,\ldots,\bar{a}_j,a_{j+1},\ldots,a_{i-1},a_i,\ldots,a_n\},$$

其中 $-(i-1)\le a_1^-<\cdots<a_j^-<0<a_{j+1}<\cdots<a_{i-1}<a_i=i$ 和 $a_{i+1},\ldots,a_n\in\{\pm(i+1)\ldots,\pm n\}$。取 $X_{i-j}=\{1,\ldots,i-j,-i,-i+1,\ldots,-i+j-1,a_{i+1},\ldots,a_n\}$。我们首先定义一个映射 $\phi:X_i^j\to X_{i-j}$，如下：

$$\phi(x)=\begin{cases}r-i-1, & x=\bar{a}_r,\ 1\le r\le j,\\ r-j, & x=a_r,\ j+1\le r\le i,\\ a_r, & x=a_r,\ i+1\le r\le n.\end{cases}$$

根据这一构造，我们可以看到

$$-i = \phi(\overline{a}_1) < \cdots < \phi(\overline{a}_j) < 0 < \phi(a_{j+1}) < \cdots < \phi(a_{i-1}) < \phi(a_i) = i - j.$$

为完成证明，接下来我们通过令$\Phi(\pi_1 \cdots \pi_n) = \phi(\pi_1) \cdots \phi(\pi_n)$，构造一个从$\mathfrak{T}_{n,X_i^j}$到$\mathfrak{R}_{n,X_{i-j}}$的双射 Φ，其中$\mathfrak{R}_{n,X_{i-j}}$由 (2.1) 定义。例如，若取 $\pi = a_1 \cdots \overline{a}_j a_{j+1} \cdots a_{i-1} a_{i+1} \cdots a_n i$，则 $\Phi(\pi) = (-i) \cdots -(i-j+1)1 \cdots (i-j-1) a_{i+1} \cdots a_n (i-j)$。注意，$\mathrm{des}_B(\pi) = \mathrm{des}_B(\Phi(\pi))$。稍加思考即可发现，$\Phi$ 是一个保下降双射。注意，X_{i-j} 满足引理 2.1 的条件。因此，我们得到

$$\sum_{\pi \in \mathfrak{T}_{n,X_i^j}} t^{\mathrm{des}_B(\pi)} = \sum_{\Phi(\pi) \in \mathfrak{R}_{n,X_{i-j}}} t^{\mathrm{des}_B(\Phi(\pi))} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{R}_{n,X_{i-j}}} t^{\mathrm{des}_B(\sigma)} = \mathbf{A}_{n,i-j}(t), \tag{2.3}$$

如所愿。 □

现在我们继续证明定理 1.2。

定理 *1.2* 的证明。令 $\mathfrak{O}_{n,i,j}$ 表示所有满足引理 2.3 条件的可能的 n元 X_i^j 的集合。根据定义可得

$$\mathbf{B}_{n,i}(t) = \sum_{j=0}^{i-1} \sum_{X_i^j \in \mathfrak{O}_{n,i,j}} \sum_{\pi \in \mathfrak{T}_{n,X_i^j}} t^{\mathrm{des}_B(w)}. \tag{2.4}$$

注意，对于固定的 i 和 j，选择 $2^{n-i}\binom{i-1}{j}$ 有 X_i^j 种方式，因为我们可以自由地选择 k或 $\overline{k}$，对于每个 $k \in \{i+1, \ldots, n\}$，并且还可以自由地从 $\{-1, -2, \ldots, -i+1\}$ 中任取 j 个数。此外，引理 2.3 告诉我们，对于不同的X_i^j，生成多项式

$$\sum_{\pi \in \mathfrak{T}_{n,X_i^j}} t^{\mathrm{des}_B(w)}$$

具有相同的值$\mathbf{A}_{n,i-j}(t)$。因此

$$\mathbf{B}_{n,i}(t) = 2^{n-i} \sum_{j=0}^{i-1} \binom{i-1}{j} \mathbf{A}_{n,i-j}(t), \tag{2.5}$$

这正是所需的结果。证明至此完成。 □

读者或许会注意到，定理 i中出现的指标 1.2 是一个正整数。事实上，利用带符号排列的对称性，我们可以得到以下引理，并为完整起见给出证明。

引理 2.4。 对于任意 $1 \leq i \leq n$，有

$$\mathbf{B}_{n,-i}(t) = t^n \mathbf{B}_{n,i}(t^{-1}).$$

证明。 定义一个映射 $\psi : \mathfrak{B}_{n,i} \to \mathfrak{B}_{n,-i}$，其定义如下:

$$\psi(\pi_1 \pi_2 \cdots \pi_{n-1} \pi_n) = (-\pi_1)(-\pi_2) \cdots (-\pi_{n-1})(-\pi_n).$$

容易验证，$\mathrm{des}_B(\pi) + \mathrm{des}_B(\psi(\pi)) = n$。这意味着

$$\mathbf{B}_{n,-i}(t) = \sum_{\pi \in \mathfrak{B}_{n,-i}} t^{\mathrm{des}_B(\pi)} = \sum_{\pi \in \mathfrak{B}_{n,i}} t^{n - \mathrm{des}_B(\pi)} = t^n \mathbf{B}_{n,i}(t^{-1}).$$

证明完毕。 □

根据引理 2.4 和定理1.2，对于任意负整数 i，我们还可以用精细欧拉多项式 $\mathbf{A}_{n,r}(t)$ 来表示 $\mathbf{B}_{n,i}(t)$。

为此，我们还需要以下引理。

引理 2.5。 对于任意正整数 $k \geq 1$，设 $X = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ 是一个含有 k 个整数的集合，且满足 $|a_1| < |a_2| < \ldots < |a_k|$。若令 $\mathfrak{R}_X$ 为所有以 a_1 结尾的 X 的排列所组成的集合，则

$$\sum_{\pi \in \mathfrak{R}_X} t^{\mathrm{des}_B(\pi)} = \begin{cases} 1, & \text{if } k = 1 \text{ and } a_1 > 0 \\ t, & \text{if } k = 1 \text{ and } a_1 < 0 \\ tA_{k-1}(t), & \text{if } k \geq 2. \end{cases} \tag{2.6}$$

证明。 $k = 1$ 的情形显然。我们可以假设 $k \geq 2$。令$X = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$。我们断言:

$$\sum_{\pi \in \mathfrak{R}_X} t^{\mathrm{des}_B(\pi)} = \sum_{\pi \in \mathfrak{R}_{\bar{X}}} t^{\mathrm{des}_B(\pi)}.$$

为证明这一结论，考虑由$\eta(\pi_1 \cdots \pi_{k-1} a_1) = \pi_1 \cdots \pi_{k-1} a_1$定义的从 $\mathfrak{R}_X$ 到 $\mathfrak{R}_{\bar{X}}$ 的典范双射 η。由于 $k \geq 2$和 $|a_1| < |a_2| < \ldots < |a_k|$，我们有$\pi_{k-1} > a_1$ 当且仅当 $\pi_{k-1} > a_1$。因此，对于任意 $\pi \in \mathfrak{R}_X$，$\mathrm{des}_B(\pi) = \mathrm{des}_B(\eta(\pi))$，故该结论成立。若 $a_1 > 0$，则我们得到 $\{\mathrm{red}(\pi) | \pi \in \mathfrak{R}_X\} = \mathfrak{R}_{\mathrm{red}(X)}$。根据定义，约化集 $\mathrm{red}(X)$ 与某个满足引理 2.1 条件的集合 X_1 一致。在这种情况下，我们有

$$\sum_{\pi \in \mathfrak{R}_X} t^{\mathrm{des}_B(\pi)} = \sum_{\pi \in \mathfrak{R}_{\mathrm{red}(X)}} t^{\mathrm{des}_B(\pi)} = \sum_{\pi \in \mathfrak{R}_{k,X_1}} t^{\mathrm{des}_B(\pi)} = \mathbf{A}_{k,1}(t) = tA_{k-1}(t).$$

□

现在我们可以给出定理 1.1 的双射证明。

定理*1.1*的证明。我们先将（1.3）改写为

$$B_n(t) = \sum_{m_1+2m_2+\cdots+nm_n=n} \frac{n!}{\prod_{j=1}^{n} j!^{m_j} \cdot m_j!} \cdot (t+1)^{m_1} \prod_{i=1}^{n-1} \left(tA_i(t)2^{i+1}\right)^{m_{i+1}}. \tag{2.7}$$

为了给出双射证明，最好为 (2.7) 的右端提供一种组合解释。令 Π_n 为集合 $[n]$的所有划分构成的集合。若集合 $[n]$ 的一个集合划分有 m_i 个大小为 i的块，且对$1 \leq i \leq n$，则称其为类型 $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_n)$。令 $\Pi_n(\mathbf{m})$ 表示集合 $[n]$ 的所有类型为 $\mathbf{m}$ 的划分 $\{T_1, \ldots, T_r\}$ 构成的集合，其中$r = m_1 + \cdots + m_n$。令 $\mathfrak{F}_n$ 表示集合 $[n]$ 的带符号集合划分所构成的集合，其中每个块S_k 都是一个序列，并以绝对值最小的元素结尾。例如，$\{2, \{1, 3\}\}$ 是 Π_3中的一个集合划分，$\{(-2), (-3, 1)\}$ 是$\mathfrak{F}_3$中的一个带符号集合划分，但 $\{(2), (1, -3)\} \notin \mathfrak{F}_3$。

众所周知的等式 $|\Pi_n(\mathbf{m})| = \frac{n!}{\prod_{j=1}^{n} j!^{m_j} \cdot m_j!}$与引理 2.5 表明，对每个块 T（大小为 i）赋以如下权是合理的

$$\mathrm{wt}(T) = \sum_{X \in \mathfrak{C}_T} \sum_{\pi \in \mathfrak{R}_X} t^{\mathrm{des}_B(\pi)}. \tag{2.8}$$

事实上，若 $i = 1$，即 $T = \{a\}$，则 $\mathfrak{C}_T = \{a, -a\}$ 且 $\sum_{X \in \mathfrak{C}_T} \sum_{\pi \in \mathfrak{R}_X} t^{\mathrm{des}_B(\pi)} = (1 + t)$，这由引理 2.5 可得。若 $i \geq 2$，则 $|\mathfrak{C}_T| = 2^i$，并且对每个 $X \in \mathfrak{C}_T$，我们有 $\sum_{\pi \in \mathfrak{R}_X} t^{\mathrm{des}_B(\pi)} = tA_{i-1}(t)$。因此，(2.7) 的右端可解释为

$$\sum_{\{T_1, \ldots, T_r\} \in \Pi_n} \mathrm{wt}(T_1) \cdots \mathrm{wt}(T_r).$$

鉴于权函数 wt 的定义式 (2.8)，上式可进一步写成

$$\sum_{\{S_1, \ldots, S_r\} \in \mathfrak{F}_n} t^{\mathrm{des}_B(S_1)} \cdots t^{\mathrm{des}_B(S_r)}.$$

现在只需给出如下恒等式的双射证明

$$\sum_{\pi \in \mathfrak{B}_n} t^{\mathrm{des}_B(\pi)} = \sum_{\{S_1, \ldots, S_r\} \in \mathfrak{F}_n} t^{\mathrm{des}_B(S_1) + \cdots + \mathrm{des}_B(S_r)}.$$

给定一个带符号排列 $\pi = \pi_1 \pi_2 \cdots \pi_n \in \mathfrak{B}_n$，在 π 中每个从右到左绝对最小值之后插入一个右括号；也就是说，元素 π_i 满足：对于每个$j > i$，都有 $|\pi_i| < |\pi_j|$。然后在适当的位置插入左括号；也就是说，在每个内部右

括号之前以及开头处插入左括号。这样， π 就被分解为一个由非空块组成的有序序列，记作

$$\pi = \pi^{(1)} \mid \pi^{(2)} \mid \cdots \mid \pi^{(r)}. \tag{2.9}$$

根据我们的构造， $\{\pi^{(1)}, \pi^{(2)}, \cdots, \pi^{(r)}\}$ 是 $\mathfrak{F}_n$的一个合法元素。定义映射 ϕ:$\mathfrak{B}_n \to \mathfrak{F}_n$，令 $\phi(\pi) = \{\pi^{(1)}, \pi^{(2)}, \ldots, \pi^{(r)}\}$。注意，对于 $1 \le i \le r-1$，当且仅当后者为负时，$\pi^{(i)}$ 的最后一个元素与 $\pi^{(i+1)}$ 的第一个元素之间才会出现下降。现在只需验证

$$\mathrm{des}_B(\pi) = \mathrm{des}_B(\pi^{(1)}) + \mathrm{des}_B(\pi^{(2)}) + \cdots + \mathrm{des}_B(\pi^{(r)}).$$

例如，对于 $\pi = \bar{3}4\bar{1}59\bar{7}2\bar{8}6 \in \mathfrak{B}_9$，我们有 $\phi(\pi) = \{\bar{3}4\bar{1}, 59\bar{7}2, \bar{8}6\}$。根据定义，可以验证

$$\mathrm{des}_B(\bar{3}4\bar{1}59\bar{7}2\bar{8}6) = 4,\ \mathrm{des}_B(\bar{3}4\bar{1}) = 2,\ \mathrm{des}_B(59\bar{7}2) = 1,\ \mathrm{des}_B(\bar{8}6) = 1.$$

为了证明 ϕ 是双射，我们按如下方式构造映射 $\psi : \mathfrak{F}_n \to \mathfrak{B}_n$ ： 若$\{S_1, \ldots, S_r\} \in \mathfrak{F}_n$，就按最小绝对值递增的顺序排列这些块序列，然后令 $\psi(\{S_1, \ldots, S_r\})$表示这些有序序列的串接。可以验证， $\phi \circ \psi$ 和 $\psi \circ \phi$ 都是恒等映射。至此证明完成。

□

3 定理1.3的证明

本节旨在证明定理 1.3。作为推论，我们导出了类型 A 与类型 B的欧拉多项式之间的新关系。此外，我们还确立了类型 D的限制欧拉多项式之间的相应关系，并提出一个有待未来研究的开放问题。

在 [19], Santocanale 引入了光滑排列的概念：带符号排列 $\pi = \pi_1\pi_2\cdots\pi_n$ 是光滑的，当且仅当 $\pi_1 \cdot \pi_2 > 0$；否则它是不光滑的。Santocanale 证明了，具有 k 类型 B 个下降的光滑有符号置换，与具有 k 类型 D 个下降的偶带符号排列之间存在双射。受这一结果启发，我们得到了如下细化结果。

引理 3.1. 对于任意 $0 \le k \le n$，在 $\mathfrak{B}_n^+$ 中具有 k 型 B个下降的光滑有符号排列，与在 $\mathfrak{D}_n^+$ 中具有 k 型 D 个下降的排列之间存在双射。

证明。设 $X = \{\pi \in \mathfrak{B}_n^+ \mid \mathrm{des}_B(\pi) = k$，且 π 光滑 $\}$，并且 $Y = \{\pi \in \mathfrak{D}_n^+ \mid \mathrm{des}_D(\pi) = k\}$。我们定义映射 $\phi\colon X \to Y$如下。对于任意 $\pi \in X$，若 π 是含有偶数个负项的带符号排列，则定义 $\phi(\pi) = \pi$。显然，$\phi(\pi) \in \mathfrak{D}_n^+$。由于 π 光滑，$\pi_1 + \pi_2 < 0$ 当且仅当 $\pi_1 < 0$；同理，$\pi_1 + \pi_2 > 0$ 当且仅当 $\pi_1 > 0$。因此，$0 \in \mathrm{Des}_B(\pi)$ 当且仅当 $0 \in \mathrm{Des}_D(\pi)$，这意味着 $\mathrm{des}_D(\phi(\pi)) = \mathrm{des}_B(\pi)$。

若 $\pi = \pi_1\pi_2\cdots\pi_n \in X$ 是含有奇数个负项的带符号排列，则定义 $\phi(\pi) = (-\pi_1)\pi_2\cdots\pi_n$。于是 $\phi(\pi) \in \mathfrak{D}_n^+$。为验证 $\mathrm{des}_B(\pi) = \mathrm{des}_D(\phi(\pi))$，我们分析以下几种情况：

- $\pi_1 > \pi_2 > 0$：$0 \notin \mathrm{Des}_B(\pi)$，但 $1 \in \mathrm{Des}_B(\pi)$。此时，我们有 $-\pi_1 < \pi_2$ and $-\pi_1 + \pi_2 < 0$，因此 $0 \in \mathrm{Des}_D(\phi(\pi))$，但 $1 \notin \mathrm{Des}_D(\phi(\pi))$；
- $\pi_2 > \pi_1 > 0$：$\{0,1\} \notin \mathrm{Des}_B(\pi)$。此时，我们有 $-\pi_1 < \pi_2$ and $-\pi_1 + \pi_2 > 0$，因此 $\{0,1\} \notin \mathrm{Des}_D(\phi(\pi))$；
- $\pi_2 < \pi_1 < 0$：$\{0,1\} \in$ 下降集$_B(\pi)$。在此情况下，我们有 $-\pi_1 > \pi_2$ 和 $-\pi_1 + \pi_2 < 0$，因此 $\{0,1\} \in$ 下降集$_D(\phi(\pi))$；
- $\pi_1 < \pi_2 < 0$：$0 \in$ 下降集$_B(\pi)$，但 $1 \notin$ 下降集$_B(\pi)$。在此情况下，我们有 $-\pi_1 > \pi_2$ 和$-\pi_1 + \pi_2 > 0$，因此 $0 \notin$ 下降集$_D(\phi(\pi))$，但 $1 \in$ 下降集$_D(\phi(\pi))$。

在所有情况下，映射 ϕ 都保持下降的数量不变。因此，$\phi(w) \in Y$。为确认 ϕ 是一个双射，我们通过分析 $\pi \in Y$的前两个元素来定义逆映射 $\phi^{-1}\colon Y \to X$。如果 $\pi_1 \cdot \pi_2 > 0$，则设 $\phi^{-1}(\pi) = \pi$。如果 $\pi_1 \cdot \pi_2 < 0$，则设 $\phi^{-1}(\pi) = (-\pi_1)\pi_2\cdots\pi_n$。直接验证可知，$\phi^{-1}$ 确实是 ϕ的逆映射。证明完成。

□

现在我们转而研究非光滑有符号排列。

引理 3.2. 对于任意 $0 \le k \le n$，$\mathfrak{B}_n^+$ 中具有k 型 B 个下降的非光滑有符号排列集合，与有序对集合(u,σ)之间存在双射，其中 $u \in [n]$ 且 $\sigma \in \mathfrak{B}_{n-1}^-$满足下降集$_B(\sigma) = k$。

证明。我们通过以下两个步骤构造从 $\{\pi \in \mathfrak{B}_n^+ \mid$ 下降集$_B(\pi) = k$，π 非光滑$\}$ 到$\{(u,\ \sigma) \in [n] \times \mathfrak{B}_{n-1}^- \mid$下降集$_B(\sigma) = k\}$的映射。令 $\pi = \pi_1\pi_2\cdots\pi_n \in \mathfrak{B}_n^+$。首先，我们定义

$$\phi_1(\pi_1\pi_2\cdots\pi_n) = (|\pi_1|, \widetilde{\pi_2}\cdots\widetilde{\pi_n}),$$

其中 $\widetilde{\pi_2}\cdots\widetilde{\pi_n}$ 是对 $\pi_2\pi_3\cdots\pi_n$ 的约化（参见（1.1）之前的约化定义）。其次，定义一个变换 ϕ_n 作用于字母 x，定义如下：

$$\phi_n(x) = x', \text{where } |x'| = n - |x| \text{ and } x' \cdot x < 0.$$

现在，定义

$$\Phi(\pi_1\pi_2\cdots\pi_n) = (|\pi_1|, \phi_n(\widetilde{\pi_2})\cdots\phi_n(\widetilde{\pi_n})).$$

例如，取 $\pi = 4\bar{5}\bar{3}18\bar{6}72$（这里 $\bar{a} = -a$）。$\pi_2\cdots\pi_8 = \bar{5}\bar{3}18\bar{6}72$ 的标准化结果是 $\widetilde{\pi_2}\cdots\widetilde{\pi_8} = \bar{4}\bar{3}17\bar{5}62$。将 ϕ_8 应用于每个字母，得到 $\phi_8(\widetilde{\pi_2}) = 4$，$\phi_8(\widetilde{\pi_3}) = 5$，$\phi_8(\widetilde{\pi_4}) = \bar{7}$，$\phi_8(\widetilde{\pi_5}) = \bar{1}$，$\phi_8(\widetilde{\pi_6}) = 3$，$\phi_8(\widetilde{\pi_7}) = \bar{2}$ 以及 $\phi_8(\widetilde{\pi_8}) = \bar{6}$。因此，$\Phi(4\bar{5}\bar{3}18\bar{6}72) = (4, 45\bar{7}\bar{1}3\bar{2}\bar{6})$。

根据这一构造，$\Phi(\pi) \in [n]\times\mathfrak{B}_{n-1}^-$。我们还需要检验 $\mathrm{des}_B(\phi_n(\widetilde{\pi_2})\cdots\phi_n(\widetilde{\pi_n})) = k$。注意，约化保持相对顺序：对于 $\pi_2\cdots\pi_n$ 中由符号相同的元素组成的任意极大块 $\pi_r\pi_{r+1}\cdots\pi_{r+\ell}$，该块内的相对顺序在 $\widetilde{\pi_2}\cdots\widetilde{\pi_n}$ 中保持不变，而且在映射 ϕ_n 下也保持不变。因此，下降的变化只能发生在两个符号相反的相邻元素之间。存在两种可能的情况：$\pi_1 < 0, \pi_2 > 0$ 和 $\pi_1 > 0, \pi_2 < 0$。在这两种情况下，采用与引理2.3证明中相同的论证可知，应用 Φ 后，类型 B 的下降数保持不变。因此，$\Phi(\pi) \in \{(u,\sigma) \in [n]\times\mathfrak{B}_{n-1}^- \mid \mathrm{des}_B(\sigma) = k\}$。反过来，按照上述步骤的逆序操作，即可直接定义 Φ 的逆映射。证明完毕。

□

结合引理3.1和引理3.2，我们现在分别分析 $\mathfrak{B}_n^+$中的光滑与非光滑排列，从而证明定理1.3。

定理 *1.3* 的证明。任意 $w \in \mathfrak{B}_n^+$ 要么是光滑的，要么是非光滑的。引理 3.1 和引理 3.2 说明

$$B_n^+(t) = D_n^+(t) + nB_{n-1}^-(t).$$

类似于引理3.1 中的论证，可建立 $\mathfrak{B}_n^-$ 中具有 k 型 B 个下降的光滑有符号排列与 $\mathfrak{D}_n^-$中具有 k 型 D 个下降的排列之间的双射。同样，依照引理 3.2，$\mathfrak{B}_n^-$ 中具有 k 型 B 个下降的非光滑有符号排列的集合，与有序对（u，σ）的集合之间存在双射，其中 $u \in [n]$ 和 $\sigma \in \mathfrak{B}_{n-1}^+$ 满足 $\mathrm{des}_B(v) = k-1$。因此，

$$B_n^-(t) = D_n^-(t) + ntB_{n-1}^+(t),$$

由此完成证明。 □

接下来，我们将作为定理 A 和类型 B的推论，给出类型1.3欧拉多项式之间的一个新关系。为此，我们首先证明以下引理:

引理 3.3. 对于任意正整数 n，我们有

$$2^n tA_n(t) = B_n^-(t) + tB_n^+(t). \tag{3.1}$$

证明。 根据定理1.3，我们推得

$$\begin{aligned} B_n(t) - D_n(t) &= \big(B_n^+(t) + B_n^-(t)\big) - \big(D_n^+(t) + D_n^-(t)\big) \\ &= \big(B_n^+(t) - D_n^+(t)\big) + \big(B_n^-(t) - D_n^-(t)\big) \\ &= nB_{n-1}^-(t) + ntB_{n-1}^+(t). \end{aligned}$$

根据等式 (1.2)，我们有

$$B_n(t) - D_n(t) = n2^{n-1} tA_{n-1}(t).$$

令 $B_n(t) - D_n(t)$ 的两个表达式相等，我们有

$$nB_{n-1}^-(t) + ntB_{n-1}^+(t) = n2^{n-1} tA_{n-1}(t).$$

将等式两边同时除以 n并将 n重新编号为 $n+1$，得到等式 (3.1)，证毕。 □

根据等式 (3.1)，以及 Hyatt 在 [12],中给出的 B_n^+ 和 t 以及 B_n^- 的以下关系t

$$B_n^+(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} B_j(t)(t-1)^{n-j-1}, \tag{3.2}$$

$$B_n^-(t) = t^n B_n^+(t^{-1}) = t \cdot \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} B_j(t)(1-t)^{n-j-1}, \tag{3.3}$$

我们推导出以下新结果。

命题 3.4。 设 n 为正整数。若 n 为偶数，则

$$2^{n-1} A_n(t) = \sum_{r=0}^{\frac{n-2}{2}} \binom{n}{2r+1} B_{2r+1}(t)(t-1)^{n-2r-2}.$$

若 n 为奇数，则有

$$2^{n-1} A_n(t) = \sum_{r=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2r} B_{2r}(t)(t-1)^{n-2r-1}.$$

证明。 由方程（3.1），可得

$$2^n tA_n(t) = B_n^-(t) + tB_n^+(t).$$

将方程（3.2）和方程（3.3）代入右侧可得

$$2^n tA_n(t) = t\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j}B_j(t)(1-t)^{n-j-1} + t\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j}B_j(t)(t-1)^{n-j-1}.$$

两边除以 t，得到

$$\begin{aligned}2^n A_n(t) &= \sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j}B_j(t)\left((1-t)^{n-j-1} + (t-1)^{n-j-1}\right)\\ &= \sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j}B_j(t)(t-1)^{n-j-1}\left(1 + (-1)^{n-j-1}\right).\end{aligned}$$

考虑 n 的奇偶性，即可得到所需结果。 □

本节余下部分聚焦于多项式 $\mathbf{D}_{n,i}(t)$。为给出 D 型受限欧拉多项式与 A 型和 B型欧拉多项式之间的关系，我们先建立 $\mathbf{D}_{n,1}(t)$ 的递推关系。

引理 3.5. 对于任意 $n \geq 1$，有

$$\mathbf{D}_{n,1}(t) = tD_{n-1}^+(t) + D_{n-1}^-(t).$$

证明。 通过分析属于 $\mathfrak{D}_{n,1}$ 的排列中第 $(n-1)$ 个元素的符号可得此结果。若第 $(n-1)$ 个元素为正，则在位置 $n-1$ 处引入一个下降，贡献为 $tD_{n-1}^+(t)$；若第 $(n-1)$ 个元素为负，则位置 $n-1$ 处不会产生额外的下降，贡献为 $D_{n-1}^-(t)$。将这两项贡献相加，即得所需恒等式。

□

结合引理 3.3、引理 3.5和定理 1.3，我们现在可以证明以下结果。

定理 3.6. 对于任意 $n \geq 1$，我们有

$$\mathbf{D}_{n,1}(t) = t \cdot (2^{n-1}A_{n-1}(t) - (n-1)B_{n-2}(t)). \tag{3.4}$$

证明. 由引理 3.5 和定理 1.3，我们得到

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_{n,1}(t) &= tD^{+}_{n-1}(t) + D^{-}_{n-1}(t)\\ &= t\left(B^{+}_{n-1}(t) - (n-1)B^{-}_{n-2}(t)\right) + B^{-}_{n-1}(t) - (n-1)tB^{+}_{n-2}(t)\\ &= B^{-}_{n-1}(t) + tB^{+}_{n-1}(t) - (n-1)t\left(B^{-}_{n-2}(t) + B^{+}_{n-2}(t)\right)\\ &= B^{-}_{n-1}(t) + tB^{+}_{n-1}(t) - (n-1)tB_{n-2}(t).\end{aligned}$$

由引理 3.3，可得

$$\mathbf{D}_{n,1}(t) = 2^{n-1}tA_{n-1}(t) - (n-1)tB_{n-2}(t),$$

如所需。 □

为了对所有 $1 \le i \le n$，用 $A_{n-1}(t)$ 和 $B_{n-2}(t)$ 表示 $\mathbf{D}_{n,i}(t)$，我们为 $\mathbf{D}_{n,i}(t)$ 建立如下递推关系。

命题 3.7。对于任意 $1 \le i \le n$，有

$$\mathbf{D}_{n,i}(t) = \mathbf{D}_{n,i+1}(t) + (t-1)\mathbf{D}_{n-1,i}(t). \tag{3.5}$$

证明。定义 $\mathfrak{D}_n$ 的两个子集如下：

$$X = \{w \in \mathfrak{D}_n \mid w_{n-1} = i, w_n = i+1\} \text{ and } \widetilde{X} = \{w \in \mathfrak{D}_n \mid w_{n-1} = i+1, w_n = i\}.$$

通过排除或包含这些子集，我们将受限欧拉多项式 $\mathbf{D}_{n,i+1}(t)$ 和 $\mathbf{D}_{n,i}(t)$ 分解为：

$$\mathbf{D}_{n,i+1}(t) = \sum_{w \in D_{n,i+1}\setminus X} t^{\mathrm{des}_D(w)} + \sum_{w \in X} t^{\mathrm{des}_D(w)}. \tag{3.6}$$

$$\mathbf{D}_{n,i}(t) = \sum_{w \in D_{n,i}\setminus \widetilde{X}} t^{\mathrm{des}_D(w)} + \sum_{w \in \widetilde{X}} t^{\mathrm{des}_D(w)}. \tag{3.7}$$

注意到

$$\sum_{w \in D_{n,i+1}\setminus X} t^{\mathrm{des}_D(w)} = \sum_{w \in D_{n,i}\setminus \widetilde{X}} t^{\mathrm{des}_D(w)}.$$

这是因为$D_{n,\ i+1}$ 与$D_{n,\ i}$ 之间唯一的差别在于最后两个元素。此外，

$$t \cdot \sum_{w \in X} t^{\mathrm{des}_D(w)} = \sum_{w \in \widetilde{X}} t^{\mathrm{des}_D(w)}.$$

这是因为交换 $w_{n-1}=i$ 和 $w_n=i+1$ 会在位置 $n-1$产生一个额外的下降。将方程（3.6）从方程（3.7）中相减，我们得到

$$\mathbf{D}_{n,i}(t)-\mathbf{D}_{n,i+1}(t)=(t-1)\cdot\sum_{w\in X}t^{\mathrm{des}_D(w)}=(t-1)\mathbf{D}_{n-1,i}(t).$$

证明至此完成。 □

结合定理3.6 和命题3.7，我们可以用$\mathbf{D}_{n,i}(t)$表示为 $A_{n-1}(t)$和 $B_{n-2}(t)$，对所有 $1\leq i\leq n$均成立。通过迭代等式（3.5），对于 $i\geq 2$，我们有

$$\mathbf{D}_{n,i}(t)=\mathbf{D}_{n,1}(t)+(i-1)\sum_{r=1}^{i-2}(1-t)^r\mathbf{D}_{n-r,1}(t)+(1-t)^{i-1}\mathbf{D}_{n-i+1,1}(t).$$

然后将等式（3.4）代入上式，对于 $i\geq 2$，可得

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_{n,i}(t)=2^{n-1}tA_{n-1}(t)+(i-1)\sum_{r=1}^{i-2}2^{n-r-1}t(1-t)^rA_{n-r-1}(t)+2^{n-i}t(1-t)^{i-1}A_{n-i}(t)-\\(n-1)tB_{n-2}(t)-(i-1)\sum_{r=1}^{i-2}(n-r-1)t(1-t)^rB_{n-r-2}(t)-(n-i)t(1-t)^{i-1}B_{n-i-1}(t).\end{aligned}$$

当 i 为负整数时，采用与引理2.4类似的论证，我们可以证明$\mathbf{D}_{n,i}(t)=t^n\mathbf{D}_{n,-i}(t^{-1})$。这使我们能够将$\mathbf{D}_{n,i}(t)$表示为 $A_{n-1}(t)$和 $B_{n-2}(t)$的形式，对任意 $-n\leq i\leq -1$均成立。然而，这个公式不像定理3.6那样简洁。我们猜想，对于任意 i，$\mathbf{D}_{n,i}(t)$与$\mathbf{A}_{n,i}(t)$和$\mathbf{B}_{n,i}(t)$之间存在更简单的关系。自然地，我们会提出以下问题。

问题 3.8。 对于任意 $-n\leq i\leq n$，求 $\mathbf{D}_{n,i}(t)$、$\mathbf{A}_{n,i}(t)$ 与 $\mathbf{B}_{n,i}(t)$ 之间的直接关系。

致谢。

我们感谢 Arthur L.B. Yang 富有成效的讨论，也感谢 Ethan Y.H. Li 对本文修改提出的宝贵建议。此外，我们还要感谢匿名审稿人提出的有益意见。

参考文献

[1] A. Abram 和 J. Bastidas，关于 h^*-多面体的 C 型超单纯形的多项式，*arXiv:2504.038898*，2025 年。

[2] F. Brenti，q-欧拉多项式，源自考克斯特群，《欧洲组合学杂志》15 (1994), 417–441.

[3] F. Brenti 和 d V. We lker, f-向量 o f b arycentric su bd ivisions, 数学 h. Z.259 (2008)，849–865。[4] C.-O. Chow，欧拉多项式零点交错的新证明，《数学分析与应用杂志》510（2022），126019。[5] M.A. Conger，欧拉数的一个细化，以及π(1)与 Des(π) 在 S_n中的联合分布，《组合艺术》95（2010），445–472。[6]H.K. Dey，某些实根多项式的零点交错，《数学档案》（巴塞尔）120（2023），457–466。[7] H.K. Dey、U. Shankar 和 S. Sivasubramanian，着色置换群中的下降-超出对应，《枚举组合及其应用》5（2025），文章编号 #S2R24。[8] K. Dilks、T.K. Petersen 和 J.R. Stembridge，仿射下降与 Steinberg环面，《应用数学进展》42（2009），423–444。[9] R. Ehrenborg、M. Readdy 和 E. Steingr´ímsson，混合体积与立方体的截面，组合理论杂志 *A* 辑81（1998），121–126。.[10]G. Frobenius，论伯努利数与欧拉多项式，普鲁士皇家科学院会议录（1910），下半卷，第809–847页。[11] W.M. Guo，某些多项式序列的零点分布与交错性质，《开放数学》22（2024），20240085。[12] M. Hyatt，B 型和 D型欧拉多项式的递推关系，《组合学年刊》20（2016），869–881。[13] M. Kubitzke 和 E. Nevo，可壳复形重心细分的 Lefschetz性质，《美国数学会汇刊》361（2009），6151–6163。[14] L.L. Liu 和 Y. Wang，研究仅有实零点的多项式序列的统一方法，《应用数学进展》38（2007），542–560。[15] T.K. Petersen，《欧拉数》。施普林格，纽约（2015）。[16] S.-M. Ma、J. Ma、J. Yeh 和 Y.-N. Yeh，欧拉对与欧拉递推系统，《离散数学》345（2022），112716。

[17] E. Nevoa、T.K. Petersenb 和 B.E. Tenner，重心细分的 γ-向量，组合理论杂志 *A* 辑118（2011），1364–1380。[18]A. Postnikov，置换多面体、结合多面体及更多内容，国际数学研究通知6（2019），1026–1106。[19] L. Santocanale， B 型和 D 型欧拉数的双射证明，离散数学、理论计算机科学23（2023），第2期。[20] C.D. Savage 和 M. Visontai， s-欧拉多项式只有实根，《美国数学会汇刊》367（2015），1441–1466。[21] J.R. Stembridge，与托里克簇上同调相关的魏尔群的一些置换表示。《数学进展》106（1994），244–301。[22] M. Visontai 和 N. Williams，稳定多元 W-欧拉多项式。《组合理论杂志 *A* 辑》120（2013），1929–1945。[23] R.-H. Wang、Y. Xu 和 Z-Q. Xu，欧拉数：样条视角，《数学分析与应用杂志》370（2010），486–490。[24] A.L.B Yang 和 P.B Zhang，下降生成多项式与 Hermite-Biehler 定理，代数组合杂志56（2022），117–152。[25] R. Zhang，欧拉多项式指数生成函数的对数，离散数学贡献，即将发表。[26]B.-X. Zhu，由阶梯形表和树状表生成的广义欧拉三角，组合理论杂志 *A* 辑172（2020），105206。