arXiv:2603.02884v1 [math.SP] 3 Mar 2026

具有复值周期系数的狄拉克算子的谱性

O.A. VelievDoğuş大学，
埃森肯特34755，伊斯坦布尔，土耳其。电子邮件：
oveliyev@dogus.edu.tr

摘要

本文研究了带有复值周期 2×2 矩阵势 Q. 的非自伴狄拉克算子 $L(Q)$的谱性。我们建立了关于矩阵 Q 非对角元素的一个条件，在该条件下， $L(Q)$是渐近谱算子。此外，我们推导出一个确保该算子具有谱性的条件 Q 。最后，我们考察了这些情形下的谱展开。

关键词：狄拉克算子，谱性，谱展开。
美国数学学会数学主题分类：34L05，34L20。

1 引言与预备知识

本文考虑由微分表达式生成的一维狄拉克算子 $L(Q)$，其作用空间为$L_2^2(-\infty, \infty)$，其中包含二分量复值向量函数 $\mathbf{y}(x)=\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$

$$l(\mathbf{y},Q) = J\mathbf{y}'(x) + Q\mathbf{y}(x), \tag{1}$$

其中 $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$， $Q(x) = \begin{pmatrix} a_1(x) & a_2(x) \\ a_3(x) & a_4(x) \end{pmatrix}$ 和 a_k 对于 $k = 1, 2, 3, 4$ 均为 π-周期的复值有界变差函数，定义在 $[0, \pi]$ 上。我们证明，若

$$\operatorname{Re} \int_0^\pi a_3(x) - a_2(x)dx \neq 0, \tag{2}$$

则 $L(Q)$ 是一个渐近谱算子。此外，我们导出一个关于 Q 的条件，该条件可确保此算子的谱性。最后，我们讨论这些情形下的谱展开。

众所周知，算子 $L(Q)$的谱 $\sigma(L(Q))$是算子 $L_t(Q)$的谱 $\sigma(L_t(Q))$的并集，其中这些算子由 $L_2^2[0, \pi]$ 中的式（1）和边界条件生成，适用于 $t \in (-1, 1]$

$$\mathbf{y}(\pi) = e^{i\pi t}\mathbf{y}(0). \tag{3}$$

根据 [14] 中给出的定义（参见 [14] 的定义 3.2），我们采用以下关于谱性和渐近谱性的定义

定义1 设 $\gamma(t)$ 是位于 $\rho(L_t(Q))$ 的预解集中的闭围道，其中 $L_t(Q)$。将 $e(\gamma(t))$定义为

$$e(\gamma(t)) = \int_{\gamma(t)} (L_t(Q) - \lambda I)^{-1} d\lambda \ .$$

若算子 L 满足以下条件，则称其为谱算子:

$$\sup_{t\in(-1,1]}\left(\sup_{\gamma(t)\subset\rho(L_t)}\|e(\gamma(t))\|\right)<\infty, \tag{4}$$

其中，sup 取遍所有 $\gamma(t)\subset\rho(L_t)$。若存在 M，使得 *(4)* 对所有 $\gamma(t)\subset(\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda|>M\}\cap\rho(L_t))$ 均成立，则称算子 L 为渐近谱算子。

请注意，在论文 [19–23]，中，我们研究了由 $m\geq 2$. 阶微分表达式生成的算子的谱性。这些研究并不能推出由一阶微分表达式 (1) 生成的狄拉克算子的谱性。值得注意的是，由具有复值势 q 的微分表达式 $-y''+qy$ 在空间 $L_2(-\infty,\infty)$ 中生成的一维薛定谔算子 $T(q)$, 一般来说并不是谱算子。Gesztezy 和 Tkachenko [8] 证明了算子 $T(q)$ 成为谱算子的两种判据，按照 Dunford [5], 的观点，一种是解析判据，另一种是几何判据。解析判据以 Hill 方程的解为依据。该判据的几何版本运用了周期/反周期边值问题和狄利克雷边值问题的谱的代数与几何性质。明确描述哪些势 q 能使薛定谔算子 $T(q)$ 成为谱算子的问题，至今仍悬而未决，已有约 65 年之久。在 [19]（另见 [22, 第 2.7] 节）中，我找到了关于势 q 的显式条件，使得 $T(q)$ 成为渐近谱算子。然而，以下众所周知的例子表明， $T(q)$ 具有谱性是极为罕见的现象。Gasimov [6] 证明了具有势函数

$$q(x)=\sum_{n=1}^{\infty}q_ne^{i2\pi x}$$

一般而言，具有无穷多个谱奇点。回想一下，$T(q)$的谱奇点是其谱 $\sigma(T(q))$中的一点，在该点的邻域上， $T(q)$的投影并非一致有界。因此，谱奇点的存在不允许 $T(q)$成为谱算子。在 $q(x)=ae^{i2\pi x}$ 且 $a\neq 0$. 的情形下，对于 $n\neq 0$，数$(\pi n)^2$ 对所有 $n\in\mathbb{Z}$ 都是谱奇点（见 [22, 第3.3]节）。

另一个例证是由微分表达式在$L_2(-\infty,\infty)$中生成的Mathieu–Schr¨odinger算子 $H(a,b)$

$$-y''+(ae^{i2\pi x}+be^{-i2\pi x})y. \tag{6}$$

Djakov 和 Mityagin [1] 证明，由 $L_2[0,1]$ 中的周期或反周期边界条件生成的算子 $H_0(a,b)$ 或 $H_\pi(a,b)$ 的根函数构成 Riesz 基，当且仅当 $|a|=|b|$ （见 [1] 中的定理 7 ）。此外，[1] 中（见第 539 页）指出， [1] 中的定理 7 与 [8] 中的注 8.10 意味着，如果 $|a|\neq|b|$. , 则 $H(a,b)$ 不是谱算子。关于这一结论的另一种证明，见 [22] 第 4.3 节（命题 4.3.1）。需要强调的是， $H_0(a,b)$ 和 $H_\pi(a,b)$ 的谱性，甚至由 $L_2[0,1]$ 中 t-周期边界条件生成的算子 $H_t(a,b)$ 对所有 $t\in(-\pi,\pi]$ 的谱性，都不能推出 $H(a,b)$ 的谱性。在 [22], 的注 4.3.5 中，我指出，对 $H_0(a,b)$ 和 $H_\pi(a,b)$ 的详细研究无法为 $H(a,b)$ 的谱性提供充分条件。这是因为，当 $t\neq 0,\pi$时， $H_t(a,b)$ 的重特征值会成为 $H(a,b)$ 的谱奇点，进而意味着 $H(a,b)$ 不是谱算子。当 $t\neq 0,\pi$ 时，这类重特征值确实可能出现（见[22]中的定理 4.3.1）。因此，条件 $|a|=|b|$ 不足以保证 $H(a,b)$ 具有谱性。在 [21],的定理1以及 [22] 的定理 4.1.1 中，我证明了 $H(a,b)$ 是渐近谱算子，当且仅当 $|a|=|b|$ 并且

$$\inf_{q,p\in\mathbb{N}}\{|\,q\alpha-(2p-1)\,|\}\neq 0, \tag{7}$$

其中 $\alpha = \pi^{-1}\arg(ab)$， $\mathbb{N} = \{1, 2, ..., \}$. 例如，如果 $\alpha = \frac{m}{q}$,其中 m 是奇整数，且 m, q 互素，那么 $H(a, b)$ 甚至不是渐近谱算子（见 [22],定理 4.3.4）。换言之，即使在 $|\ a\ | = |\ b\ |$ 的情况下，如果条件 (7) 不成立，那么 $H(a, b)$ 就不是谱算子。此外， [21] 的定理1意味着，如果 $ab \in \mathbb{R}$，那么 $T(q)$ 是谱算子，当且仅当它是自伴的（见 [21]的推论 1）。因此，在这种情况下，不存在非自伴的谱算子。这些例子表明， $T(q)$ 具有谱性是极为罕见的现象，而且与 q. 的光滑性或小量性无关。当 $q_2 = q_3$.时，对于狄拉克算子 $L(Q)$, 我们也会遇到相同的情况。因此，条件 (2) 至关重要，有助于我们考察 $L(Q)$ 的谱性。最后请注意，在 [23], 中，为了说明谱算子理论不适用于非自伴薛定谔算子 $T(q)$，我只讨论了这样一些例子：对于这些例子，存在关于 q 的必要充分条件，以判定 $T(q)$ 是否具有谱性。

在下一节（第2节）中，我们研究布洛赫特征值和布洛赫函数的渐近公式。在第3节中，我们研究 $L(Q)$的渐近谱性和谱性，并讨论相应的谱展开。在全文中， $m_1, m_2, ...$表示不依赖于 t, λ 和 x.的正常数。其含义是：对于某个不等式，存在常数 m_i ，使得该不等式成立。

2 布洛赫特征值和布洛赫函数的渐近公式

设$\mathbf{c}(x, \lambda) = \begin{pmatrix} c_1(x, \lambda) \\ c_2(x, \lambda) \end{pmatrix}$和$\mathbf{s}(x, \lambda) = \begin{pmatrix} s_1(x, \lambda) \\ s_2(x, \lambda) \end{pmatrix}$为该方程的解

$$l(\mathbf{y}, Q) = \lambda \mathbf{y} \tag{8}$$

满足下列初始条件

$$c_1(0, \lambda) = s_2(0, \lambda) = 1,\ s_1(0, \lambda) = c_2(0, \lambda) = 0. \tag{9}$$

将通解 $x_1\mathbf{c}(x, \lambda) + x_2\mathbf{s}(x, \lambda)$代入边界条件(3)，并利用(9)，我们得到如下方程组

$$\begin{cases} x_1(c_1(\pi, \lambda) - e^{i\pi t}) + x_2 s_1(\pi, \lambda) = 0 \\ x_1 c_2(\pi, \lambda) + x_2(s_2(\pi, \lambda) - e^{i\pi t}) = 0 \end{cases}. \tag{10}$$

A nu当且仅当 λ 是 $L_t(Q)$ 的一个特征值时，它是特征方程的一个根

$$\Delta(\lambda, t) = \begin{vmatrix} c_1(\pi, \lambda) - e^{i\pi t} & s_1(\pi, \lambda) \\ c_2(\pi, \lambda) & s_2(\pi, \lambda) - e^{i\pi t} \end{vmatrix} = e^{2i\pi t} - e^{i\pi t}F(\lambda) + W(\pi, \lambda) = 0,$$

其中 $F(\lambda) := c_1(\pi, \lambda) + s_2(\pi, \lambda)$ 且 $W(\pi, \lambda) = c_1(\pi, \lambda)s_2(\pi, \lambda) - c_2(\pi, \lambda)s_1(\pi, \lambda)$。因此， $L_t(Q)$ 的特征值 $\lambda(t)$ 是方程的根

$$F(\lambda) = e^{i\pi t} + e^{-i\pi t}W(\pi, \lambda). \tag{11}$$

如果 $\lambda(t)$ 是一个单特征值，且 $s_1(\pi, \lambda(t)) \neq 0$, 那么相应的特征函数 $\Phi_t(x)$ 可写成如下形式

$$\Phi_t(x) = \mathbf{c}(x, \lambda(t)) + \frac{e^{i\pi t} - c_1(\pi, \lambda(t))}{s_1(\pi, \lambda(t))}\mathbf{s}(x, \lambda(t)). \tag{12}$$

众所周知（见 [25]），若 f 是 $[0, \pi]$ 上的有界变差函数，则

$$\int_0^x f(t)\cos\lambda t dt = O\left(\frac{1}{\lambda}\right),\ \int_0^x f(t)\sin\lambda t dt = O\left(\frac{1}{\lambda}\right), \tag{13}$$

当 $\lambda \to \infty$ 时。此外， $O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ 与 $x \in [0,\pi]$ 无关；也就是说，这些估计关于 $x \in [0,\pi]$. 一致。因此，应用 [15] 中的定理 1 和定理 2，或 [16], 中的定理 2.5 和定理 2.6，我们得到以下关于 $x \in [0,\pi]$ 一致的渐近公式：

$$s_1(x,\lambda) = -e^{a(x)}\sin\lambda x + O\left(\frac{1}{\lambda}\right),\ s_2(x,\lambda) = e^{a(x)}\cos\lambda x + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \tag{14}$$

and

$$c_1(x,\lambda) = e^{a(x)}\cos\lambda x + O\left(\frac{1}{\lambda}\right),\ c_2(x,\lambda) = e^{a(x)}\sin\lambda x + O\left(\frac{1}{\lambda}\right), \tag{15}$$

其中 $a(x) = \frac{1}{2}\int_0^x a_3(\xi) - a_2(\xi)d\xi$. 因此，我们有

$$F(\lambda) = 2e^{\pi b}\cos\pi\lambda + O\left(\frac{1}{\lambda}\right),\ W(\pi,\lambda) = e^{2\pi b} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right),$$

其中 $b = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi a_3(x) - a_2(x)dx = \frac{1}{\pi}a(\pi)$。因此，(11) 可写成如下形式

$$2e^{\pi b}\cos\pi\lambda = e^{i\pi t} + e^{-i\pi t}e^{2\pi b} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

将此等式两边除以 $2e^{\pi b}$ ，并利用众所周知的欧拉公式，我们得到

$$\cos\pi\lambda = \cos\pi(2n \pm t \pm ib) + g(\lambda),\ |g(\lambda)| < \frac{m_1}{|\lambda|} \tag{16}$$

由于 $\lambda \to \infty$ ，对某个 $m_1 > 0.$ 。现在，利用 (16)、Rouch´e 定理以及 (12)，按标准方法可得以下渐近公式。

定理1 若 *(2)* 成立，则：

(a) $L_t(Q)$ 的特征值，对于 $t \in (-1,1)$，由两个序列 $\{\lambda_{n,1}(t);\ n \in \mathbb{Z}\}$和 $\{\lambda_{n,2}(t);\ n \in \mathbb{Z}\}$ 组成，它们满足以下渐近公式

$$\lambda_{n,1}(t) = (2n - t - ib) + O(\frac{1}{n}),\ \lambda_{n,2}(t) = (2n + t + ib) + O(\frac{1}{n}). \tag{17}$$

这些公式关于 $t \in (-1,1].$ 是一致的。存在 N ，使得 $\lambda_{n,j}(t)$ 对所有 $|n| \geq N$, $j = 1,2$，以及 $t \in (-1,1].$ 都是 $L_t(Q)$ 的单特征值

(b) 由 *(12)* 定义、对应于特征值 $\lambda_{n,1}(t)$ 和 $\lambda_{n,2}(t)$ 的 $L_t(Q)$ 的特征函数 $\Phi_{n,1,t}(x)$ 和 $\Phi_{n,2,t}(x)$ 满足以下渐近公式

$$\Phi_{n,1,t}(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{a(x)}e^{i(-2n+t+ib)x} + O(\frac{1}{n}),\ \Phi_{n,2,t}(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{a(x)}e^{i(2n+t+ib)x} + O(\frac{1}{n}) , \tag{18}$$

这些公式关于 $t \in (-1,1]$ 和 $x \in [0,\pi].$ 是一致的

证明。 (a) 为证明 (17)，我们证明存在 m_2 ，使得

$$|2\cos\pi\lambda - 2\cos\pi(2n \pm t \pm ib)| > \frac{m_1}{|\lambda|} \tag{19}$$

对所有

$$\lambda = 2n \pm t \pm ib + \frac{m_2}{n}e^{i\alpha},\ \alpha \in [0,2\pi),$$

其中 m_1 在式 (16) 中定义。下面考虑将 $\pm$ 替换为 $-$的情形；另一种情形类似。利用差化积三角公式

$$\begin{aligned}&\cos\pi(2n-t-ib)+\frac{m_2}{n}e^{i\alpha})-\cos\pi(2n-t-ib)\\&=-2\sin\left((2n-t-ib)\pi+\frac{m_2}{2n}e^{i\alpha}\right)\sin\frac{m_2}{2n}e^{i\alpha},\end{aligned}$$

连同 (2) 以及显然的不等式

$$\left|\sin\left((2n-t-ib)\pi+\frac{m_2}{2n}e^{i\alpha}\right)\right|>m_3\left|\operatorname{Re}b\right|,\ \ \left|\sin\frac{m_2}{2n}e^{i\alpha}\right|>\left|\frac{m_2}{3n}\right|,$$

我们得到 (19)。因此，由 (16) 和 Rouch´e 定理可得 (17) 中的第一个公式。同理，可证明 (17) 中的第二个公式。

(*b*) 为证明 (18)，我们使用 (12)、(14) 和 (15)。由 (17)、(14) 和 (15) 可得

$$s_1(\pi,\lambda_{n,2}(t))=-e^{\pi b}\sin\pi(t+ib)+O(\frac{1}{n}),\ c_1(\pi,\lambda_{n,2}(t))=e^{\pi b}\cos\pi(t+ib)+O(\frac{1}{n}),$$

$$e^{i\pi t}-c_1(\pi,\lambda_{n,2}(t))=e^{\pi b}e^{i\pi(t+ib)}-e^{\pi b}\cos\pi(t+ib)=ie^{\pi b}\sin\pi(t+ib),$$

$$\mathbf{c}(x,\lambda_{n,2}(t))=\begin{pmatrix}e^{a(x)}\cos(2n+t+ib)x\\e^{a(x)}\sin(2n+t+ib)x\end{pmatrix}+O(\frac{1}{n})$$

and

$$\mathbf{s}(x,\lambda_{n,2}(t))=\begin{pmatrix}-e^{a(x)}\sin(2n+t+ib)x\\e^{a(x)}\cos(2n+t+ib)x\end{pmatrix}+O(\frac{1}{n}).$$

将这些等式代入 (12)，即可证明 (18) 中的第二个公式。同理可证明 (18) 中的第一个公式。

■

因此，当 n,取较大值时， $L_t(Q)$ 的特征值 $\lambda_{n,1}(t)$ 和 $\lambda_{n,2}(t)$ 分别渐近接近算子 $L_z(O)$,的特征值 $(2n-t-ib)$ 和 $(2n+t+ib)$，其中 $z=t+ib$ 且 O 是 2×2 零算子。 $L_z(O)$ 的相应特征函数为

$$\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}e^{i(-2n+t+ib)x}\quad\&\quad\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}e^{i(2n+t+ib)x}.$$

显然，若（2）成立，即 $\operatorname{Re}\ b\neq0$，那么 $z=t+ib$ 上 $L_z(O)$ 的所有特征值都是单重的，且相邻特征值之间的距离不小于 $\min\ \{2,2\left|\operatorname{Re}\ b\right|\}$。此外，容易验证，按照 [16] 的定义，边界条件（2）对$t\notin\mathbb{Z}$ 是强正则的。这一验证见 [24]。因此，若（2）成立，则算子 $L_t(Q)$ 是强正则的，并且根据 [16]，对于所有 $t\in(-1,\ 1]$，，其根函数在 $L_2^2[0,\pi]$ 中构成 Riesz基。

关于 $L_2^2[a,b]$，上 Dirac算子在各种边界条件下（见 [2-4, 9-12, 15-17] 及其中的参考文献）根函数的基性质，已有许多论文。这里，我们只用到这样一个事实：由（1）生成且具有强正则边界条件的狄拉克算子的根函数构成 Riesz基。因此，我们不详细讨论关于有界区间上 Dirac算子的研究。

由于矩阵

$$\overline{Q}=\begin{pmatrix}\overline{a_1(x)}&\overline{a_3(x)}\\\overline{a_2(x)}&\overline{a_4(x)}\end{pmatrix}$$

也满足条件 (2)。根据定理1，伴随算子 $L_t(Q)$ 的特征函数 $\Phi^*_{n,\ 1,\ t}(x)$ 和$\Phi^*_{n,\ 2,\ t}(x)$ 满足渐近公式

$$\Phi^*_{n,1,t}(x)=\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}e^{-\overline{a(x)}}e^{i(-2n+t-i\bar{b})x}+O(\frac{1}{n}),\ \Phi^*_{n,2,t}(x)=\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}e^{-\overline{a(x)}}e^{i(2n+t-i\bar{b})x}+O(\frac{1}{n})\ .\tag{20}$$

注1 容易验证，数 $2n-t-ib$ 和 $2n+t+ib$ 是算子 $L_t(Q_b)$ 的特征值，其中 $Q_b=\begin{pmatrix}0 & -b\\ b & 0\end{pmatrix}$. 与特征值 $(2n-t-ib)$ 和 $(2n+t+ib)$ 对应的 $L_t(Q_b)$ 的特征函数为

$$\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}e^{i(-2n+t)x} \text{ and } \begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix}e^{i(2n+t)x}.$$

其伴随算子$(L_t(Q_b))^*$ 为 $L_t(Q_b)$，其中 $Q_b=\begin{pmatrix}0 & b\\ -b & 0\end{pmatrix}$. $L_t(Q_b)$的特征值为$(2n-t+ib)$和$(2n+t-ib)$。与这些特征值对应的归一化特征函数为

$$\varphi_{n,1,t}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}e^{i(-2n+t)x} \text{ and } \varphi_{n,2,t}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix}e^{i(2n+t)x}.$$

3 谱性与谱展开

为研究谱性，我们使用定义1；也就是说，估计这些投影

$$e(\gamma(t))=\int_{\gamma(t)}(L_t(Q)-\lambda I)^{-1}\,d\lambda,$$

其中 $\gamma(t)$ 是一条位于 $\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda|>M\}\cap\rho(L_t)$ 中的闭曲线。根据定理1，存在M，使得闭曲线 $\gamma(t)$ 仅围住特征值 $\lambda_{n,j}(t)$，其中 $|n|\geq N$, N 在定理1(a)中定义. 这意味着$\lambda_{n,j}(t)$ 是单特征值。令 $\mathbb{D}(t)$ 为集合的一个子集

$$\{(n,j):n\in\mathbb{Z},|n|\geq N,\ j=1,2\}=\mathbb{Z}\times\{1,2\}$$

使得 $\lambda_{n,j}(t)$ 位于 $\gamma(t)$ 内部，其中 $(n,j)\in\mathbb{D}(t)$. 于是我们有

$$e(\gamma(t))f=\sum_{(n,j)\in\mathbb{D}(t)}\frac{1}{\alpha_{n,j}(t)}(f,\Phi^*_{n,j,t})\Phi_{n,j,t}, \tag{21}$$

其中 $\alpha_{n,j}(t)=(\Phi_{n,j,t},\Phi^*_{n,j,t})$. 现在，利用这一点，我们证明如下结论。

定理2 若 *(2)* 成立，则 $L(Q)$ 是一个渐近谱算子。

证明。由 (18) 和 (20)，可得

$$\Phi_{n,j,t}=e^{a(x)-bx}d_je^{i((-1)^j2n+t)x}+O(\frac{1}{n}),\ \Phi^*_{n,j,t}=e^{-a(x)+bx}d_je^{i((-1)^j2n+t)x}+O(\frac{1}{n}) \tag{22}$$

并且 $\alpha_{n,j}(t)=2+O(\frac{1}{n})$, 其中 $d_j=\begin{pmatrix}1\\ (-1)^{j-1}i\end{pmatrix}$. 将 (22) 代入 (21)，得到

$$e(\gamma(t))f=\frac{1}{2}e^{a(x)-bx}\sum_{(n,j)\in\mathbb{D}(t)}\left(e^{-a(x)+bx}f,d_je^{i((-1)^j2n+t)x}+O(\frac{1}{n})\right)\left(d_je^{i((-1)^j2n+t)x}+O(\frac{1}{n})\right). \tag{23}$$

现在，利用（23）并重复 [20]，中（2.5）的证明，我们得出存在一个正的常数 m_4 和 m_5，它们与 t、$\mathbb{D}(t)$ 以及 f 无关，使得

$$\|e(\gamma(t))f\|^2\leq m_4\|e^{-a(x)+bx}f\|^2\leq m_5\|f\|^2 \tag{24}$$

对于所有 $f\in L^2_2(0,\pi)$、$t\in(-1,1]$ 和 $\gamma(t)\subset\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda|>M\}\cap\rho(L_t)$。因此，该定理的证明由定义1得出。 ■

利用 (24) 并重复 [20]，中 (2.18) 的证明，我们得到如下结果 .

定理 3 若满足 *(2)*，则对每个 $f \in L_2^m(-\infty,\infty)$，下列等式成立

$$f(x)=\frac{1}{2}\int\limits_{(-1,1]}\sum_{j=1,2;\ |k|\le N} a_{k,j}(t)\Psi_{k,j,t}(x)dt+\frac{1}{2}\sum_{j=1,2;\ |k|>N}\int\limits_{(-1,1]} a_{k,j}(t)\Psi_{k,j,t}(x)dt,$$

其中，$a_{k,j}(t)=(f,X_{k,j,t})$ $\Psi_{k,j,t}$ 是对应于$\lambda_{k,j}(t)$的归一化特征函数，而 $\{X_{k,j,t}:\ k\in\mathbb{Z},\ j=1,2\}$ 是 $\{\Psi_{k,j,t}:\ k\in\mathbb{Z},\ j=1,2\}$. 的双正交系。该公式中的级数对每个 $a,b\in\mathbb{R}$.都在 $L_2^2(a,b)$的范数下收敛。

现在，我们确定势 Q满足什么条件时， $L_t(Q)$是谱算子。为此，我们寻找关于 Q 的条件，以保证对所有 $t\in(-1,\ 1].$，$L_t(Q)$的特征值都是单的。为此，我们将算子 $L_t(Q)$视为算子 $L_t(Q_b)$受到 $Q-Q_b.$ 扰动后的结果。 $L_t(Q_b)$的特征值是单的（见注1），并且位于水平直线上

$$H(\pm b)=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:y=\operatorname{Re}b\right\}\ \text{and}\ H(\pm b)=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:y=-\operatorname{Re}b\right\}. \tag{25}$$

$L_t(Q_b)$的相邻特征值之间的距离，要么为 2（若它们位于同一条直线上），要么不小于 $2\left|\operatorname{Re}b\right|$（若它们位于不同直线上）。因此，如果$Q-Q_b$ 的范数足够小，那么对于所有 $t\in(-1,\ 1].$，$L_t(Q)$的特征值均保持简单。为确定这个界，我们使用以下等式

$$(\lambda-(2n+(-1)^j(t+ib)))(\Psi_\lambda,\varphi_{n,j,t})=(\Psi_\lambda,(Q-Q_b)\varphi_{n,j,t}), \tag{26}$$

其中， $L_t(Q)$对应于特征值 λ 的归一化特征函数为 Ψ_λ ，且$\varphi_{n,\ j,\ t}$ 在注1中定义。等式（26）由关系式 $L_t(Q)\Psi_\lambda=\lambda\Psi_\lambda$，两边与$\varphi_{n,\ j,\ t}$ 取内积，并使用

$$\left(L_t(Q_b)\right)^*\varphi_{n,j,t}=(2n+(-1)^j(t-i\bar{b}))\varphi_{n,j,t}.$$

以下引理对于证明$L_t(Q)$的特征值对所有 $t\in(-1,\ 1]$.均为简单特征值起着关键作用。

引理1 如果 $|\operatorname{Re}b|\ge 1$ 且

$$\int_0^\pi \left|a_1(x)\pm(a_2(x)+b)\,i\right|^2+\left|a_3(x)-b\pm ia_4(x)\right|^2dx\le\frac{4}{\pi}, \tag{27}$$

那么这些圆

$$C(1,2k\pm t\pm ib)=\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda-(2k\pm t\pm ib)|=1\}$$

对于所有 $k\in\mathbb{Z}$，这些圆均属于 $L_t(Q)$的预解集。

证明。 假设存在一个特征值 $\lambda\in C(1,2k+t+ib)$，它是 $L_t(Q)$ 的特征值。那么，由 (26) 可得

$$\left|(\Psi_\lambda,\varphi_{n,j,t})\right|^2\le\frac{\left\|(Q-Q_b)\varphi_{n,j,t}\right\|^2}{\left|\lambda-(2n+(-1)^j(t+ib))\right|^2}. \tag{28}$$

结合 Q,Q_b 、$\varphi_{n,j,t}$ 的定义以及条件 (27)，我们得到

$$\left\|(Q-Q_b)\varphi_{n,j,t}\right\|^2\le\frac{2}{\pi^2},$$

对于所有 n, j 和 $t.$，因此，如果

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{|\lambda-(2n+t+ib)|^2}+\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{|\lambda-(2n-t-ib)|^2}<\frac{1}{2}\pi^2, \tag{29}$$

于是我们得到以下矛盾：

$$1=\|\Psi_\lambda\|^2=\sum_{j=1,2;n\in\mathbb{Z}} |(\Psi_\lambda,\varphi_{n,j,t})|^2<1, \tag{30}$$

因为 $\{\varphi_{n,j,t}:\ j=1,\ 2;\ \ n\in\mathbb{Z}\}$ 是标准正交基。

因此，只需证明 (29)。首先，考虑 (29) 中的第一个求和。根据假设 $\lambda=2k+t+ib+x+iy$, 其中 $x\in[-1,1]$ 且 $y=\pm\sqrt{1-x^2}$. 于是

$$|\lambda-(2n+t+ib)|^2=(2s+x)^2+1-x^2=4s^2+4sx+1, \tag{31}$$

其中 $s=k-n$。因此，我们有

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{|\lambda-(2n+t+ib)|^2}=\sum_{s\in\mathbb{Z}} \frac{1}{4s^2+4sx+1}=1+$$

$$\sum_{s\in\mathbb{N}} \frac{1}{4s^2+4sx+1}+\sum_{s\in\mathbb{N}} \frac{1}{4s^2-4sx+1}=1+\sum_{s\in\mathbb{N}} \frac{2(4s^2+1)}{(4s^2+1)^2-16s^2x^2}.$$

由于函数 $(4s^2+1)^2-16s^2x^2$ 在区间 $[-1,1]$ 上于点 $x=1$ 或 $x=-1$处取得最小值，在这两种情况下，利用众所周知的等式

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{1}{8}\pi^2,$$

我们得到

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{|\lambda-(2n+t+ib)|^2}\le 1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{1}{4}\pi^2. \tag{32}$$

现在，考虑式 (29) 中的第二个求和。由于

$$\lambda-(2n-t-ib)=2k+t+ib+x+iy-(2n-t-ib)=2(k-n)+2t+x+2ib+iy,$$

其中，存在 $m\in\mathbb{Z}$ 和 $v\in$ （-1，1），使得

$$\lambda-(2n-t-ib)=2m+v+\imath(2\alpha+y).$$

这里，由于 $|\alpha|\ge 1.$ 因此,

$$|\lambda-(2n-t-ib)|^2=(2m+v)^2+1-v^2=4m^2+4mv+1. \tag{33}$$

现在，我们不使用式 (31)，而使用式 (33)，其中 s 和 $x\in[-1,1]$ 分别替换为 m 和 $v\in$（-1，1）。重复式 (32) 的证明，可得

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{|\lambda-(2n-t-ib)|^2}<\frac{1}{4}\pi^2. \tag{34}$$

因此，由式 (32) 和 (34) 可得式 (29)。于是，若圆 $C(1,\ 2k+t+ib)$ 上的点 λ 是 $L_t(Q)$ 的特征值，则会导出矛盾 (30)。这意味着该圆位于 $L_t(Q)$ 的预解集。同理可证，圆 $C(1,\ 2k-t-ib)$ 也位于 $L_t(Q)$ 的预解集。引理得证。

■

下面的引理与引理1类似，对于情形 $|\mathrm{Re}\, b|<1$可以用类似的方法证明。

引理 2 如果 $0<|\operatorname{Re} b|<1$ 且

$$\int_0^{\pi}\left|a_1(x)\pm\left(a_2(x)+b\right)i\right|^2+\left|a_3(x)-b\pm\imath a_4(x)\right|^2\leq 2\pi\left(\frac{2}{\left(\operatorname{Re} b\right)^2}+\frac{1}{3}\pi^2\right)^{-1},\tag{35}$$

则这些圆

$$C(|\operatorname{Re} b|,2k\pm t\pm ib)=\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda-(2k\pm t\pm ib)|=|\operatorname{Re} b|\}$$

对所有 $k\in\mathbb{Z}$ 均位于 $L_t(Q)$的预解集中。

证明。 由引理1中所用的论证可知，只需证明：若$\lambda\in C(|\operatorname{Re}\ b|,2k\pm t\pm ib)$,则

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{\left|\lambda-\left(2n+(-1)^j\left(t+ib\right)\right.\right|^2}<\frac{1}{\left(\operatorname{Re} b\right)^2}+\frac{1}{6}\pi^2.\tag{36}$$

对 $j=1,2$。 首先考虑情形 $\lambda\in C(|\operatorname{Re}\ b|,2k+t+ib)$以及 $j=2.$。在此情形下，我们有 $\lambda=2k+t+ib+x+iy$和 $\lambda-(2n+(t+ib)\ =2s+x+iy$，其中

$$s=k-n,\ x\in[-|\operatorname{Re} b|,|\operatorname{Re} b|],\ y=\pm\sqrt{\left(\operatorname{Re} b\right)^2-x^2}.$$

因此，我们有

$$|\lambda-(2n+t+ib)|^2=(2s+x)^2+\left(\operatorname{Re} b\right)^2-x^2=4s^2+4sx+\left(\operatorname{Re} b\right)^2\tag{37}$$

and

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{|\lambda-(2n+t+ib)|^2}=\frac{1}{\left(\operatorname{Re} b\right)^2}+\sum_{s\in\mathbb{N}}\frac{1}{4s^2+4sx+\left(\operatorname{Re} b\right)^2}+$$

$$\sum_{s\in\mathbb{N}}\frac{1}{4s^2-4sx+\left(\operatorname{Re} b\right)^2}=\frac{1}{\left(\operatorname{Re} b\right)^2}+\sum_{s\in\mathbb{N}}\frac{2(4s^2+\left(\operatorname{Re} b\right)^2)}{(4s^2+\left(\operatorname{Re} b\right)^2)^2-16s^2x^2}.$$

由于函数$(4s^2+(\operatorname{Re}\ b)^2)^2-16s^2x^2$ 在区间 $[-|\operatorname{Re} b|,|\operatorname{Re} b|]$ 上于点 $x=|\operatorname{Re}\ b|$ 或 $x=-|\operatorname{Re}\ b|$, 处取得其最小值，故在这两种情形下，我们得到

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{|\lambda-(2n+t+ib)|^2}\leq\frac{1}{\left(\operatorname{Re} b\right)^2}+\sum_{s\in\mathbb{N}}\frac{1}{\left(2s+|\operatorname{Re} b|\right)^2}+\sum_{s\in\mathbb{N}}\frac{1}{\left(2s-|\operatorname{Re} b|\right)^2}.\tag{38}$$

现在，利用显然的等式

$$\sum_{s\in\mathbb{N}}\frac{1}{\left(2s+|\operatorname{Re} b|\right)^2}<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2s)^2}=\frac{1}{24}\pi^2$$

and

$$\sum_{s\in\mathbb{N}}\frac{1}{\left(2s-|\operatorname{Re} b|\right)^2}<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2s-1)^2}=\frac{1}{8}\pi^2,$$

我们得到

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{|\lambda-(2n+(t+ib)|^2}<\frac{1}{\left(\operatorname{Re} b\right)^2}+\frac{1}{6}\pi^2.$$

因此， $j=2$ 情形下的 (36) 得证。同理，利用 (34) 的证明中的论证，我们证明了 $j=1.$ 情形下的 (36)。现在，我们不再使用 (27) 和 (29)，而是使用 (35) 和 (36)，并重复引理1的证明，从而得到本引理的证明。

■

现在，我们可以证明本节的主要结果了。

定理 4 假设引理*1*或引理 *2*的条件成立，则：

(a) 算子 $L_t(Q)$ 的所有特征值对于所有 $t \in (-1,1]$ 都是单重的。(b) $L(Q)$ 是一个谱算子。(c) 对于每个 $f \in L_2^m(-\infty,\infty)$，下列等式成立：

$$f = \frac{1}{2} \sum_{j=1,2;\ k\in\mathbb{Z}} \int_{(-1,1]} a_{k,j}(t)\Psi_{k,j,t}dt,$$

其中，对于每个 $a,b \in \mathbb{R}.$，该级数在 $L_2^2(a,b)$-范数下收敛

证明。 (a) 考虑算子族 $L_t(Q_b+\varepsilon(Q-Q_b))$，其中 $\varepsilon \in [0,1].$ 不使用 (26)，而使用

$$(\lambda(\varepsilon) - (2n+(-1)^j(t+ib))(\Psi_{\lambda(\varepsilon)},\varphi_{n,j,t}) = (\Psi_{\lambda(\varepsilon)},\varepsilon(Q-Q_b)\varphi_{n,j,t}),$$

其中 $\Psi_{\lambda(\varepsilon)}$ 是算子 $L_t(Q_b+\varepsilon(Q-Q_b))$ 的归一化特征函数，并重复引理1的证明，可得：若 $|\operatorname{Re} b| \geq 1$ 且 (27) 成立，则对于所有 $k \in \mathbb{Z}$，圆 $C(1, 2k \pm t \pm ib)$ 都位于算子 $L_t(Q_b+\varepsilon(Q-Q_b))$ 的预解集中，其中 $\varepsilon \in [0,1].$。由于算子族 $L_t(Q_b+\varepsilon(Q-Q_b))$ $L_{t,\ \varepsilon}$ 关于 ε 是全纯族，且算子 $L_t(Q_b)$ 在这些圆内恰有一个特征值，因此算子 $L_t(Q)$ 在该圆内也必定恰有一个特征值（计重数）。这意味着 $L_t(Q)$ 的所有特征值都是单重的。同理，若满足引理 2 的条件，则可证明 $L_t(Q)$ 的所有特征值都是单重的。

(b) 设 $\gamma(t)$为位于预解集 $\rho(L_t(Q))$中的一条闭围道。则存在数对$(k_1,\ j_1)$，$(k_2,\ j_2)\ \cdots$，$(k_s,\ j_s)$，它们取自 $\{(k,\ j) \in \mathbb{Z}:\ |k| < N,\ j = 1,\ 2\}$ 以及该集合的一个子集 $\mathbb{D}(t)$

$$\{(n,j) : n \in \mathbb{Z}, |\ n\ | \geq N,\ j = 1,2\}$$

使得 $\gamma(t)$围住特征值$\lambda_{k_1,\ j_1}(t)\ \lambda_{k_2,\ j_2}(t)\ \cdots,\ \lambda_{k_s,\ j_s}(t)$以及$\lambda_{n,\ j}(t)$，对于$(n,\ j)\ \in\mathbb{D}(t)$，其中 N 在定理1(a)中定义，且不依赖于 t。于是，我们有

$$e(\gamma(t))f = \sum_{i=1,2,\ldots,s} \frac{1}{\alpha_{k_ij_i}(t)}(f,\Psi^*_{k_ij_i,t})\Psi_{k_ij_i,t} + \sum_{(n,j)\in\mathbb{D}(t)} \frac{1}{\alpha_{n,j}(t)}(f,\Psi^*_{n,j,t})\Psi_{n,j,t}. \tag{39}$$

显然,

$$\left\| \sum_{i=1,2,\ldots,s} \frac{1}{\alpha_{k_ij_i}(t)}(f,\Psi^*_{k_ij_i,t})\Psi_{k_ij_i,t} \right\| \leq \sum_{i=1,2,\ldots,s} \frac{\|f\|}{|\alpha_{k_ij_i}(t)|}. \tag{40}$$

此外，$|\alpha_{k_ij_i}(t)|$ 连续依赖于 t 与 $\alpha_{k_ij_i}(t) \neq 0$，对所有 $t \in [-1,1].$ 成立。因此，由(21)、(24)、(39)和(40)可得

$$\|e(\gamma(t))\| < m_6$$

对所有 $t \in (-1,\ 1]$ 以及 $\gamma(t) \subset \rho(L_t)$。因此，由定义1可得（$b$）的证明。

（c）由于所有特征值都是单重的，因此表达式 $a_{k,\ j}(t)\Psi_{k,\ j,\ t}$ 对所有 $j = 1,\ 2$ 和 $k \in \mathbb{Z}.$ 均可积。因此，由定理 3可得（c）的证明。 ■

注 2 由于 $L_t(Q+aI)$的特征值（其中 $a \in \mathbb{C}$ 和 I 是单位矩阵）是通过平移 $L_t(Q)$的特征值而得到的，且特征函数保持不变，因此将（*27*）和（*35*）分别替换为下式后，定理 *4* 仍然成立：

$$\inf_a \int_0^\pi |a_1(x)+a \pm (a_2(x)+b)\,i|^2 + |a_3(x)-b \pm \imath(a_4(x)+a)|^2\,dx \leq \frac{4}{\pi},$$

$$and \quad \inf_{a} \int_{0}^{\pi} |a_1(x) + a \pm (a_2(x) + b)\, i|^2 + |a_3(x) - b \pm i(a_4(x) + a)|^2 \le 2\pi \left(\frac{2}{\text{(实部 } b)^2 + \frac{1}{3}\pi^2} \right)^{-1}.$$

参考文献

[1] P. Djakov，B. S. Mitjagin，三角多项式势下 Hill 算子谱分解的收敛性，《数学年刊》**351**，509-540（2011）。[2] P. Djakov 和 B. Mityagin，一维周期 Dirac 算子的 Riesz 投影的 Bari-Markus 性质，《数学消息》283，第3期，443–462（2010）。[3] P. Djakov 和 B. Mityagin，Hill 算子和一维 Dirac 算子的根函数构成 Riesz 基的存在判据，《泛函分析杂志》263，第8期，2300–2332（2012）。[4] P. Djakov 和 B. Mityagin，具有正则边界条件的一维 Dirac 算子谱分解的无条件收敛，《印第安纳大学数学杂志》61，第1期，359–398（2012）。[5] N. Dunford 和 J. T Schwartz，《线性算子》第三部分：谱算子。Wiley–Interscience，纽约，1988年。[6] M. G. Gasymov，具有周期系数的一类常微分算子的谱分析，《苏联数学文献》**21**，718–721（1980）。[7] I. M. Gelfand，具有周期系数的方程的特征函数级数展开，《苏联数学文献》73，1117-1120（1950）。[8] F. Gesztesy 和 V. Tkachenko，Hill 算子成为标量型谱算子的判据，《数学分析杂志》. **107**，287–353（2009）。[9] A. A. Lunyov 和 M. M. Malamud，关于 Dirac 型 2×2 系统根向量系的 Riesz 基性质，《数学文献》90，第2期，556–561（2014）。[10] A. A. Lunyov 和 M. M. Malamud，关于一阶系统边值问题根子空间的完备性和 Riesz 基性质及其应用，《谱理论杂志》5，第1期，17–70（2015）。[11] A.A.Lunyov 和M.M. Malamud，关于Dirac 型算子根向量系的 Riesz 基性质2×2，《数学分析与应用杂志》441，57–103（2016）。[12] A. A. Lunyov，M. M. Malamud，关于Dirac 型系统边值问题特征行列式公式及其应用，《数学进展》478，110389（2025）。[13] D. C. McGarvey，具有周期系数的微分算子，发表于 $L_p(-\infty,\infty)$，《数学分析与应用杂志》11，564-596（1965）。[14] D. C. McGarvey，周期微分算子的扰动结果，《数学分析与应用杂志》12（1965）187-234。[15] A. M. Savchuk 和 I. V. Sadovnichaya，复值可积势下 Dirac 系统基本解的渐近公式，《微分方程》40第5期，545-556（2013）。

[16] A. M. Savchuk 和 A. A. Shkalikov，具有复值可求和势的狄拉克算子，《数学札记》96，第5–6期，777–810（2014）。[17] A. A. Shkalikov，一阶常微分方程组的正则谱问题，《俄罗斯数学评论》76:5，939–941（2021）。[18] V. A. Tkachenko，非自伴周期狄拉克算子，《算子理论：进展与应用》第121卷，485-512（2001）。[19] O. A. Veliev，非自伴 Hill 算子的渐近分析，《中欧数学杂志》11，第12期，2234-2256页（2013）。[20]O. A. Veliev，渐近谱周期微分算子，《数学札记》第104卷，第3期，364–376（2018）。[21] O. A. Veliev，关于非自伴 Mathieu-Hill 算子的谱性与谱展开，《纯粹与应用分析通讯》19，第3期，1537-1562页（2020）。[22] O. A. Veliev，具有周期势的非自伴薛定谔算子：标量与向量情形的谱理论及其推广，施普林格，瑞士，487页，2025年。¨O. A. Veliev，关于周期系数微分算子的谱性，《数学札记》第118卷，第4期，714-725（2025）。[23] O. A. Veliev，复值周期势下的一维狄拉克算子的谱展开，arXiv:2602.04414，2026年2月。[24]A. Zygmund，《三角级数》，剑桥大学出版社，768页，1988年。