arXiv:2603.02905v1 [math.AP] 3 Mar 2026

阶梯型有限带势下KdV方程的直接散射：Riemann–Hilbert方法

朱晓东*[1,2]

[1]数学与复杂系统实验室（教育部），数学科学学院，北京师范大学，中国北京 100875[2] SISSA，意大利的里雅斯特 Bonomea 路 265 号，邮编 34136，INFN的里雅斯特分部

摘要

我们针对受扰动的阶梯型有限带背景，建立了KdV方程的直接散射理论。具体而言，我们考虑当 $x \to \pm\infty$ 时渐近趋近于两个不同单带周期行波解的初始数据。在对扰动作出适当假设的条件下，我们构造了直接散射问题，并确立了相关散射数据的解析结构。特别是，我们将该问题重新表述为一个向量Riemann–Hilbert问题，为研究受扰有限带势的长时间渐近奠定了基础。这一表述凸显了阶梯型有限带散射理论与孤子气体类情形中出现的Riemann–Hilbert框架之间的联系。

目录

1 引言 1 2 主要结果 4 3 直接散射 7 4 阶跃型 KdV 有限带隙势函数的 RH问题 27 5 时间演化与逆散射 32 A KdV方程的周期行波解 33 B 周期有限带解的 Lax 谱 34

1 引言

本文研究具有阶梯型振荡初值的 Korteweg–de Vries (KdV) 方程的直接和逆散射问题；当 $x \to \pm\infty$ 时，该初值渐近趋于两个不同的周期波解。KdV方程为

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \tag{1.1}$$

*电子邮件： xdzbnu@mail.bnu.edu.cn

其中 $u = u(x,\ t)$ 是实值函数，下标表示相应变量的偏导数。该方程最初是为描述长波、弱非线性色散浅水波的传播而导出的，并且存在孤子解

$$u(x,t) = -2\eta^2 \operatorname{sech}^2\Big(\eta\left(x - 4\eta^2 t - x_0\right)\Big),$$

其中，$\eta > 0$ 和 $x_0 \in \mathbb{R}$ 表示相移。

KdV方程（1.1）是一个著名的可积系统，其空间部分与一维薛定谔算子相关联。它具有如下算子形式的Lax对 [7]:

$$\begin{aligned} \mathscr{L}\varphi &= \left(-\partial_x^2 + u\right)\varphi = \lambda^2\varphi, \\ \varphi_t &= \mathscr{A}\varphi = \left[-4\partial_x^3 + 3(u\,\partial_x + u_x)\right]\varphi. \end{aligned} \tag{1.2}$$

另一方面，KdV方程（1.1）还具有如下矩阵形式的Lax对 ir:

$$\begin{cases} \Psi_x = L\,\Psi, \\ \Psi_t = A\,\Psi, \end{cases} \tag{1.3}$$

with

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda^2 + u & 0 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} -u_x & 4\lambda^2 + 2u \\ (u - \lambda^2)(4\lambda^2 + 2u) - u_{xx} & u_x \end{pmatrix}.$$

特别地，KdV方程（1.1）可以由零曲率条件推出

$$L_t - A_x + [L, A] = 0, \tag{1.4}$$

其中，$[L, A] = LA - AL$ 表示 L 和 A的对易子。

此外，KdV方程（1.1）存在如下周期行波解，通常称为（准）周期有限带隙解 [13]:

$$u(x,t) = -\beta_3 - (\beta_1 - \beta_3)\,\mathrm{dn}^2\left(\frac{\sqrt{\beta_1 - \beta_3}}{\sqrt{2}}\,(x - 2(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)t - x_0) + K(m)\,\middle|\, m\right), \tag{1.5}$$

其中 $\beta_1 > \beta_2 > \beta_3$, $x_0 \in \mathbb{R}$ 为任意常数，$\mathrm{dn}(s\,|\,m)$ 表示周期为 $2K(m)$ 的雅可比椭圆函数。这里

$$K(m) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - m^2\sin^2\vartheta}}$$

是第一类完全椭圆积分，椭圆模数 m 定义为 $m^2 = \frac{\beta_1 - \beta_2}{\beta_1 - \beta_3}$. 更多详情请参见附录A 。 ——

此外，势函数（*Lax* 谱（或布洛赫谱；参见附录B）对应的 Lax 对（1.3）的1.5）定义为使相应特征函数对所有 $\lambda \in \mathbb{C}$ 均有界的 $x \in \mathbb{R}$所构成的集合，其表达式为

$$\Sigma(\lambda^2) = \left\{\lambda^2 \in \mathbb{R}\,\middle|\, \lambda^2 \in \Big(-\infty, -\frac{\beta_1 + \beta_2}{2}\Big] \cup \Big[-\frac{\beta_1 + \beta_3}{2}, -\frac{\beta_3 + \beta_2}{2}\Big]\right\}. \tag{1.6}$$

特别地，令 $\beta_1 = \eta_2^2 + \eta_1^2$，$\beta_2 = \eta_2^2 - \eta_1^2$ 和 $\beta_3 = \eta_1^2 - \eta_2^2$，其中 $\eta_2 > \eta_1 > 0$，我们可以得到以下解

$$u(x,t) = \eta_2^2 - \eta_1^2 - 2\eta_2^2\,\mathrm{dn}^2\Big(\eta_2\,[x - 2(\eta_1^2 + \eta_2^2)t\, - x_0] + K(m)\,\Big|\, m\Big), \quad m = \frac{\eta_1}{\eta_2}.$$

本文研究具有阶跃型有限带势的KdV方程（1.1）的直接散射问题。阶跃型算子的直接散射问题具有明确的物理动机。例如，它出现在由两种不同的半无限一维晶体组成的合金的分析中 [8]。更确切地说，令 $0 < \eta_1^l < \eta_2^l$ 和$0 < \eta_1^r < \eta_2^r$，并定义

$$\begin{aligned} u_0^l(x) &= (\eta_2^l)^2 - (\eta_1^l)^2 - 2(\eta_2^l)^2 \,\mathrm{dn}^2\left(\eta_2^l(x - x_0^l) + K(m^l) \,\middle|\, m^l\right), \\ u_0^r(x) &= (\eta_2^r)^2 - (\eta_1^r)^2 - 2(\eta_2^r)^2 \,\mathrm{dn}^2\left(\eta_2^r(x - x_0^r) + K(m^r) \,\middle|\, m^r\right), \end{aligned} \tag{1.7}$$

其中 $x_0^l,\ x_0^r \in \mathbb{R}$ 是相移，且 $m^l = \eta_1^l/\eta_2^l$, $m^r = \eta_1^r/\eta_2^r$。假设初始数据$u_0(x) = u(x,\ 0)$ 满足阶跃型有限带条件

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \left|\frac{d^n}{dx^n}(u_0(x) - u_0^r(x))\right| (1 + |x|^{m_0})\, dx < \infty, \\ &\int_{-\infty}^0 \left|\frac{d^n}{dx^n}(u_0(x) - u_0^l(x))\right| (1 + |x|^{m_0})\, dx < \infty, \end{aligned} \tag{1.8}$$

对于 $0 \le n \le n_0$，其中 $m_0 \ge 8$ 且 $n_0 \ge m_0 + 5$。若初始数据 $u_0(x)$ 满足（1.8），则根据 [6]，存在唯一的经典解 $u(x,\ t) \in C^{n_0 - m_0 - 2}(\mathbb{R}) \times C^1(\mathbb{R})$ 满足KdV方程（1.1）。在 [19], 中，作者们为KdV方程建立了一个统一数值框架，能够准确计算初始数据渐近趋于（准）周期有限带剖面所对应的解。特别是，Grava等人研究了具有阶梯型振荡初值的聚焦型非线性薛定谔方程的直接与逆散射理论；参见 [12]。

注 1.1. 注意，KdV方程具有伽利略不变性：若 $u(x,t)$ 是 (1.1) 的一个解，则对任意常数 $c \in \mathbb{R}$, $\tilde{u}(x,t) = u(x - 6ct, t) - c$ 也是 (1.1) 的一个解。根据 Lax对 (1.2)，我们有 $(-\partial_x^2 + \tilde{u})\varphi = (-\partial_x^2 + u - c)\varphi = (\lambda^2 - c)\varphi$。因此，谱参数会平移一个常数，我们总可以通过伽利略变换将 (1.6) 中的参数 $\beta_2 + \beta_3$ 设为 0。此时，相应的 Lax 谱 $\Sigma(\lambda^2)$ 为 $\Sigma(\lambda^2) = (-\infty, -\eta_2^2] \cup [-\eta_1^2, 0]$。因此，在本文中，我们固定 $u_0^l(x)$ 和 $u_0^r(x)$ 的谱，使它们具有公共端点 0，参见例如图 1。

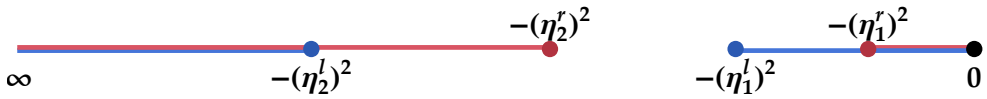

图 1：与左背景 $u_0^l(x)$（蓝色）和右背景$u_0^r(x)$（红色）相关的 Lax 谱，它们共享公共端点 0。 u_0^l 的谱带端点为$-(\eta_1^l)^2$ 和 $-(\eta_2^l)^2$, , 而 u_0^r 的谱带端点为 $-(\eta_1^r)^2$ 和 $-(\eta_2^r)^2$。

注记 1.2。 下文中，我们将在 λ-平面中研究直接和逆散射问题，而非直接在能量平面（λ^2）中进行。图1所示的能量平面中的 Lax 谱对应于图3 中 λ-平面上的构型 (iii)。

尽管 Egorova 等人 [5, 6] 研究了具有阶跃型有限带初始数据的KdV方程的柯西问题，并证明KdV方程存在唯一的经典解$q(x,\ t)$ 该解对应于初始条件（1.8），并通过直接散射与逆散射方法获得

该方法基于盖尔范德–列维坦–马尔琴科方程，但此类解的长时间渐近行为仍有待进一步研究。本文构建了一个相关的黎曼–希尔伯特问题，为分析这些解的长时间渐近提供了便利的框架。

2 主要结果

我们的结果以三个反射系数 $r_1(\lambda)$、 $r_2(\lambda)$和 $\rho(\lambda)$来表述，它们可视为由初始数据（1.1）和（1.8）确定的 KdV方程的相应反射系数。随后利用这些反射系数构造一个 RH问题，并由此恢复解 $u(x,t)$ 。

直接散射问题

设 $\Psi_0^l(x;\lambda)$ 和 $\Psi_0^r(x;\lambda)$ 是在（3.16）中定义的、取值于 2×2 的特征函数，它们分别满足关于 $u_0^l(x)$ 和 $u_0^r(x)$ 的空间部分（1.3），其对应的谱分别为$\Sigma^l:=(i\eta_1^l,i\eta_2^l)\cup(-i\eta_2^l,-i\eta_1^l)$ 和 $\Sigma^r:=(i\eta_1^r,i\eta_2^r)\cup(-i\eta_2^r,-i\eta_1^r)$。引入 Jost解$\Psi^s(x,t)$，其中 $s\in\{r,l\}$，它是方程（1.3）在初始数据 $u_0(x)$ 下的解，且该初始数据满足条件（1.8），使得

$$\Psi^l(x;\lambda)=\Psi_0^l(x;\lambda)(I+\mathcal{O}(|x|^{-1})),\quad x\to\infty_s,$$

与 $\infty_l=-\infty$ 和 $\infty_r=+\infty$。事实上，Jost解 $\Psi^s(x,\lambda)$ 满足积分方程

$$\Psi^s(x;\lambda)=\Psi_0^s(x;\lambda)+\int_{\infty_s}^{x}\Psi_0^s(x;\lambda)(\Psi_0^s(y;\lambda))^{-1}\Delta\tilde{U}^s(y)\Psi^s(y;\lambda)dy,$$

其中

$$\Delta\tilde{U}^s(x):=\begin{pmatrix}0 & 0\\ u_0^s(x)-u_0(x) & 0\end{pmatrix}.$$

定义变换后的约斯特解 $\Phi^s(x;\lambda)$ 如下

$$\Phi^s(x;\lambda):=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -i\lambda & i\lambda\end{pmatrix}\Psi^s(x;\lambda),$$

那么 $\Phi^s(x;\lambda)$ 满足命题3.9。特别地，令 $\Phi_1^s(x;\lambda)$ 和 $\Phi_2^s(x;\lambda)$ 分别表示 $\Phi^s(x;\lambda)$的第一列和第二列。则以下性质成立：

- $\Phi^l(x;\lambda)$ 在 $\Sigma_1^l\cup\Sigma_2^l$ 两侧均有连续边界值，除去 $\{\pm i\eta_1^l,\ \pm i\eta_2^l\}$。此外，$\Phi_1^l(x;\lambda)$ 在 $\lambda\in\mathbb{C}_+\setminus\Sigma_1^l$ 上解析，而 $\Phi_2^l(x;\lambda)$ 在 $\lambda\in\mathbb{C}_-\setminus\Sigma_2^l$ 上解析。
- $\Phi^r(x;\lambda)$ 在 $\Sigma_1^r\cup\Sigma_2^r$ 的两侧均具有连续边界值，但在 $\{\pm i\eta_1^r,\pm i\eta_2^r\}$ 上除外。此外，当 $\lambda\in\mathbb{C}_+\setminus\Sigma_1^r$ 时，$\Phi_2^r(x;\lambda)$ 是解析的；当 $\lambda\in\mathbb{C}_-\setminus\Sigma_2^r$ 时，$\Phi_1^r(x;\lambda)$ 是解析的。

我们引入散射数据

$$a(\lambda)=\det[\Phi_1^l(x;\lambda),\Phi_2^r(x;\lambda)],\qquad b(\lambda)=\det[\Phi_1^r(x;\lambda),\Phi_1^l(x;\lambda)],\quad \lambda\in\mathbb{R}.$$

For $\lambda\in\Sigma_1^r\cup\Sigma_1^l$，我们将散射数据 $a(\lambda)$ 和 $b_1(\lambda)$ 的边界值定义为

$$a(\lambda_\pm)=\det[\Phi_1^l(x;\lambda_\pm),\Phi_2^r(x;\lambda_\pm)],\qquad b_1(\lambda_\pm)=\det[\Phi_1^r(x;\lambda_\pm),\Phi_1^l(x;\lambda_\pm)],$$

其中，下标 $\pm$ 分别表示从 $\Sigma_1^r\cup\Sigma_1^k$ 的左侧和右侧取得的极限值。由引理 3.13，可知 $a(\lambda)$ 可解析延拓至 $\lambda\in\mathbb{C}_+\setminus(\Sigma_1^r\cup\Sigma_1^l)$。

为简便起见，本文始终只讨论无孤子情形，即假设 $a(\lambda)$ 在 $\lambda\in\mathbb{C}_+\setminus(\Sigma_1^r\cup\Sigma_1^l)$ 上无零点。

假设 1 (孤子缺失)。 假设初始数据 $u_0(x)$ 满足条件 (1.8)，且相应的散射数据 $a(\lambda)$ 在 $\lambda \in \mathbb{C}_+ \setminus (\Sigma_1^r \cup \Sigma_1^l)$上非零。

利用辅助亚纯函数 $h(\lambda)$ （定义于（4.3））， 我们引入修正散射数据 $a_1(\lambda)$ 和 $a_2(\lambda)$ 如下定义:

$$
\begin{aligned}
a_1(\lambda) &= \big(a(\lambda)/h(\lambda)\big)^{1/2}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+, \\
a_2(\lambda) &= \big(a(\lambda)h(\lambda)\big)^{1/2}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+.
\end{aligned}
$$

这些函数满足命题4.2。根据 $a_1(\lambda)$ 和 $a_2(\lambda)$，我们定义反射系数 $r_1(\lambda)$、 $r_2(\lambda)$以及 $\rho(\lambda)$ 如下:

$$
\begin{aligned}
r_1(\lambda) &= \frac{a_2(\lambda_-)}{a_1(\lambda_-)} \frac{e^{-2ix_0^r\lambda}}{a_2(\lambda_-)a_1(\lambda_+) - ib_1^*(\lambda_-)}, \quad \lambda \in \Sigma_1^l, \\
r_2(\lambda) &= \frac{a_1(\lambda_-)}{a_2(\lambda_-)} \frac{e^{2ix_0^r\lambda}}{a_1(\lambda_-)a_2(\lambda_+) + ib_1(\lambda_-)}, \quad \lambda \in \Sigma_1^r, \\
\rho(\lambda) &= \frac{b(\lambda)}{a_1(\lambda)a_2^*(\lambda)} e^{-2ix_0^r\lambda}, \qquad\qquad\qquad \lambda \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

我们现在 可以陈述关于直接散射问题的主要引理 .

引理*2.1.* 假设初始数据 u_0 满足条件 （*1.8*）和假设 *1*。边界值 $r_1(\lambda_\pm)$ 在 $\Sigma_1^l \setminus \{i\eta_1^l, i\eta_2^l\}$ 上可微 m_0 次，并且当 $\lambda \to i\eta_j^l, j = 1, 2$ 时，呈现平方根型行为。类似地，边界值 $r_2(\lambda_\pm)$ 在 $\Sigma^r \setminus \{i\eta_1^r, i\eta_2^r\}$ 上可微 m_0 次，并且当 $\lambda \to i\eta_j^r, j = 1, 2$ 时，呈现平方根型行为。

特别地，当 λ 位于轮廓的非交叉部分时，函数 $r_1(\lambda)$和 $r_2(\lambda)$ 可改写为

$$
\begin{aligned}
r_1(\lambda) &= \frac{e^{-2i\lambda x_0^r}}{2\, a_1(\lambda_-)a_1(\lambda_+)}, \qquad \lambda \in \Sigma_1^l \setminus \Sigma_1^r, \\
r_2(\lambda) &= \frac{e^{-2i\lambda x_0^r}}{2\, a_2(\lambda_-)a_2(\lambda_+)}, \qquad \lambda \in \Sigma_1^r \setminus \Sigma_1^l.
\end{aligned}
$$

对于 $\lambda \in \mathbb{R}$，谱函数 $\rho(\lambda)$ 在 $\lambda = 0$ 处正则，且属于 $C^{m_0}(\mathbb{R})$。此外，当 $\lambda \to \infty$时，它满足 $|\rho(\lambda)| = O(|\lambda|^{-4})$.

证明。 参见第 4节。 □

推论2.2。 若初始数据 $u_0(x)$是 *Schwartz*型扰动，即对任意 (1.8)均满足 $m_0, n_0 \in \mathbb{N}$，则引理 $\rho(\lambda)$ *2.1* 中的谱函数在 $\mathbb{R}$ 上光滑，并且当 $\lambda \to \infty$时快速衰减。此外，反射系数 $r_1(\lambda)$ 和$r_2(\lambda)$ 在 Σ_1^l 和 Σ_1^r 上的边界值分别也光滑，端点处可能例外，但仍呈现相同的平方根行为。

时间演化与逆问题

现在，我们考虑如何根据反射系数 $r_1(\lambda)$、 $r_2(\lambda)$ 和 $\rho(\lambda)$ 求解逆散射问题，从而恢复解 $u(x, t)$。此外，我们证明，可以通过关于 $r_1(\lambda)$、 $r_2(\lambda)$ 和 $\rho(\lambda)$ 构造相应的 RH问题来求解这一逆问题。

RH问题2.3. 求一个 1×2 向量值亚纯函数 $X(x, t; \lambda)$ ，满足以下条件:

1. $X(x,t;\lambda)$ 满足跳跃条件

$$X_+(x,t;\lambda) = X_-(x,t;\lambda)V(x,t;\lambda), \tag{2.2}$$

其中，跳跃矩阵 $V(x,t;\lambda)$ 由下式给出

$$V(x,t;\lambda) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & -2ir_2(\lambda)e^{-2i\theta(x,t;\lambda)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & \lambda \in \Sigma_1^r \setminus \Sigma_1^l, \\ \begin{pmatrix} \frac{1-r_1(\lambda)r_2(\lambda)}{1+r_1(\lambda)r_2(\lambda)} & \frac{-2ir_2(\lambda)}{1+r_1(\lambda)r_2(\lambda)}e^{-2i\theta(x,t;\lambda)} \\ \frac{-2ir_1(\lambda)}{1+r_1(\lambda)r_2(\lambda)}e^{2i\theta(x,t;\lambda)} & \frac{1-r_1(\lambda)r_2(\lambda)}{1+r_1(\lambda)r_2(\lambda)} \end{pmatrix}, & \lambda \in \Sigma_1^r \cap \Sigma_1^l, \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2ir_1(\lambda)e^{2i\theta(x,t;\lambda)} & 1 \end{pmatrix}, & \lambda \in \Sigma_1^l \setminus \Sigma_1^r, \\ \begin{pmatrix} 1-|\rho(\lambda)|^2 & -\rho^*(\lambda)e^{-2i\theta(x,t;\lambda)} \\ \rho(\lambda)e^{2i\theta(x,t;\lambda)} & 1 \end{pmatrix}, & \lambda \in \mathbb{R}, \\ \begin{pmatrix} 1 & 2ir_1(\lambda)e^{-2i\theta(x,t;\lambda)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & \lambda \in \Sigma_2^l \setminus \Sigma_2^r, \\ \begin{pmatrix} \frac{1-r_1(\lambda)r_2(\lambda)}{1+r_1(\lambda)r_2(\lambda)} & \frac{2ir_1(\lambda)}{1+r_1(\lambda)r_2(\lambda)}e^{-2i\theta(x,t;\lambda)} \\ \frac{2ir_2(\lambda)}{1+r_1(\lambda)r_2(\lambda)}e^{2i\theta(x,t;\lambda)} & \frac{1-r_1(\lambda)r_2(\lambda)}{1+r_1(\lambda)r_2(\lambda)} \end{pmatrix}, & \lambda \in \Sigma_2^r \cap \Sigma_2^l, \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2ir_2(\lambda)e^{2i\theta(x,t;\lambda)} & 1 \end{pmatrix}, & \lambda \in \Sigma_2^r \setminus \Sigma_2^l, \end{cases}$$

其中 $\theta(x,t;\lambda) = x\lambda + t\lambda^3$。

2. 当 $\lambda \to \infty$ 时，以下渐近展开成立：

$$X(x,t;\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} + \mathcal{O}(\lambda^{-1}). \tag{2.3}$$

3. 函数 $X(x,t;\lambda)$ 满足对称条件

$$X^*(x,t;\lambda) = X(x,t;-\lambda) = X(x,t;\lambda)\sigma_1. \tag{2.4}$$

注 2.4. RH问题 2.3 与[4], 中讨论的孤子气体RH问题密切相关，但它还涉及实轴上的跳跃条件。事实上，根据 [9], 在 $r_2(\lambda) = 0$ 情形下的空间渐近分析，且在实轴上不存在跳跃条件时，此类KdV孤子气体相应初始数据的首项渐近于周期解 $u_0^l(x)$ （1.7）中的量，而误差项为 $\mathcal{O}(|x|^{-1})$。这表明KdV孤子气体的初始数据不满足条件（1.8）；因此，经典逆散射变换（IST）方法无法直接应用于孤子气体情形。

此外，文中还通过 dressing方法研究了周期解与孤子气体之间的关系[17] 。此外，在 [14], 中，作者研究了聚焦型非线性薛定谔方程的有限间隙解与多孤子解之间的联系，并指出，在热力学极限下，两者都可以用 Zakharov原始势 [4]的一种适当推广来近似。

基于 RH问题2.3，我们得到以下主定理。

定理 *2.5.* 假设初始数据 $u_0(x)$满足条件 *(1.8)* 和假设 *1*。设反射系数 $r_1(\lambda)$、 $r_2(\lambda)$ 和 $\rho(\lambda)$ 根据 *(2.1)* 由 $u_0(x)$ 定义。则对于每个 $(x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$，*RH*问题 $X(x,t;\lambda)$ 都存在唯一解。

此外， $u(x,t)$ 这个具有初始数据(1.8) 的*KdV*方程的解可以通过*RH*问题*2.3* 的解 $X(x,t;\lambda)$ 重构为：

$$u(x,t) = -2i\,\frac{d}{dx}\left(\lim_{\lambda\to\infty}\lambda(X_1(x,t;\lambda)-1)\right), \tag{2.5}$$

其中， $X_1(x,t;\lambda)$ 表示向量 $X(x,t;\lambda)$的第一分量。

证明。 见第5节。 □

注2.6。 尽管我们已经通过相关RH问题建立了解 $u(x,t)$关于 $t>0$ 的存在性和唯一性，但本文不再进一步研究该解所在的确切函数空间。然而，根据Egorova等人 [5, 6], 的结果可知，如果初始数据满足（1.8），则相应的解 $u(x,t)$仍然是唯一的经典解 $u(x,t) \in C^{n_0-m_0-2}(\mathbb{R}) \times C^1(\mathbb{R})$ 并满足

$$\left|\int_0^{\infty_s} |\partial_x^n(u(x,t)-u^s(x,t))|\,(1+|x|^{\lfloor m_0/2\rfloor-2})\,dx\right| < \infty, \quad n \le n_0-m_0-2,$$

and

$$\left|\int_0^{\infty_s} |\partial_t(u(x,t)-u^s(x,t))|\,(1+|x|^{\lfloor m_0/2\rfloor-2})\,dx\right| < \infty$$

其中， $u^s(x,t)$ $s\in\{r,l\}$ 表示相应的有限带背景解。

论文提纲

在第 3 节中，我们回顾与周期有限带势函数相关的 RH问题。基于这一表述，在初始数据满足（1.3）的假设下，我们构造 Lax对（1.8）的 Jost解。此外，我们推导相应的散射数据，并在引理 3.13 中研究其性质。在第 4 节中，我们利用散射数据引入一个辅助函数，据此定义修正后的反射系数，并建立与初始数据 u_0（x）相关的 RH问题。最后，在第5 节中，结合散射数据的时间演化，我们证明 RH问题 2.3 的解存在且唯一，由此得到定理 2.5。在附录A 中，我们回顾周期解；在附录B 中，我们研究周期 KdV 解的 Lax 谱。

3 直接散射

KdV周期势的 RH问题

在讨论初始数据的直接散射问题（1.8）之前，我们先回顾亏格一情形的（准）周期有限带 RH问题。

考虑以下 KdV方程（1.1）的周期有限带势函数：

$$u(x,t) = \eta_2^2-\eta_1^2-2\eta_2^2\,\mathrm{dn}^2\Big(\eta_2\,[x-2(\eta_1^2+\eta_2^2)t\,-x_0]+K(m)\,\Big|\,m\Big). \tag{3.1}$$

其中 $0<\eta_1<\eta_2$， $m=\frac{\eta_1}{\eta_2}$ 且 $x_0\in\mathbb{R}$ 为相移。与亏格一有限带势（1.2）相关联的 Lax对（3.1）的 Lax 谱由下式给出 $[i\eta_1,\,i\eta_2]\cup[-i\eta_2,\,-i\eta_1]$.接下来，我们引入相应的双叶亏格一黎曼曲面

$$\mathscr{X}(\eta_1,\eta_2) := \{(y;\lambda)\in\mathbb{C}^2\,|\,y^2=(\lambda^2+\eta_1^2)(\lambda^2+\eta_2^2)\}, \tag{3.2}$$

并配备其规范同调基 $\mathscr{A}$， $\mathscr{B}$，如图 2所示。

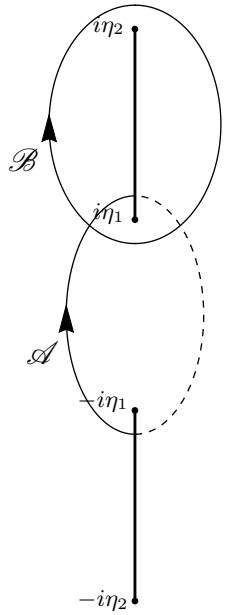

图 2：黎曼曲面 $\mathscr{X}(\eta_1,\ \eta_2)$ 及其规范同调基 $\mathscr{A}$， $\mathscr{B}$。

将与黎曼曲面 $\mathscr{X}(\eta_1,\ \eta_2)$ 相关联的准动量微分和准能量微分分别记为 dp 和 dq 。它们也可视为归一化的第二类阿贝尔微分。更具体地，引入函数

$$R(\lambda;\eta_1,\eta_2)=\sqrt{(\lambda^2+\eta_1^2)(\lambda^2+\eta_2^2)},$$

并定义微分 dp和 dq 为

$$dp(\eta_1,\eta_2)=\frac{\zeta^2+c_1}{R(\zeta;\eta_1,\eta_2)}\,d\zeta,\qquad dq(\eta_1,\eta_2)=12\,\frac{\zeta^4+\frac{\eta_1^2+\eta_2^2}{2}\,\zeta^2+c_2}{R(\zeta;\eta_1,\eta_2)}\,d\zeta, \tag{3.3}$$

w这里，常数 c_1 和 c_2 由归一化条件确定，即 ly,

$$c_1=\eta_2^2-\eta_2^2\frac{E(m)}{K(m)},\qquad c_2=\frac{\eta_1^2\eta_2^2}{3}-\frac{\eta_1^2+\eta_2^2}{6}\,c_1(\eta_1,\eta_2).$$

这里， $m=\frac{\eta_1}{\eta_2}$， $K(m)=\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{1-m^2}\sin^2\theta}$和 $E(m)=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-m^2}\sin^2\theta\,d\theta$ 分别表示第一类和第二类完全椭圆积分。

此外，定义阿贝尔积分 $p(\lambda)$ 和 $q(\lambda)$ ，它们与微分 (3.3) 相关联，其定义为

$$\begin{aligned} p(\lambda;\eta_1,\eta_2)&=\int_{i\eta_2}^{\lambda}dp\ =\lambda+\mathcal{O}(\lambda^{-1}),\qquad &\lambda\to\infty,\\ q(\lambda;\eta_1,\eta_2)&=\int_{i\eta_2}^{\lambda}dq\ =4\lambda^3+\mathcal{O}(\lambda^{-1}),\qquad &\lambda\to\infty. \end{aligned} \tag{3.4}$$

此外，基本频率 Ω_1 和 Ω_2 分别由 dp 和 dq的 $\mathscr{B}$-周期给出:

$$\Omega_1(\eta_1,\eta_2)=\oint_{\mathscr{B}}dp=\frac{\pi\eta_2}{K(m)},\qquad \Omega_2(\eta_1,\eta_2)=\oint_{\mathscr{B}}dq=-\frac{2\pi\eta_2(\eta_1^2+\eta_2^2)}{K(m)}. \tag{3.5}$$

定义与有限带隙解相关的以下 RH 问题 $u(x,t)$，见3.1式，如[18]所示。此外，在引理3.3中，我们将证明 RH 问题3.1的解与 Baker–Akhiezer 函数一致，后者满足 Lax 对（1.3）。

*RH*问题 *3.1*。令 $\Omega := -x\,\Omega_1(\eta_1,\eta_2) - t\Omega_2(\eta_1,\eta_2)$，其中 Ω_1,Ω_2 是式 *(3.5)* 中定义的实值基本频率，而 $\Delta = x_0\Omega_1(\eta_1,\eta_2) \in \mathbb{R}$ 表示一个常数相移。求一个向量值 1×2 向量 $m(\lambda)$，使其满足以下性质

$$
\begin{aligned}
&m(\lambda)\ \textit{is analytic for}\ \mathbb{C}\setminus[-i\eta_2, i\eta_2],\\
&m_+(\lambda) = m_-(\lambda)\begin{cases}\begin{pmatrix}0 & -i\\ -i & 0\end{pmatrix}, & \lambda\in(i\eta_1, i\eta_2),\\ \begin{pmatrix}0 & i\\ i & 0\end{pmatrix}, & \lambda\in(-i\eta_2, -i\eta_1),\\ e^{i(\Omega+\Delta)\sigma_3}, & \lambda\in(-i\eta_1, i\eta_1),\end{cases}\\
&m(\lambda) = \begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix} + \frac{1}{\lambda}\begin{bmatrix}m_{1,1}(x,t) & m_{2,1}(x,t)\end{bmatrix} + \mathcal{O}(\lambda^{-2}),\ \ as\ \lambda\to\infty,\\
&m(-\lambda) = m(\lambda)\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

引入归一化全纯微分 $\omega(\eta_1,\ \eta_2)$，它与黎曼曲面 $\mathscr{X}(\eta_1,\ \eta_2)$（见式3.2）

$$
\omega(\eta_1,\eta_2) := \left(2\int_{-i\eta_1}^{i\eta_1}\frac{d\zeta}{R(\zeta;\eta_1,\eta_2)}\right)^{-1}\frac{d\zeta}{R(\zeta;\eta_1,\eta_2)} = -\frac{i\eta_2}{4K(m)}\frac{d\zeta}{R(\zeta;\eta_1,\eta_2)},
$$

and

$$
\oint_{\mathscr{A}}\omega(\eta_1,\eta_2) = 1, \qquad \oint_{\mathscr{B}}\omega(\eta_1,\eta_2) = \frac{iK(1-m)}{2K(m)} := \tau,
$$

其中 $I\tau > 0$，因此 τ 是（亏格为 1 的）周期矩阵元素。相应的阿贝尔积分定义为

$$
J(\lambda;\eta_1,\eta_2) = \int_{i\eta_2}^{\lambda}\omega(\eta_1,\eta_2),
\tag{3.7}
$$

并满足以下命题:

$$
\begin{aligned}
&J_+(\lambda;\eta_1,\eta_2) + J_-(\lambda;\eta_1,\eta_2) = 0, \quad \lambda\in[i\eta_1, i\eta_2],\\
&J_+(\lambda;\eta_1,\eta_2) - J_-(\lambda;\eta_1,\eta_2) = -\tau, \quad \lambda\in[-i\eta_1, i\eta_1],\\
&J_+(\lambda;\eta_1,\eta_2) + J_-(\lambda;\eta_1,\eta_2) = -1, \quad \lambda\in[-i\eta_2, -i\eta_1],
\end{aligned}
$$

and

$$
\begin{aligned}
&J_+(i\eta_1;\eta_1,\eta_2) = -\frac{\tau}{2}, \quad J_+(-i\eta_1;\eta_1,\eta_2) = -\frac{\tau}{2} - \frac{1}{2},\\
&J_+(-i\eta_2;\eta_1,\eta_2) = -\frac{1}{2}, \quad J_+(\infty;\eta_1,\eta_2) = -\frac{1}{4}.
\end{aligned}
$$

引入雅可比θ函数，定义为

$$
\vartheta_3(\lambda;\tau) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{2\pi i n\lambda + \pi i n^2\tau},\ \lambda\in\mathbb{C},
$$

以及RH问题的解3.1 由下式给出

$$
m(\lambda) = \frac{\gamma(\lambda;\eta_1,\eta_2)\vartheta_3(0;2\tau)}{\vartheta_3\left(\frac{\Omega+\Delta}{2\pi};2\tau\right)}\begin{bmatrix}\frac{\vartheta_3\left(2J(\lambda)+\frac{\Omega+\Delta}{2\pi}-\frac{1}{2};2\tau\right)}{\vartheta_3\left(2J(\lambda)-\frac{1}{2};2\tau\right)} & \frac{\vartheta_3\left(-2J(\lambda)+\frac{\Omega+\Delta}{2\pi}-\frac{1}{2};2\tau\right)}{\vartheta_3\left(-2J(\lambda)-\frac{1}{2};2\tau\right)}\end{bmatrix},
\tag{3.8}
$$

其中

$$\Omega := -x\,\Omega_1(\eta_1,\eta_2) - t\,\Omega_2(\eta_1,\eta_2),\ \gamma(\lambda;\eta_1,\eta_2) := \left(\frac{\lambda^2+\eta_1^2}{\lambda^2+\eta_2^2}\right)^{1/4}.$$

此外，$\gamma(\lambda;\eta_1,\eta_2)$满足以下跳跃条件：

$$\begin{aligned}\gamma_+(\lambda;\eta_1,\eta_2) &= -i\,\gamma_-(\lambda;\eta_1,\eta_2), \quad \lambda\in(i\eta_1,i\eta_2),\\ \gamma_+(\lambda;\eta_1,\eta_2) &= i\,\gamma_-(\lambda;\eta_1,\eta_2), \quad \lambda\in(-i\eta_2,-i\eta_1).\end{aligned}$$

下面，我们还需要构造一个 2×2 矩阵值RH问题。

RH 问题 3.2。设 $\Omega := -x\,\Omega_1(\eta_1,\eta_2) - t\Omega_2(\eta_1,\eta_2)$，其中 Ω_1,Ω_2 是 (3.5) 中定义的实值基本频率，并令 $\Delta = x_0\Omega_1(\eta_1,\eta_2)\in\mathbb{R}$ 表示一个常数相移。对于 $\eta_2>\eta_1>0$，求一个 2×2 矩阵值函数 $O(x,t;\lambda)$，使得 [9]：

1. *$O(x,t;\lambda)$ is analytic for $\lambda\in\mathbb{C}\setminus[-i\eta_2,i\eta_2]$, with at most a simple pole at $\lambda=0$.*
2. *$O(x,t;\lambda)$ 在 $[-i\eta_2,i\eta_2]$ 上的边界值满足跳跃条件*

$$O_+(x,t;\lambda) = O_-(x,t;\lambda)\,V^{(O)}(\lambda), \qquad \lambda\in[-i\eta_2,i\eta_2],$$

其中

$$V^{(O)}(\lambda) = \begin{cases}\begin{pmatrix}0 & -i\\ -i & 0\end{pmatrix}, & \lambda\in(i\eta_1,i\eta_2),\\ \begin{pmatrix}0 & i\\ i & 0\end{pmatrix}, & \lambda\in(-i\eta_2,-i\eta_1),\\ e^{i(\Omega+\Delta)\sigma_3}, & \lambda\in(-i\eta_1,i\eta_1).\end{cases}$$

3. *当 $\lambda\to\infty$ 时，$O(x,t;\lambda)$ 满足归一化*

$$O(x,t;\lambda) = I + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

4. *$O(x,t;\ \lambda)$ 满足对称关系*

$$\overline{O(\bar\lambda;x,t)} = O(-\lambda;x,t) = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} O(x,t;\lambda)\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

按照 [9], 中的步骤，我们构造出解 $O(x,\ t;\ \lambda)$，它是 2×2 矩阵值RH问题3.2的解。由于 x_0 $\Omega_1(\eta_1,\ \eta_2)\ =\Delta$，然后令

$$\varphi(x,t;\lambda) := m(\lambda)\,e^{-i((x-x_0)\,p(\lambda)+t\,q(\lambda))}. \tag{3.9}$$

于是，φ 的跳跃条件与 x 和 t无关，因此 $\partial_x\varphi$ 满足与 φ相同的跳跃条件。我们定义

$$\begin{aligned}\Psi(x,t;\lambda) &:= \begin{pmatrix}\varphi(x,t;\lambda)\\ \partial_x\varphi(x,t;\lambda)\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}m_1(\lambda) & m_2(\lambda)\\ \partial_x m_1(\lambda) - i\,p(\lambda)\,m_1(\lambda) & \partial_x m_2(\lambda) + i\,p(\lambda)\,m_2(\lambda)\end{pmatrix} e^{-i((x-x_0)p(\lambda)+tq(\lambda))\sigma_3}.\end{aligned}$$

将 $\Psi(x,t;\lambda)e^{i((x-x_0)p(\lambda)+tq(\lambda))^{\sigma_3}}$ 归一化为 $\lambda\to\infty$ 单位矩阵，并提出指数项后，我们得到

$$O(x,t;\lambda)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}(1+\frac{p(\lambda)}{\lambda})m_1(\lambda)-\frac{1}{i\lambda}\,\partial_x m_1(\lambda) & (1-\frac{p(\lambda)}{\lambda})m_2(\lambda)-\frac{1}{i\lambda}\,\partial_x m_2(\lambda)\\ (1-\frac{p(\lambda)}{\lambda})m_1(\lambda)+\frac{1}{i\lambda}\,\partial_x m_1(\lambda) & (1+\frac{p(\lambda)}{\lambda})m_2(\lambda)+\frac{1}{i\lambda}\,\partial_x m_2(\lambda)\end{pmatrix}, \tag{3.10}$$

其中 $m_1(\lambda)$ 和 $m_2(\lambda)$ 分别表示 $m(\lambda)$的第一和第二个分量。特别地，尽管 $O(x,t;\lambda)$ 在 $\lambda=0$ 处有一个简单奇点，但根据 [9]中的引理3.3，其行列式恒等于 1。

引理3.3。 矩阵值函数

$$\Psi(x,t;\lambda)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -i\lambda & i\lambda\end{pmatrix}O(x,t;\lambda)\,e^{-i[(x-x_0)p(\lambda)+tq(\lambda)]\sigma_3} \tag{3.11}$$

其中矩阵 $O(x,t;\lambda)$ 如 (3.10) 所定义，且 $x_0=\Delta/\Omega_1(\eta_1,\eta_2)$，其中 $\Delta=x_0\Omega_1(\eta_1,\eta_2)$，而 Ω_1 如 (3.5) 所定义，满足矩阵形式的 Lax 对 (1.3)。

证明。回顾 (3.4) 和 (3.5) 中的定义，可知 $\Psi(x,t;\lambda)$ 满足以下跳跃条件： $\Psi_+(\lambda)=\Psi_-(\lambda)i\sigma_1$, $\lambda\in(i\eta_1,i\eta_2)$ 和 $\Psi_+(\lambda)=\Psi_-(\lambda)(-i\sigma_1)$, $\lambda\in(-i\eta_2,-i\eta_1)$。由于这些跳跃矩阵与 x 和 t 无关，因此可知 $\partial_x\Psi(\Psi)^{-1}$ 对于 $\lambda\in\mathbb{C}$ 没有跳跃。

由于 $\lambda\to\infty$，回顾 $p(\lambda)$ 在（3.4）中的定义，可得

$$p(\lambda)=\lambda+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{p_k}{\lambda^k},\qquad p_1=\left[\tfrac{\eta_1^2-\eta_2^2}{2}+\eta_2^2\tfrac{E(m)}{K(m)}\right].$$

此外，根据 $O(x、\ t、\ \lambda)$ 在（3.10）中的定义，

$$O(x,t;\lambda)=I+\frac{O^{(1)}}{\lambda}+\frac{O^{(2)}}{\lambda^2}+\mathcal{O}\left(\lambda^{-3}\right), \tag{3.12}$$

其中

$$O^{(1)}=\begin{pmatrix}m_{1,1} & 0\\ 0 & m_{2,1}\end{pmatrix},\qquad O^{(2)}=\begin{pmatrix}m_{1,2}+\frac{p_1}{2}-\frac{\partial_x m_{1,1}}{2i} & -\frac{p_1}{2}-\frac{\partial_x m_{2,1}}{2i}\\ -\frac{p_1}{2}+\frac{\partial_x m_{1,1}}{2i} & m_{2,2}+\frac{p_1}{2}+\frac{\partial_x m_{2,1}}{2i}\end{pmatrix}.$$

将这些展开式代入 $\partial_x\Psi(\Psi)^{-1}$，我们得到

$$\begin{aligned}\partial_x\Psi(\Psi)^{-1}&=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -i\lambda & i\lambda\end{pmatrix}\left[O_xO^{-1}+O(-ip(\lambda)\sigma_3)O^{-1}\right]\begin{pmatrix}1 & 1\\ -i\lambda & i\lambda\end{pmatrix}^{-1}\\
&=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -i\lambda & i\lambda\end{pmatrix}\left[\left(I+\tfrac{O^{(1)}}{\lambda}+\tfrac{O^{(2)}}{\lambda^2}+\mathcal{O}(\lambda^{-3})\right)\left(-i\lambda\sigma_3-i\tfrac{p_1}{\lambda}\sigma_3+\mathcal{O}(\lambda^{-2})\right)\right.\\
&\quad\left.\times\left(I-\tfrac{O^{(1)}}{\lambda}+\tfrac{(O^{(1)})^2-O^{(2)}}{\lambda^2}+\mathcal{O}(\lambda^{-3})\right)+\tfrac{O^{(1)}_x}{\lambda}+\mathcal{O}(\lambda^{-2})\right]\begin{pmatrix}1 & 1\\ -i\lambda & i\lambda\end{pmatrix}^{-1}\\
&=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -i\lambda & i\lambda\end{pmatrix}\left[-i\lambda\sigma_3+i[\sigma_3,O^{(1)}]\right.\\
&\left.+\frac{1}{\lambda}\left((O^{(1)})_x-ip_1\sigma_3-i[O^{(2)},\sigma_3]\right)+\mathcal{O}(\lambda^{-2})\right]\begin{pmatrix}1 & 1\\ -i\lambda & i\lambda\end{pmatrix}^{-1}\\
&=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -\lambda^2-2p_1-2i\,\partial_x m_{1,1} & 0\end{pmatrix}+\mathcal{O}(\lambda^{-1}).\end{aligned}$$

关于极限 $\lambda \to 0$，我们观察到

$$m_{1,\pm}(0) = m_{2,\pm}(0)\, e^{\pm i(\Omega+\Delta)}, \qquad p_{\pm}(0) = \mp\frac{\Omega_1}{2}. \tag{3.13}$$

由此可得

$$\begin{aligned} \partial_x m_{1,\pm}(0) &= \partial_x m_{2,\pm}\, e^{\pm i(\Omega+\Delta)} \mp i\Omega_1 m_{2,\pm}\, e^{\pm i(\Omega+\Delta)}, \\ \partial_x^2 m_{1,\pm}(0) &= \partial_x^2 m_{2,\pm}\, e^{\pm i(\Omega+\Delta)} \mp 2i\Omega_1 \partial_x m_{2,\pm}\, e^{\pm i(\Omega+\Delta)} - \Omega_1^2 m_{2,\pm}\, e^{\pm i(\Omega+\Delta)}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

于是，当 $\lambda \to 0$ 时，直接计算可得

$$\partial_x \Psi\,(\Psi)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\begin{pmatrix} 0 & \alpha_{\pm} \\ \beta_{\pm} & \partial_x \alpha_{\pm} \end{pmatrix} + \mathcal{O}(1),$$

其中

$$\begin{aligned} \alpha &= 2im_1 m_{2x} - 2im_{1x} m_2 + 4m_1 m_2 p, \\ \beta &= 2(m_{1xx}(-im_{2x} + m_2 p) + im_{1x}(m_{2xx} + 4im_{2x}p - 3m_2 p^2) \\ &\quad + m_1 p(m_{2xx} + 3im_{2x}p - 2m_2 p^2)). \end{aligned}$$

利用（3.13）和（3.14）中的关系式，我们得出 $\alpha = \partial_x \alpha = 0$ 以及 $\beta = 0$。因此，当$\lambda \to 0$时，量 $\partial_x \Psi$（Ψ）$^{-1}$ 是正则的。结合它在 $\lambda \to \infty$时的渐近性质，我们得出 $\partial_x \Psi$（Ψ）$^{-1}$ 是关于 λ的整函数。由刘维尔定理，它因此必满足（1.3）中给出的Lax对的空间部分。 □

注 3.4. 事实上，（φ（x，t；λ）中的特征向量（3.9）可视为KdV方程（1.1）的 ***Baker–Akhiezer*** 函数（参见 [1]），其在能量平面（$z = \lambda^2$）上的谱由 $(-\infty, -\eta_2^2] \cup [-\eta_1^2, 0]$ 给出。

推论 3.5。 通过 *RH*问题 *3.2* 表示的*KdV*方程的解为

$$u(x,t) = -2p_1 - 2i\,\partial_x m_{1,1}(x,t), \tag{3.15}$$

其中 $m_{1,\,1}$ 表示 λ 展开式中 $m(x,\ t,\ \lambda)$ 的第一项在大 (3.6)中的系数。特别地，

$$u(x,t) = \eta_2^2 - \eta_1^2 - 2\eta_2^2\,\mathrm{dn}^2\Big(\eta_2[x - 2(\eta_1^2 + \eta_2^2)t - x_0] + K(m)\,\Big|\,m\Big),$$

其中 $m = \frac{\eta_1}{\eta_2}$。

证明。 由于 $\lambda \to \infty$，我们有如下展开式

$$2J(\lambda;\eta_1,\eta_2) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{\lambda}\left[\frac{i\eta_2}{4K(m)}\right] + \mathcal{O}(\lambda^{-2}).$$

结合 $\Omega = -x\Omega_1 - t\Omega_2$, 可知，$\lambda$ 展开式 $m_1(\lambda)$ 在 (3.8) 中给出

$$m_{1,1} = -i\,\partial_x \log \vartheta_3\left(\frac{\Omega+\Delta}{2\pi};\, 2\tau\right).$$

代入 p_1 以及上述展开式到（3.15）中，得到

$$u(x,t) = \eta_2^2 - \eta_1^2 - 2\eta_2^2\frac{E(m)}{K(m)} - 2\,\partial_x^2 \log \vartheta_3\left(\frac{\Omega+\Delta}{2\pi};\, 2\tau\right).$$

此外，利用 $2\tau = i\dfrac{K}{(1-m)\,K}$（$m$）以及 [15, 第 45 页练习 16] 中给出的恒等式和（3.5.5），可得

$$\partial_x^2 \log \vartheta_3\left(\frac{\Omega+\Delta}{2\pi};\, 2\tau\right) = -\eta_2^2 \frac{E(m)}{K(m)} + \mathrm{dn}^2\left(2K(m)\left(\frac{\Omega+\Delta}{2\pi}\right) + K(m)\,\middle|\, m\right).$$

因此，

$$u(x,t) = \eta_2^2 - \eta_1^2 - 2\eta_2^2\,\mathrm{dn}^2\Big(\eta_2[x - 2(\eta_1^2+\eta_2^2)t - x_0] + K(m)\,\Big|\, m\Big).$$

□

阶跃型有限带势的 Jost解

回顾一下， $u_0^l(x)$ 和 $u_0^r(x)$ （1.7）中的对象是与谱带相关联的 KdV方程的周期有限带隙解

$$\Sigma^l = (i\eta_1^l, i\eta_2^l) \cup (-i\eta_2^l, -i\eta_1^l), \quad \Sigma^r = (i\eta_1^r, i\eta_2^r) \cup (-i\eta_2^r, -i\eta_1^r).$$

下文中，我们分别用 $O^l(x,t;\lambda)$ 和 $O^r(x,t;\lambda)$ 表示与 $u^l(x,t)$ 和 $u^r(x,t)$ 相关联的 RH问题。设 $s \in \{r,l\}$。为简便起见，我们用 s 表示两种情形中的任意一种，即 r 或 l，并引入以下缩写来表示各种相关函数和量：

$$dp^s = dp(\eta_1^s, \eta_2^s), \qquad p^s(\lambda) = p(\lambda; \eta_1^s, \eta_2^s) = \int_{i\eta_2^s}^{\lambda} dp^s,$$

Ω_1^s 以及其他相关量也类似。

我们如下引入与周期背景解 $u^l(x,t)$ 和$u^r(x,t)$ 相关联的 Jost解：

$$\Psi_0^s(x,t;\lambda) := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i\lambda & i\lambda \end{pmatrix} O^s(x,t;\lambda)\, e^{-i[(x-x_0^l)p^s(\lambda)+tq^s(\lambda)]\sigma_3}. \tag{3.16}$$

根据引理3.3，函数 $\Psi_0^l(x,t;\lambda)$ 和 $\Psi_0^r(x,t;\lambda)$ 分别与(1.7)中的势函数 $u^l(x,t)$ 和 $u^r(x,t)$ 一起满足矩阵Lax对(1.3)。在接下来的分析中，我们聚焦于Lax对(1.3)的x部分，并将 $t=0$ 视为固定参数。对应于初始数据(1.8)的Jost解满足渐近边界条件

$$\begin{aligned} \Psi^l(x;\lambda) &= \Psi_0^l(x;\lambda)\left(I + \mathcal{O}(|x|^{-1})\right), \quad x \to +\infty, \\ \Psi^r(x;\lambda) &= \Psi_0^r(x;\lambda)\left(I + \mathcal{O}(|x|^{-1})\right), \quad x \to -\infty. \end{aligned} \tag{3.17}$$

假设Jost解 $\Psi^s(x;\lambda)$ 具有如下形式

$$\Psi^s(x;\lambda) := \Psi_0^s(x;\lambda)\, e^{i(x-x_0^s)p^s(\lambda)\sigma_3}\, \mathbf{J}^s(x;\lambda)\, e^{-i(x-x_0^s)p^s(\lambda)\sigma_3}. \tag{3.18}$$

归一化特征函数 $\mathbf{J}^l(x;\lambda)$ 和 $\mathbf{J}^r(x;\lambda)$。

命题3.6。 设 $\Psi^l(x;\ \lambda)$ 和 $\Psi^r(x;\ \lambda)$ 是 *Lax*对 (1.3)的 *Jost*解。则$\mathbf{J}^l(x;\ \lambda)$ 和 $\mathbf{J}^r(x;\ \lambda)$ 满足以下微分方程：

$$\partial_x \mathbf{J}^s(x;\lambda) + ip^s(\lambda)\,[\sigma_3, \mathbf{J}^s(x;\lambda)] = U^s(x;\lambda)\mathbf{J}^s(x;\lambda), \tag{3.19}$$

其中

$$U^s(x;\lambda) = (O^s(x;\lambda))^{-1}\left[\frac{i(u_0(x)-u_0^s(x))}{2\lambda}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\right]O^s(x;\lambda),$$

此外，$\mathbf{J}^l(x;\lambda)$ 和 $\mathbf{J}^r(x;\lambda)$ 具有如下 *Volterra*积分表示：

$$\begin{aligned}\mathbf{J}^l(x;\lambda) &= I + \int_{-\infty}^{x} e^{-i(x-y)p^l(\lambda)\sigma_3}\, U^l(y;\lambda)\, \mathbf{J}^l(y;\lambda) e^{i(x-y)p^l(\lambda)\sigma_3} dy,\\ \mathbf{J}^r(x;\lambda) &= I + \int_{+\infty}^{x} e^{-i(x-y)p^r(\lambda)\sigma_3}\, U^r(y;\lambda)\, \mathbf{J}^r(y;\lambda) e^{i(x-y)p^r(\lambda)\sigma_3} dy.\end{aligned} \tag{3.20}$$

证明。 对3.18式关于 x求导，得到

$$\partial_x \Psi^l(x;\lambda) = L^l\Psi^l(x;\lambda) + \Psi_0^l(x;\lambda)e^{i(x-x_0^l)p^l(\lambda)\sigma_3}\Big(\partial_x \mathbf{J}^l(x;\lambda) + ip^l(\lambda)[\sigma_3, \mathbf{J}^l(x;\lambda)]\Big)e^{-i(x-x_0^l)p^l(\lambda)\sigma_3},$$

其中 $[A,B] := AB - BA$ 表示矩阵交换子，而 $L^l = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -\lambda^2 + u_0^l & x\end{pmatrix}$ 。由于$\Psi^l(x;\lambda)$ 是 Lax对 (1.3的一个 Jost解，因此它必须满足该方程组的 x部分。这意味着 $\mathbf{J}^l(x;\lambda)$ 满足微分方程 (3.19)。

此外，根据边界条件 (3.17)，$\mathbf{J}^l(x;\lambda)$ 可表示为 Volterra积分形式 (3.20。对 $\mathbf{J}^r(x;\lambda)$ 的分析类似。 □

用下标“1”表示上半平面上的带，用下标“2”表示下半平面上的带，即，

$$\Sigma_1^s := (i\eta_1^s, i\eta_2^s), \quad \Sigma_2^s := (-i\eta_2^s, -i\eta_1^s).$$

由于我们要求 Σ_1^l 与 Σ_1^r 不共享任何端点，因此总共有六种可能的构型。图3 展示了 $\eta_1^l \neq \eta_1^r$ 与 $\eta_2^l \neq \eta_2^r$的六种情形。

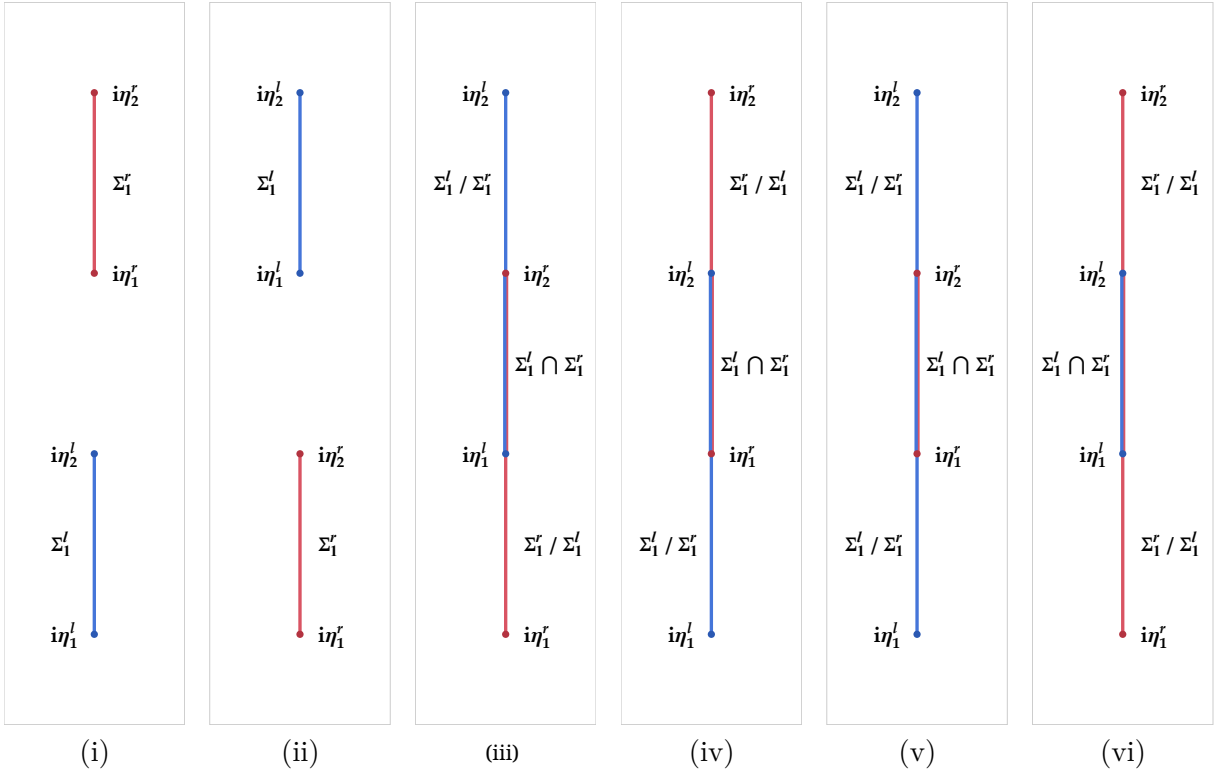

图3： 上半平面中阶梯状有限带隙势带的六种构型 (i)–(vi)。红色（Σ_1^r）和蓝色（{v4）实线分别表示 $u_0^r(x)$ 和 $u_0^l(x)$ 的谱带。

命题 3.7. 假设初始数据 $u_0(x)$满足条件(1.8) 和假设*1*。则积分方程(3.20) 分别存在唯一解$\mathbf{J}^l(x;\,\lambda)$和 $\mathbf{J}^r(x;\lambda)$，并具有以下性质：

1. 函数 $\mathbf{J}^l(x;\lambda)$ 对 $x\in\mathbb{R}$ 和 $\lambda\in(\mathbb{C}_+\cup\Sigma_2^l,\ \mathbb{C}_-\cup\Sigma_1^l)\setminus\{0,\pm i\eta_1^l,\pm i\eta_2^l\}$ 有定义，这意味着 $\mathbf{J}^l(x;\lambda)$ 的第一列属于 $(\mathbb{C}_+\cup\Sigma_2^l)\setminus\{0,\pm i\eta_1^l,\pm i\eta_2^l\}$，第二列属于 $(\mathbb{C}_-\cup\Sigma_1^l)\setminus\{0,\pm i\eta_1^l,\pm i\eta_2^l\}$。对于每个 $\lambda\in(\mathbb{C}_+\cup\Sigma_2^l,\ \mathbb{C}_-\cup\Sigma_1^l)\setminus\{0,\pm i\eta_1^l,\pm i\eta_2^l\}$，$\mathbf{J}^l(\cdot\ \lambda)$ 对任意 $x\in\mathbb{R}$ 都是 n_0 次可微的。

2. 对于每个 $x\in\mathbb{R}$，函数 $\mathbf{J}^l(x、\cdot)$ 在 $\lambda\in(\mathbb{C}_+、\ \mathbb{C}_-)\setminus[-i\eta_2^l,i\eta_2^l]$ 上连续，并且在相应的内部区域内解析。此外，$\mathbf{J}^l(x、\cdot)$ 关于左侧和右侧 $\lambda\in(\Sigma^l\cup\mathbb{R})\setminus\{0、\pm i\eta_1^l、\pm i\eta_2^l\}$ 是 m_0 可微的。特别地，对于 $\lambda\in\Sigma^l$，$\mathbf{J}^l(x;\lambda)$ 的边界值满足

$$\mathbf{J}^l(x;\lambda_+)=\sigma_1\mathbf{J}^l(x;\lambda_-)\sigma_1,\quad \lambda\in\Sigma^l, \tag{3.21}$$

and

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_1^l(x;\lambda_+)&=\begin{pmatrix}1&0\\0&e^{-2i(x\Omega_1^l-\Delta^l)}\end{pmatrix}\mathbf{J}_1^l(x;\lambda_-),\quad \lambda\in(0,i\eta_1^l),\\ \mathbf{J}_2^l(x;\lambda_+)&=\begin{pmatrix}e^{2i(x\Omega_1^l-\Delta^l)}&0\\0&1\end{pmatrix}\mathbf{J}_2^l(x;\lambda_-),\quad \lambda\in(-i\eta_1^l,0),\end{aligned} \tag{3.22}$$

其中，$\mathbf{J}_i^l(x、\ \lambda_\pm)、\ i=1、2$表示矩阵值函数 $\mathbf{J}^l(x;\lambda)$的第 i 列从左侧/右侧取得的边界值。

3. $\mathbf{J}^r(x;\,\lambda)$ 对 $x\in\mathbb{R}$ 以及 $\lambda\in(\mathbb{C}_-\cup\Sigma_1^r、\ \overline{\mathbb{C}_+}\cup\Sigma_2^r)\setminus\{\overline{0}、\ \pm i\eta_1^r、\ \pm i\eta_2^r\}$ 有定义。对于每个$\lambda\in(\mathbb{C}_-\cup\Sigma_1^r、\ \overline{\mathbb{C}_+\cup\Sigma_2^r})\setminus\{0、\ \pm i\eta_1^r、\ \pm i\eta_2^r\}$，$\mathbf{J}^r(\cdot;\,\lambda)$ 关于任意 $x\in\mathbb{R}$ 均 n_0–次可微。

4. 对于每个 $x\in\mathbb{R}$，函数 $\mathbf{J}^r(x,\cdot)$ 在 $\lambda\in(\mathbb{C}_-,\mathbb{C}_+)\setminus[-i\eta_2^r,i\eta_2^r]$ 上连续，并在其内部区域解析。此外，$\mathbf{J}^r(x,\cdot)$ 在左侧和右侧 $\lambda\in(\Sigma^r\cup\mathbb{R})\setminus\{0,\pm i\eta_1^r,\pm i\eta_2^r\}$ 上 m_0 可微。特别地，$\mathbf{J}^r(x;\lambda)$ 在 $\lambda\in\Sigma^r$ 处的边界值满足

$$\mathbf{J}^r(x;\lambda_+)=\sigma_1\mathbf{J}^r(x;\lambda_-)\sigma_1,\quad \lambda\in\Sigma^l, \tag{3.23}$$

and

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_1^r(x;\lambda_+)&=\begin{pmatrix}1&0\\0&e^{-2i(x\Omega_1^r-\Delta^r)}\end{pmatrix}\mathbf{J}_1^r(x;\lambda_-),\quad \lambda\in(-i\eta_1^r,0),\\ \mathbf{J}_2^r(x;\lambda_+)&=\begin{pmatrix}e^{2i(x\Omega_1^r-\Delta^r)}&0\\0&1\end{pmatrix}\mathbf{J}_2^r(x;\lambda_-),\quad \lambda\in(0,i\eta_1^r).\end{aligned} \tag{3.24}$$

5. 函数 $\mathbf{J}^l(x;\lambda)$ 和 $\mathbf{J}^r(x;\lambda)$ 满足以下对称关系：

$$\begin{aligned}\mathbf{J}^l(x;-\lambda)&=\sigma_1\mathbf{J}^l(x;\lambda)\sigma_1,\quad \lambda\in(\overline{\mathbb{C}}_+,\overline{\mathbb{C}}_-)\setminus[-i\eta_2^l,i\eta_2^l],\\ \mathbf{J}^r(x;-\lambda)&=\sigma_1\mathbf{J}^r(x;\lambda)\sigma_1,\quad \lambda\in(\overline{\mathbb{C}}_-,\overline{\mathbb{C}}_+)\setminus[-i\eta_2^r,i\eta_2^r].\end{aligned} \tag{3.25}$$

此外，还满足以下复共轭对称性：

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{J}^l(x,\bar\lambda)}&=\sigma_1\mathbf{J}^l(x;\lambda)\sigma_1,\quad \lambda\in(\overline{\mathbb{C}}_+,\overline{\mathbb{C}}_-)\setminus\{0\},\\ \overline{\mathbf{J}^r(x,\bar\lambda)}&=\sigma_1\mathbf{J}^r(x;\lambda)\sigma_1,\quad \lambda\in(\overline{\mathbb{C}}_-,\overline{\mathbb{C}}_+)\setminus\{0\}.\end{aligned} \tag{3.26}$$

6. 对于每个 $x \in \mathbb{R}$，以及属于 $\mathbf{J}^l(x;\ \lambda)$ 和 $\mathbf{J}^r(x;\ \lambda)$ 的定义域的任意 λ，$\mathbf{J}^l(x;\ \lambda)$ 和 $\mathbf{J}^r(x;\ \lambda)$ 的行列式满足

$$\det\left[\mathbf{J}^s(x;\lambda)\right] = 1. \tag{3.27}$$

证明。 在证明关于 $\mathbf{J}^s(x;\lambda)$ 的命题之前，我们为矩阵值函数 $A(x)$定义如下范数:

$$|A| := \sqrt{\mathrm{Tr}((A^*)^t A)}, \quad \|A\|_{L^p(\gamma)} := \left(\int_\gamma |A(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \|A\|_{L^\infty(\gamma)} := \sup_{x\in\gamma} |A(x)|.$$

证明 1。我们首先回顾(3.4)中 $p^l(\lambda)$的定义。函数 $p^l(\lambda)$在 $\lambda \in \mathbb{C}\setminus[-i\eta_2^l, i\eta_2^l]$上解析。由于虚部 $\mathrm{I}p^l(\lambda)$是调和的，并且在$\mathbb{R}\cup\Sigma^l$ 上为零，而 $\mathrm{I}p^l_\pm(\lambda) > 0$, $\lambda \in (0, i\eta_1^l]$, $\mathrm{I}p^l_\pm(\lambda) < 0, \lambda \in [-i\eta_1^l, 0)$, 又由于当 $\lambda \to \infty$ 时 $p^l(\lambda) \sim \lambda$，由调和函数最大值原理可得

$$\begin{aligned} &\Im p^l(\lambda) > 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+ \setminus \Sigma_1^l, \\ &\Im p^l(\lambda) < 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}_- \setminus \Sigma_2^l. \end{aligned} \tag{3.28}$$

设初始数据 u_0 满足条件（1.8）。根据沃尔泰拉积分方程（3.20），$\mathbf{J}^l$（x; λ）的第一列可以写成如下形式:

$$\mathbf{J}_1^l(x;\lambda) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \int_{-\infty}^x \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & e^{2i(x-y)p^l(\lambda)}\end{pmatrix} U^l(y;\lambda)\, \mathbf{J}_1^l(y;\lambda)\, dy. \tag{3.29}$$

定义

$$\mathcal{K}(x,y;\lambda) := \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & e^{2i(x-y)p^l(\lambda)}\end{pmatrix} U^l(y;\lambda),$$

由此得到一个作用于 2×1 上的 y向量值函数的积分算子。为方便起见，我们将（3.29）改写为算子形式

$$\mathbf{J}_1^l = \mathbf{e}_1 + \mathcal{K}\mathbf{J}_1^l, \qquad \mathbf{e}_1 := \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}. \tag{3.30}$$

由$\mathrm{I}p^l(\lambda) = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}\cup\Sigma^l$ 以及（3.28）可知，对任意 $\lambda \in \mathbb{C}_+\cup\Sigma_2^l\setminus\{\overline{0}, \pm i\eta_1^l, \pm i\eta_2^l\}$，算子$\mathcal{K}$是从 $L^1(-\infty, x)$ 到 $L^1(-\infty, x)$的有界线性算子，即

$$\|\mathcal{K}\| \le \frac{c}{|\lambda|}\|u_0(x) - u_0^l(x)\|_{L^1(-\infty,x)}, \quad \|\mathcal{K}^j\| \le \frac{1}{j!}\left(\frac{c}{|\lambda|}\|u_0(x) - u_0^l(x)\|_{L^1(-\infty,x)}\right)^j. \tag{3.31}$$

因此，方程（3.30）对任意 $x \in \mathbb{R}$ 和$\lambda \in \mathbb{C}_+\cup\Sigma_2^l\setminus\{0, \pm i\eta_1^l, \pm i\eta_2^l\}$均有唯一解。此外，对任意固定的 $\lambda \in \mathbb{C}_+\cup\Sigma_2^l\setminus\{0, \pm i\eta_1^l, \pm i\eta_2^l\}$，对（3.29）关于 x 求导可知，$\mathbf{J}_1^l(x;\lambda)$ 是 n_0-次可微的，对所有 $x \in \mathbb{R}$均成立。

定理 2 的证明。注意，对于任意 $x \in \mathbb{R}$ 和 $\lambda \in \mathbb{C}_+ \cup \Sigma_2^l \setminus \{\overline{0}, \pm i\eta_1^l, \pm i\eta_2^l\}$，核$\partial_\lambda\mathcal{K}(x,y;\lambda)$ 满足如下估计

$$\left\|\dot{\mathcal{K}}(x,y;\cdot)\right\| \le \frac{c}{|\lambda|}\| x(u_0(x) - u_0^l(x))\|_{L^1(-\infty,x)}.$$

其中圆点表示关于 λ的微分。因此，对于初始数据 $u_0(x)$ 满足条件（1.8），由此可得 $\mathbf{J}_1^l(x,\cdot)$ 在 $\lambda \in \bar{\mathbb{C}}_+\setminus[i\eta_2^l, 0]$上是解析的。此外，由于$\mathrm{I}p^l(\lambda) = 0$ 对于 $\lambda \in \Sigma^l \cup \mathbb{R}$，由此可得

$$\left\|\frac{d^j}{d\lambda^j}\mathcal{K}(x,t;\cdot)\right\| \le \frac{c}{|\lambda|}\| x^j(u_0(x) - u_0^l(x))\|_{L^1(-\infty,x)}, \quad \lambda \in \Sigma^l \cup \mathbb{R}\setminus\{0, \pm i\eta_1^l, \pm i\eta_2^l\}.$$

因此，对于初始数据 $u_0(x)$ 满足条件（1.8），$\mathbf{J}^l(x,\cdot)$ 是 m_0 可微的，对于左侧和右侧 $\lambda \in (\Sigma^l \cup \mathbb{R}) \setminus \{0, \pm i\eta_1^l, \pm i\eta_2^l\}$。

对于 $\lambda \in \Sigma^l$，积分方程给出

$$\mathbf{J}^l(x;\lambda_+) = I + \int_{-\infty}^{x} e^{-i(x-y)p^l(\lambda_+)\sigma_3}\, U^l(y;\lambda_+)\, \mathbf{J}^l(y;\lambda_+) e^{i(x-y)p^l(\lambda_+)\sigma_3} dy.$$

利用关系 $p^l(\lambda_+) = -p^l(\lambda_-)$ 以及 $O^l(x;\lambda)$ 在 RH问题 3.2(对 $\lambda \in \Sigma_1^l$) 中的跳跃条件，我们得到

$$\mathbf{J}^l(x;\lambda_+) = I + \int_{-\infty}^{x} e^{i(x-y)p^l(\lambda_-)\sigma_3}\, (i\sigma_1) U^l(y;\lambda_-)(-i\sigma_1)\, \mathbf{J}^l(y;\lambda_+) e^{-i(x-y)p^l(\lambda_-)\sigma_3} dy.$$

在左侧乘以 $i\sigma_1$，并在右侧乘以 $-i\sigma_1$，得到

$$(-i\sigma_1)\mathbf{J}^l(x;\lambda_+)(i\sigma_1) = I + \int_{-\infty}^{x} e^{-i(x-y)p^l(\lambda_-)\sigma_3}\, U^l(y;\lambda_-) \left[(-i\sigma_1)\mathbf{J}^l(y;\lambda_+)(i\sigma_1)\right] e^{i(x-y)p^l(\lambda_-)\sigma_3} dy.$$

此恒等式表明，$(-i\sigma_1)\mathbf{J}^l(x;\lambda_+)(i\sigma_1)$ 也满足 3.20) 对 $\lambda \in \Sigma_1^l$ 的积分方程，其中 λ 被解释为右边界值。

现在我们考察间隙中的跳跃条件。注意到

$$p^l(\lambda_+) - p^l(\lambda_-) = -\Omega_1^l, \quad \text{and} \quad O^l(x;\lambda_+) = O^l(x;\lambda_-) e^{-i(x\Omega_1^l - \Delta^l)\sigma_3}.$$

由此，我们推导出

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}_1^l(x;\lambda_+) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_{-\infty}^{x} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2i(x-y)p^l(\lambda_+)} \end{pmatrix} U^l(y;\lambda_+)\mathbf{J}_1^l(y;\lambda_+) dy \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_{-\infty}^{x} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2i(x-y)p^l(\lambda_-) - 2i(x-y)\Omega_1^l} \end{pmatrix} e^{i(y\Omega_1^l - \Delta^l)\sigma_3} U^l(y;\lambda_+) e^{-i(y\Omega_1^l - \Delta^l)\sigma_3} \mathbf{J}_1^l(y;\lambda_+) dy,
\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-2i(x\Omega_1^l - \Delta^l)} \end{pmatrix} \mathbf{J}_1^l(x;\lambda_+) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_{-\infty}^{x} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2i(x-y)p^l(\lambda_-)} \end{pmatrix} U^l(y;\lambda_-) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-2i(y\Omega_1^l - \Delta^l)} \end{pmatrix} \mathbf{J}_1^l(y;\lambda_-) dy.$$

其余关系式可通过类似的论证得出。

5. 的证明 关于对称性质，注意到

$$p^l(-\lambda) = -p^l(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus [-i\eta_2^l, i\eta_2^l],$$

并将其与 RH问题3.2中的对称关系结合起来，我们得到 n

$$\partial_x \left(\sigma_1 \mathbf{J}^l(x;-\lambda)\sigma_1\right) + ip^l(\lambda) \left[\sigma_3, \sigma_1 \mathbf{J}^l(x;-\lambda)\sigma_1\right] = U^l(x;\lambda) \left(\sigma_1 \mathbf{J}^l(x;-\lambda)\sigma_1\right).$$

由方程 (3.19) 的解的唯一性，我们得出 $\overline{\mathbf{J}^l(x;\lambda)}$ 的对称关系。类似地，利用施瓦茨对称性 $p(\lambda) = \overline{p(\lambda)}$，我们也可导出对称关系 (3.26)。6. 的证明 回顾一下，对于任意 $x \in \mathbb{R}$ 和 $\lambda \in \mathbb{C}$，都有 $\det[O^l(x;\lambda)] \equiv 1$，由 (3.11) 可得

$$\det[\Psi_0^l(x;\lambda)] = 2i\lambda.$$

由于 $\Psi^l(x;\lambda)$ 是 Lax对 1.3的一个 Jost解，刘维尔公式意味着 行列式$[\Psi^l(x;\lambda)]$关于 x 为常数。由于 $x \to -\infty$，我们有 $\Psi^l(x;\lambda) \to \Psi_0^l(x;\lambda)$；因此，

$$\det[\Psi^l(x;\lambda)] = \det[\Psi_0^l(x;\lambda)] = 2i\lambda.$$

根据（3.18）中的定义，可立即得到 $\det[\mathbf{J}^l(x;\lambda)] = 1$. □

引理 3.8 （$\mathbf{J}^l(x;\lambda)$ 和 $\mathbf{J}^r(x;\lambda)$ 当 $\lambda\to\infty$ 和 $\lambda\to 0$时的渐近性质）。 假设初始数据 $u_0(x)$ 满足条件 (1.8) 以及假设 *1*。

1. 当 $\lambda\to\infty$ 时，矩阵 $\mathbf{J}^l(x;\lambda)$ 和 $\mathbf{J}^r(x;\lambda)$ 具有如下渐近展开式

$$\begin{aligned}
&\mathbf{J}^l(x;\lambda)=I+\sum_{k=1}^{3}\frac{J_k^l(x)}{\lambda^k}+\mathcal{O}\left(\lambda^{-4}\right),\quad with\quad J_1^l(x)=\frac{i}{2}\left(\int_{-\infty}^{x}\left[u_0(y)-u_0^l(y)\right]dy\right)\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\\
&\mathbf{J}^r(x;\lambda)=I+\sum_{k=1}^{3}\frac{J_k^r(x)}{\lambda^k}+\mathcal{O}\left(\lambda^{-4}\right),\quad with\quad J_1^r(x)=\frac{i}{2}\left(\int_{+\infty}^{x}\left[u_0(y)-u_0^r(y)\right]dy\right)\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}.
\end{aligned}\tag{3.32}$$

这里，J_k^s 满足递推方程 (3.34)。

2. 当 $\lambda\to 0$ 时，函数 $\mathbf{J}^l(x;\lambda)$ 和 $\mathbf{J}^r(x;\lambda)$ 至多有一个简单极点。特别地，其渐近行为为

$$\mathbf{J}^s(x;\lambda_\pm)=\frac{1}{\lambda}e^{-i(x-x_0^s)p_\pm^s(0)\sigma_3}\begin{pmatrix}\alpha^s(x)&\beta^s(x)\\-\alpha^s(x)&-\beta^s(x)\end{pmatrix}e^{i(x-x_0^s)p_\pm^s(0)\sigma_3}+\mathcal{O}(1),\ s\in\{r,l\},\tag{3.33}$$

其中，$\alpha^l(x)$ 和 $\beta^l(x)$ 是当 $x\to-\infty$ 时衰减至零的连续函数，而 $\alpha^r(x)$和 $\beta^r(x)$ 是当 $x\to+\infty$ 时衰减至零的连续函数。

证明。 **1. 的证明**。 考虑 $\mathbf{J}^s(x;\lambda)$ 的形式展开，以及当 $\lambda\to\infty$ 时 $p^s(\lambda)$ 和 $U^s(x;\lambda)$ 的渐近展开式：

$$\mathbf{J}^s_{\text{form}}:=I+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_k^s}{\lambda^k},\qquad p^s(\lambda):=\lambda+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{p_k^s}{\lambda^k},\qquad U^s(x;\lambda):=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{U_k^s}{\lambda^k}.$$

将这些展开式代入（3.19）得到以下递推关系式：

$$\begin{cases}\partial_x\left(J_k^s\right)^{(d)}=\left(\sum_{l=1}^{k}U_l^sJ_{k-l}^s\right)^{(d)},\\ i\left[\sigma_3,J_k^s\right]=-\left(\partial_xJ_{k-1}^s\right)^{(o)}-\sum_{l=1}^{k}p_l^s\left[\sigma_3,J_{k-l}^s\right]+\left(\sum_{l=1}^{k}U_l^sJ_{k-l}^s\right)^{(o)},\end{cases}\tag{3.34}$$

其中，$(\cdot)^{(d)}$ 和$(\cdot)^{(o)}$ 分别表示矩阵的对角部分和非对角部分，且$J_0^s=I$。

定义截断展开

$$\mathbf{J}^s_{(k)}:=I+\sum_{l=1}^{k}\frac{J_l^s}{\lambda^l}.$$

直接计算可得

$$\partial_x\mathbf{J}^s_{(4)}+ip^s[\sigma_3,\mathbf{J}^s_{(4)}]-U^s\mathbf{J}^s_{(4)}=\frac{\partial_xJ_4^s}{\lambda^4}+\sum_{k=4}^{\infty}\frac{1}{\lambda^{k+1}}\sum_{l=1}^{4}p_{k+1-l}^s[\sigma_3,J_l^s]-\sum_{k=4}^{\infty}\frac{1}{\lambda^{k+1}}\sum_{l=1}^{4}U_{k+1-l}J_l^s.$$

由数学归纳法可得估计 $|J_4^s|\le$上确界$_{0\le j\le 2}|\partial_x^j(u_0-u_0^s)|$. 此外，若初始数据满足条件（1.8）且 $|\lambda|\gg 1$，则 $J^s_{(4)}$ 可逆，其中

$$\left(\mathbf{J}^s_{(4)}\right)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\sum_{l=1}^{4}\frac{J_l^s}{\lambda^l}\right)^k.$$

定义

$$\Delta := -\left(\partial_x \mathbf{J}^s_{(4)} + ip^s[\sigma_3, \mathbf{J}^s_{(4)}] - U^s \mathbf{J}^s_{(4)}\right)(\mathbf{J}^s_{(4)})^{-1}.$$

那么，当 $|\lambda|$ 充分大时，$(\mathbf{J}^s_{(4)})^{-1}J^s$ 满足

$$\partial_x\left((\mathbf{J}^s_{(4)})^{-1}\mathbf{J}^s\right) + ip^s[\sigma_3, (\mathbf{J}^s_{(4)})^{-1}\mathbf{J}^s] = (\mathbf{J}^s_{(4)})^{-1}\Delta\mathbf{J}^s.$$

等价地，$\mathbf{J}^s$ 满足以下积分方程：

$$\mathbf{J}^s(x;\lambda) = \mathbf{J}^s_{(4)}(x;\lambda) + \int_{\pm\infty}^{x} \mathbf{J}^s_{(4)}(x;\lambda)e^{-i(x-y)p^s(\lambda)\sigma_3}(\mathbf{J}^s_{(4)}(y;\lambda))^{-1}\Delta(y;\lambda)\mathbf{J}^s(y;\lambda)e^{i(x-y)p^s(\lambda)\sigma_3}\,dy. \tag{3.35}$$

由于 $|\Delta| \leq \frac{\text{上确界}_{0\leq j\leq 3}|\partial_x^j(\quad u_0 - u_0^s\ |\ )}{|\lambda|^4}$，因此由积分方程 (3.35可知，当$\lambda \to \infty$时，

$$|\mathbf{J}^s(x;\lambda) - \mathbf{J}^s_{(3)}(x;\lambda)| \leq \frac{\sup_{0\leq j\leq 3}\|\partial_x^j(u_0 - u_0^s)\|_{L^1(x,\pm\infty)}}{|\lambda|^4}.$$

证明 2。当 $\lambda \to 0$ 时，我们具体考虑 $\mathbf{J}^l(x;\lambda_+)$ 的情形；其他情形的分析类似。定义

$$\mathcal{X}(x;\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i\lambda & i\lambda \end{pmatrix} e^{i(x-x_0^l)p^l(\lambda)\sigma_3}\mathbf{J}^l(x;\lambda)e^{-i(x-x_0^l)p^l(\lambda)\sigma_3}.$$

那么，由积分方程 (3.20可得

$$\mathcal{X}(x;\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i\lambda & i\lambda \end{pmatrix} + \int_{-\infty}^{x} \tilde{U}(y;\lambda)\mathcal{X}(y;\lambda)dy,$$

其中

$$\tilde{U}(y;\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i\lambda & i\lambda \end{pmatrix} e^{i(y-x_0^l)p(\lambda)\sigma_3}U(y;\lambda)e^{-i(y-x_0^l)p(\lambda)\sigma_3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i\lambda & i\lambda \end{pmatrix}^{-1}.$$

假设当 $\lambda \to 0$ 时，RH问题（3.1）的向量解和相位函数 $p^l(\lambda)$ 具有如下展开式：

$$\begin{aligned} m_1^l(\lambda_+) &= m_{1,+}^l(0) + \partial_\lambda m_{1,+}^l(0)\,\lambda + \mathcal{O}(\lambda^2), \\ m_2^l(\lambda_+) &= m_{2,+}^l(0) + \partial_\lambda m_{2,+}^l(0)\,\lambda + \mathcal{O}(\lambda^2), \\ p^l(\lambda_+) &= -\frac{\Omega_1^l}{2} + p_{1,+}^l(0)\,\lambda + \mathcal{O}(\lambda^2), \end{aligned}$$

其中 $m_j^l(x;\lambda)$、 $j = 1$、2表示与初始数据 $u_0^l(x)$相关的 RH问题（3.1）的解的第一列和第二列。将这些展开式代入 $\tilde{U}(y;\lambda)$ 可得

$$\tilde{U}(y;\lambda_+) = \begin{pmatrix} \mathcal{O}\left((u_0 - u_0^l)y^2\right) & \mathcal{O}\left((u_0 - u_0^l)y^2\right) \\ \mathcal{O}\left(u_0 - u_0^l\right) & \mathcal{O}\left((u_0 - u_0^l)y\right) \end{pmatrix}.$$

此外，对于 $\lambda \to 0$，我们还有

$$\partial_\lambda\tilde{U}(y;\lambda_+) = \begin{pmatrix} \mathcal{O}\left((u_0 - u_0^l)y^4\right) & \mathcal{O}\left((u_0 - u_0^l)y^4\right) \\ \mathcal{O}\left((u_0 - u_0^l)y\right) & \mathcal{O}\left((u_0 - u_0^l)y^2\right) \end{pmatrix},\ \partial_\lambda^2\tilde{U}(y;\lambda_+) = \begin{pmatrix} \mathcal{O}\left((u_0 - u_0^l)y^5\right) & \mathcal{O}\left((u_0 - u_0^l)y^5\right) \\ \mathcal{O}\left((u_0 - u_0^l)y^2\right) & \mathcal{O}\left((u_0 - u_0^l)y^3\right) \end{pmatrix}.$$

因此，对于满足条件 $u_0(x)$ 的初始数据 1.8，矩阵 $\mathcal{X}(x;\ \lambda_+)$ 在 $\lambda=0$ 处是正则的，并具有如下展开式：

$$\mathcal{X}(x;\lambda_+)=\mathcal{X}(x;0_+)+\partial_\lambda\mathcal{X}(x;0_+)\lambda+\mathcal{O}(\lambda^2).$$

作为 $\lambda\to 0$，回溯 $\mathbf{J}^l(x;\lambda)$ 的变换，我们有

$$\begin{aligned}\mathbf{J}^l(x;\lambda_+)&=e^{-i(x-x_0)p_+^l(0)\sigma_3}\left[\begin{pmatrix}1&1\\-i\lambda&i\lambda\end{pmatrix}^{-1}\mathcal{X}(x;\lambda)\right]e^{i(x-x_0)p_+^l(0)\sigma_3}\\&=\frac{1}{\lambda}e^{-i(x-x_0)p_+^l(0)\sigma_3}\begin{pmatrix}\alpha^l(x)&\beta^l(x)\\-\alpha^l(x)&-\beta^l(x)\end{pmatrix}e^{i(x-x_0)p_+^l(0)\sigma_3}+\mathcal{O}(1),\end{aligned}$$

其中，$\alpha^l(x)$ 和 $\beta^l(x)$ 是当 $x\to-\infty$ 时衰减至零的连续函数。

□

Jost解 $\Phi^l(x;\lambda)$ 和 $\Phi^r(x;\lambda)$。

我们已在 ($\Psi^l(x;\ \lambda)$ 和 $\Psi^r(x;\lambda)$ 中引入了 3.18，它们满足 Lax对 (1.3)。为构造与初始数据 (1.8) 对应的 RH问题，我们现在定义变换

$$\Phi^s(x;\lambda):=\begin{pmatrix}1&1\\-i\lambda&i\lambda\end{pmatrix}\Psi^s(x;\lambda),$$

它将 Lax对 (1.3) 化为以下新形式

$$\partial_x\Phi^s=\left[-i\lambda\sigma_3+\frac{iu_0(x)}{2\lambda}\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}\right]\Phi^s:=\tilde{L}\Phi^s. \tag{3.36}$$

相应地，我们定义

$$\Phi^s(x;\lambda):=\begin{pmatrix}1&1\\-i\lambda&i\lambda\end{pmatrix}^{-1}\Psi^s(x;\lambda)=O^s(x;\lambda)\mathbf{J}^s(x;\lambda)e^{-i(x-x_0^s)p^s(\lambda)\sigma_3}, \tag{3.37}$$

并注意到，这些函数满足变换后的Lax方程（3.36），其初始数据为$u_0(x)$，如（1.8）所示。

命题 3.9. 假设 u_0 满足条件 (1.8) 并满足假设 *1*。那么 $\Phi^l(x;\lambda)$和 $\Phi^r(x;\lambda)$ 是*Lax*对 (3.36) 的 *Jost*解，具有初始数据 (1.8)，并具有以下性质：

1. 对每个 $x\in\mathbb{R}$, $\Phi^l(x;\lambda)$ 都定义在 $(\mathbb{C}_+\cup\Sigma_2^r)\cup(\mathbb{C}_-\cup\Sigma_1^r)\setminus\{0,\pm i\eta_1^l,\pm i\eta_2^l\}$ 上，并且在这些区域的内部解析。此外，$\Phi^l(x;\lambda)$ 在 $\Sigma_1^l\cup\Sigma_2^l$ 两侧均具有连续边界值，除外 $\{\pm i\eta_1^l,\pm i\eta_2^l\}$。此外，这些边界值是 m_0 次连续可微的。

2. 对于每个 $x\in\mathbb{R}$, $\Phi^r(x;\lambda)$，其定义于 $(\mathbb{C}_-\cup\Sigma_1^r)\cup(\mathbb{C}_+\cup\Sigma_2^r)\setminus\{0,\pm i\eta_1^r,\pm i\eta_2^r\}$ 上，并且在这些区域的内部解析。此外，$\Phi^r(x;\lambda)$ 在 $\Sigma_1^r\cup\Sigma_2^r$ 两侧（除 $\{\pm i\eta_1^r,\pm i\eta_2^r\}$ 外）具有连续边界值，且这些边界值是m_0次连续可微的。

特别地，$\Phi^s(x;\lambda)$ 关于 $\lambda\in\Sigma^s$ 的边界值满足

$$\begin{aligned}\Phi^s(x;\lambda_+)&=\Phi^s(x;\lambda_-)(-i\sigma_1),&&\lambda\in\Sigma_1^s,\\\Phi^s(x;\lambda_+)&=\Phi^s(x;\lambda_-)i\sigma_1,&&\lambda\in\Sigma_2^s.\end{aligned} \tag{3.38}$$

*3. Jost*解 $\Phi^l(x;\lambda)$ 和 $\Phi^r(x;\lambda)$ 满足以下对称条件：

$$\begin{aligned}\Phi^l(x;-\lambda) &= \sigma_1\Phi^l(x;\lambda)\sigma_1, \quad \lambda\in(\overline{\mathbb{C}}_+,\overline{\mathbb{C}}_-)\setminus[-i\eta_2^l, i\eta_2^l],\\ \Phi^r(x;-\lambda) &= \sigma_1\Phi^r(x;\lambda)\sigma_1, \quad \lambda\in(\overline{\mathbb{C}}_-,\overline{\mathbb{C}}_+)\setminus[-i\eta_2^r, i\eta_2^r].\end{aligned} \tag{3.39}$$

此外，还成立以下复共轭对称性：

$$\begin{aligned}\overline{\Phi^l(x,\bar{\lambda})} &= \sigma_1\Phi^l(x;\lambda)\sigma_1, \quad \lambda\in(\overline{\mathbb{C}}_+,\overline{\mathbb{C}}_-)\setminus\{0\},\\ \overline{\Phi^r(x,\bar{\lambda})} &= \sigma_1\Phi^r(x;\lambda)\sigma_1, \quad \lambda\in(\overline{\mathbb{C}}_-,\overline{\mathbb{C}}_+)\setminus\{0\}.\end{aligned} \tag{3.40}$$

4. 对于每个 $x\in\mathbb{R}$ 以及属于 $\Phi^l(x;\lambda)$ 和 $\Phi^r(x;\lambda)$ 的定义域的任意 λ，$\Phi^l(x;\lambda)$ 和 $\Phi^r(x;\lambda)$ 的行列式满足

$$\det\left[\Phi^s(x;\lambda)\right]=1. \tag{3.41}$$

证明。回顾命题 **3.7** 中 $^l(x;\lambda)$ 的性质，这些性质确定了 $\Phi^l(x;\lambda)$ 的定义域、延拓和解析性质。将 $\mathbf{J}^l(x;\lambda)$ 在（3.21）中的跳跃关系与 RH问题 3.2 中的跳跃矩阵相结合，对于 $\lambda\in\Sigma_1^l$,

$$\begin{aligned}\Phi^l(x,\lambda_+) &= O^l(x,\lambda_+)\,\mathbf{J}^l(x,\lambda_+)\,e^{-i(x-x_0^l)p^l(\lambda_+)\sigma_3}\\ &= O^l(x,\lambda_-)\,(-i\sigma_1)\,\sigma_1\mathbf{J}^l(x,\lambda_-)\sigma_1\,e^{i(x-x_0^l)p^l(\lambda_-)\sigma_3}\\ &= \Phi^l(x,\lambda_-)\,(-i\sigma_1).\end{aligned}$$

对于 $\lambda\in[0,i\eta_1^l]$，将跳跃条件（3.22）与 RH问题 3.2 相结合，我们有 ve

$$\begin{aligned}\Phi_1^l(x,\lambda_+) &= O^l(x,\lambda_-)\,e^{-i(x\Omega_1^l-\Delta^l)\sigma_3}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & e^{-2i(x\Omega_1^l-\Delta^l)}\end{pmatrix}\mathbf{J}_1^l(x,\lambda_-)e^{-i(x-x_0^l)p^l(\lambda_-)+i(x\Omega_1^l-\Delta^l)}\\ &= \Phi_1^l(x,\lambda_-).\end{aligned}$$

其余的跳跃关系可以用类似的方法推导得到。

此外，对称条件直接由（3.25）和（3.26）中所述的 $\mathbf{J}^l(x;\lambda)$ 和 $\mathbf{J}^r(x;\lambda)$ 的对称性质得到。此外，$\Phi^l(x;\lambda)$ 和 $\Phi^r(x;\lambda)$ 的行列式关系可直接由 $\mathbf{J}^l(x;\lambda)$ 和 $\mathbf{J}^r(x;\lambda)$ 的行列式关系，结合（3.27）和（3.37）得到。

□

引理 *3.10*（当 $\lambda\to\infty$ 时，$\Phi^l(x;\lambda)$ 和 $\Phi^r(x;\lambda)$ 的渐近性质）。设 u_0 满足条件 *(1.8)* 和假设 *1*。那么，当 $\lambda\to\infty$ 时，矩阵 $\Phi^l(x;\lambda)$ 和 $\Phi^r(x;\lambda)$ 存在渐近展开

$$\Phi^s(x;\lambda)=\left[I+\sum_{j=1}^{3}\frac{\Gamma_j^s(x)}{\lambda^j}+\mathcal{O}\left(\lambda^{-4}\right)\right]e^{-i(x-x_0^s)\lambda\sigma_3}, \qquad \lambda\to\infty. \tag{3.42a}$$

with

$$\Gamma_1^l(x)=\left(m_{1,1}^l(x)-i(x-x_0^l)p_1^l+\frac{i}{2}\int_{-\infty}^{x}\left[u_0(y)-u_0^l(y)\right]dy\right)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \tag{3.42b}$$

$$\Gamma_1^r(x)=\left(m_{1,1}^r(x)-i(x-x_0^r)p_1^r+\frac{i}{2}\int_{+\infty}^{x}\left[u_0(y)-u_0^r(y)\right]dy\right)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}. \tag{3.42c}$$

这里，$m_{1,1}^{l}(x)$ 和 $m_{1,1}^{r}(x)$ 分别表示 *RH*问题 *3.1* 的解 $m_1^l(x;\lambda)$ 和 $m_1^r(x;\lambda)$ 在 *(3.6)* 中展开式的系数，它们分别与 $u_0^l(x)$ 和 $u_0^r(x)$ 相关。量 p_1^l 和 p_1^r 是准动量 $p^l(\lambda)$ 和 $p^r(\lambda)$ 在大 λ 展开式中的系数，给出如下：

$$p_1^s = \frac{(\eta_1^s)^2 - (\eta_2^s)^2}{2} + (\eta_2^s)^2 \frac{E(m^s)}{K(m^s)},\ m^s = \frac{\eta_1^s}{\eta_2^s}.$$

特别地，阶梯势 $u_0(x)$ 可以表示为

$$u_0(x) = -2i\,\partial_x[\Gamma_1^s(x)]_{11}. \tag{3.43}$$

其中 $[A]_{11}$ 表示(1,1) 矩阵 A的元。

证明。 将 $\Phi^s(x;\lambda)$ 改写为 $\Phi^s(x;\lambda) := \Gamma^s(x;\lambda)e^{-i(x-x_0^s)p^s(\lambda)\sigma_3}$，又由于 $\Phi^s(x;\lambda)$ 满足Lax对（3.36），由此可得

$$\partial_x\Gamma^s(x;\lambda) - ip^s(\lambda)\Gamma^s(x;\lambda)\sigma_3 = \left[-i\lambda\sigma_3 + \frac{iu_0(x)}{2\lambda}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\right]\Gamma^s(x;\lambda). \tag{3.44}$$

设 $\Gamma^s(x;\lambda) := I + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma_k^s}{\lambda^k}$ 且 $p^s(\lambda) = \lambda + \frac{p_j^s}{\lambda^k}$，并将它们代入（3.44），由此可得

$$\partial_x\Gamma_k^s + i[\sigma_3, \Gamma_{k+1}^s] - i\sum_{l=1}^{k} p_l^s\Gamma_{k-l}^s = \frac{iu_0(x)}{2\lambda}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\Gamma_{k-1}^s,\ k \geq 1. \tag{3.45}$$

汇集 $\mathbf{J}^l(x;\lambda)$ 来自（3.32）的展开式以及 $O^l(x;\lambda)$ 来自（3.12）的展开式，连同准动量的展开式

$$p^l(\lambda) = \lambda + \frac{p_1^l}{\lambda} + \mathcal{O}\left(\lambda^{-2}\right), \qquad p_1^l = \frac{(\eta_1^l)^2 - (\eta_2^l)^2}{2} + (\eta_2^l)^2\frac{E\left(\frac{\eta_1^l}{\eta_2^l}\right)}{K\left(\frac{\eta_1^l}{\eta_2^l}\right)}.$$

根据 引理 3.8 以及 $\Phi^s(x;\lambda)$ 在 (3.37) 中的定义，可得 (3.42)，并且当 $\lambda \to \infty$ ，

$$\Gamma_1^l(x) = (O^l)^{(1)} + \mathbf{J}_1^l - i(x - x_0^l)p_1^l\sigma_3.$$

最后，根据推论 3.5，由 ($u_0(x)$中给出的恢复公式3.43) 可得所述结论。 □

引理 *3.11*（ $\lambda \to 0$ 时 $\Phi^l(x;\lambda)$ 和 $\Phi^r(x;\lambda)$ 的渐近性质）。假设 u_0满足条件 *(1.8)*。当 $\lambda \to 0$ 时，*Jost*解 $\Phi^l(x;\lambda)$ 和 $\Phi^r(x;\lambda)$ 至多可能有一个简单极点。特别地，如果将行向量 $\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}$ 左乘 $\Phi^l(x;\lambda)$ 和 $\Phi^r(x;\lambda)$，则所得向量

$$\phi^s(x;\lambda) := \begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\Phi^s(x;\lambda),$$

在 $\lambda = 0$ 处正则。

证明。 注意，当 $\lambda \to 0$ 时，

$$\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}O^l(x;\lambda_\pm)e^{-i(x-x_0^l)p_\pm^l(0)} = \begin{pmatrix}m_{1,\pm}^l(0) & m_{2,\pm}^l(0)\end{pmatrix}e^{\pm(x\Omega_1-\Delta)\sigma_3/2}.$$

回顾关系式 (3.13)，可得

$$\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}O^l(x;\lambda_\pm)e^{-i(x-x_0^l)p_\pm^l(0)} = m_{2,\pm}(0)\,e^{\mp(x\Omega_1-\Delta)/2}\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}.$$

将上述方程代入 $\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\Phi^l(x;\ \lambda_\pm)$ 中的 (3.37)，并结合$\mathbf{J}^r(x;\ \lambda)$ 在 (3.33) 中的渐近展开式，可得向量 $\phi^l(x;\ \lambda)$ 在$\lambda = 0$处正则。 $\phi^r(x;\ \lambda)$ 的证明过程相同。

□

引理 *3.12*（ $\Phi^l(x;\lambda)$ 和 $\Phi^r(x;\lambda)$ 在端点处的局部行为）。设初始数据 u_0 满足条件 *(1.8)*。当 $\lambda \to \pm i\eta_j^l$, $j=1,2$ 时，*Jost*解 $\Phi^l(x;\lambda)$ 至多具有四次根奇点。同样，当 $\lambda \to \pm i\eta_j^r$, $j=1,2$ 时，*Jost*解$\Phi^r(x;\lambda)$ 至多具有四次根奇点。

证明。 回顾 $\Psi^l(x;\lambda)$ 在（3.18）中的定义，以及 $\Psi_0^l(x;\lambda)$ 在（3.16）中的定义，可得关于 $\Psi^l(x;\lambda)$ 的如下积分方程：

$$\Psi^l(x;\lambda) = \Psi_0^l(x;\lambda) + \int_{-\infty}^{x} \Psi_0^l(x;\lambda)(\Psi_0^l(y;\lambda))^{-1}\Delta\tilde{U}(y)\Psi^l(y;\lambda)dy, \tag{3.46}$$

其中 $\Delta\tilde{U}(x) := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u_0^l\ x & -u_0\ x \end{pmatrix}()()0$. 由于 $\Psi_0^l(x;\lambda)$ 在 Σ^l 上只有常数跳跃条件，$\Psi_0^l(x;\lambda)(\Psi_0^l(y;\lambda))^{-1}$ 沿 Σ^l 连续，并且在端点 $\pm i\eta_j^l$, $j=1,2$ 处至多有平方根奇异性。特别地，它可以连续延拓到每个端点。

特别地，当 $\lambda \to i\eta_2$ 时，我们有 $m^l(x;\lambda)$ 在（3.8）中的如下展开式

$$\begin{aligned} m_1^l(x;\lambda) &= (\lambda - i\eta_2^l)^{-\frac{1}{4}}\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\gamma_k(\lambda - i\eta_2^l)^k\Big)\left(\sum_{j=0}^{\infty}S_j^{(1)}(\lambda - i\eta_2^l)^j + \sqrt{\lambda - i\eta_2^l}\sum_{j=0}^{\infty}S_j^{(2)}(\lambda - i\eta_2^l)^j\right), \\ m_2^l(x;\lambda) &= (\lambda - i\eta_2^l)^{-\frac{1}{4}}\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\gamma_k(\lambda - i\eta_2^l)^k\Big)\left(\sum_{j=0}^{\infty}S_j^{(1)}(\lambda - i\eta_2^l)^j - \sqrt{\lambda - i\eta_2^l}\sum_{j=0}^{\infty}S_j^{(2)}(\lambda - i\eta_2^l)^j\right), \end{aligned} \tag{3.47}$$

其中 γ_k 是 $\gamma^l(\lambda)$ 的展开式，而 $S_j^{(1)}, S_j^{(2)}$ 是（ ϑ_3 在（3.8）中的 Puiseux 展开式的系数。另一方面，准动量积分 $p^l(\lambda)$ 有如下展开式：

$$p^l(\lambda) = 2\sqrt{\lambda - i\eta_2^l}\sum_{k=0}^{\infty}p_k(\lambda - i\eta_2^l).$$

将上述展开式代入核中，我们得到

$$\Psi_0^l(x;\lambda)\left(\Psi_0^l(y;\lambda)\right)^{-1}\Delta\tilde{U}(y) = \mathcal{O}\Big((1+|x|+|y|)\,|u_0 - u_0^l|\Big) + \mathcal{O}\Big(\sqrt{\lambda - i\eta_2^l}\Big).$$

由于初始数据 $u_0(x)$ 满足条件 (1.8), 纽曼级数由此推出

$$|\Psi^l(x;\lambda)| \le |\Psi_0^l(x;\lambda)|\,\exp\Big(C(1+|x|)\sup_{0\le j\le 1}\|x^j(u_0 - u_0^l)\|_{L^1(-\infty,x)}\Big).$$

因此， $\Psi^l(x;\lambda)$具有与 $\Psi_0^l(x;\lambda)$相同的局部行为。由于 $\Phi^l(x;\lambda)$是通过线性变换从$\Psi^l(x;\lambda)$得到的，因此它也具有相同的局部行为。其他端点的分析完全类似。

□

散射数据

注意到， $\Phi_j^l(x;\lambda)$ 和 $\Phi_j^r(x;\lambda)$（$j=1,2$）可以视为方程 (3.36) 的特征向量，但满足不同的边界条件 (3.42)。根据命题 3.9，当 $\lambda \in \mathbb{R}\cup(\Sigma^l\cap\Sigma^r)$ 时存在四个特征向量；当 $\lambda \in \Sigma^r\setminus\Sigma^l$ 或 $\lambda \in \Sigma^l\setminus\Sigma^r$ 时存在三个特征向量；而在其他情况下通常存在两个特征向量。假设 $u_0 - u_0^l \in L^1(\mathbb{R}_-)$ 和 $u_0 - u_0^r \in L^1(\mathbb{R}_+)$，我们得到如下散射关系：

- 当 $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ 时， $\Phi^r(x;\lambda)$ 和 $\Phi^l(x;\lambda)$ 均存在。因此，存在一个散射矩阵$\mathbf{S}(\lambda)$，使得

$$\Phi^l(x;\lambda) = \Phi^r(x;\lambda)\mathbf{S}(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}. \tag{3.48}$$

并根据对称关系（3.26），散射矩阵具有如下形式

$$\mathbf{S}(\lambda) = \begin{pmatrix} a(\lambda) & b^*(\lambda) \\ b(\lambda) & a^*(\lambda) \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

其中 $f^*(\lambda) := \overline{f(\lambda)}$ 表示施瓦茨共轭。注意，由（3.48），

$$a(\lambda) = \det[\Phi_1^l(x;\lambda), \Phi_2^r(x;\lambda)], \ b(\lambda) = \det[\Phi_1^r(x;\lambda), \Phi_1^l(x;\lambda)], \quad \lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}. \tag{3.49}$$

结合 $\Phi(x;\lambda)$ 在命题 3.9中的性质，可知 $a(\lambda)$ 可解析延拓至 $\mathbb{C}_+\setminus(\Sigma_1^r \cup \Sigma_1^l)$。下文仍使用 $a(\lambda)$，因为它仍满足（ 3.49 ）。

- 对于 $\lambda \in \Sigma^r \cap \Sigma^l$， Jost解 $\Phi^l(x;\lambda_\pm)$ 和 $\Phi^r(x;\lambda_\pm)$ 的边界值存在。因此，存在一个散射矩阵 $S(\lambda_\pm)$，使得

$$\Phi^l(x;\lambda_\pm) = \Phi^r(x;\lambda_\pm)S(\lambda_\pm), \quad \lambda \in \Sigma^r \cap \Sigma^l, \tag{3.50}$$

并根据对称关系（3.26），散射矩阵具有如下形式

$$S(\lambda_\pm) = \begin{pmatrix} a(\lambda_\pm) & b_1^*(\lambda_\pm) \\ b_1(\lambda_\pm) & a^*(\lambda_\pm) \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \Sigma^r \cap \Sigma^l,$$

with

$$b_1(\lambda) = \det[\Phi_1^r(x;\lambda), \Phi_1^l(x;\lambda)] \quad \lambda \in \Sigma^r \cap \Sigma^l. \tag{3.51}$$

- 对于 $\lambda \in \Sigma_1^r \setminus \Sigma_1^l$， 只有特征向量 $\Phi_1^l(x;\lambda)$、 $\Phi_1^r(x;\lambda_\pm)$ 和 $\Phi_2^r(x;\lambda_\pm)$ 存在，由此得到关系

$$\Phi_1^l(x;\lambda) = \Phi^r(x;\lambda_\pm)\begin{bmatrix} a(\lambda_\pm) \\ b_1(\lambda_\pm) \end{bmatrix}, \quad \lambda \in \Sigma_1^r \setminus \Sigma_1^l. \tag{3.52}$$

- For $\lambda \in \Sigma_1^l \setminus \Sigma_1^r$， 仅存在特征向量 $\Phi_2^r(x;\lambda)$、 $\Phi_1^l(x;\lambda_\pm)$ 和 $\Phi_2^l(x;\lambda_\pm)$， 满足 g

$$\Phi_2^r(x;\lambda) = \Phi^l(x;\lambda_\pm)\begin{bmatrix} -b_1^*(\lambda_\pm) \\ a(\lambda_\pm) \end{bmatrix}, \quad \lambda \in \Sigma_1^l \setminus \Sigma_1^r. \tag{3.53}$$

- 对于 $\lambda \in \Sigma_2^r \setminus \Sigma_2^l$， 仅存在特征向量 $\Phi_2^l(x;\lambda)$、 $\Phi_1^r(x;\lambda_\pm)$ 和 $\Phi_2^r(x;\lambda_\pm)$， 且相应关系为

$$\Phi_2^l(x;\lambda) = \Phi^r(x;\lambda_\pm)\begin{bmatrix} b_1^*(\lambda_\pm) \\ a^*(\lambda_\pm) \end{bmatrix}, \quad \lambda \in \Sigma_2^r \setminus \Sigma_2^l. \tag{3.54}$$

- 对于 $\lambda \in \Sigma_2^l \setminus \Sigma_2^r$， 仅存在特征向量 $\Phi_1^r(x;\lambda)$、 $\Phi_1^l(x;\lambda_\pm)$ 和 $\Phi_2^l(x;\lambda_\pm)$， 并且有

$$\Phi_1^r(x;\lambda) = \Phi^l(x;\lambda_\pm)\begin{bmatrix} a^*(\lambda_\pm) \\ -b_1(\lambda_\pm) \end{bmatrix}, \quad \lambda \in \Sigma_2^l \setminus \Sigma_2^r. \tag{3.55}$$

引理 3.13. 假设初始数据 u_0 满足条件 (1.8) 和假设 *1*。则函数 $a(\lambda)$ 和 $b_1(\lambda)$ 具有以下性质：

1. 函数 $a(\lambda)$ 定义于 $\mathbb{C}_+ \cup (\Sigma_2^r \cap \Sigma_2^l) \setminus \{0, \pm i\eta_j^r, \pm\eta_j^l\}$，在 $\lambda \in \Sigma_1^r \cup \Sigma_1^l$ 和 $\lambda \in \Sigma_2^r \cap \Sigma_2^l$处存在边界值，并且在 $\mathbb{C}_+ \setminus (\Sigma_1^r \cup \Sigma_1^l)$中解析。函数 $b_1(\lambda)$ 定义于 $\lambda \in \Sigma_1^r \cup \Sigma_2^l \setminus \{\pm i\eta_j^r, \pm i\eta_j^l\}$ $j = 1$，并在其上存在边界值，2。

2. $a(\lambda)$ 在左侧和右侧 $\lambda \in (\Sigma_1^r \cup \Sigma_1^l) \cup (\Sigma_2^l \cap \Sigma_2^r) \setminus \{\pm i\eta_j^r, \pm i\eta_j^r\}$ 上 m_0 可微，而 $b_1(\lambda)$ 在左侧和右侧 $\lambda \in \Sigma_1^r \cup \Sigma_2^l \setminus \{0, \pm i\eta_j^r, \pm i\eta_j^r\}$ $j = 1$ 上 m_0 可微；2. $b(\lambda)$ 定义在 $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 上，并且在 $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 上 m_0 可微。

3. 对于 $\lambda \in \Sigma^r \cap \Sigma^l$，散射矩阵 $S(\lambda)$ 满足

$$S(\lambda_+) = \sigma_1 S(\lambda_-)\sigma_1. \tag{3.56}$$

更确切地说，由此可得

$$a(\lambda_+) = a^*(\lambda_-), \quad b_1(\lambda_+) = b_1^*(\lambda_-), \quad \lambda \in \Sigma^r \cap \Sigma^l.$$

对于 $\lambda \in \Sigma^r \setminus \Sigma^l$ 和 $\lambda \in \Sigma^l \setminus \Sigma^r$，有

$$\begin{aligned}
&b_1(\lambda_+) = i\, a(\lambda_-), && a(\lambda_+) = i\, b_1(\lambda_-), && \lambda \in \Sigma_1^r \setminus \Sigma_1^l,\\
&b_1^*(\lambda_+) = -i\, a(\lambda_-), && a(\lambda_+) = -i\, b_1^*(\lambda_-), && \lambda \in \Sigma_1^l \setminus \Sigma_1^r,\\
&b_1^*(\lambda_+) = -i\, a^*(\lambda_-), && a^*(\lambda_+) = -i\, b_1^*(\lambda_-), && \lambda \in \Sigma_2^r \setminus \Sigma_2^l,\\
&b_1(\lambda_+) = i\, a^*(\lambda_-), && a^*(\lambda_+) = i\, b_1(\lambda_-), && \lambda \in \Sigma_2^l \setminus \Sigma_2^r.
\end{aligned} \tag{3.57}$$

4. 对于 $\lambda \in \Sigma^l \cap \Sigma^r$ 和 $\lambda \in \mathbb{R}$，散射矩阵 $S(\lambda)$ 和 $\mathbf{S}(\lambda)$ 满足以下施瓦茨共轭对称性：

$$\begin{aligned}
&S(\lambda) = \sigma_1 S^*(\lambda)\sigma_1, && \lambda \in \Sigma^l \cap \Sigma^r,\\
&\mathbf{S}(\lambda) = \sigma_1 \mathbf{S}^*(\lambda)\sigma_1 = \sigma_1 \mathbf{S}(-\lambda)\sigma_1, && \lambda \in \mathbb{R}.
\end{aligned} \tag{3.58}$$

5. 对于每个 $x \in \mathbb{R}$，散射矩阵 $S(\lambda)$ 和 $\mathbf{S}(\lambda)$ 满足

$$\det S(\lambda) = 1, \quad \lambda \in \Sigma^r \cap \Sigma^l, \qquad \det \mathbf{S}(\lambda) = 1, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{3.59}$$

6. 当 $\lambda \to \infty$ 时，函数 $a(\lambda)$ 具有如下渐近展开：

$$a(\lambda) = e^{i(x_0^l - x_0^r)\lambda}\big(1 + \mathcal{O}(\lambda^{-1})\big), \quad \lambda \to \infty, \tag{3.60}$$

并且若 u_0 满足条件 (1.8)，则 $b(\lambda)$ 具有如下渐近展开：

$$b(\lambda) = e^{i(x_0^l - x_0^r)\lambda}\big(\mathcal{O}(\lambda^{-4})\big), \quad \lambda \in \mathbb{R} \ \textit{and}\ \lambda \to \infty. \tag{3.61}$$

此外，当 $\lambda \to 0$ 时，函数 $a(\lambda)$ 和 $b(\lambda)$ 至多有一个简单极点。

证明。 综合关系式(3.50)–(3.55)，可得函数 $a(\lambda)$ 和 $b_1(\lambda)$ 可表征为

$$a(\lambda) = \det\big[\Phi_1^l(x;\lambda), \Phi_2^r(x;\lambda)\big], \qquad b_1(\lambda) = \det\big[\Phi_1^r(x;\lambda), \Phi_1^l(x;\lambda)\big]. \tag{3.62}$$

然后，根据关于命题 3.9 的 $\Phi^l(x;\ \lambda)$ 和 $\Phi^r(x;\ \lambda)$，确立了 $a(\lambda)$和 $b_1(\lambda)$的定义、延拓和解析性质。

关于跳跃条件，对于 $\lambda \in \Sigma_1^l \cap \Sigma_1^r$，利用（3.38）中的关系式，可得

$$\begin{aligned}\Phi^l(x;\lambda_+) &= \Phi^l(x;\lambda_-)(-i\sigma_1) = \Phi^r(x;\lambda_-)S(\lambda_-)(-i\sigma_1)\\ &= \Phi^r(x;\lambda_+)(i\sigma_1)S(\lambda_-)(-i\sigma_1) = \Phi^r(x;\lambda_+)S(\lambda_+).\end{aligned}$$

对于 $\lambda \in \Sigma_1^l \setminus \Sigma_1^r$，我们有

$$\Phi_1^l(x;\lambda) = \Phi^r(x;\lambda_+)\begin{bmatrix}a(\lambda_+)\\ b_1(\lambda_+)\end{bmatrix} = \Phi^r(x;\lambda_-)(-i\sigma_1)\begin{bmatrix}a(\lambda_+)\\ b_1(\lambda_+)\end{bmatrix} = \Phi^r(x;\lambda_-)\begin{bmatrix}a^*(\lambda_-)\\ b_1(\lambda_-)\end{bmatrix}.$$

其余的跳跃关系可通过类似的计算推导得到。

由 $\Phi^l(x;\lambda)$ 和 $\Phi^r(x;\lambda)$ 在 (3.41) 中的行列式，可直接根据关系式 (3.48) 和 (3.50) 得到散射矩阵 $S(\lambda)$ 和 $\mathbf{S}(\lambda)$ 的行列式。

将 $\Phi^l(x;\lambda)$ 和 $\Phi^r(x;\lambda)$ 在 ($\lambda \to \infty$ 3.42) 中的展开式代入 $a(\lambda)$ 在 (3.49) 中的表示式，可得

$$a(\lambda) = \det[\Phi_1^l(x;\lambda), \Phi_2^r(x;\lambda)] = \det\begin{pmatrix} e^{-i(x-x_0^l)} & 0\\ 0 & e^{i(x-x_0^r)}\end{pmatrix} + \mathcal{O}(\lambda^{-1}), \quad \lambda \to \infty.$$

根据 (3.40) 中的对称条件，我们可以假设 $\Gamma_k^s = \begin{pmatrix}\alpha_k^s & \beta_k^s\\ \bar\beta_k^s & \bar\alpha_k^s\end{pmatrix}$，于是得到以下方程：

$$\begin{cases}\partial_x\alpha_k^s - i\sum_{l=1}^{k} p_l^s\alpha_{k-l}^s = \dfrac{u_0}{2}(\alpha_{k-1}^s + \bar\beta_{k-1}^s),\\ \partial_x\beta_k^s + 2i\beta_{k+1}^s + i\sum_{l=1}^{k} p_l^s\beta_{k-l}^s = \dfrac{u_0}{2}(\bar\alpha_{k-1}^s + \beta_{k-1}^s),\end{cases} \tag{3.63}$$

其中 $\beta_0^s = \beta_1^s = 0$ 和 $\alpha_0^s = 1$。

对于 $b(\lambda)$，根据 (3.62) 中的定义，可得

$$b(\lambda)e^{-i(x_0^l - x_0^r)\lambda} = \left[\frac{(\bar\beta_2^l - \bar\beta_2^r)}{\lambda^2} + \frac{b_3}{\lambda^3}\right] + \mathcal{O}(\lambda^{-4}),$$

其中 $b_3 = \alpha_1^r\,\bar\beta_2^l + \bar\beta_3^l - i\Big(-i\,\alpha_1^l\,\bar\beta_2^r - i\,\beta_3^r + \bar\beta_2^l\,p_1^r\,x_0^l - \bar\beta_2^r\,p_1^r\,x_0^l - \bar\beta_2^l\,p_1^r\,x_0^r + \bar\beta_2^r\,p_1^r\,x_0^r\Big)$. 由方程组 (3.63)，可得

$$\beta_2^l = \beta_2^r = \frac{u_0}{4i}, \beta_3^l - \beta_3^r = \beta_2^l(\bar\alpha_1^l - \bar\alpha_1^r).$$

因此，若 $\Gamma^s(x;\lambda)$ 存在四阶展开式，则 $b(\lambda) = e^{i(x_0^l - x_0^r)\lambda}(\mathrm{O}(\lambda^{-4}))$, $\lambda \to \infty$。关于 $a(\lambda)$ 在 $\lambda \to 0$ 时的行为，引理 3.11 表明， $a(\lambda)$ $b(\lambda)$ 至多有一个简单极点。

□

引理 3.14 ($a(\lambda)$和 $b_1(\lambda)$在端点处的局部行为)。 假设初始数据 u_0 满足条件 (1.8)。当 $\lambda \to \pm i\eta_j^s$, $j = 1, 2$时，散射数据 $a(\lambda)$ 和 $b_1(\lambda)$在各自的定义域内至多具有四次根奇点。

特别地，定义

$$\widehat\Phi_1^s(\lambda) := \gamma^s(\lambda)\Phi_1^s(\lambda), \qquad \widehat\Phi_2^s(\lambda) := (\gamma^s(\lambda))^{-1}\Phi_2^s(\lambda).$$

则以下极限存在：

$$\begin{aligned}
&\lim_{\substack{\lambda\to i\eta_2^r\\ \lambda\in\Sigma_1^r}}\frac{b_1(\lambda_+)}{b_1(\lambda_-)}=-i\frac{\det\left[\widehat{\Phi}_1^r(i\eta_2^r),\Phi_1^l(i\eta_{2,+}^r)\right]}{\det\left[\widehat{\Phi}_1^r(i\eta_2^r),\Phi_1^l(i\eta_{2,-}^r)\right]},\quad \lim_{\substack{\lambda\to i\eta_1^r\\ \lambda\in\Sigma_1^r}}\frac{b_1(\lambda_+)}{b_1(\lambda_-)}=i\frac{\det\left[\widehat{\Phi}_1^r(i\eta_1^r),\Phi_1^l(i\eta_{1,+}^r)\right]}{\det\left[\widehat{\Phi}_1^r(i\eta_1^r),\Phi_1^l(i\eta_{1,-}^r)\right]},\\
&\lim_{\substack{\lambda\to i\eta_2^l\\ \lambda\in\Sigma_1^l}}\frac{b_1^*(\lambda_+)}{b_1^*(\lambda_-)}=-i\frac{\det\left[\Phi_2^r(i\eta_{2,+}^l),\widehat{\Phi}_2^l(i\eta_2^l)\right]}{\det\left[\Phi_2^r(i\eta_{2,+}^l),\widehat{\Phi}_2^l(i\eta_2^l)\right]},\quad \lim_{\substack{\lambda\to i\eta_1^l\\ \lambda\in\Sigma_1^l}}\frac{b_1(\lambda_+)}{b_1(\lambda_-)}=i\frac{\det\left[\widehat{\Phi}_1^r(i\eta_1^r),\Phi_1^l(i\eta_{1,+}^r)\right]}{\det\left[\widehat{\Phi}_1^r(i\eta_1^r),\Phi_1^l(i\eta_{1,-}^r)\right]},
\end{aligned}\tag{3.64}$$

and

$$\lim_{\substack{\lambda\to i\eta_j^l\\ \lambda\in\Sigma_1^r\setminus\Sigma_1^l}}\frac{b_1(\lambda_+)}{b_1(\lambda_-)}=\frac{\det\left[\Phi_1^r(i\eta_{j,+}^l),\widehat{\Phi}_1^l(i\eta_j^l)\right]}{\det\left[\Phi_1^r(i\eta_{j,-}^l),\widehat{\Phi}_1^l(i\eta_j^l)\right]}\qquad \lim_{\substack{\lambda\to i\eta_j^r\\ \lambda\in\Sigma_1^l\setminus\Sigma_1^r}}\frac{b_1^*(\lambda_+)}{b_1^*(\lambda_-)}=\frac{\det\left[\widehat{\Phi}_2^r(i\eta_j^l),\Phi_2^l(i\eta_{j,+}^l)\right]}{\det\left[\widehat{\Phi}_2^r(i\eta_j^l),\Phi_2^l(i\eta_{j,-}^l)\right]},\ j=1,2.\tag{3.65}$$

证明。由引理 3.12，Jost解 $\Phi^l(x;\lambda)$在 $\pm i\eta_j^l$、$j=1$、2处具有四次根奇点，而 $\Phi^r(x;\lambda)$在 $\pm i\eta_j^r$、$j=1$、2处具有四次根奇点。由(3.49)中$a(\lambda)$的定义以及(3.51)中 $b_1(\lambda)$的定义，由此可知散射数据 $a(\lambda)$与 $b_1(\lambda)$在每个端点处至多具有一个四次根奇点。

其余极限的分析方法相同，因此我们只考虑$\lambda=i\eta_2^r$处的极限。回顾 $m_1^r(\lambda)$ 和 $m_2^r(\lambda)$ 在（3.47）中的展开式。由此可得

$$\lim_{\lambda\to i\eta_2^r}(\gamma^r(\lambda_+))^{-1}m_j^r(\lambda_+)=\lim_{\lambda\to i\eta_2^r}(\gamma^r(\lambda_-))^{-1}m_j^r(\lambda_-),$$

并根据引理3.12,

$$\widehat{\Phi}_1^r(i\eta_2^r):=\lim_{\lambda\to i\eta_2^r}\widehat{\Phi}_1^r(\lambda_+)=\lim_{\lambda\to i\eta_2^r}\widehat{\Phi}_1^r(\lambda_-).$$

将上述局部行为代入（3.51），可得

$$\begin{aligned}
\lim_{\lambda\to i\eta_2^r}\frac{b_1(\lambda_+)}{b_1(\lambda_-)}&=\lim_{\lambda\to i\eta_2^r}\frac{\det[\Phi_1^r(\lambda_+),\Phi_1^l(\lambda_+)]}{\det[\Phi_1^r(\lambda_-),\Phi_1^l(\lambda_-)]}\\
&=\lim_{\lambda\to i\eta_2^r}\frac{\gamma^r(\lambda_+)\det[(\gamma^r(\lambda_+))^{-1}\Phi_1^r(\lambda_+),\Phi_1^l(\lambda_+)]}{\gamma^r(\lambda_-)\det[(\gamma^r(\lambda_-))^{-1}\Phi_1^r(\lambda_-),\Phi_1^l(\lambda_-)]}.
\end{aligned}$$

□

4 阶跃型 KdV 有限间隙势函数的 RH问题

定义一个 2×2 矩阵值亚纯函数 $M(x;\lambda)$，其定义为

$$M(x;\lambda)=\begin{cases}\begin{pmatrix}\dfrac{\Phi_1^l(x;\lambda)}{a(\lambda)} & \Phi_2^r(x;\lambda)\end{pmatrix}e^{i(x-x_0^r)\lambda\sigma_3}, & \lambda\in\mathbb{C}_+\setminus\{0\},\\ \begin{pmatrix}\Phi_1^r(x;\lambda) & \dfrac{\Phi_2^l(x;\lambda)}{a^*(\lambda)}\end{pmatrix}e^{i(x-x_0^r)\lambda\sigma_3}, & \lambda\in\mathbb{C}_-\setminus\{0\}.\end{cases}\tag{4.1}$$

这里，$\Phi_j^r(x;\lambda)$ 和 $\Phi_j^l(x;\lambda)$（$j=1,2$）分别表示式（3.37）中 $\Phi^l(x;\lambda)$ 和 $\Phi^r(x;\lambda)$ 的第 j 列。于是，2×2 矩阵值亚纯函数 $M(x;\lambda)$ 满足以下 RH问题：

RH问题 4.1. 矩阵函数 $M(x;\ \lambda)$ 在 $\lambda\in\mathbb{C}\,|\,(\mathbb{R}\cup\Sigma^l\cup\Sigma^r)$ 上解析，且在 $\lambda=0$ 处至多有一个简单奇点。

1. $M(x;\,\lambda)$ 满足以下跳跃条件：

$$M_+(x;\lambda)=M_-(x;\lambda)V^{(M)}(x;\lambda),\tag{4.2}$$

其中

$$V^{(M)}(x;\lambda)=\begin{cases}\begin{pmatrix}\frac{a(\lambda_-)}{ib_1(\lambda_-)} & -ie^{-2i(x-x_0^r)\lambda}\\ 0 & \frac{ib_1(\lambda_-)}{a(\lambda_-)}\end{pmatrix}, & \lambda\in\Sigma_1^r\setminus\Sigma_1^l,\\ \begin{pmatrix}\frac{-ib_1^*(\lambda_-)}{a(\lambda_+)} & -ie^{-2i(x-x_0^r)\lambda}\\ \frac{-ie^{2i(x-x_0^r)\lambda}}{a(\lambda_+)a(\lambda_-)} & \frac{ib_1(\lambda_-)}{a(\lambda_-)}\end{pmatrix}, & \lambda\in\Sigma_1^r\cap\Sigma_1^l,\\ \begin{pmatrix}\frac{-ib_1^*(\lambda_-)}{a(\lambda_+)} & 0\\ \frac{-ie^{2i(x-x_0^r)\lambda}}{a(\lambda_+)a(\lambda_-)} & 1\end{pmatrix}, & \lambda\in\Sigma_1^l\setminus\Sigma_1^r,\\ \begin{pmatrix}\frac{1}{a(\lambda)a^*(\lambda)} & -\frac{b^*(\lambda)}{a^*(\lambda)}e^{-2i(x-x_0^r)\lambda}\\ \frac{b(\lambda)}{a(\lambda)}e^{2i(x-x_0^r)\lambda} & 1\end{pmatrix}, & \lambda\in\mathbb{R},\\ \begin{pmatrix}1 & \frac{ie^{-2i(x-x_0^r)}}{a^*(\lambda_+)a^*(\lambda_-)}\\ 0 & i\frac{b_1(\lambda_-)}{a^*(\lambda_+)}\end{pmatrix}, & \lambda\in\Sigma_2^l\setminus\Sigma_2^r,\\ \begin{pmatrix}-\frac{ib_1^*(\lambda_-)}{a^*(\lambda_-)} & \frac{ie^{-2i(x-x_0^r)}}{a^*(\lambda_+)a^*(\lambda_-)}\\ ie^{2i(x-x_0^r)} & \frac{ib_1(\lambda_-)}{a^*(\lambda_+)}\end{pmatrix}, & \lambda\in\Sigma_2^r\cap\Sigma_2^l,\\ \begin{pmatrix}-\frac{ib_1^*(\lambda_-)}{a^*(\lambda_-)} & 0\\ ie^{2i(x-x_0^r)} & \frac{ia^*(\lambda_-)}{b_1^*(\lambda_-)}\end{pmatrix}, & \lambda\in\Sigma_2^r\setminus\Sigma_2^l.\end{cases}$$

2. 归一化条件：

$$M(x;\lambda)=I+\mathcal{O}(\lambda^{-1}),\qquad \lambda\to\infty.$$

3. 对称条件：

$$M^*(x;\lambda)=M(x;-\lambda)=\sigma_1M(x;\lambda)\sigma_1.$$

证明。 对于 $\lambda\in\Sigma_1^r\setminus\Sigma_1^l$，向量函数 $\Phi_1^l(x;\lambda)$没有跳跃，因此

$$\frac{\Phi_1^l(x;\lambda)e^{i(x-x_0^r)\lambda}}{a(\lambda_+)}=\frac{\Phi_1^l(x;\lambda)e^{i(x-x_0^r)\lambda}}{a(\lambda_-)}\frac{a(\lambda_-)}{a(\lambda_+)}=\frac{\Phi_1^l(x;\lambda)e^{i(x-x_0^r)\lambda}}{a(\lambda_-)}\frac{a(\lambda_-)}{i\,b_1(\lambda_-)},$$

其中最后一个等式由 (3.57) 得出。至于 $\Phi_2^r(x;\lambda)$，我们有

$$\begin{aligned}\Phi_2^r(x;\lambda_+)e^{-i(x-x_0^r)\lambda}&=\frac{e^{-i(x-x_0^r)\lambda}}{b_1(\lambda_+)}\left[\Phi_1^l(x;\lambda)-a(\lambda_+)\Phi_1^r(x;\lambda_+)\right]\\&=\frac{e^{-i(x-x_0^r)\lambda}}{b_1(\lambda_+)}\left[\Phi_1^l(x;\lambda)+i\,a(\lambda_+)\Phi_2^r(x;\lambda_-)\right]\\&=-i\,e^{-2i(x-x_0^r)\lambda}\frac{\Phi_1^l(x;\lambda)e^{i(x-x_0^r)\lambda}}{a(\lambda_-)}+\frac{i\,b_1(\lambda_-)}{a(\lambda_-)}\Phi_2^r(x;\lambda_-)e^{-i(x-x_0^r)\lambda},\end{aligned}$$

其中，第一个等式由式（3.52）得出，第二个等式由 $\Phi^r(x;\ \lambda)$ 在式（3.38）中的跳跃条件得出，最后一个等式则由 $a(\lambda)$ 和 $b_1(\lambda)$ 在式（3.57）中的跳跃关系得出。

对于 $\lambda \in \Sigma_1^r \cap \Sigma_1^l$，根据式（3.38）中 Jost解的跳跃条件，结合关系式（3.50），可得

$$\begin{aligned}\frac{\Phi_1^l(x;\lambda_+)}{a(\lambda_+)}e^{i(x-x_0^r)\lambda} &= \frac{-i\,e^{i(x-x_0^r)\lambda}}{a(\lambda_+)}\,\Phi_2^l(x;\lambda_-)\\ &= \frac{-i\,e^{i(x-x_0^r)\lambda}}{a(\lambda_+)a(\lambda_-)}\left[b_1^*(\lambda_-)\Phi_1^l(x;\lambda_-)+\Phi_2^r(x;\lambda_-)\right]\\ &= \frac{-i\,b_1^*(\lambda_-)}{a(\lambda_+)}\frac{\Phi_1^l(x;\lambda_-)}{a(\lambda_-)}e^{i(x-x_0^r)\lambda}-\frac{i\,e^{2i(x-x_0^r)\lambda}}{a(\lambda_+)a(\lambda_-)}\Phi_2^r(x;\lambda_-)e^{-i(x-x_0^r)\lambda},\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\Phi_2^r(x;\lambda_+)e^{-i(x-x_0^r)\lambda} &= -\,i\,\Phi_2^l(x;\lambda_-)e^{-i(x-x_0^r)\lambda}\\ &= \frac{-i\,e^{-i(x-x_0^r)\lambda}}{a(\lambda_-)}\left[\Phi_1^l(x;\lambda_-)-b_1(\lambda_-)\Phi_2^r(x;\lambda_-)\right]\\ &= -\,i\,e^{-2i(x-x_0^r)\lambda}\frac{\Phi_1^l(x;\lambda_-)}{a(\lambda_-)}e^{i(x-x_0^r)\lambda}+\frac{i\,b_1(\lambda_-)}{a(\lambda_-)}\,\Phi_2^r(x;\lambda_-)e^{-i(x-x_0^r)\lambda}.\end{aligned}$$

对于 $\lambda \in \Sigma_1^l \setminus \Sigma_1^r$，函数 $\Phi_2^r(x;\lambda)$ 没有跳跃，而对于 $\Phi_1^l(x;\lambda)$，我们有

$$\begin{aligned}\frac{\Phi_1^l(x;\lambda_+)e^{i(x-x_0^r)\lambda}}{a(\lambda_+)} &= \frac{e^{i(x-x_0^r)\lambda}}{a(\lambda_+)}\left[\frac{a(\lambda_+)\Phi_2^l(x;\lambda_+)-\Phi_2^r(x;\lambda)}{b_1^*(\lambda_+)}\right]\\ &= \frac{-e^{i(x-x_0^r)\lambda}}{a(\lambda_+)b_1^*(\lambda_+)}\left[i\,a(\lambda_+)\Phi_1^l(x;\lambda_-)+\Phi_2^r(x;\lambda)\right]\\ &= \frac{-i\,b_1^*(\lambda_-)}{a(\lambda_+)}\frac{\Phi_1^l(x;\lambda_-)e^{i(x-x_0^r)\lambda}}{a(\lambda_-)}-\frac{ie^{2i(x-x_0^r)\lambda}}{a(\lambda_+)a(\lambda_-)}\,\Phi_2^r(x;\lambda)e^{-i(x-x_0^r)\lambda}.\end{aligned}$$

这里，第一个等式由（3.52）得出，第二个等式由（ Φ^l（x； λ）中的跳跃条件（3.38）得出，最后一个等式则由（ a（λ）和 b_1^*（λ）中的跳跃关系（3.57）得出。实轴上的跳跃条件可通过标准分析得到，而下半平面上的跳跃条件则可由对称关系推导，也可直接计算得到。

归一化条件直接源于（ Φ^l（x； λ）和 Φ^r（x； λ）在（3.42）中的渐近展开，以及 a（λ）在 $\lambda \to \infty$ 时（3.60）中的渐近行为。此外，对称条件直接由（3.39）和（3.40）中给出的 Jost解的对称性质得出。

□

令 $r(\lambda) := {}^{b}\!/_{a}(\lambda)$，其中 $\lambda \in \mathbb{R}$，并引入以下辅助函数 $h(\lambda)$ $\lambda \in \mathbb{C}_+$:

$$\begin{aligned}h(\lambda) = \exp\Bigg\{-i(x_0^l-x_0^r)\lambda+\frac{1}{2\pi i}\Bigg[&\int_{\Sigma_1^r\setminus\Sigma_1^l}\frac{\ln\left(-\frac{b_1(\zeta_-)}{b_1(\zeta_+)}\right)}{\zeta-\lambda}\,d\zeta+\int_{\Sigma_1^l\cap\Sigma_1^r}\frac{\ln\left(-\frac{b_1(\zeta_-)}{b_1^*(\zeta_-)}\right)}{\zeta-\lambda}\,d\zeta\\ &+\int_{\Sigma_1^l\setminus\Sigma_1^r}\frac{\ln\left(-\frac{b_1^*(\zeta_+)}{b_1^*(\zeta_-)}\right)}{\zeta-\lambda}\,d\zeta+\int_{\mathbb{R}}\frac{\ln(1-|r(\zeta)|^2)}{\zeta-\lambda}\,d\zeta+\int_{\Sigma_2^l\setminus\Sigma_2^r}\frac{\ln\left(-\frac{b_1(\zeta_-)}{b_1(\zeta_+)}\right)}{\zeta-\lambda}\,d\zeta\\ &+\int_{\Sigma_2^l\cap\Sigma_2^r}\frac{\ln\left(-\frac{b_1(\zeta_-)}{b_1^*(\zeta_-)}\right)}{\zeta-\lambda}\,d\zeta+\int_{\Sigma_2^r\setminus\Sigma_2^l}\frac{\ln\left(-\frac{b_1^*(\zeta_+)}{b_1^*(\zeta_-)}\right)}{\zeta-\lambda}\,d\zeta\Bigg]\Bigg\}.\end{aligned}\tag{4.3}$$

利用辅助函数 $h(\lambda)$，我们将函数 $a(\lambda) := a_1(\lambda)a_2(\lambda)$ 分解如下:

$$\begin{aligned}a_1(\lambda) &= (a(\lambda)/h(\lambda))^{1/2}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+,\\ a_2(\lambda) &= (a(\lambda)h(\lambda))^{1/2}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+.\end{aligned}\tag{4.4}$$

命题 4.2. 函数 $a_1(\lambda)$ 和 $a_2(\lambda)$ 在 (4.4) 满足以下性质：

1. 函数 $a_1(\lambda)$ 在 $\lambda \in \mathbb{C}_+ \setminus \{0, i\eta_1^l, i\eta_2^l\}$ 上有定义，并在 $\lambda \in \mathbb{C}_+ \setminus \Sigma_1^l$ 上解析。类似地，函数 $a_2(\lambda)$ 在 $\lambda \in \mathbb{C}_+ \setminus \{0, i\eta_1^r, i\eta_2^r\}$ 上有定义，并在 $\lambda \in \overline{\mathbb{C}_+} \setminus \Sigma_1^r$ 上解析。

2. 特别地，对于 $\lambda \in \Sigma_1^r \cap \Sigma_1^l$，我们有

$$\frac{a_2(\lambda_+)}{a_1(\lambda_+)} = -\frac{a_2(\lambda_-)b_1(\lambda_-)}{a_1(\lambda_-)b_1^*(\lambda_-)}, \qquad \lambda \in \Sigma_1^l \cap \Sigma_1^r.$$

此外，对于 $\lambda \in \mathbb{R}$，有

$$\frac{1}{|a_1(\lambda)|^2} = 1 - |r(\lambda)|^2, \qquad |a_2(\lambda)|^2 = 1, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

3. As $\lambda \to \infty$，函数 $a_1(\lambda)$ 和 $a_2(\lambda)$ 具有如下渐近展开：

$$a_1(\lambda) = e^{i(x_0^l - x_0^r)\lambda} + \mathcal{O}(\lambda^{-1}), \qquad a_2(\lambda) = 1 + \mathcal{O}(\lambda^{-1}), \qquad \lambda \to \infty. \tag{4.5}$$

4. 对于每个端点 $\lambda = i\eta_j^s$，修正散射数据 $a_1(\lambda)$ 和 $a_2(\lambda)$ 具有如下局部行为：

$$a_1(\lambda) = \begin{cases} \mathcal{O}(1), & \lambda \to i\eta_2^r, \\ (\lambda - i\eta_2^l)^{-\frac{1}{4}}, & \lambda \to i\eta_2^l, \\ \mathcal{O}(1), & \lambda \to i\eta_1^r, \\ (\lambda - i\eta_1^l)^{-\frac{1}{4}}, & \lambda \to i\eta_1^l, \end{cases} \qquad a_2(\lambda) = \begin{cases} (\lambda - i\eta_2^r)^{-\frac{1}{4}}, & \lambda \to i\eta_2^r, \\ \mathcal{O}(1), & \lambda \to i\eta_2^l, \\ (\lambda - i\eta_1^r)^{-\frac{1}{4}}, & \lambda \to i\eta_1^r, \\ \mathcal{O}(1), & \lambda \to i\eta_1^l. \end{cases} \tag{4.6}$$

证明。注意到 $h(\lambda)$ 是通过柯西型积分表示定义的，由此可得以下跳跃关系：

$$h(\lambda_+) = -h(\lambda_-) \begin{cases} \dfrac{b_1(\lambda_-)}{b_1(\lambda_+)}, & \lambda \in \Sigma_1^r \setminus \Sigma_1^l, \\ \dfrac{b_1(\lambda_-)}{b_1^*(\lambda_-)}, & \lambda \in \Sigma_1^r \cap \Sigma_1^l, \\ \dfrac{b_1^*(\lambda_+)}{b_1^*(\lambda_-)}, & \lambda \in \Sigma_1^l \setminus \Sigma_1^r, \end{cases} \tag{4.7}$$

$$h(\lambda)h^*(\lambda) = 1 - |r(\lambda)|^2, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

此外，当 $\lambda \to \infty$ 时，我们有

$$h(\lambda) = e^{-i(x_0^l - x_0^r)\lambda} + \mathcal{O}(\lambda^{-1}), \qquad \lambda \to \infty.$$

将这些跳跃关系与 $a(\lambda)$ 以及 $b_1(\lambda)$ 在 (3.57) 中的关系结合起来，可得 s

$$\frac{a(\lambda_+)}{h(\lambda_+)} = -\frac{ib_1(\lambda_-)}{h(\lambda_-)}\frac{b_1(\lambda_+)}{b_1(\lambda_-)} = \frac{a(\lambda_-)}{h(\lambda_-)}, \qquad \lambda \in \Sigma_1^r \setminus \Sigma_1^l,$$

$$a(\lambda_+)h(\lambda_+) = ib_1^*(\lambda_-)h(\lambda_-)\frac{b_1^*(\lambda_+)}{b_1^*(\lambda_-)} = a(\lambda_-)h(\lambda_-), \quad \lambda \in \Sigma_1^l \setminus \Sigma_1^r.$$

因此，$a_1(\lambda)$ 在 $\lambda \in \Sigma_1^r \setminus \Sigma_1^l$ 上没有跳跃，而 $a_2(\lambda)$ 在 $\lambda \in \Sigma_1^l \setminus \Sigma_1^r$ 上没有跳跃。

证明 4. 根据引理 3.14，散射系数 $a(\lambda)$ 在每个端点 $i\eta_j^s,\ j=1,2$处呈现四次根奇异性。因此，为了研究 $a_1(\lambda)$ 和 $a_2(\lambda)$ 在端点处的局部行为，只需确定 $h(\lambda)$的局部行为。

对于 $\lambda\in\mathbb{D}_\epsilon(i\eta_2^r)$，考虑以 $i\eta_2^r$ 为中心、半径为 ϵ 的充分小圆盘，有两种情形：$i\eta_2^r\notin\Sigma_1^l$ 和 $i\eta_2^r\in\Sigma_{1\circ}^l$。

情形 1： $i\eta_2^r\notin\Sigma_{1\circ}^l$。

根据 $h(\lambda)$ 在（4.3）中的定义，唯一的积分区间是 $\Sigma_1^r\setminus\Sigma_1^l$，可写为

$$\Sigma_1^r\setminus\Sigma_1^l=(i\eta,i\eta_2^r),$$

其中，η 取决于图3中的构型。因此，

$$\begin{aligned}\int_{\Sigma_1^r\setminus\Sigma_1^l}\frac{\ln\left(-\frac{b_1(\zeta_-)}{b_1(\zeta_+)}\right)}{\zeta-\lambda}\,d\zeta&=\ln\left(-\frac{b_1(i\eta_{2,-}^r)}{b_1(i\eta_{2,+}^r)}\right)\int_{i\eta}^{i\eta_2^r}\frac{d\zeta}{\zeta-\lambda}\\&\quad+\int_{i\eta}^{i\eta_2^r}\left[\ln\left(-\frac{b_1(\zeta_-)}{b_1(\zeta_+)}\right)-\ln\left(-\frac{b_1(i\eta_{2,-}^r)}{b_1(i\eta_{2,+}^r)}\right)\right]\frac{d\zeta}{\zeta-\lambda}.\end{aligned}$$

对于上述方程中的第二项，[12] 的附录表明，当 $\lambda\to i\eta_2^r$ 时，该项为 $o(\log|\lambda-i\eta_2^r|)$。

情形 2： $i\eta_2^r\in\Sigma_{1\circ}^l$。

在这种情况下，$i\eta_2^r$ 是 $\Sigma_1^r\cap\Sigma_1^l$ 和 $\Sigma_1^l\setminus\Sigma_1^r$的公共端点。我们将积分分解如下：

$$\begin{aligned}\int_{\Sigma_1^l\cap\Sigma_1^r}\frac{\ln\left(-\frac{b_1(\zeta_-)}{b_1^*(\zeta_-)}\right)}{\zeta-\lambda}\,d\zeta&=\ln\left(-\frac{b_1(\eta_{2,-}^r)}{b_1(\eta_{2,+}^r)}\right)\int_{i\eta_1^l}^{i\eta_2^r}\frac{d\zeta}{\zeta-\lambda}\\&\quad+\int_{i\eta_1^l}^{i\eta_2^r}\left[\ln\left(-\frac{b_1(\zeta_-)}{b_1(\zeta_+)}\right)-\ln\left(-\frac{b_1(i\eta_{2,-}^r)}{b_1(i\eta_{2,+}^r)}\right)\right]\frac{d\zeta}{\zeta-\lambda},\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\int_{\Sigma_1^l\setminus\Sigma_1^r}\frac{\ln\left(-\frac{b_1^*(\zeta_+)}{b_1^*(\zeta_-)}\right)}{\zeta-\lambda}\,d\zeta&=\ln\left(-\frac{b_1^*(\eta_{2,+}^r)}{b_1^*(\eta_{2,-}^r)}\right)\int_{i\eta_2^r}^{i\eta_2^l}\frac{d\zeta}{\zeta-\lambda}\\&\quad+\int_{i\eta_2^r}^{i\eta_2^l}\left[\ln\left(-\frac{b_1^*(\zeta_+)}{b_1^*(\zeta_-)}\right)-\ln\left(-\frac{b_1^*(i\eta_{2,+}^r)}{b_1^*(i\eta_{2,-}^r)}\right)\right]\frac{d\zeta}{\zeta-\lambda}.\end{aligned}$$

结合（3.64）、（3.65）以及（3.38）中的跳跃条件，可得

$$\begin{aligned}&\ln\left(-\frac{b_1(\eta_{2,-}^r)}{b_1(\eta_{2,+}^r)}\right)-\ln\left(-\frac{b_1^*(\eta_{2,+}^r)}{b_1^*(\eta_{2,-}^r)}\right)\\&=\ln\left(-i\frac{\det\left[\widehat{\Phi}_1^r(i\eta_2^r),\Phi_1^l(i\eta_{2,-}^r)\right]}{\det\left[\widehat{\Phi}_1^r(i\eta_2^r),\Phi_1^l(i\eta_{2,+}^r)\right]}\right)-\ln\left(-\frac{\det\left[\widehat{\Phi}_2^r(i\eta_2^l),\Phi_2^l(i\eta_{2,+}^l)\right]}{\det\left[\widehat{\Phi}_2^r(i\eta_2^l),\Phi_2^l(i\eta_{2,-}^l)\right]}\right)=-\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

因此，当 $\lambda\to i\eta_2^r$时，函数 $h(\lambda)$可展开为

$$h(\lambda)=(\lambda-i\eta_2^r)^{-\frac{1}{4}}e^{h_0(\lambda)},$$

其中，$h_0(\lambda)$在 $\lambda\to i\eta_2^r$时保持有界。

更确切地说，我们有以下局部行为。

$$\begin{aligned}&h(\lambda)=\mathcal{O}\left((\lambda-i\eta_2^r)^{-\frac{1}{4}}\right),\qquad\lambda\to i\eta_2^r,\qquad h(\lambda)=\mathcal{O}\left((\lambda-i\eta_2^l)^{\frac{1}{4}}\right),\qquad\lambda\to i\eta_2^l,\\&h(\lambda)=\mathcal{O}\left((\lambda-i\eta_1^r)^{-\frac{1}{4}}\right),\qquad\lambda\to i\eta_1^r,\qquad h(\lambda)=\mathcal{O}\left((\lambda-i\eta_1^l)^{\frac{1}{4}}\right),\qquad\lambda\to i\eta_1^l.\end{aligned}$$

根据 $a_1(\lambda)$ $a_2(\lambda)$ 在（4.4）中的定义，可得（4.6）中的局部行为。 □

定义向量值函数 $X(x;\lambda)$ 如下：

$$X(x;\lambda)=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix} M(x;\lambda)\begin{cases}a_2(\lambda)^{\sigma_3}, & \lambda\in\mathbb{C}_+,\\ a_2^*(\lambda)^{-\sigma_3}, & \lambda\in\mathbb{C}_-.\end{cases} \tag{4.8}$$

定义以下反射系数 $r_1(\lambda)$ $r_2(\lambda)$ 和 $\rho(\lambda)$：

$$\begin{aligned} r_1(\lambda)&=\frac{a_2(\lambda_-)}{a_1(\lambda_-)}\frac{e^{-2ix_0^r\lambda}}{a_2(\lambda_-)a_1(\lambda_+)-ib_1^*(\lambda_-)}, && \lambda\in\Sigma_1^l,\\ r_2(\lambda)&=\frac{a_1(\lambda_-)}{a_2(\lambda_-)}\frac{e^{2ix_0^r\lambda}}{a_1(\lambda_-)a_2(\lambda_+)+ib_1(\lambda_-)}, && \lambda\in\Sigma_1^r,\\ \rho(\lambda)&=\frac{b(\lambda)}{a_1(\lambda)a_2^*(\lambda)}e^{-2ix_0^r\lambda}, && \lambda\in\mathbb{R}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

引理 2.1 的证明

证明。根据 4.2 中关于 $a_1(\lambda)$ $a_2(\lambda)$ 的命题以及引理 3.14 中 $b_1(\lambda)$ 的局部行为，可知 $r_1(\lambda)$ 在 $i\eta_1^l, i\eta_2^l$ 处呈平方根型行为。如果 Σ_1^r 的一个端点位于 Σ_1^l 上，例如图3模式 (iii) 中的 $i\eta_2^r$，那么 $r_1(\lambda)$ 在该点有界。

对于 $\lambda\in\Sigma_1^l\setminus\Sigma_1^r$，由 $a(\lambda)$ 在 (3.57) 中的跳跃条件以及 $h(\lambda)$ 在 (4.7) 中的跳跃条件，可得

$$a_2(\lambda_-)a_1(\lambda_+)=-i\,b_1^*(\lambda_-).$$

因此，由 $b_1^*(\lambda)$ 在 (3.57) 中的跳跃条件， $r_1(\lambda)$ 可改写为

$$r_1(\lambda)=\frac{e^{-2i\lambda x_0^r}}{2\,a_1(\lambda_-)a_1(\lambda_+)}.$$

注意，对于 $\lambda\in\mathbb{R}$ 以及当 $\epsilon\to0^+$时，我们有$\lim_{\epsilon\to0^+}h(\lambda+i\epsilon)=\exp(\alpha)a(\lambda)$ ，其中 α 是(4.3)中不含项 $\int_{\mathbb{R}}\frac{\ln(1-|r(\zeta)|^2)}{\zeta-\lambda}d\zeta$的指数部分。因此，由引理 3.13中 $b(\lambda)$与 $a(\lambda)$在 $\lambda=0$ 处的局部行为可知， $\rho(\lambda)$在 $\lambda=0$处是正则的。

□

因此，我们提出RH问题2.3 ，其对象为 $X(x;\lambda)$ 并含 $t=0$，该问题由RH问题4.1通过将 $r_1(\lambda)$ 和 $r_2(\lambda)$ 代入相应的跳跃矩阵而得到。

5 时间演化与逆散射

现在考虑 $\theta(x,t;\lambda)=x\lambda+4t\lambda^3$ 在RH问题2.3中。在本节中，我们证明RH问题 $X(x,t;\lambda)$ 具有唯一解。此外，随着 t 的演化，具有初始数据（1.8）的KdV方程的解可由 $X(x,t;\lambda)$恢复。

引理 5.1. 若谱函数 $\rho(\lambda)\in L^2(\mathbb{R})$、 $r_1(\lambda)\in L^2(\Sigma_1^l)$以及 $r_2(\lambda)\in L^2(\Sigma_1^r)$满足条件，则关于 $X(x,t;\lambda)$ 的 *RH*问题存在唯一解。

证明。 考虑关于 $N(x,t;\lambda)$ 的 1×2 向量值Riemann–Hilbert问题，它满足与 $X(x,t;\lambda)$ 相同的跳跃条件，但归一化为 $N(x,t;\lambda)=\mathcal{O}(\lambda^{-1})$，当 $\lambda\to\infty$ 时。更确切地说，

$$\begin{cases}N_+(x,t;\lambda)=N_-(x,t;\lambda)\,V(x,t;\lambda), & \lambda\in\mathbb{R}\cup\Sigma^r\cup\Sigma^l,\\ N(x,t;\lambda)=\mathcal{O}(\lambda^{-1}), & \lambda\to\infty.\end{cases}$$

假设

$$H(\lambda) = N(\lambda)(N^*(\lambda))^t,$$

其中 $(\cdot)^t$ 表示转置。显然， $H(\lambda)$在 $\lambda \in \mathbb{C}^+ \setminus (\Sigma_1^r \cup \Sigma_1^l)$上解析，并且当 $\lambda \to \infty$时满足 $H(\lambda) = \mathcal{O}(\lambda^{-2})$。因此，

$$\int_{\mathbb{R}} H(\lambda)\, d\lambda + \int_{\Sigma_1^l \cup \Sigma_1^r} (H_+(\lambda) - H_-(\lambda))\, d\lambda = 0.$$

对于 $\lambda \in \Sigma_1^r \cup \Sigma_1^l$，我们有

$$H_+(\lambda) = N_+(\lambda)N_+^*(\lambda)^t = N_-(\lambda)V(\lambda_+)N_+^*(\lambda)^t,$$

and

$$H_-(\lambda) = N_-(\lambda)N_-^*(\lambda)^t = N_-(\lambda)V^{-1}(\lambda_-)N_+^*(\lambda)^t,$$

这里用到了对称性 $N^*(\lambda) = N(\lambda)\sigma_1$。

根据 $r_1(\lambda)$ 和 $r_2(\lambda)$ 在(4.9)和(4.9)中的定义，我们回顾一下

$$r_1(\lambda_+) = -r_1(\lambda_-), \quad \lambda \in \Sigma_1^l, \qquad r_2(\lambda_+) = -r_2(\lambda_-), \quad \lambda \in \Sigma_1^r.$$

因此，对于 $\lambda \in \Sigma_1^l \cup \Sigma_1^r$，可得 $V^{-1}(\lambda_-) = V(\lambda_+)$，于是

$$\int_{\Sigma_1^l \cup \Sigma_1^r} (H_+(\lambda) - H_-(\lambda))\, d\lambda = 0.$$

通过标准论证可知，RH问题 $N(x,t;\lambda)$的唯一解是平凡零解。然后，根据Zhou的消失引理 [20]，，RH问题$X(x,t;\lambda)$存在唯一解。

□

注 5.2. [2] 中证明了，当 $n = 0$ 且 $m_0 = 2$时，可以从散射数据中唯一重构初始数据 $u_0(x)$。在引理 5.1 中，我们仅使用了$\rho(\lambda) \in L^2(\mathbb{R})$这一事实，以及 $r_1(\lambda)$ 和 $r_2(\lambda)$ 的边界值分别属于 $L^2(\Sigma_1^l)$ 和$L^2(\Sigma_1^r)$。这表明，只需假设初始数据满足 (1.8) 中的条件 $n = 0$ 和 $m_0 = 2$ 即可，这与 [2]中的结果一致。

根据引理 3.10 以及 $M(x;\ \lambda)$ 在 4.1中的定义，可知解 $u(x,\ t)$ 存在且唯一。此外，它可以通过 λ 在大 $X(x,\ t\ ;\ \lambda)$ 的渐近展开得到

$$u(x,t) = -2i\,\frac{d}{dx}\left(\lim_{\lambda\to\infty} \lambda(X_1(x,t;\lambda) - 1)\right),$$

其中， $X_1(x,\ t;\lambda)$ 表示向量 $X(x,\ t;\ \lambda)$ 的第一分量。

A KdV方程的周期行波解

考虑 KdV方程（1.1的一个周期行波解。在 Whitham调制理论的背景下，这类解已得到广泛研究；例如参见 [11, 10]。令$u(x,\ t) = f(\xi)$，其中

$$\xi = kx - \omega t + \phi_0,$$

且 $f(\xi)$ 是一个 2π-周期函数，其波数为 k，频率为 ω，相位常数 ϕ_0任意。代入行波假设 $f(\xi)$ 到（1.1）中并积分两次，得到

$$\frac{k^2}{2} f_\xi^2 = f^3 + \frac{\omega}{2k} f^2 + Af + B,$$

其中， A 和 B 是积分常数。假设 $\beta_1 > \beta_2 > \beta_3$。那么，上述恒等式可改写为

$$\frac{k^2}{2} f_\xi^2 = (f+\beta_1)(f+\beta_2)(f+\beta_3). \tag{A.1}$$

由于 KdV 解为实值，因此由 (A.1) 可得 $-\beta_1 \le f \le -\beta_2$。此外，由 (A.1) 可得

$$\frac{k\,du}{\sqrt{2(u+\beta_1)(u+\beta_2)(u+\beta_3)}} = d\xi. \tag{A.2}$$

由于该解的周期为 2π，我们得到

$$2k\int_{-\beta_1}^{-\beta_2} \frac{du}{\sqrt{2(u+\beta_1)(u+\beta_2)(u+\beta_3)}} = \oint d\xi = 2\pi,$$

这意味着

$$k = \frac{\pi\sqrt{\beta_1-\beta_3}}{\sqrt{2}\,K(m)}, \qquad m^2 = \frac{\beta_1-\beta_2}{\beta_1-\beta_3}.$$

Let

$$f = -\beta_1 + (\beta_1-\beta_2)\sin^2\phi, \qquad 0 \le \phi \le \frac{\pi}{2}.$$

然后，利用 (A.2)，我们得到

$$\frac{\sqrt{2}\,k}{\sqrt{\beta_1-\beta_3}}\int_0^\phi \frac{d\phi}{\sqrt{1-m^2\sin^2\phi}} = \xi - \xi_0.$$

根据雅可比椭圆函数 sn 的定义，我们发现

$$\sin(\phi) = \mathrm{sn}\left(\frac{\sqrt{\beta_1-\beta_3}}{\sqrt{2}k}(\xi-\xi_0)\,\middle|\, m\right),$$

因此，我们可以得到

$$f(\xi) = -\beta_1 + (\beta_1-\beta_2)\mathrm{sn}^2\left(\frac{\sqrt{\beta_1-\beta_3}}{\sqrt{2}}\left[x - 2(\beta_1+\beta_2+\beta_3)t + \frac{\phi_0}{k}\right] - \xi_0\frac{\sqrt{\beta_1-\beta_2}}{\sqrt{2}\,k}\,\middle|\, m\right). \tag{A.3}$$

利用 ϕ_0 的任意性以及恒等式 $\mathrm{dn}^2 + m^2\mathrm{sn}^2 = 1$，我们可以将式（A.3）改写为

$$u(x,t) = f(\xi) = -\beta_3 - (\beta_1-\beta_3)\,\mathrm{dn}^2\left(\frac{\sqrt{\beta_1-\beta_3}}{\sqrt{2}}\,(x - 2(\beta_1+\beta_2+\beta_3)t - x_0) + K(m)\,\middle|\, m\right),$$

其中 $x_0 = -(\phi_0 - \xi_0 - \pi)/k$。

B 周期有限间隙解的 Lax 谱

为方便起见，考虑 KdV方程（1.1）的定常周期解。引入移动坐标

$$\zeta := x - 2(\beta_1+\beta_2+\beta_3)\,t, \qquad \tau := t,$$

从而解（1.5）可以写成

$$u(\zeta,\tau) = u(\zeta) = -\beta_3 - (\beta_1-\beta_3)\,\mathrm{dn}^2\left(\frac{\sqrt{\beta_1-\beta_3}}{\sqrt{2}}(\zeta-x_0) + K(m)\,\middle|\, m\right), \tag{B.1}$$

其中取 $\beta_1 > \beta_2 > \beta_3$，且与 τ 无关（在运动坐标系中为定态）。该剖面满足定态 KdV 方程

$$v\,u_\zeta + 6\,u\,u_\zeta - u_{\zeta\zeta\zeta} = 0,\ v = 2(\beta_1+\beta_2+\beta_3). \tag{B.2}$$

此外，记 $z = \lambda^2$。那么，Lax 对（1.3）可改写为

$$\begin{cases} \Psi_\zeta = \mathcal{L}\,\Psi, \\ \Psi_\tau = \mathcal{A}\,\Psi, \end{cases} \tag{B.3}$$
$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -z+u & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} -u_\zeta & 4z+2u+v \\ (u-z)(4z+2u+v) - u_{\zeta\zeta} & u_\zeta \end{pmatrix}.$$

由于（B.3）中的时间演化矩阵 $\mathcal{A}$ 与 τ无关，我们可以设一个形式为 2×1 的

$$\psi(\zeta,\tau) = e^{iy\tau}\begin{pmatrix} \psi_1(\zeta) \\ \psi_2(\zeta) \end{pmatrix}. \tag{B.4}$$

将特征向量解（B.4）代入（B.3）中的时间部分方程，可得

$$(\mathcal{A} - yI)\begin{pmatrix} \psi_1(\zeta) \\ \psi_2(\zeta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_\zeta - iy & 4z+2u+v \\ (u-z)(4z+2u+v) - u_{\zeta\zeta} & u_\zeta - iy \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_1(\zeta) \\ \psi_2(\zeta) \end{pmatrix} = 0. \tag{B.5}$$

Lax 谱定义为所有 $x \in \mathbb{R}$ 的集合，对于这些B.3）中的谱问题存在有界特征向量解 [3, 16]。这要求（B.5）有非平凡解，这等价于

$$\det(\mathcal{A} - yI) = 0. \tag{B.6}$$

因此，参数 y 必须满足

$$y^2 = 16z^3 + 8vz^2 + (v^2 - C_1)z - C_2, \tag{B.7}$$

其中

$$C_1 = 12u^2 - 4u_{\zeta\zeta} + 4vu, \qquad C_2 = 4u^3 + u_\zeta^2 + 4u^2 v - u_{\zeta\zeta}v + u\left(-2u_{\zeta\zeta} + v^2\right).$$

由于 u 满足定态 KdV 方程（B.2），因此 C_1 和 C_2 均为常数。更确切地说，将周期解（B.1）代入（B.7），可得

$$y^2 = 2\,(2z+\beta_1+\beta_2)(2z+\beta_1+\beta_3)(2z+\beta_2+\beta_3), \tag{B.8}$$

这定义了一个双叶亏格一黎曼曲面。分支割为

$$\Big(-\infty, -\frac{\beta_1+\beta_2}{2}\Big] \cup \Big[-\frac{\beta_1+\beta_3}{2}, -\frac{\beta_1+\beta_2}{2}\Big].$$

致谢

作者衷心感谢 Tamara Grava 教授和 Robert Jenkins 教授的指导以及他们提出的研究问题。作者还感谢 Xiaofan Zhang 和 Zechuan Zhang 富有洞见的讨论和宝贵意见。他们的相关工作 [12]与本文同时完成。

作者感谢中国国家留学基金管理委员会（CSC）通过编号为202406040149的资助项目提供奖学金支持，并感谢GNFM-INDAM 小组以及INFN第4组—理论物理的研究项目“非线性物理数学方法”（MMNLP）。作者还感谢Deng-shan Wang教授和Cheng Zhu提供的KdV方程讲义。

参考文献

[1] E. D. Belokolos，编者。非线性可积方程的代数几何方法。施普林格出版社„ 柏林 ;. 出版物名称：施普林格非线性动力学系列。[2] Anne Boutet De Monvel、Iryna Egorova和Gerald Teschl。一维薛定谔算子的逆散射理论：具有阶跃型有限带势。数学分析杂志，106(1)：271–316，2008年1月。[3] Bernard Deconinck和Jeremy Upsal。聚焦型非线性薛定谔方程椭圆解的轨道稳定性。《*SIAM*数学分析杂志》，52(1)：1– 41，2020年1月。[4] S. Dyachenko、D. Zakharov和V. Zakharov。KdV方程的原始势与有界解。《物理学*D*：非线性现象》，333：148–156，2016年10月。[5] Iryna Egorova、Katrin Grunert和Gerald Teschl。关于具有阶跃型有限带初始数据的科尔特韦格–德弗里斯方程柯西问题：I. 施瓦茨型扰动。《非线性》，22(6)：1431–1457，2009年6月。[6] Iryna Egorova和Gerald Teschl。关于具有阶跃型有限带初始数据的科尔特韦格–德弗里斯方程柯西问题：II. 有限矩扰动。数学分析杂志，115(1)：71–101，2011年6月。[7] Clifford S. Gardner、John M. Greene、Martin D. Kruskal和Robert M. Miura。求解科尔特韦格–德弗里斯方程的方法。《物理评论快报》，19(19)：1095–1097，1967年11月。[8] F. Gesztesy、R. Nowell和W. Pötz。具有非平凡空间渐近行为的量子系统的一维散射理论。《微分与积分方程》，10(3)：521 – 546，1997年。[9] M. Girotti、T. Grava、R. Jenkins和K. D. T.-R. McLaughlin。KdV孤子气体的严格渐近行为。《数学物理通讯》，384(2)：733–784，2021年6月。[10] Ruizhi Gong和Deng-Shan Wang。盒型初始数据下科尔特韦格–德弗里斯方程中孤子–平均流的调制理论。《波动》，134：103467，2025年。[11] Tamara Grava。惠特姆调制方程及其在小色散渐近行为和非线性色散方程长时间渐近行为中的应用。第926卷，第309–335页。2016年。arXiv:1701.00069 [数理物理].[12] Tamara Grava、Robert Jenkins、Xiaofan Zhang和Zechuan Zhang。阶梯型振荡初值下聚焦型非线性薛定谔方程的直接散射。[13] A. V. Gurevich和L. P. PitaevskiT。无碰撞激波的非定常结构。《苏联物理学—*JETP*》，38(2)：291–297，1974年2月。[14] Robert Jenkins和Alexander Tovbis。用多孤子解逼近聚焦型非线性薛定谔方程层级有限带解的热力学极限。《数学物理通讯》，406(9)：214，2025年。ISBN：0010-3616。[15] Derek F. Lawden。椭圆函数及其应用，应用数学科学第80卷。施普林格纽约，纽约，1989年。

[16] Boris Moiseevich Levitan 和 Ishkhan Saribekovich Sargsian。《谱理论导论：自伴常微分算子》，第39卷。美国数学会，1975年。[17] Patrik V. Nabelek。作为原始解的Korteweg–de Vries方程的代数几何有限带隙解。《物理学D：非线性现象》，414:132709，2020年12月。[18] Thomas Trogdon 和 Bernard Deconinck。KdV方程有限属解的Riemann–Hilbert问题及其数值解。《物理学D：非线性现象》，251:1–18，2013年5月。[19] Thomas Trogdon 和 Bernard Deconinck。用于 KdV方程解的非线性叠加的数值dressing方法。《非线性》，27(1):67–86，2014年1月。[20] Xin Zhou。Riemann–Hilbert问题与逆散射。《SIAM数学分析杂志》，20(4):966–986，1989年7月。