arXiv:2603.02900v1 [math.DG] 3 Mar 2026

曲面的光滑共形浸入的1参数 h-原理

ALAA BOUKHOLKHAL

摘要。我们用 h-原理的语言重新表述闭黎曼曲面的共形浸入问题，并证明从光滑共形浸入空间到浸入空间的包含映射在路径连通分支集合上诱导出一个双射。

1. 引言

自高斯时代以来，人们便已知，可定向曲面上的共形结构与其上的复结构（或黎曼曲面结构）一一对应。因此，自然会问，任意黎曼曲面是否都能嵌入（或浸入）欧几里得空间 $\mathbb{E}^3$，或者一般而言，嵌入任意黎曼流形。自纳什关于等距嵌入的工作以来 [16]，Garsia [9],Rüedy [19] 和 Ko [14]（对于可定向的黎曼环境空间）给出了肯定的回答。

纳什-库伊珀定理 [16] [15], 是格罗莫夫 h原理理论的主要灵感来源之一。h原理可定义为通过同伦方法研究微分关系（偏导数中的方程和不等式）。h原理的另一个著名例子是 Smale-Hirsh[21], [11] 关于浸入正则同伦的工作，该工作描述了浸入空间的拓扑学。

接下来，我们将在 h原理框架下讨论曲面的光滑共形浸入分类。回顾一下，

定义 1.1. 设(Σ, g) 和(M, h) 是两个黎曼流形。若浸入 $f: \Sigma \to M$ 的诱导度量 $f^*h = \lambda g$ 满足某个定义在 Σ上的正函数 λ，则称其为共形浸入。

我们将为曲面的光滑共形浸入关系建立一个一参数 h原理。换言之，我们将对这类浸入空间的路径连通分支进行分类。更准确地说，我们将证明:

定理 1.2。设$(\Sigma、 g)$ 是一个闭可定向黎曼曲面，且$(M、 h)$ 是一个维数为 ≥ 3 的黎曼流形。从$(\Sigma、 g)$ 到 M 的光滑共形浸入空间包含于从 Σ到 M 的浸入空间，这一包含映射在道路连通分支集合上诱导出一个双射。

结合 Smale-Hirsh 定理中 $\mathbb{R}^3$ 对正则浸入的分类， [21], [11] (参见 [13] 了解更多详情)，以及定理 1.2，我们得到:

推论 1.3. 设$(\Sigma、 g)$ 为一闭可定向黎曼曲面，其欧拉示性数为 χ。那么，$(\Sigma、 g)$ 在$\mathbb{E}^3$ 中的光滑共形浸入空间恰有 $2^{2-\chi}$ 个路径连通分支。

除了环面之外，目前仍没有高亏格曲面在 $\mathbb{R}^3$中的共形模型的显式构造。Pinkall 等人最近提出了一种函数分析方法 [5]，用于构造每个连通分支中的模型。

2. h 原理：概述

设 M 和 N 为两个流形，并考虑一阶喷射空间

$$J^1(M,N) = \{(x,y,L) \mid x \in M, y \in N, L \in \mathcal{L}(T_xM, T_yN)\}$$

其中 $\mathcal{L}(T_xM, T_yN)$ 是从 T_xM 到 T_yN 的线性映射空间。我们有一个自然投影 $\pi: J^1(M, N) \longrightarrow M$。子集 $\mathcal{R} \subset J^1(M, N)$ 称为**微分关系**。

例 2.1. 设 g（分别为 h）是 M（分别为 N）上的黎曼度量，我们将等距浸入的关系定义为

$$\mathcal{R}_{isom}(g) = \{(x,y,L) \in J^1(M,N); \quad L^*h = g\}$$

设 $\mathcal{R}$ 为一个微分关系。纤维丛 $\pi: J^1(M, N) \longrightarrow M$ 的截面 $\sigma: x \in M \to (x, F(x) L(x)) \in \mathcal{R} \subset J^1(M, N)$ 称为形式解。我们用 $bs(\sigma)$ 表示映射 F，并称其为一阶喷射 σ 的**基映射**。此外，如果我们有

$$D_xF = L(x), \qquad \forall x \in M$$

我们称 σ 为 $\mathcal{R}$的全纯解。

我们用 Γ（$\mathcal{R}$）（分别用 Sol（$\mathcal{R}$））表示 $\mathcal{R}$的形式解（分别为全纯解）空间。

定义 2.2 (格罗莫夫 [10])。 我们称微分关系 $\mathcal{R}$ 满足

- h-原理：对于任意形式解 σ，存在一条形式解的同伦σ_t，使得 $\sigma_0 = \sigma$ 且 σ_1 是全纯解。
- C^0-稠密 h-原理：对于任意形式解 σ以及 bs（σ）的任意邻域 U，存在一条形式解的同伦 σ_t，使得 $\sigma_0 = \sigma$、 σ_1 是全纯解，并且对所有 t， bs（σ_t） $\in U$。
- 1-参数 h-原理：若包含映射 ι： Sol（$\mathcal{R}$） $\to \Gamma$（$\mathcal{R}$）诱导出双射 π_0（Sol（$\mathcal{R}$） $\to \pi_0$（Γ（$\mathcal{R}$））， 其中 π_0（.）表示道路连通分支的集合。。
- 完全 h-原理，如果包含映射 ι： $Sol(\mathcal{R}) \to \Gamma(\mathcal{R})$ 是弱同伦等价。

我们现在介绍一类满足 h-原理的微分关系。

定义 2.3. 设 $p = (x, y, L) \in \mathcal{R}$，并设 $H \subset T_xM$ 为一个超平面，我们将 $\mathcal{R}$ 关于 H 在 p 上的切片定义为：

$$\mathcal{R}_{H,p} = \{\widetilde{L} \in \mathcal{L}(T_xM, T_yN), \ \widetilde{L}|_H = L|_H \text{ and } (x,y,\widetilde{L}) \in \mathcal{R}\}$$

定义 2.4. 微分关系 $\mathcal{R}$ 是 $ample$ 的，如果对每个切片，它要么为空，要么该切片每个路径连通分支的凸包都是整个纤维，即对任意 $p = (x, y, L) \in \mathcal{R}$ 以及任意超平面 $H \subset T_xM$，我们有

$$IntConv(\mathcal{R}_{H,p}) = \{\widetilde{L} \in \mathcal{L}(T_xM, T_yN), \ \widetilde{L}|_H = L|_H\}$$

其中，所谓 $IntConv(\mathcal{R}_{H,p})$ 是指$\mathcal{R}_{H,p}$ 中包含 L的道路连通分支的凸包的内部。

定理 2.5 (格罗莫夫 [10]). 设 $\mathcal{R} \subset J^1(M,N)$ 为开且充分的微分关系。则 $\mathcal{R}$ 满足完全的 h-原理。

现在，我们应用这一套理论来重新得到 Smale-Hirsh [21]定理。我们如下定义浸入关系：

$$\mathcal{R}_{imm} = \{(x,y,L) \in J^1(M,N);\quad L \text{ has maximal rank }\}$$

对于 $p=(x,\ y,\ L) \in \mathcal{R}_{imm}$, $H \subset T_xM$一个超平面和 $v \in T_xM \setminus H$， $\mathcal{R}_{imm}$ 关于 H 的切片为：

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{imm}(p,H) =&\{\widetilde{L} \in \mathcal{L}(T_xM,T_yN),\ \widetilde{L}|_H = L|_H \text{ and } \widetilde{L} \text{ has maximal rank }\}\\ =&\{\widetilde{L} \in \mathcal{L}(T_xM,T_yN),\ \widetilde{L}|_H = L|_H \text{ and } \widetilde{L}(v) \notin L(H)\}\end{aligned}$$

对于 $dimM < dimN$，不难看出， $\mathcal{R}_{imm}$ 是充足的。此外， $\mathcal{R}_{imm}$ 显然是开集。因此，我们得到：

推论 2.6 (格罗莫夫 [10])。 设 M^m和 N^n 为两个流形，满足 $m<n$。那么，浸入关系 $\mathcal{R}_{imm}$满足完整的 h原理。

当 M 是一个亏格为 d 且 $N=\mathbb{R}^3$的闭定向曲面时。应用上述推论，我们得到

$$\pi_0(Imm(M,\mathbb{R}^3)) = \pi_0(C^0(M,\mathsf{SO}(3)))$$

再多做一点工作，我们就能得到， M 在 $\mathbb{R}^3$ 中的光滑浸入空间恰好有 2^{2d} 个路径连通分支（更多细节见 [13], [17] ）。

3. 共形浸入关系与 Teichmüller 空间

现在固定（Σ, g）为一个可定向的闭黎曼曲面，并令（M,h）为一个维数为 ≥ 3 的黎曼流形。

对于度量 g ，我们将 Σ 上的共形浸入关系定义为

$$\mathcal{R}_{\mathsf{conf}}(g) = \{(x,y,L) \in J^1(\Sigma,M) \mid \exists \lambda_x > 0,\ L^*h = \lambda_x g\}$$

寻找一个共形浸入 f：$(\Sigma,g) \to (M,h)$，等价于为关系 $\mathcal{R}_{\mathsf{conf}}(g)$寻找一个全纯解。该关系包含等距浸入关系（对于任意与 g共形的度量），后者已知在 C^1框架下满足 h-原理（见 [10]）。要找到光滑解，我们还需要进行更多工作。

记号 3.1。 记 $Sol_{C^\infty}(\mathcal{R}_{conf}(g))$ 为$\mathcal{R}_{conf}(g)$的全纯解集合，其中底映射光滑；等价地，这是光滑共形浸入的集合。

二维中的一个重要特性是，共形结构与复结构之间存在对应关系，在这一背景下，这一对应关系产生了 Teichmüller 空间 $Teich(\Sigma)$。我们将重点讨论正亏格曲面的情形，因为根据一致化定理，球面上的所有度量都是共形的，因此在这种情况下，共形浸入空间可与浸入空间等同。

设 Σ 是一个亏格为 $d \geq 1$ 的闭定向曲面，并记：

- $\mathcal{M}et(\Sigma)$ 表示 Σ 上黎曼度量的集合。
- $\mathcal{D}iff$表示 Σ 上保向微分同胚构成的群。
- $\mathcal{D}iff_0$表示 $\mathcal{D}iff$ 中包含恒等映射的连通分支。

- $\mathcal{P}$ 表示光滑正函数 $\lambda: \Sigma \to \mathbb{R}_{>0}$ 在 Σ 上构成的群。我们考虑以下作用
- 逐点共形等价度量:

$$\mathcal{P} \times \mathcal{M}et(\Sigma) \to \mathcal{M}et(\Sigma)$$
$$(\lambda, g) \mapsto \lambda.g$$

- 同伦意义下共形等价度量:

$$\mathcal{M}et(\Sigma)/\mathcal{P} \times \mathcal{D}iff_\circ \to \mathcal{M}et(\Sigma)/\mathcal{P}$$
$$([g], \varphi) \mapsto [\varphi^* g]$$

定义 3.2。 商空间 $\mathcal{M}et(\Sigma/\mathcal{P})/\mathcal{D}iff_\circ$ 称为 *Teichmüller* 空间，记作 $Teich(\Sigma)$。

值得注意的是，定理 1.2 中曲面的光滑共形浸入之所以具有柔性，是因为 Teichmüller 空间是有限维的（在亏格 2 的情形下，其维数为 1，而亏格 $6d-6$ 时，其维数为 $d \geq 2$）。相反，在更高维数中，共形结构空间是无限维的（见 [2]），这可以解释该情形下缺乏柔性（见 [6]）。

此外，$Teich(\Sigma)$ 可以由黎曼度量局部参数化（见 [8] 亏格为 ≥ 2的情形）。另外，当 Σ的亏格为 1 时，我们可以通过黎曼度量找到一个整体参数化。更确切地说，在 $\mathbb{C}/\mathbb{Z}^2$上，满足 $w \in \mathbb{H}^2$的度量族 $g_w = |dz + \frac{i-w}{i+w} d\bar{z}|^2$参数化了 $Teich(\Sigma)$。

关于 Teichmüller 理论的更多详情，请参见 [12] 或 [7]。

4. 主定理的证明

设 (Σ, g_0) 是一个可定向黎曼曲面，(M, h) 是一个黎曼流形。我们的目标是证明包含映射

$$Sol_{C^\infty}(\mathcal{R}_{\mathsf{conf}}(g_0)) \hookrightarrow Imm(\Sigma, M)$$

在 π_0 层面上诱导一个双射，其中 $Sol_{C^\infty}(\mathcal{R}_{\mathsf{conf}}(g))$ 是 (Σ, g_0) 到 (M, h) 的光滑共形浸入空间，而 $Imm(\Sigma, M)$ 是光滑浸入空间。

我们将先证明满射性，这可以重新表述为:

命题 4.1。 从(Σ, g_0) 到(M, h) 的光滑共形浸入关系满足 C^0-稠密 h-原理。

我们需要两个重要的要素:

- **该 ε-等距浸入关系:** 设 (Σ, g_0) 和 (M, h) 如前所述，并考虑 $\varepsilon > 0$ 的 ε-等距浸入关系:

$$\mathcal{R}_{isom}(g_0, \varepsilon) = \{(x, y, L) \in J^1(\Sigma, M); \quad |L^* h - g_0| < \varepsilon\}$$

用微分关系的语言表述纳什-库伊珀等距嵌入定理的证明，依赖于证明针对一族精心选取的度量 (g_n) 和参数 (ε_n) 的 h-原理，该原理适用于 ε-等距浸入关系。

定义 4.2。 若浸入 $f: (\Sigma, g_0) \to (M, h)$ 满足 $f^* h \leq g_0$，则称其为短的。

我们有如下定理 [16], [15], [10]:

定理 4.3。设 $\{f_p\}_{p\in B}$ 是由有限维球 B参数化的短浸入连续族。那么对每个 $\varepsilon>0$，族 $\{f_p\}_{p\in B}$ 都可以通过一族依赖参数 p 连续的浸入变形为一个连续的 ε-等距浸入族 $\{\tilde{f}_p\}_{p\in B}$，且该族与原族的距离可以任意小（以 C^0 衡量）。此外，若原族由光滑浸入组成，则可将同伦选在光滑浸入空间内。

证明见 [22] 或 [1]。

•**布劳威尔不动点定理：**为了找到共形浸入关系的光滑解，我们不直接寻求全纯解。相反，我们构造一族浸入，并利用布劳威尔不动点定理的一种改述得出结论：

命题 4.4。设 $\psi:\ B(p_0,r)\to\mathbb{R}^n$ 是一个从中心为 $p_0\in\mathbb{R}^n$、半径为 $r>0$ 的闭欧几里得球到.....的连续映射，并满足

$$\|\psi(p)-p\|\leq r,$$

则 $p_0\in Im(\psi)$。

证明。应用布劳威尔不动点定理 [3] 于映射 $p\longmapsto$ $p_0+p-\psi\ p$ $p_1\in B\ p_0\ r$ p_0+ (), 可知存在 (,) 使得 $p_1-\psi\ p_1\ =p_1$ $\psi\ p_1\ =p_0$ □ (), 因此 ()。

现在我们可以证明命题 4.1:

命题 *4.1*的证明。令 $[g_0]\in Teich(\Sigma)$ 为黎曼度量 g_0在 Teichmüller 空间中的投影，并令 B_r 为以 $[g_0]$ 为中心、半径为 r 的闭球，位于 $Teich(\Sigma)$中。我们选取一个连续的黎曼度量族来参数化 B_r（为简便起见，我们使用相同的记号 B_r，并通过投影映射将这两个集合视为相同）。选取 $\varepsilon>0$ 使得 $2\varepsilon<r$。

现在，从一个形式解 $\sigma\in\Gamma(\mathcal{R}_{conf})$、 $\sigma(x)\ =(x,\ bs\,\sigma(x)\ L_\sigma(x))$ 开始，使其满足

$$L^*h=\lambda g_0$$

对于某个正函数 λ。

由于 B_r 和 Σ都是紧致的，我们可以将 σ（存在一个常数 $c>0$，使得对于所有度量 cg、 $g\in B_r$， $bs\,\sigma$ 都是短的）连续变形为一个族

$$g\in B_r\longmapsto\sigma^g\in\Gamma(\mathcal{R}_{isom}(g,\varepsilon))$$

使得对于每个 g， $bs\,\sigma^g$ 都是光滑的。

根据定理4.3，存在一个连续映射

$$(t,g)\in[0,1]\times B_r\longmapsto\sigma_t^g\in\Gamma(\mathcal{R}_{isom}(g,\varepsilon))$$

使得:

- $\sigma^g=\sigma_0^g$ 对每个 g 都成立。
- $\sigma_1^g\in Sol(\mathcal{R}_{isom}(g,\ \varepsilon))$ 对每个 g 都成立。• $bs\,\sigma_1^g$ 对每个 g 都是光滑的。

现在考虑映射

$$\psi : g \in B_r \longmapsto \pi((bs\,\sigma_1^g)^*) \in Teich(\Sigma)$$

其中 π： $\mathcal{M}et(\Sigma) \to Teich(\Sigma)$ 是投影映射。

映射 ψ 显然连续，并且 ε 取得足够小，使得 ψ 满足

$$\| \psi(g) - g \| \leq r$$

由于 $Teich(\Sigma)$ 与 $\mathbb{R}^{6d-6}$ 在 Σ 的亏格为 $d \geq 2$ 时同胚，且在亏格为一的情形下与上半平面 $\mathbb{H}^2$ 同胚，我们由命题 4.4得出，存在 $\widetilde{g} \in B_r$，使得 $\sigma_1^{\widetilde{g}} \in Sol(\mathcal{R}_{conf})$ 具有$bs\,\sigma_1^{\widetilde{g}}$ 光滑性。

最后，由于我们从一个光滑浸入族出发，所有变形都在光滑浸入空间 $Imm(\Sigma, M)$ 内进行。

□

现在我们给出定理 1.2 中关于单射性的证明，表述如下：

命题 4.5。对于 $t \in [0,1]$，设 $f_t : (\Sigma, g_0) \to (M, h)$ 是一条由光滑浸入构成的连续曲线，且 f_0 和 f_1 是共形的。那么存在一条由光滑共形浸入构成的连续曲线 $f_t : (\Sigma, g_0) \to (M, h)$，使得 $\widetilde{f_0} = f_0$ 且 $\widetilde{f_1} = f_1$。

注意，我们不能像之前那样证明，因为布劳威尔不动点定理没有参数化版本。更确切地说，对于一条由闭球到其自身的连续映射（甚至光滑映射）构成的连续曲线，不能保证存在一条由不动点构成的连续曲线。

例 4.6。设

$$\gamma : t \in (0,1] \mapsto \tfrac{1}{2}\sin\left(\tfrac{1}{t}\right)\,[-1/2, 1/2]$$

并设 D 为 $\mathbb{R}^2$中的单位圆盘。对于每个 $t \in (0,1]$，，考虑庞加莱圆盘上唯一的等距变换 φ_t，其不动点为 $\gamma(t)$，旋转数为 $\frac{t\pi}{2}$。对于 $t = 0$，定义 $\varphi_0 =$ 恒等映射 $_D$，即圆盘上的恒等映射。映射

$$\psi : (t, x) \in [0,1] \times D \longmapsto \varphi_t(x) \in D$$

是连续的，不动点集合由下式给出

$$Fix_\psi = \{(t, \gamma(t)) \mid t > 0\} \cup \{(0, x) \mid x \in D\}.$$

它不是道路连通的，因此不存在截面 $[0,1] \to Fix_\psi$。

然而，布劳尔不动点定理存在一个较弱的参数版本：

定理 4.7（布劳德不动点定理 [4]）。设 $X \subset \mathbb{R}^n$ 是一个紧致凸子集，且 ψ：$[0,1] \times X \to X$ 是一个连续映射。那么，集合 $\{(t, x) \in [0,1] \times X : \psi(t, x) = x\}$ 具有一个连通分支，该连通分支满射地投影到 $[0,1]$。

利用此定理以及连通实解析集是道路连通的这一事实，可得命题 4.5。

命题 4.5 的证明。 从一条光滑浸入曲线开始 $f_t:\ \Sigma\to M$，其中 f_0 和 f_1 对于 g_0均为共形映射。按照命题 4.1的证明，我们可以在浸入空间中构造一个同伦（见定理 4.3），使其成为一个光滑族:

$$H_0:(t,g)\in[0,1]\times B_r\mapsto\sigma_t^g\in Imm(\Sigma,M)$$

使得:

- $bs(\sigma_0^g)=f_0$ 且 $bs(\sigma_1^g)=f_1$ 对每个 g均成立。
- $\sigma_1^g\in Sol(\mathcal{R}_{isom}(g,\ \varepsilon))$ 对每个 g均成立。
- $bs(\sigma_t^g)$ 对每个 g 和 t均光滑。

根据 Royden 解析逼近定理 [18], 存在一个同伦$\{H_s\}_{s\in[0,1]}$ 将 H_0 连接到映射:

$$H_1:(t,g)\in[0,1]\times B_r\mapsto\widetilde{\sigma}_t^g\in Imm(\Sigma,M)$$

其中:

- $bs(\widetilde{\sigma}_0^g)=f_0$ 且 $bs(\widetilde{\sigma}_1^g)=f_1$ 对每个 g均成立。
- $\widetilde{\sigma}_1^g\in Sol(\mathcal{R}_{isom}(g,\ \varepsilon))$ 对每个 g均成立。
- H_1 关于 t 和 g 在 $]0,\ 1[\times B_r$上解析。

现在考虑映射:

$$\psi:(t,g)\in[0,1]\times B_r\longmapsto\pi((bs(\widetilde{\sigma}_1^g))^*h)\in Teich(\Sigma)$$

利用按命题4.4中所述方式重新表述的 Browder 定理，集合 $\psi^{-1}(g_0)$ 有一个连通分支，其在 $[0,1]$上的投影为满射。此外，由于 ψ在 $]0$上解析，$1[\times B_r$ 且在 $\{0\}\times B_r$ 和 $\{1\}\times B_r$上为常数，集合$\psi^{-1}(g_0)$ 路径连通 [20]。

□

参考文献

[1] Vincent Borrelli、Saïd Jabrane、Francis Lazarus 和 Boris Thibert。《外围空间中方形平坦环面的等距嵌入》，《数学论文集》第24卷。里约热内卢：巴西数学会，2013年。[2] Jean-Pierre Bourguignon、David G. Ebin 和 Jerrold E. Marsden。《关于具有满射且非单射符号的伪微分算子之核》。C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B，282(16)：Aii，A867–A870，1976年。[3] L. E. J. Brouwer。《关于流形的映射》。Math. Ann.，71 115，1911 1 97( ): – .[4] Felix E. Browder。《连续映射形变下不动点的连续性》。Summa Brasil. Math.，4：183–191，1960年。[5] Albert Chern、Felix Knöppel、Franz Pedit、Ulrich Pinkall 和 Peter Schröder。《曲面的共形浸入与等距浸入的求解》。载于《极小曲面：可积系统与可视化》。M:iv 研讨会，2016–19，第13–33页。Cham：施普林格，2021年。[6] 陈省身和James Simons。《主纤维丛中的若干上同调类及其在黎曼几何中的应用》。Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.，68 794，1971 791: – .[7] Benson Farb 和 Dan Margalit。《映射类群入门》（pms-49）。普林斯顿大学出版社，2011年。[8] Arthur E Fischer 和 Anthony J Tromba。《关于紧黎曼曲面非分歧模空间之结构与维数的纯“黎曼”证明》。Mathematische Annalen，267：311–345，1984年。[9] Adriano M Garsia。《闭黎曼曲面在欧几里得空间中的嵌入》。美国空军科学研究办公室数学科学局，1960年。[10] 米哈伊尔·格罗莫夫。《偏微分关系》，《数学与相关领域成果》第9卷，第3辑。施普林格，Cham，1986年。[11] M. W. Hirsch。《流形的浸入》。Trans. Am. Math. Soc.，93：242–276，1959年。[12] John H Hubbard。《Teichmüller 理论及其在几何、拓扑学与动力学中的应用》，第2卷。Matrix Editions，2016年。[13] Ioan James 和 Emery Thomas。《关于截面分类的注记》。Topology，4(4)：351–359，1966年。[14] Seok-ku Ko。《黎曼曲面在黎曼流形中的嵌入》。康涅狄格大学，1989年。[15] Nicolaas H. Kuiper。《关于 C^1-等距嵌入。I、II》。Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A，58：545–556，683–689，1955年。[16] 约翰·纳什。《C1 等距嵌入》。Annals of Mathematics，第383–396页，1954年。[17] U. Pinkall。《浸入曲面的正则同伦类》。Topology，24 434，1985 4 421( ): – .[18] H. L. Royden。《可微映射的解析逼近》。Math. Ann.，139：171–179，1960年。[19] Reto A. Rüedy。《嵌入黎曼曲面的形变》。载于《黎曼曲面理论进展》，1969年石溪会议论文集，385–392（1971年），1971年。[20] Masahiro Shiota。《次解析集与半代数集的几何》，《数学进展》第150卷。波士顿，马萨诸塞州：Birkhäuser，1997年。[21] Stephen Smale。《球面在欧几里得空间中的浸入分类》。Ann. Math. (2)，69：327–344，1959年。[22] David Spring。《非线性偏微分方程组的凸积分》。Ann. Inst. Fourier（格勒诺布尔），33(3)：121–177，1983年。