arXiv:2603.02890v1 [math.ST] 3 Mar 2026

圆形格点上的马尔可夫过程

Sourav Majumdar
souravm@iitk.ac.in

印度理工学院坎普尔分校管理科学系，印度

摘要

我们针对离散圆分布建立了一种马尔可夫过程视角，其动机来自方向统计学场景：角度在有限网格上被观测并随时间演化。在 m点离散圆（即环图）上，我们研究扩散生成族，得到显式转移核、精确三角矩以及收敛到均匀分布。我们提出一种简单方法，用以构造具有任意给定严格正平稳概率质量函数π的可逆最近邻链，从而给出连续圆上马尔可夫过程的离散类比。我们构造了平稳分布为离散 von Mises 分布和包裹柯西分布的过程，并给出闭式归一化因子与精确矩。

关键词：方向统计学，圆统计学，离散圆，冯·米塞斯过程，图拉普拉斯。

1 引言

方向统计学（Jammalamadaka 和 Sengupta，2001；Mardia 和 Jupp，2000）研究随机方向与取向，其中圆形数据是基本情形。在连续设定下，一个有用的组织原则是，许多经典的圆形分布自然源于 $\mathbb{S}^1$上的随机过程：圆上的布朗运动以均匀分布为平衡分布，并且具有遍历性；而冯·米塞斯分布可以刻画为圆上的一个时间可逆均值回复扩散过程——冯·米塞斯过程的平稳分布，参见 Kent，1975；Kent，1978），该过程在 $\mathbb{S}^1$上扮演奥恩斯坦–乌伦贝克过程的角色。当角度是按顺序观测，而非仅观察一个静态（与时间无关）的边际分布时，这类过程构造尤其具有吸引力；另请参见方向统计学中近期与此相关的、基于扩散的研究，例如 Garc´ıa-Portugu´es 和 Sørensen，2025；Garc´ıa-Portugu´es、Sørensen 等，2019；Majumdar 和 Laha，2024。

当方向以有限网格记录时，便会产生离散圆数据：例如有限分辨率传感器、离散化方位角、分箱相位测量或离散化方向偏好。Mardia and Sriram 对圆形格点上的静态建模作了全面的近期论述，2023，他们通过一般构造原理对各类离散圆分布进行组织，并通过应用示例加以说明，其中包括圆周观测自然记录为有限个方向之一、且可能随时间变化的情形，例如轮盘赌和顶相位数据。这些例子促使我们超越纯静态概率质量函数：当观测带有时间索引时，我们往往希望建立模型来描述离散方向如何随时间演变，而不只是描述其边际分布。

本文旨在从马尔可夫过程的角度，研究定义在最简单离散圆——与环图相对应的 m 点格点——上的离散圆分布。具体而言，我们将带有时间索引的离散方向建模为角值过程 $\Theta_t = \theta_{X_t}$，其中 $(X_t)_{t\geq 0}$ 是定义在循环图 $\mathbb{Z}_m$ 上的连续时间马尔可夫链。这为圆上的两种典型连续构造提供了离散类比：

1. **扩散生成的时边缘分布：**我们通过循环图上的半群 P_t 演化初始概率质量函数 p_0，并研究由此得到的分布族 $p_t = p_0 P_t$。对于 $\mathbb{Z}_m$，傅里叶分析可得完全显式的转移核、精确三角矩，以及收敛到均匀分布的混合速率。2. **漂移生成的平稳分布：**我们构造循环图上的最近邻生成元 Q，使其关于给定的严格正概率质量函数 π 可逆。这给出了均值回复圆周扩散的一种离散类比：该马尔可夫链具有局部（最近邻）动力学

在圆周上，并收敛到指定的平衡偏好分布 π。特别地，若选择 π 为离散冯·米塞斯分布，就会得到一种自然的离散冯·米塞斯过程，直接类比于 Kent 的连续冯·米塞斯过程，1978；同样，离散包裹柯西目标分布也会产生类似的包裹柯西平衡过程。

在环图上进行研究的一个关键特点是，这些过程构造具有显式且便于计算的推论，例如闭式傅里叶表示、精确三角矩以及显式收敛速率。由于我们能够得到显式转移核，我们的结果使得对离散圆周时变数据进行基于似然的推断成为可能，从而适用于上文所列的实际问题。

论文结构。 第2节介绍由环拉普拉斯算子的分数次幂生成的循环图上的扩散半群。我们推导转移核的显式傅里叶级数，识别均匀平稳性，得到精确三角矩公式，并给出收敛到均匀分布的收敛界。第3节发展互补构造：以任意正概率质量函数 π为目标的可逆最近邻链。对 π 作特殊化可得到离散 von Mises 过程与离散包裹柯西过程；当位置参数落在网格上时，我们推导出闭式归一化常数与精确三角矩。

记号与约定。 固定一个整数 $m \geq 3$。我们记 $\mathbb{Z}_m := \{0, 1, \ldots, m-1\}$，其中运算按模 m理解。我们将 $r \in \mathbb{Z}_m$ 等同于网格角 $\theta_r := 2\pi r/m \in [0, 2\pi)$，并记$D_m := \{\theta_r : r \in \mathbb{Z}_m\}$。我们考虑环图 $G_m = (\mathbb{Z}_m, E)$，其边为 $r \leftrightarrow r \pm 1$（模 m），以及它的（组合）拉普拉斯算子 L，该算子作用于函数 $f : \mathbb{Z}_m \to \mathbb{R}$，方式为

$$(Lf)(r) = 2f(r) - f(r+1) - f(r-1),$$

指标按模 m 解释。

2 循环图上的扩散半群

参见 Lov´asz，1993 以了解图上随机游走的背景。固定 $\alpha > 0$ 与 $\beta \in (0, 1]$。我们定义半群（参见 Jacob，2001，第 2.7 节；关于图拉普拉斯算子参见 Chung，1997，第 1.2 节和第 10 章），

$$P_t^{(\beta)} := \exp\big(-\alpha t L^\beta\big), \qquad t \geq 0, \tag{1}$$

其中 L^β 定义如下：由于 L 是实对称的，存在正交归一矩阵 U 与对角矩阵 $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_0, \ldots\ldots, \lambda_{m-1})$，且 $\lambda_j \geq 0$ 使得

$$L = U \Lambda U^\top. \tag{2}$$

由于 L 是半正定的，所有特征值满足 $\lambda_j \geq 0$。然后我们令

$$L^\beta := U \Lambda^\beta U^\top, \qquad \Lambda^\beta := \mathrm{diag}(\lambda_0^\beta, \ldots, \lambda_{m-1}^\beta), \tag{3}$$

并定义

$$P_t^{(\beta)} := \exp(-\alpha t L^\beta) := U \mathrm{diag}\big(e^{-\alpha t \lambda_0^\beta}, \ldots, e^{-\alpha t \lambda_{m-1}^\beta}\big) U^\top. \tag{4}$$

情形 $\beta = 1$ 对应于图上的标准热半群（连续时间简单随机游走）。情形 $\beta = \frac{1}{2}$ 是连续圆上泊松半群的离散类比。

马尔可夫解释。 由于 $L\mathbf{1} = 0$，我们有 $P_t^{(\beta)}\mathbf{1} = \mathbf{1}$ 对所有 t（各行之和为 1）。此外，对于 $\beta \in (0, 1)$，可以将 $P_t^{(\beta)}$ 表示为热半群的 Bochner 从属过程，从而保持正性；参见 Jacob，2001，第 4.3 节。因此，$P_t^{(\beta)}(r, s)$ 可以解释为连续时间马尔可夫链 $(X_t)_{t \geq 0}$ 在 $\mathbb{Z}_m$ 上的转移概率，其生成元为 $-\alpha L^\beta$。

我们还考虑与之相关的角值过程

$$\Theta_t := \theta_{X_t} \in D_m.$$

2.1 转移核

在有限循环群 $\mathbb{Z}_m$ 上，定义特征标

$$\varphi_k(r) := \exp\Big(i\frac{2\pi kr}{m}\Big), \qquad k, r \in \mathbb{Z}_m.$$

它们满足正交关系

$$\frac{1}{m}\sum_{r=0}^{m-1} \varphi_k(r)\overline{\varphi_\ell(r)} = \frac{1}{m}\sum_{r=0}^{m-1} e^{i\frac{2\pi(k-\ell)r}{m}} = \mathbf{1}\{k=\ell\}. \tag{5}$$

定理1 (显式转移核). *For each $k \in \mathbb{Z}_m$, φ_k is an eigenfunction of L with eigenvalue*

$$\lambda_k = 2 - 2\cos\Big(\frac{2\pi k}{m}\Big) = 4\sin^2\Big(\frac{\pi k}{m}\Big). \tag{6}$$

Consequently, for $\beta \in (0,1]$ and $t \geq 0$,

$$P_t^{(\beta)}(r,s) = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} \exp\big(-\alpha t\lambda_k^\beta\big)\exp\Big(i\frac{2\pi k}{m}(s-r)\Big). \tag{7}$$

Moreover, $P_t^{(\beta)}(r, s)$ depends only on $s - r$ （模 m） (translation invariance).

令 u 表示 $\mathbb{Z}_m$上的均匀概率质量函数:

$$u(r) := \frac{1}{m}, \qquad r \in \mathbb{Z}_m.$$

推论1 （收敛到均匀分布）。 *For all $\beta \in (0,1]$ and $t \geq 0$, $uP_t^{(\beta)} = u$. Moreover, for any initial pmf p_0 on $\mathbb{Z}_m$, the evolved pmf $p_t := p_0P_t^{(\beta)}$ converges to u as $t \to \infty$.*

Proof. 常函数$\mathbf{1}$ 是特征函数 φ_0，对应的特征值为 $\lambda_0 = 0$。因此 $P_t^{(\beta)}\mathbf{1} = \mathbf{1}$，且 u 是平稳的。由于 $\lambda_k > 0$ 对于 $k \neq 0$, 每个非常函数傅里叶模态都会乘以$e^{-\alpha t\lambda_k^\beta} \to 0$, 这意味着分布收敛到均匀分布。 □

2.2 精确三角矩

设 p 是 $\mathbb{Z}_m$上的概率质量函数。我们使用离散傅里叶变换

$$\widehat{p}(k) := \sum_{r=0}^{m-1} p(r)\exp\Big(-i\frac{2\pi kr}{m}\Big), \qquad k \in \mathbb{Z}_m,$$

并回顾 $\theta_r = 2\pi r/m$ 和 $\Theta_t = \theta_{X_t}$。

命题1. *Let $\beta \in (0,1]$ and let $p_t = p_0P_t^{(\beta)}$. Then for every $k \in \mathbb{Z}_m$,*

$$\widehat{p_t}(k) = \widehat{p_0}(k)\exp\big(-\alpha t\lambda_k^\beta\big). \tag{8}$$

Equivalently, for any integer ℓ (only ℓ 模 m matters),

$$\mathbb{E}\Big[e^{i\ell\Theta_t}\Big] = \mathbb{E}\Big[e^{i\ell\Theta_0}\Big]\exp\big(-\alpha t\lambda_{\ell \bmod m}^\beta\big). \tag{9}$$

In particular, if $X_0 = r_0$ (so $\Theta_0 = \theta_{r_0}$), then

$$\mathbb{E}\Big[e^{i\ell(\Theta_t-\theta_{r_0})}\Big] = \exp\big(-\alpha t\lambda_{\ell \bmod m}^\beta\big), \quad \mathbb{E}\big[\cos\big(\ell(\Theta_t-\theta_{r_0})\big)\big] = e^{-\alpha t\lambda_{\ell \bmod m}^\beta}, \quad \mathbb{E}\big[\sin\big(\ell(\Theta_t-\theta_{r_0})\big)\big] = 0.$$

推论 2 （单参数集中度摘要）。 *Consider the location family obtained by starting the diffusion from a point mass at r_0 (equivalently, by shifting the kernel). Then the mean direction is θ_{r_0} and the first resultant length equals*

$$R(t) := \Big|\mathbb{E}[e^{i\Theta_t}]\Big| = \exp\big(-\alpha t\lambda_1^\beta\big).$$

Thus moment-matching based on an empirical resultant length $\widehat{R}$ suggests

$$\widehat{\alpha t} = -\frac{\log\widehat{R}}{\lambda_1^\beta}.$$

2.3 混合速率

令 u 表示 $\mathbb{Z}_m$, $u(r) = 1/m$ 上的均匀概率质量函数。对于概率质量函数 p，我们通过拉东-尼科迪姆导数 p/u 来衡量其与 u 的偏差:

$$f(r) := \frac{p(r)}{u(r)} - 1 = mp(r) - 1, \qquad r \in \mathbb{Z}_m.$$

对于时间边缘分布 $p_t = p_0 P_t^{(\beta)}$，定义 $f_t := p_t/u - 1$。注意

$$\sum_{r=0}^{m-1} u(r) f_t(r) = \sum_{r=0}^{m-1} \big(p_t(r) - u(r)\big) = 1 - 1 = 0. \tag{10}$$

我们使用加权范数

$$\|g\|_{p,u}^p := \sum_{r=0}^{m-1} u(r)|g(r)|^p, \qquad p \in [1,\infty), \qquad \|g\|_{\infty,u} := \max_{0\le r\le m-1} |g(r)|.$$

特别地,

$$\|f_t\|_{2,u}^2 = \frac{1}{m}\sum_{r=0}^{m-1} |f_t(r)|^2.$$

全变差满足恒等式

$$\|p_t - u\|_{TV} = \frac{1}{2}\sum_{r=0}^{m-1} |p_t(r) - u(r)| = \frac{1}{2}\sum_{r=0}^{m-1} u(r)|f_t(r)| = \frac{1}{2}\|f_t\|_{1,u}. \tag{11}$$

定理 2（全变差界）。 *Let* $\lambda_\star := \min\{\lambda_k : k \neq 0\} = \lambda_1 = 4\sin^2(\pi/m)$. *For any initialpmf* p_0 *and all* $t \ge 0$,

$$\|f_t\|_{2,u} \le e^{-\alpha t \lambda_\star^\beta} \|f_0\|_{2,u}. \tag{12}$$

Consequently,

$$\|p_t - u\|_{TV} \le \frac{1}{2}\|f_t\|_{2,u} \le \frac{1}{2} e^{-\alpha t \lambda_\star^\beta} \|f_0\|_{2,u}. \tag{13}$$

In particular, if $p_0 = \delta_{r_0}$, *then* $\|f_0\|_{2,\ u} = \sqrt{m-1}$ *and*

$$\|p_t - u\|_{TV} \le \frac{1}{2}\sqrt{m-1}\, e^{-\alpha t \lambda_\star^\beta}.$$

3 给定平稳分布的最近邻链

现在我们来讨论互补的构造问题：给定一个处处严格为正的目标概率质量函数 π，定义在 $\mathbb{Z}_m$上，构造一个最近邻连续时间马尔可夫链，使其唯一的平稳分布为 π。保证平稳性的一种简便方法，是要求该链关于 π可逆。这可视为 Kent，1978 中离散类比。

命题 2（可逆最近邻构造）。 *Let* $\pi = (\pi_0, \dots, \pi_{m-1})$ *be a strictly positive pmf on* $\mathbb{Z}_m$ *and let* $\alpha > 0$. *Define an infinitesimal generator* $Q = (q_{r,s})_{r,s\in\mathbb{Z}_m}$ *by*

$$q_{r,r+1} = \alpha\sqrt{\frac{\pi_{r+1}}{\pi_r}}, \qquad q_{r,r-1} = \alpha\sqrt{\frac{\pi_{r-1}}{\pi_r}}, \qquad q_{r,r} = -(q_{r,r+1} + q_{r,r-1}), \tag{14}$$

and $q_{r,s} = 0$ *otherwise. Then:*

(i) Q *is a valid generator of a nearest-neighbour continuous-time Markov chain on* $\mathbb{Z}_m$ *(all off-diagonal rates are nonnegative and rows sum to* 0*);*

(ii) the chain is reversible with respect to π, *i.e. it satisfies detailed balance*

$$\pi_r q_{r,s} = \pi_s q_{s,r} \qquad \text{for all } r, s \in \mathbb{Z}_m; \tag{15}$$

(iii) consequently, π *is stationary:* $\pi Q = 0$ *(equivalently,* $\pi P_t = \pi$ *for all* $t \ge 0$*).*

当 π 为均匀分布时，$\pi_{r+1}/\pi_r = 1$ 且跃迁率 $q_{r,\ r\pm1}$ 为常数，从而得到循环图上常见的连续时间最近邻随机游走。对于一般的 π，当 $\pi_{r+1} > \pi_r$时，正向跃迁率 $q_{r,\ r+1}$ 较大，因此移动倾向于概率较高的状态，同时保持可逆性。

3.1 离散冯·米塞斯过程

固定 $\kappa \geq 0$ 和 $\mu \in [0, 2\pi)$。网格 $D_m = \{\theta_r = 2\pi r/m$ 上的离散 von Mises 概率质量函数：$r \in \mathbb{Z}_m\}$ 为

$$\pi_r^{\mathrm{vM}}(\kappa, \mu) := \frac{\exp\{\kappa \cos(\theta_r - \mu)\}}{Z_m(\kappa, \mu)}, \qquad Z_m(\kappa, \mu) := \sum_{j=0}^{m-1} \exp\{\kappa \cos(\theta_j - \mu)\}. \tag{16}$$

推论 3 *Applying Proposition 2 with $\pi = \pi^{\mathrm{vM}}$ κ μ yields a reversible* (冯·米塞斯平稳分布)。 (,) (,) *nearest-neighbour chain on $\mathbb{Z}_m$ whose stationary distribution is π^{vM} κ μ .*

若 μ 位于网格上，即存在某个 $r_0 \in \mathbb{Z}_m$ 使得 $\mu = \theta_{r_0}$，那么 $Z_m(\kappa, \mu)$ 与 r_0 无关。事实上，将 r 替换为 $r - r_0$ 会使 (16) 中的求和项重新排列，因此 $Z_m(\kappa, \theta_{r_0}) = Z_m(\kappa, \theta_0)$。因此，我们记 $Z_m(\kappa) := Z_m(\kappa, \theta_0)$。

定理 3（离散 von Mises 过程的归一化常数）。 *Assume $\mu = \theta_{r_0}$ for some $r_0 \in \mathbb{Z}_m$.Then*

$$Z_m(\kappa) = m \sum_{q \in \mathbb{Z}} I_{qm}(\kappa) = m\Big(I_0(\kappa) + 2\sum_{q=1}^{\infty} I_{qm}(\kappa)\Big), \tag{17}$$

where $I_n(\cdot)$ is the modified Bessel function of the first kind.

推论4 (精确三角矩). *Assume $\mu = \theta_{r_0}$. Then for any integer ℓ,*

$$\mathbb{E}_{\pi^{\mathrm{vM}}}\left[e^{i\ell(\Theta - \mu)}\right] = \frac{\sum_{q \in \mathbb{Z}} I_{\ell + qm}(\kappa)}{\sum_{q \in \mathbb{Z}} I_{qm}(\kappa)}. \tag{18}$$

Equivalently,

$$\mathbb{E}_{\pi^{\mathrm{vM}}}\left[e^{i\ell\Theta}\right] = e^{i\ell\mu} \frac{\sum_{q \in \mathbb{Z}} I_{\ell + qm}(\kappa)}{\sum_{q \in \mathbb{Z}} I_{qm}(\kappa)}.$$

3.2 离散绕柯西过程

固定 $\rho \in (0,1)$和 $\mu \in [0, 2\pi)$。考虑网格上的泊松核取值

$$w_r(\rho, \mu) := \frac{1 - \rho^2}{1 - 2\rho\cos(\theta_r - \mu) + \rho^2}, \qquad r \in \mathbb{Z}_m, \tag{19}$$

并通过归一化定义离散绕柯西概率质量函数,

$$\pi_r^{\mathrm{WC}}(\rho, \mu) := \frac{w_r(\rho, \mu)}{\sum_{j=0}^{m-1} w_j(\rho, \mu)}.$$

推论 5 *Applying Proposition 2 with $\pi = \pi^{\mathrm{WC}}$ ρ μ yields a* (绕柯西平稳分布). (,) (,) *reversible nearest-neighbour chain on $\mathbb{Z}_m$ whose stationary distribution is π^{WC} ρ μ .*

如果 $\mu = \theta_{r_0}$ 位于网格上，那么 $\{\theta_r - \mu : r \in \mathbb{Z}_m\}$ 只是 $\{\theta_r : r \in \mathbb{Z}_m\}$的一个排列，因此归一化因子 $\sum_r w_r(\rho, \mu)$ 不依赖于 r_0。下文中我们假设 $\mu = \theta_{r_0}$。

T定理 4（归一化常数与矩）。 *Assume $\mu = \theta_{r_0}$ for some $r_0 \in \mathbb{Z}_m$. Then*

$$\sum_{r=0}^{m-1} w_r(\rho, \mu) = m\frac{1 + \rho^m}{1 - \rho^m}, \tag{20}$$

and therefore

$$\pi_r^{\mathrm{WC}}(\rho, \mu) = \frac{1 - \rho^m}{m(1 + \rho^m)} \frac{1 - \rho^2}{1 - 2\rho\cos(\theta_r - \mu) + \rho^2}. \tag{21}$$

Moreover, for $\ell \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$,

$$\mathbb{E}_{\pi^{\mathrm{WC}}}\left[e^{i\ell(\Theta - \mu)}\right] = \frac{\rho^\ell + \rho^{m-\ell}}{1 + \rho^m}. \tag{22}$$

致谢

作者谨向 Karthik Sriram 教授致谢，感谢他就 Mardia and Sriram，2023 提供了有益的讨论，并对本文的早期版本提出了意见。

参考文献

Chung, F. R. (1997).谱图论 (第 92 卷). 美国数学学会。Garc´ıa-Portugu´es, E., & Sørensen, M. (2025). 一类具有精确似然推断的环面扩散。*Biometrika*。Garc´ıa-Portugu´es, E., Sørensen, M., Mardia, K. V., & Hamelryck, T. (2019). 环面上的朗之万扩散：估计与应用。统计与计算，*29*，1–22。Jacob, N. (2001). 伪微分算子与马尔可夫过程：第一卷：傅里叶分析与半群。世界科技出版公司。Jammalamadaka, S., & Sengupta, A. (2001). 圆统计学专题。世界科学出版社。Kent, J.T. (1975). 对 Mardia 教授论文的讨论。英国皇家统计学会会刊：*B*辑（方法论），*37*(3), 371–393。Kent, J. T. (1978). 时间可逆扩散。应用概率进展，*10*(4), 819–835。Lov´asz, L. (1993). 图上的随机游走。组合学：*Paul Erdős* 八十华诞论文集，*2*(1-46), 4。Majumdar, S., & Laha, A. K. (2024). 圆上的扩散与随机相关模型。*arXiv* 预印本 *arXiv:2412.06343*。Mardia, K. V., & Jupp, P. E. (2000). 方向统计学。John Wiley & Sons。Mardia, K. V., & Sriram, K. (2023). 具有若干新颖应用的离散圆分布族。*Sankhya A*，*85*(1), 1–42。Stein, E. M., & Shakarchi, R. (2011). 傅里叶分析：导论 (第 1 卷)。普林斯顿大学出版社。

附录

定理证明1

Proof. 回忆一下，$(Lf)(r) = 2f(r) - f(r+1) - f(r-1)$，其中指标模 m。对于 $\varphi_k(r) = e^{i2\pi kr/m}$，

$$\varphi_k(r+1) = e^{i\frac{2\pi k(r+1)}{m}} = e^{i\frac{2\pi k}{m}}\varphi_k(r), \qquad \varphi_k(r-1) = e^{i\frac{2\pi k(r-1)}{m}} = e^{-i\frac{2\pi k}{m}}\varphi_k(r).$$

因此

$$(L\varphi_k)(r) = \Big(2 - e^{i\frac{2\pi k}{m}} - e^{-i\frac{2\pi k}{m}}\Big)\varphi_k(r) = \big(2 - 2\cos(2\pi k/m)\big)\varphi_k(r),$$

因此，φ_k 是一个特征函数，其特征值为 $\lambda_k = 2 - 2\cos(2\pi k/m)$。利用 $1 - \cos x = 2\sin^2(x/2)$可得$\lambda_k = 4\sin^2(\pi k/m)$。这些结论源于 L 是一个循环矩阵，详见 Chung，1997 。

定义内积 $\langle f,\ g\rangle := \frac{1}{m}\sum_{r=0}^{m-1} f(r)g(r)$。由 (5)，$\{\varphi_k\}_{k=0}^{m-1}$ 是 $\mathbb{C}^m$ 的标准正交基。因此任意函数 $f\colon\ \mathbb{Z}_m \to \mathbb{C}$ 都具有傅里叶展开

$$f(r) = \sum_{k=0}^{m-1} \widehat{f}(k)\varphi_k(r), \qquad \widehat{f}(k) := \langle f, \varphi_k\rangle = \frac{1}{m}\sum_{r=0}^{m-1} f(r)\overline{\varphi_k(r)}. \tag{23}$$

由于 $L\varphi_k = \lambda_k\varphi_k$，由线性性可得

$$Lf = \sum_{k=0}^{m-1} \widehat{f}(k)\lambda_k\varphi_k, \qquad L^\beta f = \sum_{k=0}^{m-1} \widehat{f}(k)\lambda_k^\beta\varphi_k,$$

令 $P_t^{(\beta)} = \exp(-\alpha t L^\beta)$。利用矩阵指数的幂级数定义，

$$P_t^{(\beta)} f = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\alpha t)^n}{n!}(L^\beta)^n f.$$

由于 $(L^\beta)^n\varphi_k = (\lambda_k^\beta)^n\varphi_k$，我们得到

$$P_t^{(\beta)}\varphi_k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\alpha t)^n}{n!}(\lambda_k^\beta)^n\varphi_k = e^{-\alpha t\lambda_k^\beta}\varphi_k.$$

因此，对于一般的 f 其展开式为（23），

$$(P_t^{(\beta)} f)(r) = \sum_{k=0}^{m-1} \widehat{f}(k) e^{-\alpha t \lambda_k^\beta} \varphi_k(r).$$

将前面的公式应用于 δ函数 $\delta_s(\cdot) := \mathbf{1}\{\cdot = s\}$。其傅里叶系数为

$$\widehat{\delta_s}(k) = \frac{1}{m} \sum_{r=0}^{m-1} \delta_s(r) \overline{\varphi_k(r)} = \frac{1}{m} \overline{\varphi_k(s)} = \frac{1}{m} e^{-i\frac{2\pi k s}{m}}.$$

Thus

$$P_t^{(\beta)}(r,s) = (P_t^{(\beta)} \delta_s)(r) = \sum_{k=0}^{m-1} \widehat{\delta_s}(k) e^{-\alpha t \lambda_k^\beta} \varphi_k(r) = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} e^{-\alpha t \lambda_k^\beta} e^{i\frac{2\pi k}{m}(r-s)}.$$

将 $r-s$ 替换为 $s-r$ （等价于取复共轭；结果为实数）得到（7）。

最终表达式中， r和 s仅通过 $r-s$(模 m) 产生影响，因此对于某个定义在 $\mathbb{Z}_m$ 上的函数 $\kappa_t^{(\beta)}$ ，有 $P_t^{(\beta)}(r,s) = \kappa_t^{(\beta)}(s-r)$。 □

命题1的证明

Proof. 固定 $k \in \mathbb{Z}_m$ ，并考虑复值函数 $f_k(r) := \exp(-i2\pi kr/m)$。根据定理 1，$f_k$ 是 L 的特征函数，特征值为 λ_k，因此它也是 L^β 的特征函数，特征值为 λ_k^β，进而也是 $P_{(\beta)\,t} = \exp(-\alpha t L^\beta)$ 的特征函数，特征值为 $e^{-\alpha t \lambda_k^\beta}$。具体而言，对于每个 $r \in \mathbb{Z}_m$,

$$(P_t^{(\beta)} f_k)(r) = e^{-\alpha t \lambda_k^\beta} f_k(r). \tag{24}$$

现在以塔性质的形式使用马尔可夫性质。由于 $p_t = p_0 P_t^{(\beta)}$ ，

$$\widehat{p}_t(k) = \sum_{r=0}^{m-1} p_t(r) f_k(r) = \sum_{r=0}^{m-1} \Big(\sum_{s=0}^{m-1} p_0(s) P_t^{(\beta)}(s,r) \Big) f_k(r).$$

交换有限求和的顺序，得到

$$\widehat{p}_t(k) = \sum_{s=0}^{m-1} p_0(s) \sum_{r=0}^{m-1} P_t^{(\beta)}(s,r) f_k(r) = \sum_{s=0}^{m-1} p_0(s) (P_t^{(\beta)} f_k)(s).$$

应用（24）可得

$$\widehat{p}_t(k) = \sum_{s=0}^{m-1} p_0(s) e^{-\alpha t \lambda_k^\beta} f_k(s) = e^{-\alpha t \lambda_k^\beta} \sum_{s=0}^{m-1} p_0(s) e^{-i2\pi ks/m} = e^{-\alpha t \lambda_k^\beta} \widehat{p}_0(k),$$

这就证明了（8）。

对于矩恒等式，注意到 $e^{i\ell\Theta_t} = e^{i\ell\theta_{X_t}} = \exp(i2\pi\ell X_t/m)$，因此

$$\mathbb{E}\left[e^{i\ell\Theta_t}\right] = \sum_{r=0}^{m-1} p_t(r) \exp\left(i\frac{2\pi\ell r}{m}\right) = \sum_{r=0}^{m-1} p_t(r) \exp\left(-i\frac{2\pi(m-\ell)r}{m}\right) = \widehat{p}_t(m-\ell \bmod m).$$

应用（8），取 $k = m-\ell$ 模 m，并利用 $\lambda_{m-\ell} = \lambda_\ell$，可得

$$\mathbb{E}\left[e^{i\ell\Theta_t}\right] = \widehat{p}_0(m-\ell) e^{-\alpha t \lambda_\ell^\beta} = \mathbb{E}\left[e^{i\ell\Theta_0}\right] e^{-\alpha t \lambda_{\ell \bmod m}^\beta},$$

即（9）。

最后，如果 $X_0 = r_0$ 那么 $\Theta_0 = \theta_{r_0}$ 并且

$$\mathbb{E}\left[e^{i\ell(\Theta_t - \theta_{r_0})}\right] = e^{-i\ell\theta_{r_0}} \mathbb{E}\left[e^{i\ell\Theta_t}\right] = e^{-i\ell\theta_{r_0}} \cdot e^{i\ell\theta_{r_0}} e^{-\alpha t \lambda_{\ell \bmod m}^\beta} = e^{-\alpha t \lambda_{\ell \bmod m}^\beta}.$$

取实部和虚部即可得到余弦和正弦形式的结论。 □

定理的证明2

记号。 对于函数 $g:\mathbb{Z}_m \to \mathbb{C}$，其中 $\widehat{g}$，其离散傅里叶变换如上所定义。反演公式为

$$g(r) = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} \widehat{g}(k)\exp\Big(i\frac{2\pi kr}{m}\Big), \tag{25}$$

以及帕ɪśɪʊ瓦尔恒等式

$$\|g\|_{2,u}^2 = \frac{1}{m}\sum_{r=0}^{m-1}|g(r)|^2 = \frac{1}{m^2}\sum_{k=0}^{m-1}|\widehat{g}(k)|^2. \tag{26}$$

请参阅 Stein 和 Shakarchi，2011 以获取参考资料。

Proof. 由于 u 对于 $P_{(\beta)\,t}$ 是平稳的，因此有 $uP_t^{(\beta)} = u$。所以

$$p_t - u = (p_0 - u)P_t^{(\beta)}.$$

两边乘以 m 并利用 $f_t = m(p_t - u)$，得到线性演化

$$f_t = f_0 P_t^{(\beta)}. \tag{27}$$

根据命题 1，每个傅里叶系数的演化为

$$\widehat{f}_t(k) = \widehat{f}_0(k)e^{-\alpha t\lambda_k^\beta}, \qquad k \in \mathbb{Z}_m. \tag{28}$$

此外，零均值性质（10）意味着

$$\widehat{f}_t(0) = \sum_{r=0}^{m-1} f_t(r) = m\sum_{r=0}^{m-1} u(r)f_t(r) = 0, \tag{29}$$

因此只有模式 $k \neq 0$ 会对 $\|f_t\|_{2,\,u}$ 作出贡献。

利用帕ɪśɪʊ瓦尔恒等式（26）和（28），

$$\|f_t\|_{2,u}^2 = \frac{1}{m^2}\sum_{k=0}^{m-1}|\widehat{f}_t(k)|^2 = \frac{1}{m^2}\sum_{k\neq 0}|\widehat{f}_0(k)|^2 e^{-2\alpha t\lambda_k^\beta}.$$

由于对所有 $k \neq 0$ 都有 $\lambda_k \geq \lambda_\star$，我们得到

$$\|f_t\|_{2,u}^2 \leq e^{-2\alpha t\lambda_\star^\beta}\frac{1}{m^2}\sum_{k\neq 0}|\widehat{f}_0(k)|^2 \leq e^{-2\alpha t\lambda_\star^\beta}\frac{1}{m^2}\sum_{k=0}^{m-1}|\widehat{f}_0(k)|^2 = e^{-2\alpha t\lambda_\star^\beta}\|f_0\|_{2,u}^2,$$

再取平方根，得到（12）。

由（11）以及在概率测度 u下应用柯西–施瓦茨不等式，

$$\|f_t\|_{1,u} = \sum_{r=0}^{m-1} u(r)|f_t(r)| \leq \Big(\sum_{r=0}^{m-1}u(r)\Big)^{1/2}\Big(\sum_{r=0}^{m-1}u(r)|f_t(r)|^2\Big)^{1/2} = \|f_t\|_{2,u}.$$

因此 $\|p_t - u\|_{TV} = \frac{1}{2}\|f_t\|_{1,\,u} \leq \frac{1}{2}\|f_t\|_{2,\,u}$，以及（13）由（12）可得。

若 $p_0 = \delta_{r_0}$，则对 $r \neq r_0$，$f_0(r_0) = m-1$ 且 $f_0(r) = -1$。因此

$$\|f_0\|_{2,u}^2 = \frac{1}{m}\Big((m-1)^2 + (m-1)\cdot 1\Big) = m-1,$$

所以 $\|f_0\|_{2,\,u} = \sqrt{m-1}$。 □

命题2的证明

Proof. *(i)* 由于对所有 r， $\pi_r > 0$，因此（14）中的非对角速率 $q_{r,\,r\pm1}$ 定义良好且严格为正。根据定义，对于非邻居，$q_{r,\,s} = 0$，且 $q_{r,\,r} = -\,(q_{r,\,r+1} + q_{r,\,r-1})$，因此

$$\sum_{s\in\mathbb{Z}_m} q_{r,s} = q_{r,r+1} + q_{r,r-1} + q_{r,r} = 0,$$

因此每一行的和都为 0，且 Q是一个合法的生成元。

(ii) 如果 $s = r+1$，那么利用（14），

$$\pi_r q_{r,r+1} = \pi_r \alpha\sqrt{\frac{\pi_{r+1}}{\pi_r}} = \alpha\sqrt{\pi_r\pi_{r+1}} = \pi_{r+1}\alpha\sqrt{\frac{\pi_r}{\pi_{r+1}}} = \pi_{r+1}q_{r+1,r}.$$

对 $s = r-1$，同样的计算也成立。对于所有其他的 s，有 $q_{r,\,s} = q_{s,\,r} = 0$。因此，细致平衡（15）对所有配对（$r$, s）都成立，且该马尔可夫链关于 π 可逆。

(iii) 对细致平衡等式关于每个固定的 s 对 r 求和，即可得到平稳性：

$$(\pi Q)_s = \sum_{r\in\mathbb{Z}_m} \pi_r q_{r,s} = \sum_{r\in\mathbb{Z}_m} \pi_s q_{s,r} = \pi_s \sum_{r\in\mathbb{Z}_m} q_{s,r} = \pi_s \cdot 0 = 0,$$

最后一步用到了 (i) 中的行和性质。因此 $\pi Q = 0$。 □

定理3的证明

Proof. 我们使用标准的傅里叶–贝塞尔展开（对所有 $\kappa \geq 0$ 和 $\theta \in \mathbb{R}$均成立）

$$e^{\kappa\cos\theta} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} I_n(\kappa) e^{in\theta}. \tag{30}$$

令 $\mu = \theta_{r_0}$，记 $\theta_r - \mu = 2\pi(r - r_0)/m$。于是

$$Z_m(\kappa,\mu) = \sum_{r=0}^{m-1} e^{\kappa\cos(\theta_r-\mu)} = \sum_{r=0}^{m-1}\sum_{n\in\mathbb{Z}} I_n(\kappa) e^{in(\theta_r-\mu)}.$$

将关于 r 的有限求和与关于 n 的绝对收敛级数交换，得到

$$Z_m(\kappa,\mu) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} I_n(\kappa) e^{-in\mu} \sum_{r=0}^{m-1} e^{in\theta_r}.$$

内层求和就是单位根筛法：

$$\sum_{r=0}^{m-1} e^{in\theta_r} = \sum_{r=0}^{m-1} e^{i2\pi nr/m} = \begin{cases} m, & m \mid n, \\ 0, & m \nmid n. \end{cases} \tag{31}$$

因此只有指标 $n = qm$ 保留下来，得到

$$Z_m(\kappa,\mu) = m\sum_{q\in\mathbb{Z}} I_{qm}(\kappa) e^{-iqm\mu}.$$

最后，由于 $\mu = \theta_{r_0} = 2\pi r_0/m$，我们有 $e^{-iqm\mu} = e^{-i2\pi qr_0} = 1$，因此 $Z_m(\kappa\ \mu$ κ $=$ $Z_m\ \kappa$ 17 $I_{-n}\ \kappa\ = I_n\ \kappa$,) $= m\sum_{q\in\mathbb{Z}} I_{qm}(\,)(\,)$，即 ()。第二个等号由 ( ) ( ) 得出。 □

推论 4 的证明

Proof. 根据定义，

$$\mathbb{E}_{\pi^{\mathrm{vM}}}\left[e^{i\ell(\Theta-\mu)}\right] = \frac{1}{Z_m(\kappa,\mu)} \sum_{r=0}^{m-1} e^{\kappa\cos(\theta_r-\mu)} e^{i\ell(\theta_r-\mu)}.$$

展开 $e^{\kappa\cos(\theta_r-\mu)}$，利用（30）：

$$\sum_{r=0}^{m-1} e^{\kappa\cos(\theta_r-\mu)} e^{i\ell(\theta_r-\mu)} = \sum_{r=0}^{m-1}\sum_{n\in\mathbb{Z}} I_n(\kappa) e^{i(n+\ell)(\theta_r-\mu)}.$$

交换求和次序，并对31）应用单位根筛法，处理 r中的内层求和：

$$\sum_{r=0}^{m-1} e^{i(n+\ell)(\theta_r-\mu)} = e^{-i(n+\ell)\mu}\sum_{r=0}^{m-1} e^{i(n+\ell)\theta_r} = \begin{cases} me^{-i(n+\ell)\mu}, & m \mid (n+\ell), \\ 0, & m \nmid (n+\ell). \end{cases}$$

因此只有指标 $n = -\ell + qm$ 有贡献，分子变为

$$m\sum_{q\in\mathbb{Z}} I_{-\ell+qm}(\kappa)e^{-i(qm)\mu}.$$

当 $\mu = \theta_{r_0}$、 $e^{-iqm\mu} = 1$ 时。利用 $I_{-n} = I_n$ 并对 $q \mapsto -q$ 重新编号，得到

$$m\sum_{q\in\mathbb{Z}} I_{-\ell+qm}(\kappa) = m\sum_{q\in\mathbb{Z}} I_{\ell+qm}(\kappa).$$

将 $Z_m(\kappa,\ \mu) = Z_m(\kappa) = m\sum_{q\in\mathbb{Z}} I_{qm}(\kappa)$除以定理3，得到（18）。第二个公式由 $e^{i\ell\Theta} = e^{i\ell\mu}e^{i\ell(\Theta-\mu)}$得出。

□

定理4的证明

Proof. 我们使用经典的泊松核傅里叶级数（Stein 和 Shakarchi，2011，第 3 章），其对$|\rho| < 1$成立：

$$\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos\theta+\rho^2} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \rho^{|n|}e^{in\theta} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\rho^n\cos(n\theta). \tag{32}$$

令 $\mu = \theta_{r_0}$，设 $\theta = \theta_r - \mu$。于是由（32），

$$w_r(\rho,\mu) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \rho^{|n|}e^{in(\theta_r-\mu)}.$$

对 r 求和，并将（绝对收敛的）级数与有限和交换，得到

$$\sum_{r=0}^{m-1} w_r(\rho,\mu) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \rho^{|n|}e^{-in\mu}\sum_{r=0}^{m-1} e^{in\theta_r}.$$

单位根筛法给出

$$\sum_{r=0}^{m-1} e^{in\theta_r} = \sum_{r=0}^{m-1} e^{i2\pi nr/m} = \begin{cases} m, & m \mid n, \\ 0, & m \nmid n. \end{cases} \tag{33}$$

因此，只有 $n = qm$ 存活：

$$\sum_{r=0}^{m-1} w_r(\rho,\mu) = m\sum_{q\in\mathbb{Z}} \rho^{|qm|}e^{-iqm\mu}.$$

由于 $\mu = \theta_{r_0} = 2\pi r_0/m$，我们有 $e^{-iqm\mu} = e^{-i2\pi qr_0} = 1$，因此

$$\sum_{r=0}^{m-1} w_r(\rho,\mu) = m\sum_{q\in\mathbb{Z}} \rho^{|qm|} = m\Big(1 + 2\sum_{q=1}^{\infty}\rho^{qm}\Big) = m\frac{1+\rho^m}{1-\rho^m},$$

这就是 (20)。将 w_r 除以这个归一化因子，得到 (21)。

根据定义，

$$\mathbb{E}_{\pi_{\mathrm{WC}}}\left[e^{i\ell(\Theta-\mu)}\right] = \frac{\sum_{r=0}^{m-1} w_r(\rho,\mu)e^{i\ell(\theta_r-\mu)}}{\sum_{r=0}^{m-1} w_r(\rho,\mu)}.$$

再次使用（32）：

$$\sum_{r=0}^{m-1} w_r(\rho,\mu)e^{i\ell(\theta_r-\mu)} = \sum_{r=0}^{m-1}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \rho^{|n|}e^{i(n+\ell)(\theta_r-\mu)}.$$

交换求和并应用滤波器（33）于 $\sum_r e^{i(n+\ell)\theta_r}$：

$$\sum_{r=0}^{m-1} e^{i(n+\ell)(\theta_r-\mu)} = e^{-i(n+\ell)\mu}\sum_{r=0}^{m-1} e^{i(n+\ell)\theta_r} = \begin{cases} me^{-i(n+\ell)\mu}, & m \mid (n+\ell), \\ 0, & m \nmid (n+\ell). \end{cases}$$

因此只有指标 $n = -\ell + qm$ 有贡献，分子变为

$$m \sum_{q \in \mathbb{Z}} \rho^{|qm-\ell|} e^{-iqm\mu}.$$

如前所述， $e^{-iqm\mu} = 1$ 当 $\mu = \theta_{r_0}$ 时。对于 $\ell \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$，我们明确计算该和：

$$\sum_{q \in \mathbb{Z}} \rho^{|qm-\ell|} = \rho^{\ell} + \sum_{q=1}^{\infty} \rho^{qm-\ell} + \sum_{q=1}^{\infty} \rho^{qm+\ell} = \rho^{\ell} + \frac{\rho^{m-\ell}}{1-\rho^m} + \frac{\rho^{m+\ell}}{1-\rho^m} = \frac{\rho^{\ell} + \rho^{m-\ell}}{1-\rho^m}.$$

因此，分子等于 $m(\rho^{\ell} + \rho^{m-\ell})/(1-\rho^m)$. 将其除以由（ $m(1+\rho^m)/(1-\rho^m)$ 给出的归一化因子20）即可得到（22）。 □