arXiv:2603.02916v1 [math.NA] 3 Mar 2026

离散线性静态状态基近场动力学方程的收敛性

Lukas Pflug* Michael Stingl† Max Zetzmann‡

2026年2月20日

摘要

本文从解析角度证明了离散线性状态基静态近场动力学系统的解收敛于相应连续解。为获得可实现的模型，我们进一步对离散方程中的各项应用单点求积。所得系统与使用规则晶格的常用无网格离散方法一致，其中还可以采用部分面积算法来改善数值表现。我们再次证明了收敛性，这次针对文献中常用的权函数的固定选取，以及对输入数据更强的假设。然而，我们注意到，这些假设对于实际应用而言并没有显著的限制性。特别是，它们仍允许材料参数和外部体力存在不连续性。

关键词— 近场动力学、状态基、无网格、收敛

1 引言

近场动力学是连续介质力学中一种相对较新的固体物体建模方法，由 Silling 首次提出于 [26]。它采用非局部积分方程，而非偏微分方程；与经典理论不同，该方法不依赖位移 $\mathbf{u}$ 的任何空间导数，因此天然适用于断裂建模（例如参见 [27], [5], [8]）。它还启发了类似的断裂分析模型（参见 [14], [16], [15], ，以及 [9] 中提出、用于 [7] 中断裂问题的模型）。其他应用还包括含预设裂纹的拓扑优化（参见 [13]）。

在 [26] 中提出的原始近场动力学模型是所谓的键基模型，该模型虽然易于实现且数值效率高，但缺点是只能复现固定的泊松比。这一不足促使人们提出了一种广义的所谓态基模型。这一广义表述允许对具有任意体积模量和剪切模量的材料进行建模。此类态基模型的一个特别重要的实例在 [24], 5.3例3中给出。应当注意，键基模型是态基模型的特殊情形。因此，本论文中的所有结果也可无需任何额外工作而适用于键基模型。

*埃朗根-纽伦堡弗里德里希-亚历山大大学 FAU科学计算能力中心，德国埃朗根市 Martensstr. 5a，邮编 91058

†埃朗根-纽伦堡弗里德里希-亚历山大大学连续优化系，德国埃朗根市 Cauerstraße 11，邮编 91058

‡埃朗根-纽伦堡弗里德里希-亚历山大大学连续优化系，德国埃朗根市 Cauerstraße 11，邮编 91058，通讯作者。电子邮箱：max.zetzmann@fau.de

如有需要，可在 [28]和 [3]中找到关于近场动力学更为详尽完整的综述。

本文聚焦于该态基模型的线性化，并旨在证明离散方程的解收敛到连续解。在 [21], [20] 和 [2]中，已对这一设定下的收敛及收敛行为进行了数值分析。本文讨论的是后者背景下所谓的 m-收敛，即随着离散网格逐渐加密，模型的视界保持不变。

本文旨在严格证明收敛性，但证明收敛速率不在本文的讨论范围内。我们将通过两种不同的方式来证明：一种是在更一般的设定下允许更一般的输入数据，但相应地需要精确计算方程各项中的多重积分；另一种是在数值设定下对这些积分采用单点求积，但相应地要求权函数必须取为 $\omega \quad \zeta \mapsto \rho(\zeta)\chi_{[0,\delta)}(\mathrm{k}\zeta\mathrm{k}), \quad \rho(\zeta) = \frac{1}{\|\zeta\|}$。文末还将提出一条说明，将权函数的选取推广至包含更多正则函数的情形 ρ 。文献中常见这种权函数的选取，例如 Silling 关于近场动力学离散的研究 [27] ，以及其中定义的 PMB（原型微弹性脆性）材料。与该 PMB 模型不同的是，本文暂不考虑断裂。另见 [23], ，该文研究了不同权函数选取对非局部本构行为的影响。我们用于数值模型的离散格式，与 [27] 中针对规则晶格所描述的空间离散一致，并将其推广至态基模型；这种格式在数值模拟中十分常见。

需要指出的是， [14], [16] 和 [15] 所述的近场动力学启发的非线性模型所对应的动力学问题，其类似的严格收敛结果已在 [10], [11] 和 [12]中得到证明。具体而言， [10], 采用了基于三角形或四面体单元的线性连续插值近似，并在有限元格式的框架下，假设右端项和初值属于 $H^2(\Omega)^d \cap H_0^1(\Omega)^d$。此外，假设材料参数为常数。

在 [11] 和 [12], 中，采用了空间分片常数近似，并假设输入数据和右端项具有赫尔德连续的正则性，同时材料参数保持为常数。值得注意的是， [11],[12] 和 [10] 中使用的模型与本文所考虑的模型不同，且不包含本文的模型。

关于线性键基模型的其他结果包括 [32], ，其中通过傅里叶分析证明了收敛性。然而，这种方法对Ω的几何形状施加了诸多限制：一维情况下考虑的是有限区间，二维情况下考虑的是矩形区域。在这些区域上，在Galerkin–Ritz格式的框架下，针对一般的内逼近证明了收敛性。

最值得注意的是，上述论文均未严格证明在对离散方程额外采用单点求积时离散解的收敛性。这一点很重要，因为大多数实际计算都会使用求积来简化非局部近场动力学模型中涉及的积分。相反，即使有论文讨论了求积，采用单点求积所得离散化解的收敛性也仅通过数值方式与未采用单点求积时解的界和收敛速率进行了比较（见 [12], 第 6 节）。

本文旨在弥补基于状态的线性模型中，常用的单点求积无网格离散与连续表述之间的差距。

据我们所知，目前尚无关于静态线性状态基模型无网格离散收敛性的严格证明——无论是否采用单点求积——同时也不假设材料参数或右端项具有连续性，亦不对区域 Ω 施加重大限制。

本文结构如下：第1节介绍本文采用的模型，第2节将讨论不采用单点求积时离散解的收敛性。在该节中，我们将在假设 1.1 下证明主要结果——定理 2.7，表明离散解在 L^2(Ω)^d 范数下收敛到连续解。值得注意的是，无需对材料参数或外部体力作连续性假设。这里的关键步骤是证明内逼近的稠密性，这一结果在命题 2.6 中证明，并以命题 2.5 为基础。其余部分则由伽辽金理论推出。

第3节将介绍公式 (16) 和 (23) 中的数值模型，该模型由第2节中的离散模型应用单点求积得到。为改善实际收敛性，我们还在数值公式中加入部分区域权重，正如 [22], 所建议的那样；这些权重可自由选取，只需满足较弱的一致性假设。随后，我们将在假设 3.3 下通过命题 3.8 证明所得数值解的收敛性。为此，我们需要对材料参数和右端项作出更强的假设。我们假设它们有界，并且几乎处处局部满足 L-Lipschitz 连续性，其中 $L > 0$。特别地，仍允许在零测集上存在不连续性。为证明命题 3.8，我们在推论 3.18 中证明了相应离散问题与连续问题所对应线性算子的收敛结果，并在推论 3.22 中得到一致强制性结果。这些结果均基于引理 3.4 和命题 2.5，进而得到命题 3.5；这些结果使我们能够在命题 3.17 中处理输入数据的不连续性，最终得到推论 3.18。最后，注 3.23 将说明，收敛性证明可轻易推广到其他权函数 ω，尤其是形如 $\omega(\zeta) = \chi_{[0,\delta)}(\|\zeta\|)\rho(\zeta)$ 的权函数，其中 $\rho \in C^0(\mathbb{R}^d)$，以及 $\omega(\zeta) = \chi_{[0,\delta)}(\|\zeta\|)^{p_n(\|\zeta\|)}\ \|\zeta\|^\alpha$，其中多项式 $p_n \geq 0$ 适当选取且$\alpha \in \{0,1\}$，如 [22], [20], [21] 中所述。

1.1 线性状态基模型

令 $d \in \{2,3\}$ 表示空间维数。根据 [18], ，变分线性静态状态基问题可由双线性型 B （定义见式（2））表示为

$$\text{Find } u \in \mathcal{V} \text{ such that } \forall v \in \mathcal{V} : B(u,v) = \int_\Omega b(x) \cdot v(x)\ \mathbf{d}x, \tag{1}$$

对于一个开且有界的参考构形 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 以及外部体力b：$\Omega \to \mathbb{R}^d$。V 是 $L^2(\Omega)^d$ 的一个子空间，且与.....不相交

$$\Pi := \{f \in L^2(\Omega)^d : \exists c \in \mathbb{R}^d,\ \mathbb{R}^{d\times d} \ni A = -A^\top : f(x) = Ax + c, \forall x \in \Omega\}.$$

子空间 V $\subset L^2(\Omega)^d$ 实现了问题所施加的齐次狄利克雷条件。例如，给定一个开子集 $\Theta \subset \Omega$，要求解在该子集上为 0，则 V 具有如下形式

$$\mathcal{V} := \{u \in L^2(\Omega)^d : u_{|\Theta} \equiv 0\}.$$

按定义，采用这种形式的 V 选择与 Π 不相交。这种施加边界条件的方法有一些已知的缺点。具体而言，它会在

Θ 与物体其余部分之间的界面处产生不必要的伪影。关于改进方法的建议可见 [31]。尽管如此，我们仍将采用这种方法，因为它简单，而且与 [18] 中的理论相兼容。

为了构造式 (1) 中的双线性型 B ，我们需要以下源自 [4]的非局部算子。

$$
\begin{aligned}
[\mathcal{D}_{\overline{\omega}}^{*}u](x) &:= -\int_{\Omega}(u(x')-u(x))\otimes\left(\frac{x'-x}{\|x'-x\|^{2}}\right)\overline{\omega}(x,x')\ \mathbf{d}x',\\
[\mathcal{D}^{*}u](x,x') &:= -(u(x')-u(x))\otimes\left(\frac{x'-x}{\|x'-x\|^{2}}\right).
\end{aligned}
$$

这些算子可理解为非局部散度算子和梯度算子，其合理性由 [4] 第 5 节中陈述的收敛结果以及类似于局部算子的代数恒等式所支持；参见 [4], 命题 3.2 和定理 4.1。我们进一步定义 $\mathrm{Tr}:\mathbb{R}^{d\times d}\to\mathbb{R}$ 为通常的迹函数。

选取权函数 $\omega\in L^{1}(\mathbb{R}^{d})$ 和材料参数 $\alpha,\ k:\Omega\to\mathbb{R}_{>0}$，则式 (1) 中的双线性型对 $u,\ v\in V$ 定义为

$$
\begin{aligned}
&B(u,v)\\
&:=\int_{\Omega}\left(k(x)-\frac{\alpha(x)m(x)}{d^{2}}\right)\mathrm{Tr}([\mathcal{D}_{\overline{\omega}}^{*}u](x))\mathrm{Tr}([\mathcal{D}_{\overline{\omega}}^{*}v](x))\\
&\quad+\alpha(x)\int_{\Omega}\omega(x'-x)\|x'-x\|^{2}(\mathrm{Tr}([\mathcal{D}^{*}u](x,x')))(\mathrm{Tr}([\mathcal{D}^{*}v](x,x')))\ \mathbf{d}x'\ \mathbf{d}x,
\end{aligned}
\tag{2}
$$

其中

$$
\overline{\omega}(x,x'):=\frac{d}{m(x)}\omega(x'-x)\|x'-x\|^{2},\ \ m(x):=\int_{\Omega}\omega(x'-x)\|x'-x\|^{2}\ \mathbf{d}x'.
$$

为保证连续问题的适定性并得到第一个收敛结果，我们还需作出以下假设。

假设 1.1（连续模型的假设）

A1 权函数的可积性、非负性和对称性：$\omega(\cdot)\in L^{1}(\mathbb{R}^{d})$，其中 $\omega\geqq 0$ 和 $\omega(\zeta)=\omega(-\zeta)$，对所有 $\zeta\in\mathbb{R}^{d}$均成立。A2 权函数支集的界：存在 $0<\lambda,\delta<\infty$，使得 $B_{\lambda}(0)\subset\mathrm{supp}(\omega)\subset B_{\delta}(0)$。A3 材料参数的有界性：$\alpha,k:\Omega\to\mathbb{R}$ 可测且有界，即存在 $\alpha_{0},\alpha_{1},k_{0},k_{1}>0$，使得$\alpha_{0}\leq\alpha(x)\leq\alpha_{1}<\infty$ 且 $k_{0}\leq k(x)\leq k_{1}<\infty$，对所有 $x\in\Omega$ 均成立。A4 外部体力的正则性：$b\in L^{2}(\Omega)^{d}$。A5 区域的正则性：Ω 是一个有界且连通的 Lipschitz区域。特别地，它满足某个角度为 $\theta>0$、半径为 $h>0$的内部锥条件。

A6 边界条件的正则性：$\Theta \subset\Omega$ 是开集、非空，且
$\mathrm{vol}(\partial\Theta) = 0$。

如 [18], 所示，上述假设足以保证问题 (1) 的适定性。注意，[18] 在对 ω采用更一般假设的条件下证明了适定性，只要求 $\omega(\cdot)\mathrm{k}\cdot\mathrm{k}^2 \in L^1(\mathrm{R}^d)$。

2 解析模型的收敛

为得到离散方程，采用分片常数近似，并按如下方式对 Ω 进行划分。

定义 2.1 （将 Ω 细分为（Ω_i）$_{i\in I^\kappa}$）

1. 将 R^d 细分为半开立方体/正方形 $(B_i)_{i\in Z^\kappa}$，边长为 κ，中点为 x_i，并位于均匀网格 $\kappa\,\mathrm{Z}^d$ 上。因此，将包含 0 的立方体定义为 $[-\frac{\kappa}{2},\frac{\kappa}{2}[^d$。

2. 将所有与 Ω 有非平凡交集的此类立方体 B_i（$\mathrm{vol}(B_i\cap\Omega) > 0$）所对应的指标族定义为 $I^\kappa \subsetneq Z^\kappa$。

3. 对所有 $i \in I^\kappa$，定义 Ω_i 为 B_i 与 Ω 的交集。

利用此细分，我们定义以下算子以简化符号表示。

定义 2.2(分片常数投影算子)
令 $\chi_B(x)$ 表示集合 $B \subset \mathrm{R}^n$ 的特征函数。定义 $\mathrm{K}_\kappa : (\mathrm{R}^d)^{|I^\kappa|} \to L^2(\Omega)^d$ 和 $\mathrm{P}_\kappa : L^2(\Omega)^d \to(\mathrm{R}^d)^{|I^\kappa|}$ 为

$$\mathcal{K}_\kappa\vec{u} := \sum_{i\in I^\kappa} \vec{u}_i\chi_{\Omega_i},\ (\mathcal{P}_\kappa u)_i := \frac{1}{V_i}\int_{\Omega_i} u(x)\ \mathbf{d}x. \tag{3}$$

此外，定义 $\mathrm{P}_\kappa := \mathrm{K}_\kappa \circ \mathrm{P}_\kappa$ 为从 $L^2(\Omega)^d$ 到关于 Ω_i 的分片常数近似的投影。

对于这些算子，我们可以证明以下结论。

引理 2.3 (分段常数函数逼近) K_κ 和 P_κ 均为有界线性算子，满足 $\mathrm{P}_\kappa \circ \mathrm{K}_\kappa = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^{d|I^\kappa|}}$，且 P_κ 的范数一致有界于 1，即对所有 $\kappa > 0$，$\mathrm{k}\mathrm{P}_\kappa\mathrm{k} \le 1$。最后，

$$\|(\mathrm{id}_{L^2} - \mathbb{P}_\kappa)u\|_{L^2(\Omega)^d} \xrightarrow{\kappa\searrow 0} 0. \tag{4}$$

对所有 $u \in L^2(\Omega)^d$。

证明。恒等式 $\mathrm{P}_\kappa \circ \mathrm{K}_\kappa = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^{d|I^\kappa|}}$ 直接由 P_κ 和 K_κ 的定义得出。它们的有界性很容易由詹森不等式得到。类似地，P_κ 的有界性由

$$\begin{aligned}\|\mathbb{P}_\kappa u\|^2_{L^2(\Omega)^d} &= \sum_i \int_{\Omega_i} \left\| \frac{1}{V_i}\int_{\Omega_i} u(x')\ \mathbf{d}x' \right\|^2\ \mathbf{d}x \\ &\le \sum_i V_i \frac{1}{V_i}\int_{\Omega_i} \|u(x)\|^2\ \mathbf{d}x \le \|u\|^2_{L^2(\Omega)^d}.\end{aligned}$$

利用这一点，我们遵循 [1] 第 7.21 节来证明最后一个收敛断言。只需证明

$$\|(\mathrm{id}_{L^2} - \mathbb{P}_\kappa)f\|_{L^2(\Omega)^d} \xrightarrow{\kappa \searrow 0} 0$$

仅对 $f \in C_0^0(\Omega)^d$成立，这是因为 $C_0^0(\Omega)^d$是 $L^2(\Omega)^d$的稠密子集。
由赫尔德不等式即可得出该结论，

$$\begin{aligned}\|(\mathrm{id}_{L^2} - \mathbb{P}_\kappa)f\|^2_{L^2(\Omega)^d} &\leq \mathrm{vol}(\Omega)\|(\mathrm{id}_{L^2} - \mathbb{P}_\kappa)f\|^2_{L^\infty(\Omega;(\mathbb{R}^d,\|\cdot\|_2))} \\ &\leq \mathrm{vol}(\Omega)\left(\sum_{1\leq i\leq d}\sup_{\|x'-x\|\leq\sqrt{d}\kappa}|f_i(x') - f_i(x)|^2\right) \xrightarrow[f_i\in C_0^0(\Omega)]{\kappa\searrow 0} 0.\end{aligned}$$

□

现在，我们构造式（8）所示的熟知的静态线性近场动力学方程代数形式。将 Ω 划分为 $(\Omega_i)_{i\in I^\kappa}$ 也用于定义

$$\mathcal{W}_\kappa := \left\{\sum_{i\in I^\kappa}\chi_{\Omega_i}\vec{u}_i : \vec{u}_i \in \mathbb{R}^d \text{ for all } i \in I^\kappa\right\} \subset L^\infty(\Omega)^d.$$

现在令 $\mathsf{V}_\kappa := \mathsf{W}_\kappa \cap \mathsf{V}$，以施加边界条件，并将离散问题表述为

$$\text{Find } u_\kappa \in \mathcal{V}_\kappa \text{ such that } \forall v \in \mathcal{V}_\kappa : B(u_\kappa, v) = \int_\Omega b(x)\cdot v(x)\ \mathbf{d}x. \tag{5}$$

由于 W_κ 是一个与 $(\mathbb{R}^d)^{|I^\kappa|} \cong \mathbb{R}^{|I^\kappa|d}$同构的有限维向量空间，因此可以为所有$i,\ j \in I^\kappa$和 $1 \leq k,\ l \leq d$定义离散右端项 $\vec{b} \in (\mathbb{R}^d)^{|I^\kappa|}$ 和双线性型 $\vec{B} \in (\mathbb{R}^{d\times d})^{|I^\kappa|\times|I^\kappa|}$，如下：

$$\begin{aligned}\vec{b}_i &= (\vec{b}_i^1, \ldots, \vec{b}_i^d)^\top,\ \vec{b}_i^k := \int_{\Omega_i} b(x)^\top e_k\ \mathbf{d}x \\ \vec{B}_{ij} &= (\vec{B}_{ij}^{kl})_{kl},\ \vec{B}_{ij}^{kl} := B(\chi_{\Omega_i}e_k, \chi_{\Omega_j}e_l).\end{aligned} \tag{6}$$

进一步定义

$$\vec{\mathcal{V}}_\kappa := \left\{\vec{b} \in (\mathbb{R}^d)^{|I^\kappa|} : \mathcal{K}_\kappa\vec{b} = \sum_{i\in I^\kappa}\chi_{\Omega_i}\vec{b}_i \in \mathcal{V}_\kappa\right\},$$

现在，我们将方程（5）改写为其代数形式：

$$\text{Find } \vec{u}_\kappa \in \vec{\mathcal{V}}_\kappa \text{ such that } \forall \vec{v} \in \vec{\mathcal{V}}_\kappa : \vec{u}_\kappa^\top \vec{B}\vec{v} = \vec{b}^\top\vec{v}. \tag{7}$$

为证明 (7) 的适定性，注意到 $\vec{\mathsf{V}}_\kappa$ 是 $\mathbb{R}^{d|I^\kappa|} \cong \mathsf{W}_\kappa$ 的一个线性子空间，其定义是在每个满足 $\mathrm{vol}(\Theta \cap \Omega_i) > 0$ 的指标 i 处的元素均为零。将所有满足 $\mathrm{vol}(\Theta \cap \Omega_i) = 0$ 且 J^κ 的指标 i 的集合记为 $\tilde{B} \in$。然后，将 $\vec{B}$ 中所有指标属于 $i \in I^\kappa\backslash J^\kappa$ 的行和列删除，所得矩阵定义为 $\tilde{B} \in \mathbb{R}^{d|J^\kappa|\times d|J^\kappa|}$。类似地，将向量 $\vec{b}$ 中所有指标属于 $I^\kappa\backslash J^\kappa$ 的元素删除，所得向量定义为 $\tilde{b}$。使用这些新定义，(7) 可化简为以下最终形式，

$$\text{Find } \tilde{u}_\kappa \in \mathbb{R}^{d|J^\kappa|} \text{ s.t. } \tilde{B}\tilde{u}_\kappa = \tilde{b}. \tag{8}$$

为方便起见，我们定义如下单射，

$$E : (\mathbb{R}^d)^{|J^\kappa|} \to (\mathbb{R}^d)^{|I^\kappa|},\ \tilde{u} \mapsto \vec{u},\ \vec{u}_i := \begin{cases}\tilde{u}_i & i \in J^\kappa \\ 0 & \text{else.}\end{cases}$$

注意，当且仅当 $E(\tilde{u})$ 是 (7) 的解时， $\tilde{u}$ 才是 (8) 的解。因此，(5) 的分片常数解 u_κ 与 (8) 的解 $\tilde{u}_\kappa$ 一一对应，因为狄利克雷边界条件保证了 (7) 的任何解都必定属于 E 的像。

由于 B 如 [18], 引理 3 所示具有强制性，存在一个 $c > 0$ ，使得对于所有 $u \in \mathrm{V}$,

$$c\|u\|^2_{L^2(\Omega)^d} \leq B(u,u). \tag{9}$$

我们定义 $V_i := \mathrm{vol}(\Omega_i) = \mathrm{vol}(B_i \cap \Omega)$。由此可得，对于所有 $0 \neq \tilde{u} \in \mathrm{R}^{d|J^\kappa|}$,

$$\begin{aligned}\tilde{u}^\top \tilde{B}\tilde{u} = (E\tilde{u})^\top \vec{B}(E\tilde{u}) &= B\left(\sum_{i\in J^\kappa}\chi_{\Omega_i}\tilde{u}_i, \sum_{i\in J^\kappa}\chi_{\Omega_i}\tilde{u}_i\right)\\ &\geq c\left\|\sum_{i\in J^\kappa}\chi_{\Omega_i}\tilde{u}_i\right\|^2_{L^2(\Omega)^d} \geq \underbrace{c\left(\min_{i\in J^\kappa} V_i\right)}_{>0}\|\tilde{u}\|^2.\end{aligned}$$

˜这意味着 B 是对称正定的，因而特别是可逆的。这立即得出式 (8) 中所提出的离散问题的适定性。

所得解的序列 $(\mathrm{K}_\kappa \tilde{u}_\kappa)_\kappa$ （其指标取遍 κ g 0）收敛于连续问题 u的解，这一结论的证明主要建立在关于 V_κ的稠密性结果之上，其余部分则由伽辽金理论推出。为完整起见，我们仍将给出整个证明。为此，我们需要以下引理，它是对零测集刻画的略微改写。为表述该引理，我们将立方体定义为半开的，即其形式为 $[a_1, b_1[\times .... \times [a_d, b_d[$，其中 a, $b \in \mathrm{R}^d$。

引理 2.4 (紧零测集的刻画) 设 A 是一个紧零测集。那么，对于每个 $\epsilon > 0$，都存在一个由有限个边长相同的半开立方体 $W^\epsilon_f f\in F$组成的族，其边长为 l，使得

$$A \subset \bigcup_{f\in F} W^\epsilon_f, \ \mathrm{vol}\left(\bigcup_{f\in F} W^\epsilon_f\right) < \epsilon.$$

证明。 参见引理 A.1。 □

由此引理可得以下重要结果。

命题 2.5($(B_i)_i$ 零测集的覆盖)
设 $(B_i)_i$ 如定义 2.1 中所定义。则对于任意零测紧集 $A \subset \mathrm{R}^d$ ，有

$$0 \leq \mathrm{vol}\left(\bigcup_{i:B_i\cap A\neq\varnothing} B_i\right) \leq \mathrm{vol}\left(\bigcup_{i:\overline{B_i}\cap A\neq\varnothing} B_i\right) \xrightarrow{\kappa\searrow 0} 0.$$

证明。 令 $\epsilon > 0$。现在应用引理 2.4，可得一个由有限个半开立方体组成的族 $(W_f)_{f\in F}$，其边长均为 q，使得

$$A \subset \bigcup_{f\in F} W_f, \ \mathrm{vol}\left(\bigcup_{f\in F} W_f\right) < \tfrac{1}{2}\epsilon. \tag{10}$$

现在，令 $L_f := \{i : \overline{B_i} \cap W_f \neq \varnothing\}$，即可得到

$$S^\kappa := \bigcup_{i:\overline{B_i}\cap A\neq\varnothing} B_i \subset \bigcup_{f\in F}\bigcup_{i\in L_f} B_i. \tag{11}$$

现在我们断言，对于每个 $f \in F$，均匀地有

$$0 \leq \lim_{\kappa\searrow 0} \mathrm{vol}\left(\bigcup_{i\in L_f} B_i\right) - \mathrm{vol}(W_f) = 0,$$

这由下式可得

$$0 \leq \mathrm{vol}\left(\bigcup_{i\in L_f} B_i\right) - \mathrm{vol}(W_f) \leq (2\kappa + q)^d - q^d \xrightarrow{\kappa\searrow 0} 0.$$

因此存在一个 $N \in \mathbb{N}$，使得对于所有 $n \geq N$ 和所有 $f \in F$，

$$0 \leq \mathrm{vol}\left(\bigcup_{i\in L_f} B_i\right) - \mathrm{vol}(W_f) \leq (2\kappa_n + q)^d - q^d \leq \frac{\epsilon}{2|F|},$$

其中，L_f 和 B_i 通过 κ_n 依赖于 n。于是，最终对于所有 $n \geq N$，有

$$\mathrm{vol}(S^\kappa) \leq \mathrm{vol}\left(\bigcup_{f\in F}\bigcup_{i\in L_f} B_i\right) \leq \mathrm{vol}\left(\bigcup_{f\in F} W_f\right) + \tfrac{1}{2}\epsilon < \epsilon.$$

最后一个不等式由式（10）推出。 □

由此，我们得到本章的主要成果——稠密性结果，如下所示。

命题 2.6 (离散可容许集的稠密性) 对任意序列 $\kappa_n \searrow 0$，集合

$$\tilde{\mathcal{V}} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{V}_{\kappa_n}$$

关于 $L^2(\Omega)^d$ 范数在 V 中是（强）稠密的。

证明。设 $v \in V$。我们已经知道，由引理 2.3，存在一个分段常数函数序列 $v'_\kappa := P_\kappa(v) \in L^2(\Omega)^d$，使得 $v'_\kappa \to v$ 当 κ g 0。除非与讨论相关，否则仍省略指标 $\sim n$。将该序列限制在 v'_κ 到 $\cup_{i\in J^\kappa}\Omega_i =: SQ_{J^\kappa}$，即可将其修改为属于 V 的序列，从而定义 $v_\kappa := v'_{\kappa|SQ_{J^\kappa}}$。回顾一下，$J^\kappa \subset I^\kappa$ 是满足 $\mathrm{vol}(\Omega_i \cap \Theta) = 0$ 的指标 $i \in I^\kappa$ 集合。

现在，我们将 Ω_i for $i \in I^\kappa\backslash J^\kappa$ 中的群分为两类：完全位于 $\overline{\Theta}$ 内的群，以及同时与 $\Omega\backslash\overline{\Theta}$ 和 Θ 相交的群。由此得到以下定义，

$$\Omega \supset SQ_{K^\kappa} := \bigcup_{i\in K^\kappa} \Omega_i,\ K^\kappa := \{i \in I^\kappa\backslash J^\kappa : \Omega_i \not\subset \overline{\Theta}\},$$
$$\Omega \supset SQ_{R^\kappa} := \Omega\backslash(SQ_{K^\kappa} \cup SQ_{J^\kappa}) = N\dot\cup \bigcup_{i\in R^\kappa} \Omega_i,\ R^\kappa := \{i \in I^\kappa : \Omega_i \subset \overline{\Theta}\},$$

其中 $N \subset \Omega$ 是某个零测集。于是可得

$$\begin{aligned}\|v_\kappa - v\|^2_{L^2(\Omega)^d} &\le \|\mathbb{P}_\kappa(v) - v\|^2_{L^2(SQ_{J^\kappa})^d} + \|v_\kappa - v\|^2_{L^2(SQ_{K^\kappa})^d} + \|v_\kappa - v\|^2_{L^2(SQ_{R^\kappa})^d} \\ &\le \underbrace{\|\mathbb{P}_\kappa(v) - v\|^2_{L^2(\Omega)^d}}_{\xrightarrow{\text{L2.3}}0} + \|v\|^2_{L^2(SQ_{K^\kappa})^d}\end{aligned}$$

因为 $v \in \mathrm{V}$，所以 $v_\kappa \equiv 0$ 在$SQ_{K^\kappa} \cup SQ_{R^\kappa}$ 上，而 $v \equiv 0$ 在SQ_{R^κ} 上。

由于勒贝格积分的绝对连续性，现在只需证明

$$\mathrm{vol}(SQ_{K^\kappa}) \xrightarrow{\kappa \searrow 0} 0.$$

这里需要用到 1.1 中的假设 A6，它对 SQ_{K^κ} 给出了更具体的描述：

$$SQ_{K^\kappa} \subset \bigcup_{i: B_i \cap \partial\Theta \neq 0} B_i =: S^\kappa.$$

这由 Θ 的开性以及半开立方体B_i的路径连通性可得。更具体地说，对于任意满足 $i \in K^\kappa$的 Ω_i，有

$$\begin{aligned}\Omega_i \cap \Theta = B_i \cap \Theta \neq \varnothing \\ \Omega_i \cap (\Omega \backslash \overline{\Theta}) = B_i \cap (\Omega \backslash \overline{\Theta}) \neq \varnothing.\end{aligned}$$

现在，通常的连通性论证可得 $B_i \cap \partial\Theta \neq \varnothing$。因此 $\Omega_i \subset B_i \subset S^\kappa$。证明的最后一部分利用了 $\partial\Theta$ 根据假设是一个零测紧集，从而应用命题 2.5。

□

证明了稠密性之后，剩余的收敛性可由伽辽金理论如下推出。

定理 2.7 (离散解的收敛性) 假设满足假设 1.1。于是，令 κ_n 趋于 0。对每个 κ_n，令 u_{κ_n} 为方程 (5) 的唯一解，并令 u 为方程 (1) 的唯一解，则

$$\|u - u_{\kappa_n}\|_{L^2(\Omega)^d} \xrightarrow{\kappa_n \searrow 0} 0.$$

证明。 该证明利用了这样的事实：双线性型 B 也可表示为自伴算子 $\mathrm{L} \in L^2(\Omega)^d \to L^2(\Omega)^d$，使得

$$B(u, v) = \langle -\mathcal{L}u, v\rangle_{L^2(\Omega)^d} = \langle u, -\mathcal{L}v\rangle_{L^2(\Omega)^d}$$

对所有 $u, v \in L^2(\Omega)^d$ (参见 [18], 引理 5)。证明首先给出 u_κ的有界性结论。为方便起见，在不需要时省略 κ_n 中的指标 n。利用式 (9) 中双线性型的强制性，可得

$$0 \le c\|u_\kappa\|^2_{L^2(\Omega)^d} \le B(u_\kappa, u_\kappa) = \langle b, u_\kappa\rangle_{L^2(\Omega)^d} \le \|b\|_{L^2(\Omega)^d}\|u_\kappa\|_{L^2(\Omega)^d}$$

从而 $\frac{1}{c}\,\mathrm{k}b\mathrm{k}_{L^2(\Omega)^d} \ge \mathrm{k}u_\kappa\mathrm{k}_{L^2(\Omega)^d}$ 一致有界。

应用巴拿赫-阿劳格鲁定理，可得一个弱-L^2 收敛子序列 $u_{\kappa_{n_k}}$。为简便起见，将其仍记为 u_{κ_n}，其弱极限为 $u' \in L^2(\Omega)^d$。由于 V 的弱闭性，我们有 $u' \in \mathrm{V}$。

下一步是证明 $u' = u$，方法是证明 u' 满足方程 (1)，从而证明整个原序列弱收敛到 u。令 $v \in$V，则根据命题 2.6，存在一个 $(v_{\kappa_n})_{n\in\mathbb{N}}$ 序列，使得 $v_{\kappa_n} \to v$ 在 $L^2(\Omega)^d$ 中强收敛，且对所有$n \in$ N，$v_{\kappa_n} \in$ V$_{\kappa_n}$。然后，由于 L 是有界算子，因此 L$v_{\kappa_n} \to$Lv 在 $L^2(\Omega)^d$中强收敛，

$$B(u_\kappa, v_\kappa) = \langle u_\kappa, -\mathcal{L}v_\kappa\rangle_{L^2(\Omega)^d} \xrightarrow{\kappa\searrow 0} \langle u', -\mathcal{L}v\rangle_{L^2(\Omega)^d}.$$

由此立即得到

$$B(u', v) = \lim_{n\to\infty} B(u_{\kappa_n}, v_{\kappa_n}) \overset{sol}{=} \lim_{n\to\infty} \langle b, v_{\kappa_n}\rangle_{L^2(\Omega)^d} = \langle b, v\rangle_{L^2(\Omega)^d}.$$

现在唯一尚待证明的是，该级数也在 $L^2(\Omega)^d$ 范数下收敛到 u。利用V$_\kappa \subset$V这一事实，因此 $B(u,\ u_\kappa) = \mathrm{h}u_\kappa,\ b\mathrm{i}_{L^2(\Omega)^d} = B(u_\kappa,\ u_\kappa)$，即可得到

$$\begin{aligned} c\|u - u_\kappa\|^2_{L^2(\Omega)^d} &\le B(u - u_\kappa, u - u_\kappa) = B(u, u - u_\kappa) - B(u_\kappa, u) + B(u_\kappa, u_\kappa) \\ &= \langle u - u_\kappa, b\rangle_{L^2(\Omega)^d} \xrightarrow{\kappa\searrow 0} 0. \end{aligned}$$

在最后一个等式中，我们用到了 u 满足方程(1)这一事实。 □

注记2.8 注意，在(2)中设定材料参数 $\alpha \equiv \frac{d^2k}{m}$ 后，态基模型便化为键基模型。因此，定理 2.7 同样适用于键基模型，因为假设 1.1 中的 A5 蕴含 $0 < m_0 \leqq m \leqq m_1$ 对某个 m_0，$m_1 > 0$ 成立，因此也能得到A3所要求的 $\alpha \equiv \frac{d^2k}{m}$ 界。

3 数值模型的收敛

上述框架依赖于对(6)中涉及的 $\vec{B}^{kl}_{ij}$ 和 $\vec{b}^k_i$ 因子的精确计算。实际上，这些因子的精确计算并不现实，因此需要开发一种数值可行模型，使其能够获得类似于第2节中定理 2.7 的收敛结果。为此，我们现在给出解析离散化各组成部分的显式公式，并希望对其应用一点求积。为了能够使用一点求积，我们必须将双线性型中的积分重写为消失区域上的积分之和，如 $\kappa \to 0$所示。

右端项无需进一步处理，因为它由下式给出

$$\vec{b}^k_i = \int_{\Omega_i} e_k^\top b(x)\ \mathbf{d}x.$$

因此，为了处理式（6）中的 $\vec{B}^{kl}_{ij}$ 项，首先将式（2）中 B的定义展开，可得

$$\begin{aligned} B(u,v) = &\int_\Omega \left(k(x) - \frac{\alpha(x)m(x)}{d^2}\right) \int_\Omega (u(x') - u(x))^\top \left(\frac{x'-x}{\|x'-x\|^2}\right) \overline{\omega}(x,x')\ \mathbf{d}x' \\ &\times \int_\Omega (v(x') - v(x))^\top \left(\frac{x'-x}{\|x'-x\|^2}\right) \overline{\omega}(x,x')\ \mathbf{d}x'\ \mathbf{d}x \\ &+ \int_\Omega \alpha(x) \int_\Omega \omega(x'-x)\|x'-x\|^2 (u(x') - u(x))^\top \left(\frac{x'-x}{\|x'-x\|^2}\right) \\ &\times (v(x') - v(x))^\top \left(\frac{x'-x}{\|x'-x\|^2}\right)\ \mathbf{d}x'\ \mathbf{d}x. \end{aligned} \tag{12}$$

接下来定义

$$\tau(x) := \frac{k(x)d^2}{m(x)^2} - \frac{\alpha(x)}{m(x)},$$

由此可进一步将 (12) 改写为

$$\begin{aligned}
&B(u,v)\\
&= \int_\Omega \tau(x) \int_\Omega (u(x') - u(x))^\top (x'-x)\, \omega(x'-x)\, \mathbf{d}x'\\
&\qquad \times \int_\Omega (v(x') - v(x))^\top (x'-x)\, \omega(x'-x)\, \mathbf{d}x'\, \mathbf{d}x\\
&\quad + \int_\Omega \alpha(x) \int_\Omega \frac{\omega(x'-x)}{\|x'-x\|^2} (u(x') - u(x))^\top (x'-x)\, (v(x') - v(x))^\top (x'-x)\ \mathbf{d}x'\, \mathbf{d}x.
\end{aligned}$$

然后，将 $u = \chi_{\Omega_i} e_k$ 和 $v = \chi_{\Omega_j} e_l$ 代入可得

$$\begin{aligned}
\vec{B}_{ij}^{kl} = &\int_\Omega \tau(x) \int_\Omega (\chi_{\Omega_i}(x') - \chi_{\Omega_i}(x)) e_k^\top (x'-x)\, \omega(x'-x)\, \mathbf{d}x'\\
&\qquad \times \int_\Omega (\chi_{\Omega_j}(x') - \chi_{\Omega_j}(x)) e_l^\top (x'-x)\, \omega(x'-x)\, \mathbf{d}x'\, \mathbf{d}x\\
&\quad + \int_\Omega \alpha(x) \int_\Omega \frac{\omega(x'-x)}{\|x'-x\|^2} (\chi_{\Omega_i}(x') - \chi_{\Omega_i}(x)) e_k^\top (x'-x)\\
&\qquad \times (\chi_{\Omega_j}(x') - \chi_{\Omega_j}(x)) e_l^\top (x'-x)\ \mathbf{d}x'\, \mathbf{d}x,
\end{aligned}$$

对于 $i \neq j$，我们得到

$$\begin{aligned}
&= \int_{\Omega_i} \tau(x) \int_{\Omega\setminus\Omega_i} -e_k^\top (x'-x)\, \omega(x'-x)\, \mathbf{d}x' \int_{\Omega_j} e_l^\top (x'-x)\, \omega(x'-x)\, \mathbf{d}x'\, \mathbf{d}x\\
&\quad + \int_{\Omega_j} \tau(x) \int_{\Omega_i} e_k^\top (x'-x)\, \omega(x'-x)\, \mathbf{d}x' \int_{\Omega\setminus\Omega_j} -e_l^\top (x'-x)\, \omega(x'-x)\, \mathbf{d}x'\, \mathbf{d}x\\
&\quad + \int_{\Omega\setminus(\Omega_j\cup\Omega_i)} \tau(x) \int_{\Omega_i} e_k^\top (x'-x)\, \omega(x'-x)\, \mathbf{d}x' \int_{\Omega_j} e_l^\top (x'-x)\, \omega(x'-x)\, \mathbf{d}x'\, \mathbf{d}x\\
&\quad - \int_{\Omega_i} \int_{\Omega_j} (\alpha(x) + \alpha(x')) \frac{\omega(x'-x)}{\|x'-x\|^2} e_k^\top (x'-x)\, e_l^\top (x'-x)\ \mathbf{d}x'\, \mathbf{d}x
\end{aligned}$$

对于 $i = j$，我们有

$$\begin{aligned}
&= \int_{\Omega_i} \tau(x) \int_{\Omega\setminus\Omega_i} e_k^\top (x'-x)\, \omega(x'-x)\, \mathbf{d}x' \int_{\Omega\setminus\Omega_i} e_l^\top (x'-x)\, \omega(x'-x)\, \mathbf{d}x'\, \mathbf{d}x\\
&\quad + \int_{\Omega\setminus\Omega_i} \tau(x) \int_{\Omega_i} e_k^\top (x'-x)\, \omega(x'-x)\, \mathbf{d}x' \int_{\Omega_i} e_l^\top (x'-x)\, \omega(x'-x)\, \mathbf{d}x'\, \mathbf{d}x\\
&\quad + \int_{\Omega_i} \int_{\Omega\setminus\Omega_i} (\alpha(x) + \alpha(x')) \frac{\omega(x'-x)}{\|x'-x\|^2} e_k^\top (x'-x)\, e_l^\top (x'-x)\ \mathbf{d}x'\, \mathbf{d}x.
\end{aligned} \tag{13}$$

总结这一形式，并将 $\Omega\setminus\Omega_i$ 或 $\Omega\setminus(\Omega_i \cup \Omega j)$ 上的积分重写为构成积分区域的所有相关 Ω_k 上的积分之和后，只需计算以下积分： $i, j, m \in I^\kappa, 1 \le k, l \le d$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}^2_{ijm;kl} &:= \int_{\Omega_i} \tau(x) \int_{\Omega_j} e_k^\top (x'-x)\, \omega(x'-x)\, \mathbf{d}x' \int_{\Omega_m} e_l^\top (x'-x)\, \omega(x'-x)\, \mathbf{d}x'\, \mathbf{d}x\\
\mathcal{I}^1_{ij;kl} &:= \int_{\Omega_i} \int_{\Omega_j} (\alpha(x) + \alpha(x')) \frac{\omega(x'-x)}{\|x'-x\|^2} e_k^\top (x'-x)\, e_l^\top (x'-x)\ \mathbf{d}x'\, \mathbf{d}x.
\end{aligned} \tag{14}$$

仅使用这些积分，双线性型可表示为

$$\vec{B}_{ij}^{kl} = \begin{cases} \sum_{m\notin\{i,j\}} \mathcal{I}^2_{mij;kl} - \sum_{m\neq i} \mathcal{I}^2_{imj;kl} - \sum_{m\neq j} \mathcal{I}^2_{jim;kl} - \mathcal{I}^1_{ij;kl} & \text{for } i \neq j \\ \sum_{n\neq i}\sum_{m\neq i} \mathcal{I}^2_{inm;kl} + \sum_{m\neq i} \mathcal{I}^2_{mii;kl} + \sum_{m\neq i} \mathcal{I}^1_{im;kl} & \text{for } i = j. \end{cases} \tag{15}$$

本章将研究上述模型的数值版本，并假设$\omega(\zeta) = \rho(\zeta)\chi_{[0,\delta)}(\mathrm{k}\zeta\mathrm{k})$，其中 $\rho(\zeta) = \frac{1}{\|\zeta\|}$ 对所有 $\zeta \in \mathrm{R}^d$ 均成立，且 $\delta > 0$为某个固定值。该数值版本通过对（14）中的积分应用单点求积公式，再利用（15）得到数值双线性型 B^{num}。这种离散近场动力学方程的方法并非新方法，最初由 [27]针对键基模型提出；在将其规范地扩展到态基模型后，这里只是将其纳入常用的变分框架。需要注意的是， [27] 仅从数学上证明了一维模型以及材料参数和位移均为二次连续可微时的收敛性。

为保证数值模型与连续模型之间，以及连续近场动力学模型与经典理论之间的一致性，我们将用 $^{l}_{(x)\ m(x)}$ 替换 $\alpha(x)$，其中函数 $l : \Omega \to \mathrm{R}$。

首先，我们将式 (14) 中的积分写成矩阵形式 $\mathrm{I}^1_{ijm} := (\mathrm{I}^1_{ijm;kl})_{1\leq k,\ l\leq d}$ 以简化记号。随后，我们应用单点求积公式，使用记号$V_i := \mathrm{vol}(\Omega_i)$，得到

$$\begin{aligned} \mathcal{I}^{2,\mathrm{num}}_{ijm} &:= V_i V_j V_m \tau^{\mathrm{num}}(x_i)\rho(x_j - x_i)\rho(x_m - x_i)\,(x_j - x_i)\,(x_m - x_i)^\top w_{ij} w_{im}, \\ \mathcal{I}^{1,\mathrm{num}}_{ij} &:= V_i V_j \rho(x_j - x_i)(\alpha^{\mathrm{num}}(x_i) + \alpha^{\mathrm{num}}(x_j))\frac{(x_j - x_i)\,(x_j - x_i)^\top}{\|x_j - x_i\|\|x_j - x_i\|} w_{ij}, \end{aligned} \tag{16}$$

其中，对于 $x \in \Omega_i$,

$$\tau^{\mathrm{num}}(x) := \frac{k(x_i)d^2 - l(x_i)}{m^{\mathrm{num}}(x_i)^2},\ \alpha^{\mathrm{num}}(x) = \frac{l(x_i)}{m^{\mathrm{num}}(x_i)},\ m^{\mathrm{num}}(x) := \sum_j w_{ij} V_j \rho(x_j - x_i)\|x_j - x_i\|^2.$$

现在，w_{ij} 项取代了 $\chi_{[0,\delta)}(\mathrm{k}x_i - x_j\mathrm{k})$ 项，从而可以使用部分面积算法，以获得更好的收敛行为（关于部分面积/体积权重和收敛行为的深入分析，见 [20] ）。稍后在假设 3.3 中将对这些项提出要求，以证明这种替换的合理性。

由于我们选择在 B_i的中点 x_i 处计算 l、 k 和 b ，因此需要将输入数据适当地扩展到 Ω 之外，因为这些 x_i 不一定位于 Ω 内。然而，将输入数据扩展为常数（例如 0）与我们对输入数据的正则性要求相容；这些要求将在后文的假设 3.3 中给出。

注 3.1 为简要展示引入这些权重的优势，我们比较了采用两组权重时，简单二维杆问题在拉伸载荷下解的收敛情况

$$w_{ij}^{\mathrm{FA}} := \chi_{[0,\delta)}(\|x_j - x_i\|) \text{ and } w_{ij}^{\mathrm{PAAC}} := \mathrm{vol}(\Omega_j \cap B_\delta(x_i))/V_j. \tag{17}$$

FA 权重对应于在离散项 (16) 中保留特征函数而不使用权重。PAAC 项对应于使用视界与离散单元 Ω{v1}的交集的精确面积。

w_{ij}^{FA}权重的公式，以及采用更广泛的权重进行收敛性比较的详细内容，可见 [20]。此外，其中还包含一些通过额外选择合适的求积点来进一步提高收敛性的方案。为使分析简洁，本文未予考虑。关于 $d = 3$情形下部分体积权的精确选取方法，可见 [19]。在比较中，我们计算了离散问题的解 u_κ 与通过使用相对较小的 κ^*计算得到的参考解 u^* 之间的范数 $\mathbf{k}u_\kappa - u^*\mathbf{k}_{L^2(\Omega)^d}$。第一个问题定义如下：

$$k \equiv 100, l \equiv 800, \tag{18}$$

以及 $\delta = \frac{1}{20}$、 $\nu \equiv 0$、$\Omega = [0,2]\times[0,1]$、 $\Theta = [0,2\delta]\times[0,1]$ 和 $b \equiv (100,\ 0)^T \chi_{[2-2\delta,2]\times[0,1]}$。该模型描述了一根短杆，右端受到拉力，左端固定不动。 κ_n被选为 $\kappa_n = (40+20n)^{-1}$，适用于 $n \in \{0,\ .....7\}$，而 u^* 则使用 $\kappa^* = 360^{-1}$和 PAAC 权重获得。

图 1 还展示了针对第二个包含不连续输入数据的问题的另一项比较。除以下内容外，其数据相同：

$$k(x) = \begin{cases} 0.01 & x \in B_{0.3}\left((1,0.5)^\top\right) \\ 100 & \text{else.} \end{cases}, l(x) = \begin{cases} 0.08 & x \in B_{0.3}\left((1,0.5)^\top\right) \\ 800 & \text{else.} \end{cases} \tag{19}$$

如图 1 所示，采用这些权重的模型，即 $w_i^{\mathrm{PAAC}} j$ 权重模型，表现出更加一致的收敛行为。关于图中 ω^{FA} 权重模型所呈现的振荡行为的更详细描述，请参阅 [20]。

注记3.2 如注记2.8所述，若要在连续层面上从态基模型得到键基模型，必须令 $\alpha(x) := {}^{d^2 k}{}_{(x)\ m(x)}$。如果使用 $\alpha(x_i)$而非 $\alpha^{\mathrm{num}}(x_i)$来计算上述数值积分，那~~么这~~样做就要求在所有点 x_i 上精确计算 m。另一个重要缺点是，如果使用了

$$\tau^{\mathrm{num}}(x_i) = \frac{k(x_i)d^2}{m^{\mathrm{num}}(x_i)^2} - \frac{\alpha(x_i)}{m^{\mathrm{num}}(x_i)}$$

，则无法得到0；一般而言， $m(x_i) \neq m^{\mathrm{num}}(x_i)$。这意味着离散化的键基模型将包含态基项。

然而，若作代换 $\alpha(x) = {}^{l}{}_{(x)\ m(x)}$， $m(x)$也会得到数值近似。因此，采用 $l(x) = d^2 k(x)$ 时，键基连续模型的离散化与通常的键基模型离散化相同，也就是说，所有态基项都消失了。这意味着，以下结果同样适用于键基模型，无需另作说明。此外，由于 $\alpha = {}^{c_d \mu}{}_{(x)\ m(x)}$ （参见第15节），其中常数c_d 取决于维数 d ，而 $\mu(x)$是经典理论中的剪切模量，因此，在离散近场动力学设定下，利用经典理论对材料建模也不需要精确计算 $m(x)$。

连续方程的右端项也可以通过数值方法近似为

$$\vec{b}_i^{k\,\mathrm{num}} = b(x_i)^\top e_k \tag{20}$$

定义向量 $\vec{b}_\kappa^{\mathrm{num}} \in (\mathbf{R}^d)^{|I^\kappa|}$的一种可能选择。

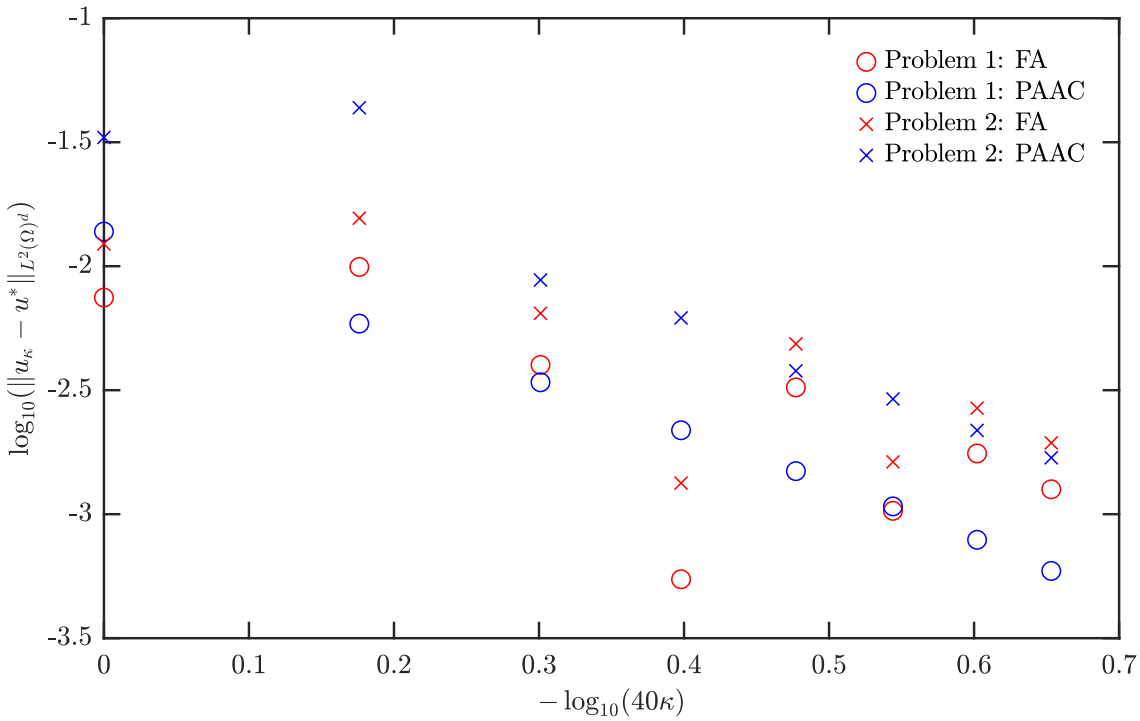

图 1：比较式 (17) 中给出的两种部分区域权重选择之间的收敛行为。对于由 (18) 和 (19) 定义的两个不同问题，分别针对两种部分区域权重选择（见 (17)），计算了态基模型在离散化逐渐细化时得到的解序列。 y轴表示解 $\mathbf{u}_\kappa$ 与使用 PAAC 权重在 $\kappa = 360^{-1}$ 处计算得到的参考解u^* 之差的 $L^2(\Omega)^d$ 范数的对数。 x轴选择为关于 κ的对数尺度，并进行了平移，使得 $\kappa_0 = 40^{-1}$ 出现在 0 处。第一个问题的数据以圆点绘制，而叉号对应第二个问题。蓝色标记对应使用 w_{ij}^{PAAC}权重得到的解，红色标记对应使用 w_{ij}^{FA}权重得到的解。

任何此类选择都会导出最终的离散问题

$$\text{Find } \vec{u}_\kappa \in \vec{\mathcal{V}}_\kappa \text{ such that } \forall \vec{v} \in \vec{\mathcal{V}}_\kappa : \vec{u}_\kappa^\top \vec{B}^{\mathrm{num}} \vec{v} = M \vec{b}_\kappa^{\mathrm{num}\top} \vec{v}, \tag{21}$$

其中矩阵 $M \in (\mathbb{R}^{d\times d})^{|I^\kappa|\times|I^\kappa|}$ 由 $M_{ii} = \mathrm{diag}(V_i,\ldots,V_i)$ 给出，其他位置为 0 e.

要解这个系统，可以注意到它也可以化简为

$$\text{Find } \tilde{u}_\kappa \in \mathbb{R}^{d|J^\kappa|} \text{ s.t. } \tilde{B}^{\mathrm{num}} \tilde{u}_\kappa = \tilde{b}^{\mathrm{num}} \tag{22}$$

与（8）一样，这样做不会改变其相较于（21）的适定性或解空间。请注意，在不需要时，记号中省略了 $\tilde{B}^{\mathrm{num}}$， $\vec{B}^{\mathrm{num}}$ 和 $\tilde{b}^{\mathrm{num}}$ 对 κ 的依赖关系。

矩阵 $\vec{B}^{\mathrm{num}}$ 被解释为一个 $(\mathbb{R}^{d\times d})^{|I^\kappa|\times|I^\kappa|}$ 矩阵，其定义方式与 (15)

by

$$\vec{B}_{ij}^{\mathrm{num}} = \begin{cases} \sum_{m\notin\{i,j\}} \mathcal{I}_{mij}^{2,\mathrm{num}} - \sum_{m\neq i} \mathcal{I}_{imj}^{2,\mathrm{num}} - \sum_{m\neq j} \mathcal{I}_{jim}^{2,\mathrm{num}} - \mathcal{I}_{ij}^{1,\mathrm{num}} & \text{for } i\neq j \\ \sum_{n\neq i}\sum_{m\neq i} \mathcal{I}_{inm}^{2,\mathrm{num}} + \sum_{m\neq i} \mathcal{I}_{mii}^{2,\mathrm{num}} + \sum_{m\neq i} \mathcal{I}_{im}^{1,\mathrm{num}} & \text{for } i=j. \end{cases} \tag{23}$$

本章旨在证明，通过 $\mathcal{K}_\kappa$嵌入到 $L^2(\Omega)^d$ 中的 (21) 的解 $\vec{u}_\kappa^{\mathrm{num}} \in \mathbb{R}^{d|I^\kappa|}$，将收敛到 (1) 的连续解 u，也就是说，

$$\mathcal{K}_\kappa \vec{u}_\kappa^{\mathrm{num}} \xrightarrow[L^2(\Omega)^d]{\kappa\searrow 0} u.$$

为此，我们需要对输入数据作出假设，具体如下。

3.1 收敛证明

为证明数值收敛性，我们作出如下假设。

假设 3.3(数值离散模型假设) 我们假设 $\kappa < \frac{\delta}{\sqrt{d}}$ 并且进一步有，

A1 权函数的选取：我们令 $\forall \zeta \in \mathbb{R}^d$：$\omega(\zeta) = \rho(\zeta)\chi_{[0,\delta)}(|\zeta|)$，其中 $\delta > 0$ 以及 $\rho(z) = \frac{1}{\|z\|}$。

A2 材料参数的正则性：l，k：$\Omega \to \mathbb{R}$ 几乎处处局部 L，K-Lipschitz 连续，其中 L，$K > 0$ 分别为，并且 $0 < l_0 \leqq l \leqq l_1$ 以及 $0 < k_0 \leqq k \leqq k_1$，其中常数 $0 < l_0$，l_1，k_0，$k_1 \in \mathbb{R}$。

A3 右端项的收敛：数值右端项$\vec{b}_\kappa^{\mathrm{num}} \in \mathbb{R}^{d|I|^\kappa}$ 的选取必须满足

$$\|b - \mathcal{K}_\kappa \vec{b}_\kappa^{\mathrm{num}}\|_{L^2(\Omega)^d} \to 0.$$

A4 部分区域权重的限制：这些w_{ij} 项对所有 $i,j \in I^\kappa$ 均满足以下要求。

(a) 如果 $|x_i - x_j| \geq \delta + \sqrt{d}\frac{\kappa}{2}$，则 $w_{ij} = 0$。(b) 如果 $|x_i - x_j| \leq \delta - \sqrt{d}\frac{\kappa}{2}$，则 $w_{ij} = 1$。(c) $0 \leq w_{ij} \leq 1$。(d) $w_{ij} = w_{ji}$。

A5 区域的正则性：Ω 是一个有界且连通的 Lipschitz区域，特别是，它满足某个角度为 $\theta > 0$、半径为 $h > 0$ 的内部锥条件。

A6 狄利克雷边界条件的正则性：Θ 是开集，非空，且 $\mathrm{vol}(\partial\Theta) = 0$。

关于几乎处处局部 L-Lipschitz 连续性的假设，其核心思想是允许函数在零测集上出现有界跳跃（即不连续性），同时在其他所有地方对函数保持足够的控制，且该控制关于 x 是一致的。除了材料参数外，这一条件也可应用于外部体力 b。这一点

将在推论 3.6 中得到证明：选择 b 在几乎处处局部满足 L-Lipschitz 连续性，足以使 $\vec{b}_\kappa^{\,\mathrm{num}} := (b(x_i))_{i\in I^\kappa}$ 满足上述假设。

我们首先给出以下基本引理。该引理允许将在不与函数表现不良的集合相交的凸集上成立的局部 Lipschitz 连续性扩展为全局 Lipschitz 连续性。

引理 3.4(几乎处处局部 L-*Lipschitz* 连续性的全局化)
设 $f:\Omega\to\mathrm{R}^n$ 是一个有界、几乎处处局部 F-Lipschitz 连续的函数，且满足 $F>0$，并且

$$\mathrm{LFS}^F(f) := \{x\in\Omega : f \text{ fails to be locally } F\text{-Lipschitz in } x\}.$$

那么，对于所有满足 $B\cap\mathrm{LFS}^F(f)=\varnothing$ 的凸集 $B\subset\Omega$，我们都有 $f_{|B}\in C^{0,1}(B)^n$，且具有相同的 Lipschitz 常数 F。

证明。 根据假设，对于任意 $x,x'\in B$，x 与 x' 之间的线段都包含于 B 中。由于该线段也是紧集，因此可以用有限个邻域覆盖，并且在这些邻域上 f 是 F-Lipschitz 的。适当地细分 x 与 x' 之间的线段，并在每个子线段上应用 F-Lipschitz 界，然后将这些界相加，即可得到所述结论。 □

下一个命题给出了这些函数的一个收敛结果。

命题 3.5 (中点近似的收敛性) 设 $u:\Omega\to\mathrm{R}^d$ 是有界且几乎处处局部 L-Lipschitz 连续的函数，则

$$\|\operatorname{num}_\kappa(u)-u\|_{L^2(\Omega)^d}\xrightarrow{\kappa\searrow 0}0,$$

with

$$L^2(\Omega)^d\ni\operatorname{num}_\kappa(u) := \sum_{i\in I^\kappa}\chi_{\Omega_i}u(x_i).$$

证明。 我们首先将 I^κ 分成以下两个集合，

$$\hat{I} := \{i\in I^\kappa : \overline{B_i}\cap(\partial\Omega\cup\mathrm{LFS}^L(u))\neq\varnothing\},\quad \hat{I}I := I^\kappa\backslash\hat{I}.$$

于是，记 $\|\cdot\|_\infty$ 为上确界范数，有

$$\begin{aligned}
\|\operatorname{num}_\kappa(u)-u\|^2_{L^2(\Omega)^d} &= \sum_{i\in I^\kappa}\int_{\Omega_i}\|u(x)-u(x_i)\|^2\,\mathbf{d}x\\
&= \sum_{i\in\hat{I}}\int_{\Omega_i}\|u(x)-u(x_i)\|^2\,\mathbf{d}x + \sum_{i\in\hat{I}I}\int_{\Omega_i}\|u(x)-u(x_i)\|^2\,\mathbf{d}x\\
&\le 4\|u\|^2_\infty\operatorname{vol}\left(\bigcup_{i\in\hat{I}}B_i\right) + \sum_{i\in\hat{I}I}\int_{\Omega_i}\|u(x)-u(x_i)\|^2\,\mathbf{d}x.
\end{aligned}$$

现在应用命题 2.5 可得

$$\operatorname{vol}\left(\bigcup_{i\in\hat{I}}B_i\right) = \operatorname{vol}\left(\bigcup_{i:\overline{B_i}\cap S\neq\varnothing}B_i\right)\xrightarrow{\kappa\searrow 0}0,$$

因为按定义， $S := (\partial\Omega \cup \mathrm{LFS}^L(u))$ 是一个紧零集。

ˆ此外， $i \in II$ 意味着，由于 $\Omega_i = B_i$ 是道路连通的且 Ω 是开集，因此可以运用连通性论证来证明

$$\Omega_i \neq B_i \Longrightarrow \varnothing \neq \overline{B_i} \cap \partial\Omega \subset \overline{B_i} \cap (\partial\Omega \cup \mathrm{LFS}^L(u)) \Longrightarrow i \notin \hat{I}I.$$

根据引理 3.4，由于 $\overline{B_i} \cap \mathrm{LFS}^L(u) = \varnothing$，可知 u 在 $\Omega_i = B_i$ 上必为 L-Lipschitz 连续，最终得到

$$\sum_{i \in \hat{I}I} \int_{\Omega_i} \|u(x) - u(x_i)\|^2 \, \mathbf{d}x \leq L^2 \, \mathrm{vol}(\Omega) d\kappa^2 \xrightarrow{\kappa \searrow 0} 0,$$

证明至此完成。 □

推论 3.6 (假设 *A3* 的充分条件) 命题 3.5 表明，若 b 有界且几乎处处局部为 L-Lipschitz，则按 (20) 中定义的 ¯选择 $b_\kappa^{\mathrm{num}} =: (b(x_i))_{i \in I^\kappa}$ 满足假设 3.3 中的 A3，其中 $L > 0$。□

注 3.7 请注意，注 3.1 中使用的两种权重选择均满足假设 3.3 中的要求 A4。事实上，A4 通过约束 (a) 和 (b) 所要求的，仅仅是：对于由于 x_j 到 x_i 的距离而完全位于 x_i 邻域外部或内部的几何元素，必须赋予精确权重；我们在引理 3.13 中正是采用了这一点。许多实际使用的权重都满足这些条件，因为计算权重的算法本就包含对距离 $\mathrm{k}x_j - x_i\mathrm{k}$ 的检验，或者该检验在其他情况下也可行。例如，除了注 3.1 中的权重以及 [19]，中建议的权重外， [20] 中概述的 PD-LAMMPS 算法也满足这些假设。然而，对于基于蒙特卡洛积分、旨在高效近似精确权重的 [17] 中提到的权重而言，此处提出的假设过于严格。对于 [30]，中构造的权重，这些假设也过于严格；该方法旨在通过一个最小二乘问题，在精确再现给定子空间的约束下，求得渐近一致的求积公式。这是因为后两种选择无法保证权重 w_{ij} 满足 A4 的条件 (b)。

证明该数值模型收敛的后续步骤安排如下。我们将首先把数值双线性型改写为两种等价形式，以证明所诱导线性算子的逐点收敛以及强制性。这些改写较为冗长，但本质上与连续情形并无不同（见[18], 引理 5、命题 1 的证明）。我们从算子形式 $\mathrm{L}_\kappa^{\mathrm{num}}$ 开始，其动机来自连续情形中的对应形式

$$B(u,v) = \langle u, -\mathcal{L}v \rangle_{L^2(\Omega)^d} \longrightarrow \vec{u}\vec{B}^{\mathrm{num}}\vec{v} =: \langle \mathcal{K}_\kappa \vec{u}, -\mathcal{L}_\kappa^{\mathrm{num}} \mathcal{K}_\kappa \vec{v} \rangle_{L^2(\Omega)^d},$$

然后我们将使用势形式 W_κ^{num}，其动机来自

$$B(u,u) = 2 \int_\Omega W(u,x) \, \mathbf{d}x \longrightarrow \vec{u}\vec{B}^{\mathrm{num}}\vec{u} =: 2 \sum_i V_i W_\kappa^{\mathrm{num}}(\vec{u}, x_i).$$

接下来，第一步是证明，对于某个 $C > 0$,

$$\forall v \in L^2(\Omega)^d : \mathcal{L}_\kappa^{\mathrm{num}} v \xrightarrow[L^2(\Omega)^d]{\kappa \searrow 0} \mathcal{L}v, \quad \text{and } \|\mathcal{L}_\kappa^{\mathrm{num}}\| \leqq C \text{ independent of } \kappa, \tag{24}$$

这将在推论 3.18 中完成。第二步将证明，对于足够小的 $\kappa > 0$，且对所有 $\vec{u} \in \vec{\mathrm{V}}_\kappa$，

$$c^{\mathrm{num}} \|\mathcal{K}_\kappa \vec{u}\|^2_{L^2(\Omega)^d} \le 2 \sum_i V_i W_\kappa^{\mathrm{num}}(\vec{u}, x_i) \tag{25}$$

对于一个与 $0 < \kappa << 1$ 无关的 $c^{\mathrm{num}} > 0$。这一点将在推论 3.22 中证明。后一性质基于连续双线性形式强制性的证明（参见 [18], 命题 1 和命题 2）。这两个条件足以使我们现在证明收敛。

定理 3.8（数值离散的收敛性）设 $\vec{u}_\kappa^{\mathrm{num}}$为数值离散系统 (21) 的解，则在假设 3.3 以及条件 (24) 和 (25) 下，

$$\mathcal{K}_\kappa \vec{u}_\kappa^{\mathrm{num}} \xrightarrow[L^2(\Omega)^d]{\kappa \searrow 0} u.$$

证明。 取足够小的 $\kappa > 0$，使得 (25) 成立，同时

$$\|\mathcal{K}_\kappa \vec{b}_\kappa^{\mathrm{num}} - b\|_{L^2(\Omega)^d} \le \tfrac{1}{2}\|b\|$$

这得益于假设 3.3 中 A3 所假定的 $\mathrm{K}_\kappa \vec{b}_\kappa^{\mathrm{num}} \to b$。然后，利用 (25) 以及 $\vec{u}_\kappa^{\mathrm{num}}$ 是 (21) 的解这一事实，

$$\begin{aligned} c^{\mathrm{num}} \|\mathcal{K}_\kappa \vec{u}_\kappa^{\mathrm{num}}\|^2_{L^2(\Omega)^d} &\le 2 \sum_i V_i W_\kappa^{\mathrm{num}}(\vec{u}_\kappa^{\mathrm{num}}, x_i) = \vec{u}_\kappa^{\mathrm{num}\top} \vec{B}^{\mathrm{num}} \vec{u}_\kappa^{\mathrm{num}} \\ &= M \vec{b}_\kappa^{\mathrm{num}\top} \vec{u}_\kappa^{\mathrm{num}} = \langle \mathcal{K}_\kappa \vec{b}_\kappa^{\mathrm{num}}, \mathcal{K}_\kappa \vec{u}_\kappa^{\mathrm{num}} \rangle_{L^2(\Omega)^d} \\ &\le \|\mathcal{K}_\kappa \vec{b}_\kappa^{\mathrm{num}}\|_{L^2(\Omega)^d} \|\mathcal{K}_\kappa \vec{u}_\kappa^{\mathrm{num}}\|_{L^2(\Omega)^d} \\ &\le 1.5 \|b\|_{L^2(\Omega)^d} \|\mathcal{K}_\kappa \vec{u}_\kappa^{\mathrm{num}}\|_{L^2(\Omega)^d}, \end{aligned}$$

这意味着序列 $\mathrm{K}_\kappa \vec{u}_\kappa^{\mathrm{num}}$ 在 $L^2(\Omega)^d$ 中一致有界。应用巴拿赫–阿劳格鲁定理，可得一个子序列（为方便起见仍记作原序列）以及一个弱极限 $u' \in L^2(\Omega)^d$。由于 V 的弱闭性，该弱极限必属于 V。

现在我们将证明 $u' = u$。令 $v \in \mathrm{V}$。根据命题 2.6，存在 $\vec{v}_\kappa \in \vec{\mathrm{V}}_\kappa$，使得 $\mathrm{K}_\kappa \vec{v}_\kappa \to v$ 属于 $L^2(\Omega)^d$，于是，

$$M \vec{b}_\kappa^{\mathrm{num}\top} \vec{v}_\kappa = \langle \mathcal{K}_\kappa \vec{b}_\kappa^{\mathrm{num}}, \mathcal{K}_\kappa \vec{v}_\kappa \rangle_{L^2(\Omega)^d} \xrightarrow{\kappa \searrow 0} \langle b, v \rangle_{L^2(\Omega)^d},$$

并且，根据（24），

$$M \vec{b}_\kappa^{\mathrm{num}\top} \vec{v}_\kappa = \vec{u}_\kappa^{\mathrm{num}\top} \vec{B}^{\mathrm{num}} \vec{v}_\kappa = \langle \mathcal{K}_\kappa \vec{u}_\kappa^{\mathrm{num}}, -\mathcal{L}_\kappa^{\mathrm{num}} \mathcal{K}_\kappa \vec{v}_\kappa \rangle_{L^2(\Omega)^d}.$$

此外，再次利用（24），

$$\|\mathcal{L}_\kappa^{\mathrm{num}} \mathcal{K}_\kappa \vec{v}_\kappa - \mathcal{L} v\|_{L^2(\Omega)^d} \le \|(\mathcal{L}_\kappa^{\mathrm{num}} - \mathcal{L}) v\|_{L^2(\Omega)^d} + \|\mathcal{L}_\kappa^{\mathrm{num}}\| \|v - \mathcal{K}_\kappa \vec{v}_\kappa\|_{L^2(\Omega)^d} \xrightarrow{\kappa \searrow 0} 0$$

导致

$$\langle \mathcal{K}_\kappa \vec{u}_\kappa^{\mathrm{num}\top}, -\mathcal{L}_\kappa^{\mathrm{num}} \mathcal{K}_\kappa \vec{v}_\kappa \rangle_{L^2(\Omega)^d} \xrightarrow{\kappa \searrow 0} \langle u', -\mathcal{L} v \rangle_{L^2(\Omega)^d}.$$

总之，

$$\langle u', -\mathcal{L}v\rangle_{L^2(\Omega)^d} = \langle b, v\rangle_{L^2(\Omega)^d}$$

对所有 $v \in \mathrm{V}$，因而 $u' = u$。此外， u 的唯一性意味着整个序列 $\mathrm{K}_\kappa \vec{u}_\kappa^{\mathrm{num}}$弱收敛于 u。

现在证明序列 $\mathrm{K}_\kappa \vec{u}_\kappa^{\mathrm{num}}$也关于 $L^2(\Omega)^d$ 范数强收敛于 u。令 $\vec{s}_\kappa \in \vec{\mathrm{V}}_\kappa$，使得 $\mathrm{K}_\kappa \vec{s}_\kappa \to u$ 属于 $L^2(\Omega)^d$，其构造与命题 2.6 中的相同。于是有不等式

$$\|\mathcal{K}_\kappa \vec{u}_\kappa^{\mathrm{num}} - u\|_{L^2(\Omega)^d} \le \|\mathcal{K}_\kappa(\vec{u}_\kappa^{\mathrm{num}} - \vec{s}_\kappa)\|_{L^2(\Omega)^d} + \|\mathcal{K}_\kappa \vec{s}_\kappa - u\|_{L^2(\Omega)^d},$$

其中我们知道第二项趋于零。接下来考察第一项，当 $\kappa > 0$足够小时，利用 (25) 可得，

$$\begin{aligned} c^{\mathrm{num}}\|\mathcal{K}_\kappa(\vec{u}_\kappa^{\mathrm{num}} - \vec{s}_\kappa)\|^2_{L^2(\Omega)^d} &\le (\vec{u}_\kappa^{\mathrm{num}} - \vec{s}_\kappa)^\top \vec{B}^{\mathrm{num}}(\vec{u}_\kappa^{\mathrm{num}} - \vec{s}_\kappa) \\ &\le (\vec{u}_\kappa^{\mathrm{num}})^\top \vec{B}^{\mathrm{num}}(\vec{u}_\kappa^{\mathrm{num}} - \vec{s}_\kappa) + \vec{s}_\kappa^\top \vec{B}^{\mathrm{num}} \vec{s}_\kappa - \vec{s}_\kappa^\top \vec{B}^{\mathrm{num}} \vec{u}_\kappa^{\mathrm{num}} \\ &= M\vec{b}_\kappa^{\mathrm{num}\top}(\vec{u}_\kappa^{\mathrm{num}} - \vec{s}_\kappa) + \vec{s}_\kappa^\top \vec{B}^{\mathrm{num}} \vec{s}_\kappa - M\vec{b}_\kappa^{\mathrm{num}\top} \vec{s}_\kappa. \end{aligned}$$

最后一行中，我们利用了 $\vec{u}_\kappa^{\mathrm{num}}$满足 (21) 这一点。

注意，$\mathrm{K}_\kappa \vec{s}_\kappa \to u$、$\mathrm{K}_\kappa \vec{u}_\kappa^{\mathrm{num}} \rightharpoonup u$ 和 $\mathrm{K}_\kappa \quad \vec{b}_\kappa^{\mathrm{num}} \to b$，从而得到

$$M\vec{b}_\kappa^{\mathrm{num}\top}(\vec{u}_\kappa^{\mathrm{num}} - \vec{s}_\kappa) = \langle \mathcal{K}_\kappa \vec{b}_\kappa^{\mathrm{num}}, \mathcal{K}_\kappa(\vec{u}_\kappa^{\mathrm{num}} - \vec{s}_\kappa)\rangle_{L^2(\Omega)^d} \xrightarrow{\kappa \searrow 0} 0,$$

以及

$$M\vec{b}_\kappa^{\mathrm{num}\top} \vec{s}_\kappa = \langle \mathcal{K}_\kappa \vec{b}_\kappa^{\mathrm{num}}, \vec{s}_\kappa\rangle_{L^2(\Omega)^d} \xrightarrow{\kappa \searrow 0} \langle b, u\rangle_{L^2(\Omega)^d}.$$

因此，剩下需要证明的是

$$\vec{s}_\kappa^\top \vec{B}^{\mathrm{num}} \vec{s}_\kappa \to \langle b, u\rangle_{L^2(\Omega)^d} = B(u,u).$$

首先，我们看到

$$\begin{aligned} \vec{s}_\kappa^\top \vec{B}^{\mathrm{num}} \vec{s}_\kappa &= \langle \mathcal{K}_\kappa \vec{s}_\kappa, -\mathcal{L}_\kappa^{\mathrm{num}} \mathcal{K}_\kappa \vec{s}_\kappa\rangle_{L^2(\Omega)^d} \\ &= \langle \mathcal{K}_\kappa \vec{s}_\kappa, -\mathcal{L}_\kappa^{\mathrm{num}} u\rangle_{L^2(\Omega)^d} + \langle \mathcal{K}_\kappa \vec{s}_\kappa, -\mathcal{L}_\kappa^{\mathrm{num}}(u - \mathcal{K}_\kappa \vec{s}_\kappa)\rangle_{L^2(\Omega)^d}. \end{aligned}$$

注意，由于 (24)，存在一个 $C > 0$，使得 $\mathrm{kL}_\kappa^{\mathrm{num}}\mathrm{k} \le C$，从而得到

$$|\langle \mathcal{K}_\kappa \vec{s}_\kappa, -\mathcal{L}_\kappa^{\mathrm{num}}(u - \mathcal{K}_\kappa \vec{s}_\kappa)\rangle_{L^2(\Omega)^d}| \le C\|\mathcal{K}_\kappa \vec{s}_\kappa\|_{L^2(\Omega)^d}\|\mathcal{K}_\kappa \vec{s}_\kappa - u\|_{L^2(\Omega)^d} \xrightarrow{\kappa \searrow 0} 0.$$

这样，我们只需证明

$$\langle \mathcal{K}_\kappa \vec{s}_\kappa, -\mathcal{L}_\kappa^{\mathrm{num}} u\rangle_{L^2(\Omega)^d} \to B(u,u) = \langle u, -\mathcal{L}u\rangle_{L^2(\Omega)^d}.$$

由于 $\mathrm{K}_\kappa \vec{s}_\kappa$ 到 u 在 $L^2(\Omega)^d$ 中强收敛，这再次由 (24) 得出。 □

现在只剩下证明 (24) 和 (25) 了。我们从 (24) 开始。首先，连续算子可以作如下分解（见 [18], 引理 5），

$$
\begin{aligned}
&[\mathcal{L}u](x) := \int_\Omega \mathbf{C}(x',x)(u(x')-u(x))\ \mathbf{d}x' \\
&\mathbf{C}(x',x) := k_1(x',x)+k_2(x',x), \\
&k_1(x',x) := (\alpha(x)+\alpha(x'))\rho(x'-x)\frac{\chi_{[0,\delta)}(\|x'-x\|)}{\|x'-x\|^2}(x'-x)(x'-x)^\top, \\
&k_2(x',x) := \int_\Omega \tau(p)\chi_{[0,\delta)}(\|p-x\|)\chi_{[0,\delta)}(\|x'-p\|)\rho(x-p)\rho(p-x')(x-p)(p-x')^\top \\
&\qquad -\tau(x')\chi_{[0,\delta)}(\|x'-x\|)\chi_{[0,\delta)}(\|p-x'\|)\rho(x-x')\rho(x'-p)(x-x')(x'-p)^\top \\
&\qquad +\tau(x)\chi_{[0,\delta)}(\|p-x\|)\chi_{[0,\delta)}(\|x'-x\|)\rho(x-p)\rho(x-x')(x-p)(x-x')^\top\ \mathbf{d}p
\end{aligned}
\tag{26}
$$

现在，我们将 k_2 中的积分拆分为三项，分别对应被积函数中的各个加数，因此将 $k_2(x', x)$ 拆分为 $k_2^p(x', x)$、$k_2^{x'}(x', x)$ 和 $k_2^x(x', x)$。接着，我们将 L 中定义$\mathbf{C}$的求和处的积分拆分，从而将 L 拆分为四个算子，最终得到

$$
\begin{aligned}
[\mathcal{L}_1 u](x) &:= \int_\Omega k_1(x',x)(u(x')-u(x))\ \mathbf{d}x', \\
[\mathcal{L}_2^x u](x) &:= \int_\Omega k_2^x(x',x)(u(x')-u(x))\ \mathbf{d}x', \\
[\mathcal{L}_2^{x'} u](x) &:= \int_\Omega k_2^{x'}(x',x)(u(x')-u(x))\ \mathbf{d}x', \\
[\mathcal{L}_2^p u](x) &:= \int_\Omega k_2^p(x',x)(u(x')-u(x))\ \mathbf{d}x'.
\end{aligned}
$$

现在，我们将以类似的方式拆分数值算子，随后分别证明每个算子的收敛性和一致有界性。各算子的证明通常非常相似，因此省略了部分证明。

为简化符号，我们定义 $V_{(i)\,j} := V_j w_{ij}$。

引理 3.9 (数值线性算子的分裂) 算子 $\mathcal{L}_\kappa^{\mathrm{num}}$可拆分为

$$
\mathcal{L}_\kappa^{\mathrm{num}} = \mathcal{L}_1^{\mathrm{num}} + \mathcal{L}_2^{x,\mathrm{num}} + \mathcal{L}_2^{x',\mathrm{num}} + \mathcal{L}_2^{p,\mathrm{num}},
$$

其中，对于 $u \in L^2(\Omega)^d$ 和 $x \in \Omega_i$,

$$
[\mathcal{L}_1^{\mathrm{num}} u](x) := \frac{1}{V_i}\sum_{j\neq i}\left[V_i V_j^{(i)}\rho(x_j-x_i)(\alpha^{\mathrm{num}}(x_i)+\alpha^{\mathrm{num}}(x_j))\frac{(x_j-x_i)(x_j-x_i)^\top}{\|x_j-x_i\|\|x_j-x_i\|}([\mathcal{P}_\kappa u]_j-[\mathcal{P}_\kappa u]_i)\right]
$$

$$
\begin{aligned}
[\mathcal{L}_2^{x,\mathrm{num}} u](x) := \frac{1}{V_i}\sum_{\substack{j\neq i\\ m\neq i}}\Big[&V_i V_m^{(i)} V_j^{(i)}\tau^{\mathrm{num}}(x_i)\rho(x_m-x_i)\rho(x_j-x_i) \\
&\times (x_m-x_i)\,(x_j-x_i)^\top\,([\mathcal{P}_\kappa u]_j-[\mathcal{P}_\kappa u]_i)\Big]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[\mathcal{L}_2^{x',\mathrm{num}} u](x) := -\frac{1}{V_i}\sum_{\substack{j\neq i\\ m\neq j}}\Big[&V_j V_i^{(j)} V_m^{(j)}\tau^{\mathrm{num}}(x_j)\rho(x_i-x_j)\rho(x_m-x_j) \\
&\times (x_i-x_j)\,(x_j-x_m)^\top\,([\mathcal{P}_\kappa u]_j-[\mathcal{P}_\kappa u]_i)\Big]
\end{aligned}
$$

$$[\mathcal{L}_2^{p,\mathrm{num}}u](x) := \frac{1}{V_i}\sum_{\substack{j\neq i\\ m\notin\{i,j\}}}\Big[V_m V_i^{(m)} V_j^{(m)}\tau^{\mathrm{num}}(x_m)\rho(x_i-x_m)\rho(x_j-x_m) \times (x_i-x_m)\,(x_m-x_j)^\top\left([\mathcal{P}_\kappa u]_j-[\mathcal{P}_\kappa u]_i\right)\Big]. \tag{27}$$

证明。 见引理 A.2。 □

现在，我们将证明上述每个算子的收敛性和一致有界性。首先处理一致有界性。为此，我们需要以下关于调和级数的著名界，该界可由 Abel 部分求和公式得到（参见 [29], 第一章第 0 节，定理 0.3 和定理 0.8）。

引理 3.10 （调和级数的增长界）以下不等式对所有 $N \geq 1$ 均成立。

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} \leq \log N + 1.$$

□

利用这一结果，我们可以证明以下引理。

引理 3.11（数值权重函数积分的一致界）设 $R>0$，并定义 $R_\kappa := R + 2\sqrt{d}\kappa_\circ$ 那么存在一个仅依赖于 R 的常数 C_R，使得对所有 $\frac{\delta}{\sqrt{d}} > \kappa > 0$，均有

$$0 \leq \int_{B_{R_\kappa}(0)} \mathrm{step}^\kappa(x)\ \mathbf{d}x < C_R < \infty,$$

其中

$$\mathrm{step}^\kappa(x) := \begin{cases} 0 & x \in [-\frac{\kappa}{2},\frac{\kappa}{2})^d \\ \rho(x_i) & x \in B_i \subset B_{R_\kappa}(0) \\ 0 & \text{else.} \end{cases}$$

证明。 区域 $B_{R_\kappa}(0)$ 被划分为两个集合 A 和 B，定义如下

$$A := B_{R_\kappa}(0) \cap \bigcup_{i\in Z^\kappa} B_i,\ Z^\kappa := \{i \in I^\kappa : x_i \text{ has a zero coordinate}\},\ B := B_{R_\kappa}(0)\backslash A.$$

我们现在来证明

$$\int_A \mathrm{step}^\kappa(x)\ \mathbf{d}x \xrightarrow{\kappa\searrow 0} 0,$$
$$\int_B \mathrm{step}^\kappa(x)\ \mathbf{d}x \leq \int_{B_{R+2\delta}(0)} \frac{1}{\|x\|}\ \mathbf{d}x < \infty.$$

由于 $\mathrm{step}^\kappa(x)$ 具有分段常数的性质，可以将关于 A 的积分改写为求和。对于 $d=3$，可得

$$\begin{aligned}\int_A \mathrm{step}^\kappa(x)\ \mathbf{d}x &\le 6\kappa^3 \sum_{R_\kappa/\kappa\ge i\ge 1}\frac{1}{\kappa i} + 12\kappa^3 \sum_{R_\kappa/\kappa\ge i\ge 1}\sum_{R_\kappa/\kappa\ge j\ge 1}\frac{1}{\kappa\sqrt{i^2+j^2}}\\ &\le 6\kappa^2(1+\tfrac{2(R+2\delta)}{\kappa})\sum_{R_\kappa/\kappa\ge i\ge 1}\frac{1}{i}\\ &\le 6(\delta/\sqrt{d}+2(R+2\delta))\kappa\left(\log\left(\tfrac{R+2\delta}{\kappa}\right)+1\right)\xrightarrow{\kappa\searrow 0} 0.\end{aligned}$$

最后一个不等式由命题 3.10 得出。同理，对于 $d=2$，我们有：

$$\int_A \mathrm{step}^\kappa(x)\ \mathbf{d}x \le 4\kappa^2 \sum_{R_\kappa/\kappa\ge i\ge 1}\frac{1}{\kappa i} \le 4\kappa\left(\log\left(\tfrac{R+2\delta}{\kappa}\right)+1\right)\xrightarrow{\kappa\searrow 0} 0.$$

对于在 B 上的积分，对所有 $x\in B$，有：

$$0\le \mathrm{step}^\kappa((x_1,\dots,x_d)^\top) \le \left(\sum_{d\ge i\ge 1}(x_i-\tfrac{\kappa}{2}\operatorname{sgn}(x_i))^2\right)^{-1/2} =: F^\kappa((x_1,\dots,x_d)^\top).$$

那么，由于 F^κ 只是 $x\mapsto {}^1\!/_{\|x\|}$ 的一个修正版，因此有

$$0\le\int_B \mathrm{step}^\kappa(x)\ \mathbf{d}x \le \int_B F^\kappa(x)\ \mathbf{d}x \le \int_{B_{R+2\delta}(0)}\frac{1}{\|x\|}\ \mathbf{d}x<\infty.$$

□

稍后我们将结合以下引理使用上述界。

引理 3.12（离散有限差分算子的统一有界性）设 $k_{ij}(\kappa)\in\mathbf{R}^{d\times d}$ 是由指标集 $I^\kappa\times I^\kappa$ 上的参数 $0<\kappa<\frac{\delta}{\sqrt{d}}$ 参数化的矩阵族，则算子 $A_\kappa\colon L^2(\Omega)^d\to L^2(\Omega)^d$ 对 $u\in L^2(\Omega)^d$ 且 $x\in\Omega_i$ 定义为

$$[A_\kappa u](x)=\sum_{j\ne i}V_j k_{ij}(\kappa)([\mathcal{P}_\kappa u]_j-[\mathcal{P}_\kappa u]_i)$$

若满足以下条件，则它们关于 κ 一致有界：

$$\exists C>0:\forall 0<\kappa<\tfrac{\delta}{\sqrt{d}}:\forall i\in I^\kappa:\max\left(\sum_{j\ne i}\|V_j k_{ij}(\kappa)\|,\sum_{j\ne i}\|V_j k_{ji}(\kappa)\|\right)\le C. \tag{28}$$

证明。算子 A_κ 被分解为一个卷积部分和一个逐点部分，对$x\in\Omega_i$ 定义为

$$\begin{aligned}[A_\kappa^* u](x) &:= \sum_{j\ne i}V_j k_{ij}(\kappa)[\mathcal{P}_\kappa u]_j\\ [A_\kappa^\Sigma u](x) &:= \left(\sum_{j\ne i}-V_j k_{ij}(\kappa)\right)[\mathcal{P}_\kappa u]_i,\end{aligned}$$

其中每一个都将被证明是有界的，先从第二个开始，

$$\|A_\kappa^\Sigma u\|_{L^2}^2 \le \sum_i V_i \left(\sum_{j\neq i} \|V_j k_{ij}(\kappa)\| \right)^2 \|[\mathcal{P}_\kappa u]_i\|^2 \le C^2 \sum_i V_i \|[\mathcal{P}_\kappa u]_i\|^2 \le C^2 \|u\|_{L^2}^2,$$

其中我们使用詹森不等式得到

$$\sum_i V_i \|[\mathcal{P}_\kappa u]_i\|^2 \le \sum_i V_i \left(\frac{1}{V_i} \int_{\Omega_i} \|u(x)\| \, \mathbf{d}x \right)^2 \le \sum_i \int_{\Omega_i} \|u(x)\|^2 \, \mathbf{d}x = \|u\|_{L^2}^2. \tag{29}$$

对于卷积部分，我们使用柯西-施瓦茨不等式得到

$$\begin{aligned} \|A_\kappa^* u\|_{L^2}^2 &= \sum_i V_i \left(\sum_{j\neq i} V_j \|k_{ij}(\kappa)\| \|[\mathcal{P}_\kappa u]_j\| \right)^2 \\ &\le \sum_i V_i \left(\sum_{j\neq i} V_j \|k_{ij}(\kappa)\| \right) \left(\sum_{j\neq i} V_j \|k_{ij}(\kappa)\| \|[\mathcal{P}_\kappa u]_j\|^2 \right) \end{aligned}$$

应用 (28)，然后交换求和次序可得

$$\begin{aligned} &\le C \sum_i \sum_{j\neq i} V_i V_j \|k_{ij}(\kappa)\| \|[\mathcal{P}_\kappa u]_j\|^2 \\ &\le C \sum_j V_j \|[\mathcal{P}_\kappa u]_j\|^2 \sum_{i\neq j} V_i \|k_{ij}(\kappa)\| \\ &\le C^2 \|u\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

最后一个不等式由 (29) 和 (28) 得出。 □

要应用此引理，我们还需要给出 (27) 中算子所涉及各项的必要界，为此我们需要以下引理。

引理 3.13 (部分面积权重的收敛性) 对所有 $i \in I^\kappa$，对所有$x \in \Omega_i$,

$$\sum_{j\neq i} \int_{\Omega_j} |w_{ij} - \chi_{[0,\delta)}(\|x' - x\|)| \, \mathbf{d}x' \le D_\kappa^\delta \xrightarrow{\kappa \searrow 0} 0$$

其中某个 $D_\kappa^\delta > 0$ 仅依赖于 δ 和 κ。

证明。 我们首先得到

$$\begin{aligned} &\sum_{j\neq i} \int_{\Omega_j} |w_{ij} - \chi_{[0,\delta)}(\|x' - x\|)| \, \mathbf{d}x' \\ &\le \sum_{j\neq i} \int_{B_j} |w_{ij} - \chi_{[0,\delta)}(\|x' - x_i\|)| \, \mathbf{d}x' + \int_{\mathbb{R}^d} |\chi_{[0,\delta)}(\|x' - x\|) - \chi_{[0,\delta)}(\|x' - x_i\|)| \, \mathbf{d}x' \\ &\le B_{\delta+\sqrt{d}\kappa}(0) - B_{\delta-\sqrt{d}\kappa}(0) + \sqrt{d}\kappa\delta \end{aligned}$$

这直接由假设 3.3 中关于权重 w_{ij} 的假设以及 $\mathbf{k}x - x_i\mathbf{k} \le \frac{1}{2}\sqrt{d}\kappa$ 得出。

□

现在，我们可以应用这些引理，得到 τ^{num}、 α^{num} 和 m^{num} 的界，这与上一章中用于 τ、 m 和 α 的界类似。注意，假设 3.3 中的 A5 表明，存在 m_0， $m_1 > 0$ ，使得 $m_0 \leqq m \leqq m_1$ 在 Ω 上成立。

引理 3.14 (数值模型参数的界) 设假设 3.3 成立，则存在一个 $t_1 > 0$ ，使得当 $\kappa > 0$ 足够小时，

$$0 < \tfrac{1}{2} m_0 \leqq m^{\mathrm{num}} \leqq 2m_1, \quad |\tau^{\mathrm{num}}| \leqq t_1, \quad 0 < \alpha_0 \leqq \alpha^{\mathrm{num}}, \alpha \leqq \alpha_1.$$

设 $i \in I^\kappa$ 满足

$$\overline{B_i} \cap (\partial\Omega \cup LFS^L(l) \cup LFS^K(k)) = \varnothing,$$

则对所有 $x \in \Omega_i$，有

$$|\tau(x) - \tau^{\mathrm{num}}(x_i)| \leq T_\kappa \xrightarrow{\kappa \searrow 0} 0,$$

其中 T_κ 与 i无关。类似地，对所有满足以下条件的 $i \in I^\kappa$

$$\overline{B}_i \cap \Big(\partial\Omega \cup LFS^L(l)\Big) = \varnothing,$$

我们对所有 $x \in \Omega_i$得到

$$|\alpha(x) - \alpha^{\mathrm{num}}(x_i)| \leq A_\kappa \xrightarrow{\kappa \searrow 0} 0,$$

其中 A_κ 与 i无关。

证明。首先，记住

$$0 < m_0 \leq m(x) := \int_\Omega \omega(x' - x)\|x' - x\|^2 \, \mathbf{d}x' = \int_\Omega \chi_{[0,\delta)}(\|x' - x\|)\|x' - x\| \, \mathbf{d}x'.$$

对于任意 $x \in \Omega_i$ 以及任意 i，我们有

$$\begin{aligned}
&|m(x) - m^{\mathrm{num}}(x_i)| \\
&\leq \left| \sum_j \int_{\Omega_j} \chi_{[0,\delta)}(\|x' - x\|)\|x' - x\| - w_{ij}\|x_j - x_i\| \, \mathbf{d}x' \right| \\
&\leq \sum_j \int_{\Omega_j} |\chi_{[0,\delta)}(\|x' - x\|) - w_{ij}|\|x' - x\| \, \mathbf{d}x' \\
&\quad + \sum_j \int_{\Omega_j} w_{ij} |\|x' - x\| - \|x_j - x_i\|| \, \mathbf{d}x' \\
&\leq \operatorname{diam}(\Omega) D_\kappa^\delta + \sqrt{d}\kappa \operatorname{vol}(\Omega) \xrightarrow{\kappa \searrow 0} 0.
\end{aligned} \tag{30}$$

最后一个不等式用到了引理 3.13。其余结论由此界和引理 3.4 得出。

□

由此可得如下的一致有界性结果。

命题 3.15 (数值算子的一致有界性) 对任意满足 κ_n g 0 的序列 $0 < \kappa_n \leq \frac{\delta}{\sqrt{d}}$， (27) 中的算子 $\mathrm{L}_1^{\mathrm{num}}$, $\mathrm{L}^{x}{}_{,2}^{\ \mathrm{num}}$, $\mathrm{L}_{x',2}^{\ \ \mathrm{num}}$ 和 $\mathrm{L}^{p}{}_{,2}^{\ \mathrm{num}}$ 都一致有界。

证明。 应用引理 3.12，我们只需证明每个算子都满足 (28)。这由核的对称性和引理 3.11 得出。对于 $\mathrm{L}_1^{\mathrm{num}}$，当 $0 < \kappa$ 足够小时，

$$\sum_{j\neq i} V_j w_{ij} \rho(x_j - x_i) |\alpha^{\mathrm{num}}(x_i) + \alpha^{\mathrm{num}}(x_j)| \leq 2\alpha_1 C_\delta,$$

对于 $\mathrm{L}^{x,\,2\,\mathrm{num}}$，

$$\sum_{j\neq i} \sum_{m\neq i} V_j V_m |\tau^{\mathrm{num}}(x_i)| w_{ij} w_{im} \leq t_1 \operatorname{vol}(\Omega)^2,$$

对于 $\mathrm{L}^{x',\,2\,\mathrm{num}}$，

$$\sum_{j\neq i} \sum_{m\neq i} V_j V_m |\tau^{\mathrm{num}}(x_j)| w_{ji} w_{jm} \leq t_1 \operatorname{vol}(\Omega)^2,$$

对于 $\mathrm{L}^{p,\,2\,\mathrm{num}}$，

$$\sum_{j\neq i} \sum_{m\neq \{i,j\}} V_j V_m |\tau^{\mathrm{num}}(x_m)| w_{mj} w_{mi} \leq t_1 \operatorname{vol}(\Omega)^2.$$

□

利用这一一致有界性结果以及 L 的有界性，我们只需证明 $\mathrm{L}_\kappa^{\mathrm{num}}$ 在 $L^2(\Omega)^d$ 的一个稠密子空间上逐点收敛于 L，例如 $C^{0,\,1}(\Omega)^d$。为此，我们需要以下不等式。

引理 3.16 (辅助界) 对所有 $i,\ j \in I^\kappa$，且满足 $i \neq j$，以下估计均成立。

- Let $x' \in \Omega_j$, $x \in \Omega_i$, then

$$\left\|\rho(x'-x)(x'-x) - \rho(x_j - x_i)(x_j - x_i)\right\| \leq \min\left(\frac{2\sqrt{d}\kappa}{\|x'-x\|}, \frac{2\sqrt{d}\kappa}{\|x_j - x_i\|}\right).$$

- 对于所有 $x \in \Omega_i$,

$$\sum_{j\neq i} \int_{\Omega_j} \left|\rho(x'-x) - \rho(x_j - x_i)\right| \|x'-x\| \, \mathbf{d}x' \leq \sqrt{d}\kappa C_{\mathrm{diam}(\Omega)}.$$

证明。 对于第二个结论，注意到 $\rho(\zeta) = \frac{1}{\|\zeta\|}$，因此

$$\begin{aligned}
&\sum_{j\neq i} \int_{\Omega_j} \left|\frac{1}{\|x'-x\|} - \frac{1}{\|x_j - x_i\|}\right| \|x'-x\| \, \mathbf{d}x' \\
&\leq \sum_{j\neq i} \int_{\Omega_j} \frac{\big|\|x'-x\| - \|x_j - x_i\|\big|}{\|x'-x\|\|x_j - x_i\|} \|x'-x\| \, \mathbf{d}x' \\
&\leq \sum_{j\neq i} \int_{\Omega_j} \frac{\|x'-x-x_j+x_i\|}{\|x'-x\|\|x_j - x_i\|} \|x'-x\| \, \mathbf{d}x' \\
&\leq \sqrt{d}\kappa \sum_{j\neq i} \int_{\Omega_j} \frac{1}{\|x_j - x_i\|} \, \mathbf{d}x' \\
&\leq \sqrt{d}\kappa C_{\mathrm{diam}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

上面的最后一个不等式用到了引理 3.11。

第一个断言的证明类似。 □

现在证明数值算子逐点收敛到其连续对应物。

命题 3.17 (在 $C^{0,1}(\Omega)^d$上的逐点收敛) 假设假设 3.3 成立。算子 $\mathrm{L}_1^{\mathrm{num}}$, $\mathrm{L}^{x}{}_{,2}^{\ \mathrm{num}}$, $\mathrm{L}_{x',2}^{\ \ \mathrm{num}}$ 和 $\mathrm{L}^{p}{}_{,2}^{\ \mathrm{num}}$ 在 $C^{0,1}(\Omega)^d$上逐点收敛到其连续对应项 L_1, L_2^x, $\mathrm{L}_2^{x'}$ 和 L_2^p。

证明。 利用三角不等式，可得

$$\|(A_\kappa - A)v\|_{L^2(\Omega)^d} \le \|(A_\kappa - \mathbb{P}_\kappa \circ A)v\|_{L^2(\Omega)^d} + \underbrace{\|(\mathrm{id}_{L^2} - \mathbb{P}_\kappa)Av\|_{L^2(\Omega)^d}}_{\to 0}$$

对于任意算子 A 和 A_κ，因此我们只需证明右端项中的第一项对所有 $u \in C^{0,1}(\Omega)^d$收敛。因此，设 u 是利普希茨连续的，其利普希茨常数为 $L > 0$。

对于 $x \in \Omega_i$，我们首先得到

$$\begin{aligned}
&[(\mathcal{L}_1^{\mathrm{num}} - \mathbb{P}_\kappa \circ \mathcal{L}_1)u](x) \\
&= \frac{1}{V_i}\int_{\Omega_i}\sum_{j\neq i}\int_{\Omega_j}\Bigg(w_{ij}\rho(x_i - x_j)(\alpha^{\mathrm{num}}(x_i) + \alpha^{\mathrm{num}}(x_j))\frac{(x_j - x_i)\,(x_j - x_i)^\top}{\|x_j - x_i\|\|x_j - x_i\|} \\
&\qquad - \chi_{[0,\delta)}(\|x' - x\|)\rho(x' - x)(\alpha(x) + \alpha(x'))\frac{(x' - x)\,(x' - x)^\top}{\|x' - x\|\|x' - x\|}\Bigg)(u(x') - u(x))\ \mathbf{d}x'\ \mathbf{d}x \\
&\quad - \frac{1}{V_i}\int_{\Omega_i}\int_{\Omega_i}\chi_{[0,\delta)}(\|x' - x\|)\rho(x' - x)(\alpha(x) + \alpha(x'))\tfrac{(x'-x)(x'-x)^\top}{\|x'-x\|\|x'-x\|}(u(x') - u(x))\ \mathbf{d}x'\ \mathbf{d}x.
\end{aligned} \tag{31}$$

后一项满足

$$\begin{aligned}
&\left\|\frac{1}{V_i}\int_{\Omega_i}\int_{\Omega_i}\chi_{[0,\delta)}(\|x' - x\|)\frac{\alpha(x) + \alpha(x')}{\|x' - x\|}\frac{(x' - x)\,(x' - x)^\top}{\|x' - x\|\|x' - x\|}(u(x') - u(x))\ \mathbf{d}x'\ \mathbf{d}x\right\| \\
&\le L\frac{1}{V_i}\int_{\Omega_i}\int_{\Omega_i}|\alpha(x) + \alpha(x')|\ \mathbf{d}x'\ \mathbf{d}x \\
&\le 2\alpha_1 L\kappa^d \xrightarrow{\kappa\searrow 0} 0.
\end{aligned} \tag{32}$$

在处理第一项之前，我们定义 $P_\kappa := \{i : \overline{B_i} \cap (\partial\Omega \cup LFS(l) \cup LFS(k)) = \varnothing\}$。现在我们将证明

$$\begin{aligned}
&\|(\mathcal{L}_1^{\mathrm{num}} - \mathbb{P}_\kappa \circ \mathcal{L}_1)u\|_{L^2}^2 \\
&\overset{\kappa<<1}{\le} \sum_{i\in P_\kappa}\int_{\Omega_i}\underbrace{\|[(\mathcal{L}_1^{\mathrm{num}} - \mathbb{P}_\kappa \circ \mathcal{L}_1)u](x)\|^2}_{\overset{*}{\Longrightarrow}_{\mathrm{unif}}0}\ \mathbf{d}x \\
&\qquad + \underbrace{\left(\sup_{0<\kappa<<1}\max_{i\notin P_\kappa}\sup_{x\in\Omega_i}\|[(\mathcal{L}_1^{\mathrm{num}} - \mathbb{P}_\kappa \circ \mathcal{L}_1)u](x)\|^2\right)}_{\overset{*}{<\infty}}\underbrace{\mathrm{vol}\left(\bigcup_{i\notin P_\kappa}B_i\right)}_{\underset{**}{\xrightarrow{\kappa\searrow 0}}0}.
\end{aligned}$$

待证明的结论以星号标记。标记为 $**$ 的结论可由命题 2.5 得出。对于每个算子，我们采用的策略大致相同。

利用它，我们只需证明与 $i \in P_\kappa$对应的Ω_i 上的收敛，并证明其余部分的一致有界性。前者将通过证明一致收敛来证明，$\mathrm{k}[(\mathrm{L}_1^{\mathrm{num}} - \mathrm{P}_\kappa \circ \mathrm{L}_1)u](x)\mathrm{k} \leq C^{\rho,}_{\kappa\ \Omega\ \alpha\ \tau}\ ^{\kappa,,\searrow}\!\!\longrightarrow^{0} 0$对所有 $x \in \Omega_i$和 $i \in P_\kappa$。

注意，由于（31）中第二项如（32）所示具有一致收敛，我们只需证明第一项的有界性和收敛断言。

对 $i \in P_\kappa$，由引理 3.13、3.16、3.11，并对$\overline{B_i}$ 应用引理 3.4以得到$\alpha_{|B_i}$的Lipschitz连续性，可得

$$
\begin{aligned}
&L\frac{1}{V_i}\int_{\Omega_i}\sum_{j\neq i}\int_{\Omega_j}\left\| w_{ij}(\alpha^{\mathrm{num}}(x_i)+\alpha^{\mathrm{num}}(x_j))\rho(x_j-x_i)\frac{(x_j-x_i)\,(x_j-x_i)^\top}{\|x_j-x_i\|\|x_j-x_i\|}\right.\\
&\qquad\left. -\chi_{[0,\delta)}(\|x'-x\|)(\alpha(x)+\alpha(x'))\rho(x'-x)\frac{(x'-x)\,(x'-x)^\top}{\|x'-x\|\|x'-x\|}\right\|\|x'-x\|\,\mathbf{d}x'\,\mathbf{d}x\\
&\leq L\frac{1}{V_i}\int_{\Omega_i}\sum_{j\neq i}\int_{\Omega_j}\left|w_{ij}-\chi_{[0,\delta)}(\|x'-x\|)\right|\frac{|\alpha(x)+\alpha(x')|}{\|x'-x\|}\|x'-x\|\,\mathbf{d}x'\,\mathbf{d}x\\
&\quad + L\frac{1}{V_i}\int_{\Omega_i}\sum_{j\neq i}\int_{\Omega_j} w_{ij}\frac{|\alpha(x)-\alpha^{\mathrm{num}}(x_i)+\alpha(x')-\alpha^{\mathrm{num}}(x_j)|}{\|x'-x\|}\|x'-x\|\,\mathbf{d}x'\,\mathbf{d}x\\
&\quad + L\frac{2}{V_i}\int_{\Omega_i}\sum_{j\neq i}\int_{\Omega_j} w_{ij}\alpha_1\left|\rho(x'-x)-\rho(x_j-x_i)\right|\|x'-x\|\,\mathbf{d}x'\,\mathbf{d}x\\
&\quad + L\frac{4}{V_i}\int_{\Omega_i}\sum_{j\neq i}\int_{\Omega_j} w_{ij}\rho(x_j-x_i)\alpha_1\left\|\frac{x'-x}{\|x'-x\|}-\frac{x_j-x_i}{\|x_j-x_i\|}\right\|\|x'-x\|\,\mathbf{d}x'\,\mathbf{d}x\\
&\leq 2L\alpha_1 D_\kappa^\delta + L2A_\kappa\,\mathrm{vol}(\Omega) + L\,\mathrm{vol}\left(\bigcup_{j\notin P_\kappa} B_j\right)(A_\kappa+2\alpha_1)\\
&\quad + 2L\alpha_1\sqrt{d}\kappa C_{\mathrm{diam}(\Omega)} + L8\alpha_1\sqrt{d}\kappa C_{\mathrm{diam}(\Omega)} \xrightarrow[P2.5]{\kappa\searrow 0} 0.
\end{aligned}
$$

有界性断言直接由

$$
\begin{aligned}
&L\frac{1}{V_i}\int_{\Omega_i}\sum_{j\neq i}\int_{\Omega_j}\left\| w_{ij}\frac{|\alpha^{\mathrm{num}}(x_i)+\alpha^{\mathrm{num}}(x_j)|}{\|x_j-x_i\|}\frac{(x_j-x_i)\,(x_j-x_i)^\top}{\|x_j-x_i\|\|x_j-x_i\|}\right.\\
&\qquad\left. -\chi_{[0,\delta)}(\|x'-x\|)\frac{|\alpha(x)+\alpha(x')|}{\|x'-x\|}\frac{(x'-x)\,(x'-x)^\top}{\|x'-x\|\|x'-x\|}\right\|\|x'-x\|\,\mathbf{d}x'\,\mathbf{d}x\\
&\leq 2L\alpha_1\,\mathrm{diam}(\Omega)C_{\mathrm{diam}(\Omega)} + L\,\mathrm{vol}(\Omega)2\alpha_1 < \infty.
\end{aligned}
$$

这意味着对于 $u \in C^{0,\ 1}(\Omega)^d$，$\mathrm{L}_1^{\mathrm{num}}u$ 到 $\mathrm{L}u$ 收敛。

其他算子的收敛可类似地得出；假设 $i \in P^\kappa$,

$$
\begin{aligned}
&[(\mathcal{L}_2^{x,\mathrm{num}} - \mathbb{P}_\kappa \circ \mathcal{L}_2^x)u](x) \\
&= \frac{1}{V_i}\int_{\Omega_i}\sum_{j\neq i}\int_{\Omega_j}\sum_{m\neq i}\int_{\Omega_m}\Big(\tau^{\mathrm{num}}(x_i)\rho(x_m-x_i)\,(x_m-x_i)\,\rho(x_j-x_i)\,(x_j-x_i)^\top w_{ij}w_{im} \\
&\quad - \tau(x)\rho(p-x)\,(p-x)\,\rho(x'-x)\,(x'-x)^\top \chi_{[0,\delta)}(\|x'-x\|)\chi_{[0,\delta)}(\|p-x\|)\Big) \\
&\qquad\qquad \times (u(x')-u(x))\;\mathbf{d}p\;\mathbf{d}x'\;\mathbf{d}x \\
&\quad - \frac{1}{V_i}\int_{\Omega_i}\sum_{j\neq i}\int_{\Omega_j}\int_{\Omega_i}\tau(x)\frac{(p-x)\,(x'-x)^\top}{\|p-x\|\|x'-x\|}\chi_{[0,\delta)}(\|x'-x\|) \\
&\qquad\qquad \times \chi_{[0,\delta)}(\|p-x\|)(u(x')-u(x))\;\mathbf{d}p\;\mathbf{d}x'\;\mathbf{d}x \\
&\quad - \frac{1}{V_i}\int_{\Omega_i}\int_{\Omega_i}\int_{\Omega}\tau(x)\frac{(p-x)\,(x'-x)^\top}{\|p-x\|\|x'-x\|}\chi_{[0,\delta)}(\|x'-x\|) \\
&\qquad\qquad \times \chi_{[0,\delta)}(\|p-x\|)(u(x')-u(x))\;\mathbf{d}p\;\mathbf{d}x'\;\mathbf{d}x.
\end{aligned}
$$

上面的最后两项随着积分区域在 κ g 0 时逐渐消失而趋于 0，同时被积函数保持有界。

第一项的收敛性以及 $i \in P^\kappa$ 由引理 3.14 给出，同样,

$$
\begin{aligned}
&L\frac{1}{V_i}\int_{\Omega_i}\sum_{j\neq i}\int_{\Omega_j}\sum_{m\neq i}\int_{\Omega_m}|\tau(x)-\tau^{\mathrm{num}}(x_i)|\|x'-x\|\;\mathbf{d}p\;\mathbf{d}x'\;\mathbf{d}x \\
&\quad + L\frac{1}{V_i}\int_{\Omega_i}\sum_{j\neq i}\int_{\Omega_j}\sum_{m\neq i}\int_{\Omega_m}|\tau^{\mathrm{num}}(x_i)|\frac{2\sqrt{d}\kappa}{\|x_m-x_i\|}\|x'-x\|\;\mathbf{d}p\;\mathbf{d}x'\;\mathbf{d}x \\
&\quad + L\frac{1}{V_i}\int_{\Omega_i}\sum_{j\neq i}\int_{\Omega_j}\sum_{m\neq i}\int_{\Omega_m}|\tau^{\mathrm{num}}(x_i)|\frac{2\sqrt{d}\kappa}{\|x'-x\|}\|x'-x\|\;\mathbf{d}p\;\mathbf{d}x'\;\mathbf{d}x \\
&\quad + L\frac{1}{V_i}\int_{\Omega_i}\sum_{j\neq i}\int_{\Omega_j}\sum_{m\neq i}\int_{\Omega_m}|\tau^{\mathrm{num}}(x_i)||w_{ij}-\chi_{[0,\delta)}(\|x'-x\|)|\|x'-x\|\;\mathbf{d}p\;\mathbf{d}x'\;\mathbf{d}x \\
&\quad + L\frac{1}{V_i}\int_{\Omega_i}\sum_{j\neq i}\int_{\Omega_j}\sum_{m\neq i}\int_{\Omega_m}|\tau^{\mathrm{num}}(x_i)||\chi_{[0,\delta)}(\|p-x\|)-w_{im}|\|x'-x\|\;\mathbf{d}p\;\mathbf{d}x'\;\mathbf{d}x \\
&\le LT_\kappa\,\mathrm{vol}(\Omega)^2\,\mathrm{diam}(\Omega) + 2Lt_1\sqrt{d}\kappa\,\mathrm{diam}(\Omega)C_{\mathrm{diam}(\Omega)}\,\mathrm{vol}(\Omega) + 2Lt_1\sqrt{d}\kappa\,\mathrm{vol}(\Omega)^2 \\
&\quad + Lt_1\,\mathrm{diam}(\Omega)\,\mathrm{vol}(\Omega)D_\kappa^\delta + Lt_1\,\mathrm{diam}(\Omega)\,\mathrm{vol}(\Omega)D_\kappa^\delta\kappa \xrightarrow{\kappa\searrow 0} 0.
\end{aligned}
$$

有界性由下式可得

$$
\begin{aligned}
&\Big\|\frac{1}{V_i}\int_{\Omega_i}\sum_{j\neq i}\int_{\Omega_j}\sum_{m\neq i}\int_{\Omega_m}\Big(\tau^{\mathrm{num}}(x_i)\tfrac{(x_m-x_i)(x_j-x_i)^\top}{\|x_m-x_i\|\|x_j-x_i\|}w_{ij}w_{im} \\
&\quad - \tau(x)\tfrac{(p-x)(x'-x)^\top}{\|p-x\|\|x'-x\|}\chi_{[0,\delta)}(\|x'-x\|)\chi_{[0,\delta)}(\|p-x\|)\Big)(u(x')-u(x))\;\mathbf{d}p\;\mathbf{d}x'\;\mathbf{d}x\Big\| \\
&\le 2Lt_1\,\mathrm{diam}(\Omega)\,\mathrm{vol}(\Omega)^2.
\end{aligned}
$$

这给出了第二个算子的逐点收敛。$\mathbf{L}^{x'}{}_2{}^{\mathrm{num}}$ 和 $\mathbf{L}^{p}{}_2{}^{\mathrm{num}}$ 的收敛分别通过将求和拆分为 $j \in P_\kappa$ 和 $j \notin P_\kappa$ 或 $m \in P_\kappa$ 和 $m \notin P_\kappa$，并利用与上述类似的工具证明两部分均收敛而得到。

□

如前所述，这就得到了式（24）中的结论。

推论 3.18 (一致有界性与逐点收敛) 设假设 3.3 成立。则算子 $\mathrm{L}_\kappa^{\mathrm{num}}$关于 κ 一致有界，并在 $L^2(\Omega)^d$上逐点收敛到 L。

证明。 注意到 $C_0^\infty(\Omega)^d \subset C^{0,1}(\Omega)^d$ 在 $L^2(\Omega)^d$中稠密。此外，算子 $\mathrm{L}_\kappa^{\mathrm{num}}$一致有界，且 L 有界。结合命题 3.17，这意味着逐点收敛在整个 $L^2(\Omega)^d$上成立。 □

现在唯一尚待证明的是式 (25) 中陈述的强制性结论，为此我们需要以下结果。其证明相当冗长，但很初等，见附录。

引理 3.19 (双线性型的势形式) 对所有 $\vec{u} \in \vec{\mathcal{V}}_\kappa$,

$$\vec{u}^\top \vec{B}^{\mathrm{num}} \vec{u} = 2 \sum_i V_i W_\kappa^{\mathrm{num}}(\vec{u}, x_i),$$

with

$$\begin{aligned} W_\kappa^{\mathrm{num}}(\vec{u}, x_i) = \frac{k(x_i)}{2} \Bigg(& \frac{d}{m^{\mathrm{num}}(x_i)} \sum_{j \neq i} \int_{\Omega_j} w_{ij} \rho(x_j - x_i) \left(x_j - x_i\right)^\top \left(\vec{u}_j - \vec{u}_i\right) \mathbf{d}x' \Bigg)^2 \\ & + \frac{\alpha^{\mathrm{num}}(x_i)}{2} \sum_{j \neq i} \int_{\Omega_j} w_{ij} \rho(x_j - x_i) \|x_j - x_i\|^2 \Bigg(\frac{\left(x_j - x_i\right)^\top \left(\vec{u}_j - \vec{u}_i\right)}{\|x_j - x_i\|^2} \\ & - \frac{1}{m^{\mathrm{num}}(x_i)} \sum_{m \neq i} \int_{\Omega_m} w_{im} \rho(x_m - x_i) \left(x_m - x_i\right)^\top \left(\vec{u}_m - \vec{u}_i\right) \mathbf{d}p \Bigg)^2 \mathbf{d}x' \end{aligned} \tag{33}$$

证明。 参见引理 A.3。 □

式 (33) 给出的形式是连续势的数值等价物；与连续势的情形一样，可以推导出相应的下界估计如下（与 [18], 命题 1 比较）。

引理 3.20 (辅助项下界) 存在一个 $c' > 0$，使得对于所有足够小的 $\kappa > 0$，对所有 $\vec{u} \in \mathrm{V}_\kappa$，均有

$$\begin{aligned} & c' \sum_i \int_{\Omega_i} \sum_{j \neq i} \int_{\Omega_j} w_{ij} \rho(x_j - x_i) \|x_j - x_i\|^2 \left(\frac{\left(x_j - x_i\right)^\top \left(\vec{u}_j - \vec{u}_i\right)}{\|x_j - x_i\|^2} \right)^2 \mathbf{d}x' \, \mathbf{d}x \\ & \leq \sum_i V_i W_\kappa^{\mathrm{num}}(\vec{u}, x_i). \end{aligned} \tag{34}$$

证明。

$$
\begin{aligned}
&\sum_i \int_{\Omega_i} \sum_{j\neq i} \int_{\Omega_j} w_{ij}\rho(x_j-x_i)\|x_j-x_i\|^2 \left(\frac{(x_j-x_i)^\top(\vec{u}_j-\vec{u}_i)}{\|x_j-x_i\|^2}\right)^2 \mathbf{d}x'\,\mathbf{d}x \\
&= \sum_i \int_{\Omega_i} \sum_{j\neq i} \int_{\Omega_j} w_{ij}\rho(x_j-x_i)\|x_j-x_i\|^2 \Bigg(\frac{(x_j-x_i)^\top(\vec{u}_j-\vec{u}_i)}{\|x_j-x_i\|^2} \\
&\qquad - \frac{1}{m^{\mathrm{num}}(x_i)} \sum_{m\neq i} \int_{\Omega_m} w_{im}\rho(x_m-x_i)\,(x_m-x_i)^\top(\vec{u}_m-\vec{u}_i)\,\mathbf{d}p\Bigg)^2 \mathbf{d}x' \\
&\qquad + \frac{m^{\mathrm{num}}(x_i)}{d^2}\left(\frac{d}{m^{\mathrm{num}}(x_i)} \sum_{m\neq i} \int_{\Omega_m} w_{im}\rho(x_m-x_i)\,(x_m-x_i)^\top(\vec{u}_m-\vec{u}_i)\,\mathbf{d}p\right)^2 \mathbf{d}x \\
&\le \sum_i \int_{\Omega_i} \frac{1}{\alpha_0}\alpha^{\mathrm{num}}(x_i) \sum_{j\neq i} \int_{\Omega_j} w_{ij}\rho(x_j-x_i)\|x_j-x_i\|^2 \Bigg(\frac{(x_j-x_i)^\top(\vec{u}_j-\vec{u}_i)}{\|x_j-x_i\|^2} \\
&\qquad - \frac{1}{m^{\mathrm{num}}(x_i)} \sum_{m\neq i} \int_{\Omega_m} w_{im}\rho(x_m-x_i)\,(x_m-x_i)^\top(\vec{u}_m-\vec{u}_i)\,\mathbf{d}p\Bigg)^2 \mathbf{d}x' \\
&\qquad + \frac{m_1}{d^2k_0}k(x_i)\left(\frac{d}{m^{\mathrm{num}}(x_i)} \sum_{m\neq i} \int_{\Omega_m} w_{im}\rho(x_m-x_i)\,(x_m-x_i)^\top(\vec{u}_m-\vec{u}_i)\,\mathbf{d}p\right)^2 \mathbf{d}x \\
&\le \left(\tfrac{1}{\alpha_0}+\tfrac{2m_1}{d^2k_0}\right) 2\sum_i V_i W_\kappa^{\mathrm{num}}(\vec{u},x_i).
\end{aligned}
$$

最后一个不等式由引理 3.14 得出。 □

为最终得到 (25)，将 (34) 中给出的数值下界的左侧与其连续对应项进行比较。再利用连续强制性界，即可在 κ 足够小时得到一致数值界。

引理 3.21 (辅助项的一致强制性) 存在一个 $c''>0$，使得当 $\kappa>0$ 足够小时，有

$$
c''\|\mathcal{K}_\kappa\vec{u}\|^2_{L^2(\Omega)^d} \le \sum_i \int_{\Omega_i} \sum_{j\neq i} \int_{\Omega_j} w_{ij}\rho(x_j-x_i)\|x_j-x_i\|^2 \left(\frac{(x_j-x_i)^\top(\vec{u}_j-\vec{u}_i)}{\|x_j-x_i\|^2}\right)^2 \mathbf{d}x'\,\mathbf{d}x
$$

¯对所有 $\vec{u}\in \mathrm{V}_{\kappa\circ}$

证明。首先，对于 $\kappa << 1$,

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{(\mathrm{diam}(\Omega)+\sqrt{d})^4} \sum_i \int_{\Omega_i} \sum_{j\neq i} \int_{\Omega_j} w_{ij}\|x_j-x_i\| \left((x_j-x_i)^\top(\vec{u}_j-\vec{u}_i)\right)^2 \mathbf{d}x'\,\mathbf{d}x \\
&\le \sum_i \int_{\Omega_i} \sum_{j\neq i} \int_{\Omega_j} w_{ij}\|x_j-x_i\| \left(\frac{(x_j-x_i)^\top(\vec{u}_j-\vec{u}_i)}{\|x_j-x_i\|^2}\right)^2 \mathbf{d}x'\,\mathbf{d}x.
\end{aligned}
$$

这样，证明便归结为说明第一项满足所需的下界。根据 [18], 命题 2，在第一个不等式中，对于 $\vec{u} \in \vec{\mathbf{V}}_\kappa$，有

$$
\begin{aligned}
&c\|\mathcal{K}_\kappa \vec{u}\|_{L^2}^2 \\
&\leq \int_\Omega \int_\Omega \chi_{[0,\delta)}(\|x'-x\|)\rho(x'-x)\|x'-x\|^2 \left((x'-x)^\top ([\mathcal{K}_\kappa \vec{u}](x') - [\mathcal{K}_\kappa \vec{u}](x))\right)^2 \, \mathbf{d}x' \, \mathbf{d}x \\
&= \sum_i \int_{\Omega_i} \sum_{j \neq i} \int_{\Omega_j} \chi_{[0,\delta)}(\|x'-x\|)\rho(x'-x)\|x'-x\|^2 \left((x'-x)^\top (\vec{u}_j - \vec{u}_i)\right)^2 \, \mathbf{d}x' \, \mathbf{d}x.
\end{aligned} \tag{35}
$$

为了得到数值项的一个与 κ 无关的界（当$\kappa << 1$足够小时），我们将其与上面的连续项进行比较，从而得到下面的不等式(37)。为此，我们有

$$
\begin{aligned}
&\left| \sum_i \int_{\Omega_i} \sum_{j \neq i} \int_{\Omega_j} w_{ij}\|x_j - x_i\| \left((x_j - x_i)^\top (\vec{u}_j - \vec{u}_i)\right)^2 \, \mathbf{d}x' \, \mathbf{d}x \right. \\
&\quad \left. - \sum_i \int_{\Omega_i} \sum_{j \neq i} \int_{\Omega_j} \chi_{[0,\delta)}(\|x'-x\|)\|x'-x\| \left((x'-x)^\top (\vec{u}_j - \vec{u}_i)\right)^2 \, \mathbf{d}x' \, \mathbf{d}x \right| \\
&\leq \left| \sum_i \int_{\Omega_i} \sum_{j \neq i} \int_{\Omega_j} w_{ij}\|x_j - x_i\| \left((x_j - x_i)^\top (\vec{u}_j - \vec{u}_i)\right)^2 \right. \\
&\qquad \left. - \chi_{[0,\delta)}(\|x'-x\|)\|x'-x\| \left((x'-x)^\top (\vec{u}_j - \vec{u}_i)\right)^2 \, \mathbf{d}x' \, \mathbf{d}x \right| \\
&\leq \sum_i \int_{\Omega_i} \sum_{j \neq i} \int_{\Omega_j} |\chi_{[0,\delta)}(\|x'-x\|) - w_{ij}| \|x'-x\| \left((x'-x)^\top (\vec{u}_j - \vec{u}_i)\right)^2 \, \mathbf{d}x' \, \mathbf{d}x \\
&\quad + \sum_i \int_{\Omega_i} \sum_{j \neq i} \int_{\Omega_j} w_{ij} |\|x'-x\| - \|x_j - x_i\|| \left((x'-x)^\top (\vec{u}_j - \vec{u}_i)\right)^2 \, \mathbf{d}x' \, \mathbf{d}x \\
&\quad + \sum_i \int_{\Omega_i} \sum_{j \neq i} \int_{\Omega_j} w_{ij}\|x_j - x_i\| \left| \left((x'-x)^\top (\vec{u}_j - \vec{u}_i)\right)^2 \right. \\
&\qquad\qquad \left. - \left((x_j - x_i)^\top (\vec{u}_j - \vec{u}_i)\right)^2 \right| \mathbf{d}x' \, \mathbf{d}x \\
&\leq \sum_i \int_{\Omega_i} \sum_{j \neq i} \int_{\Omega_j} |\chi_{[0,\delta)}(\|x'-x\|) - w_{ij}| \|x'-x\|^3 \\
&\qquad\qquad \times (\|[\mathcal{K}_\kappa \vec{u}](x')\| + \|[\mathcal{K}_\kappa \vec{u}](x)\|)^2 \, \mathbf{d}x' \, \mathbf{d}x \\
&\quad + \sum_i \int_{\Omega_i} \sum_{j \neq i} \int_{\Omega_j} \|x'-x-x_j+x_i\| \|x'-x\|^2 (\|[\mathcal{K}_\kappa \vec{u}](x')\| + \|[\mathcal{K}_\kappa \vec{u}](x)\|)^2 \, \mathbf{d}x' \, \mathbf{d}x \\
&\quad + \sum_i \int_{\Omega_i} \sum_{j \neq i} \int_{\Omega_j} \|x_j - x_i\| \|x_j - x_i + x' - x\| \, \|x_j - x_i - x' + x\| \\
&\qquad\qquad \times (\|[\mathcal{K}_\kappa \vec{u}](x')\| + \|[\mathcal{K}_\kappa \vec{u}](x)\|)^2 \, \mathbf{d}x' \, \mathbf{d}x \\
&\leq \operatorname{diam}(\Omega)^3 \sum_i \int_{\Omega_i} \sum_{j \neq i} \int_{\Omega_j} |\chi_{[0,\delta)}(\|x'-x\|) - w_{ij}| \\
&\qquad\qquad \times (\|[\mathcal{K}_\kappa \vec{u}](x')\| + \|[\mathcal{K}_\kappa \vec{u}](x)\|)^2 \, \mathbf{d}x' \, \mathbf{d}x
\end{aligned}
$$

$$+ 3\sqrt{d}(\mathrm{diam}(\Omega) + \sqrt{d})^2\kappa \sum_i \int_{\Omega_i} \sum_{j\neq i} \int_{\Omega_j} (\mathrm{k}[\mathrm{K}_\kappa \vec{u}](x')\mathrm{k} + \mathrm{k}[\mathrm{K}_\kappa \vec{u}](x)\mathrm{k})^2 \, \mathbf{d}x' \, \mathbf{d}x. \tag{36}$$

我们现在使用

$$\begin{aligned}
&\sum_i \int_{\Omega_i} \sum_{j\neq i} \int_{\Omega_j} (\|[\mathcal{K}_\kappa \vec{u}](x')\| + \|[\mathcal{K}_\kappa \vec{u}](x)\|)^2 \, \mathbf{d}x' \, \mathbf{d}x \\
&\leq \sum_i \int_{\Omega_i} \sum_{j} \int_{\Omega_j} \|[\mathcal{K}_\kappa \vec{u}](x')\|^2 + \|[\mathcal{K}_\kappa \vec{u}](x)\|^2 + 2\|[\mathcal{K}_\kappa \vec{u}](x')\|\|[\mathcal{K}_\kappa \vec{u}](x)\| \, \mathbf{d}x' \, \mathbf{d}x \\
&\leq 2\,\mathrm{vol}(\Omega)\|\mathcal{K}_\kappa \vec{u}\|^2_{L^2(\Omega)^d} + 2\left(\int_\Omega \|[\mathcal{K}_\kappa \vec{u}](x)\| \, \mathbf{d}x\right)^2 \leq 4\,\mathrm{vol}(\Omega)\|\mathcal{K}_\kappa \vec{u}\|^2_{L^2(\Omega)^d}.
\end{aligned}$$

利用詹森不等式可得到最后一个不等式。为了处理式 (36) 中最后一个表达式的第一项，对于 $\kappa < \frac{\delta}{\sqrt{d}}$，我们使用

$$\begin{aligned}
&\sum_i \sum_{j\neq i} \left(\int_{\Omega_i}\int_{\Omega_j} |\chi_{[0,\delta)}(\|x'-x\|) - w_{ij}| \, \mathbf{d}x' \, \mathbf{d}x\right)(\|\vec{u}_j\| + \|\vec{u}_i\|)^2 \\
&= \sum_i \|\vec{u}_i\|^2 \sum_{j\neq i} \left(\int_{\Omega_i}\int_{\Omega_j} |\chi_{[0,\delta)}(\|x'-x\|) - w_{ij}| \, \mathbf{d}x' \, \mathbf{d}x\right) \\
&\quad + \sum_j \|\vec{u}_j\|^2 \sum_{i\neq j} \left(\int_{\Omega_i}\int_{\Omega_j} |\chi_{[0,\delta)}(\|x'-x\|) - w_{ij}| \, \mathbf{d}x' \, \mathbf{d}x\right) \\
&\quad + 2\sum_j \sum_{i\neq j} \|\vec{u}_j\|\|\vec{u}_i\| \left(\int_{\Omega_i}\int_{\Omega_j} |\chi_{[0,\delta)}(\|x'-x\|) - w_{ij}| \, \mathbf{d}x' \, \mathbf{d}x\right)
\end{aligned}$$

利用引理 3.13，我们得到

$$\begin{aligned}
&= \sum_i V_i \|\vec{u}_i\|^2 D^\delta_\kappa + \sum_j V_j \|\vec{u}_j\|^2 D^\delta_\kappa \\
&\quad + 2\sum_j \sum_{i\neq j} \|\vec{u}_j\|\|\vec{u}_i\| \left(\int_{\Omega_i}\int_{\Omega_j} |\chi_{[0,\delta)}(\|x'-x\|) - w_{ij}| \, \mathbf{d}x' \, \mathbf{d}x\right) \\
&\leq 2D^\delta_\kappa \|\mathcal{K}_\kappa \vec{u}\|^2_{L^2(\Omega)^d} \\
&\quad + 2\sum_j \sum_{i\neq j} \|\vec{u}_j\|\|\vec{u}_i\| \left(\int_{\Omega_i}\int_{\Omega_j} |\chi_{[0,\delta)}(\|x'-x\|) - w_{ij}| \, \mathbf{d}x' \, \mathbf{d}x\right)
\end{aligned}$$

最后，

$$\begin{aligned}
&\sum_j \sum_{i\neq j} \|\vec{u}_j\|\|\vec{u}_i\| \left(\int_{\Omega_i}\int_{\Omega_j} |\chi_{[0,\delta)}(\|x'-x\|) - w_{ij}| \, \mathbf{d}x' \, \mathbf{d}x\right) \\
&= \sum_j \|\vec{u}_j\| \left(\int_{\Omega_j} \sum_{i\neq j} \int_{\Omega_i} \|[\mathcal{K}_\kappa \vec{u}](x)\| |\chi_{[0,\delta)}(\|x'-x\|) - w_{ij}| \, \mathbf{d}x \, \mathbf{d}x'\right)
\end{aligned}$$

应用赫尔德不等式并结合引理 3.13，可得，

$$\leq \sum_j \|\vec{u}_j\| \left(\int_{\Omega_j} \sum_{i\neq j} \int_{\Omega_i} |\chi_{[0,\delta)}(\|x'-x\|) - w_{ij}| \, \mathbf{d}x \, \mathbf{d}x'\right)^{1/2}$$

$$
\begin{aligned}
&\times \left(\int_{\Omega_j} \int_{\Omega} \|[\mathcal{K}_\kappa \vec{u}](x)\|^2 \, \mathbf{d}x \, \mathbf{d}x' \right)^{1/2} \\
&\leq \sum_j \|\vec{u}_j\| (V_j D_\kappa^\delta)^{1/2} (V_j \|\mathcal{K}_\kappa \vec{u}\|^2_{L^2(\Omega)^d})^{1/2} \\
&\leq \sum_j V_j \|\vec{u}_j\| \|\mathcal{K}_\kappa \vec{u}\|_{L^2(\Omega)^d} \sqrt{D_\kappa^\delta} \\
&\leq \sqrt{D_\kappa^\delta} \|\mathcal{K}_\kappa \vec{u}\|_{L^2(\Omega)^d} \|\mathcal{K}_\kappa \vec{u}\|_{L^1(\Omega)^d} \leq \sqrt{D_\kappa^\delta \operatorname{vol}(\Omega)} \|\mathcal{K}_\kappa \vec{u}\|^2_{L^2(\Omega)^d}.
\end{aligned}
$$

总而言之,

$$
\begin{aligned}
&\left| \sum_i \int_{\Omega_i} \sum_{j \neq i} \int_{\Omega_j} w_{ij} \|x_j - x_i\| \left((x_j - x_i)^\top (\vec{u}_j - \vec{u}_i) \right)^2 \, \mathbf{d}x' \, \mathbf{d}x \right. \\
&\qquad \left. - \sum_i \int_{\Omega_i} \sum_{j \neq i} \int_{\Omega_j} \chi_{[0,\delta)}(\|x' - x\|) \|x' - x\| \left((x' - x)^\top (\vec{u}_j - \vec{u}_i) \right)^2 \, \mathbf{d}x' \, \mathbf{d}x \right| \\
&\leq C^{\Omega,\delta,\kappa} \|\mathcal{K}_\kappa \vec{u}\|^2_{L^2(\Omega)^d}.
\end{aligned} \tag{37}
$$

对于某些 $C^{\Omega,\delta,\kappa} \overset{\kappa \searrow}{\longrightarrow} 0$。这意味着

$$
\begin{aligned}
&\sum_i \int_{\Omega_i} \sum_{j \neq i} \int_{\Omega_j} w_{ij} \|x_j - x_i\| \left((x_j - x_i)^\top (\vec{u}_j - \vec{u}_i) \right)^2 \, \mathbf{d}x' \, \mathbf{d}x \\
&\geq \left| \int_\Omega \int_\Omega \chi_{[0,\delta)}(\|x' - x\|) \|x' - x\| \left((x' - x)^\top ([\mathcal{K}_\kappa \vec{u}](x') - [\mathcal{K}_\kappa \vec{u}](x)) \right)^2 \, \mathbf{d}x' \, \mathbf{d}x \right. \\
&\quad - \left| \sum_i \int_{\Omega_i} \sum_{j \neq i} \int_{\Omega_j} w_{ij} \|x_j - x_i\| \left((x_j - x_i)^\top (\vec{u}_j - \vec{u}_i) \right)^2 \, \mathbf{d}x' \, \mathbf{d}x \right. \\
&\qquad \left. \left. - \sum_i \int_{\Omega_i} \sum_{j \neq i} \int_{\Omega_j} \chi_{[0,\delta)}(\|x' - x\|) \|x' - x\| \left((x' - x)^\top (\vec{u}_j - \vec{u}_i) \right)^2 \, \mathbf{d}x' \, \mathbf{d}x \right| \right|.
\end{aligned} \tag{38}
$$

选择 κ 使得 $C^{\Omega,\delta,\kappa'^2} < q^2 c^2$ 对于所有 $0 < \kappa' < \kappa$ 以及某个 $0 < q < 1$，便可利用 (35) 对上文 (38) 的最后一行进行如下估计,

$$
\begin{aligned}
&\geq \int_\Omega \int_\Omega \chi_{[0,\delta)}(\|x' - x\|) \|x' - x\| \left((x' - x)^\top ([\mathcal{K}_\kappa \vec{u}](x') - [\mathcal{K}_\kappa \vec{u}](x)) \right)^2 \, \mathbf{d}x' \, \mathbf{d}x \\
&\quad - \left| \sum_i \int_{\Omega_i} \sum_{j \neq i} \int_{\Omega_j} w_{ij} \|x_j - x_i\| \left((x_j - x_i)^\top (\vec{u}_j - \vec{u}_i) \right)^2 \, \mathbf{d}x' \, \mathbf{d}x \right. \\
&\qquad \left. - \sum_i \int_{\Omega_i} \sum_{j \neq i} \int_{\Omega_j} \chi_{[0,\delta)}(\|x' - x\|) \|x' - x\| \left((x' - x)^\top (\vec{u}_j - \vec{u}_i) \right)^2 \, \mathbf{d}x' \, \mathbf{d}x \right| \\
&\geq (c - C^{\Omega,d,\delta,\kappa'}) \|\mathcal{K}_\kappa \vec{u}\|^2_{L^2(\Omega)^d} \geq (1 - q) c \|\mathcal{K}_\kappa \vec{u}\|^2_{L^2(\Omega)^d}.
\end{aligned}
$$

□

推论 3.22 (数值算子的统一强制性) 设假设 3 3 成立。当 $1 >> \kappa > 0$ 足够小时，对所有 $\vec{u} \in \mathbf{V}_\kappa$，有

$$
c^{\mathrm{num}} \|\mathcal{K}_\kappa \vec{u}\|^2_{L^2} \leq \vec{u}^\top \vec{B}^{\mathrm{num}} \vec{u},
$$

对某个 $c^{\mathrm{num}} > 0$。

证明。 由引理 3.19、引理 3.20，最后结合引理 3.21 即可得出。

□

注 3.23 如假设 3.3 中的 A1 所述，权函数 ω 的具体选取用于证明引理 3.11 中权函数上的离散积分具有一致界、引理 3.14 中的界和收敛结果，以及引理 3.16 中为命题 3.15 的有界性和命题 3.17 的收敛性所需的界。此外，它还用于引理 3.21 中关于强制性的论断。不过，引理 3.9、3.20 和 3.19 也可以类似地推广到其他 ω。

因此，显然，只要能够证明适当的有界性、收敛性和强制性结果，对于其他 ω 的选取也可以证明收敛。尤其是，若 $\omega = \chi_{[0,\delta)}(\mathrm{k}x' - x\mathrm{k})\rho(x' - x)$，其中某个满足假设 1.1 的 $\rho \in C^0(\mathrm{R}^d)$，则 ρ 在 0 的每个紧邻域上均有界且一致连续。利用这一点，引理 3.11、3.14，以及引理 3.16、命题 3.17 和引理 3.21 中相应结果的证明可大为简化，方法是利用

$$\|\rho\|_{L^\infty} < \infty \quad \text{and} \quad \|R\|_{L^\infty(\Omega\times\Omega)} \xrightarrow{\kappa\searrow 0} 0$$

for

$$R(x', x) := \sum_{\substack{i \\ j\neq i}} \chi_{\Omega_i}(x)\chi_{\Omega_j}(x')\rho(x_i - x_j) - \rho(x' - x).$$

最重要的是， [18] 中引理 3.21 用到的命题 2 和方程 (35) 仍然成立，此外， [18] 中用于拆分连续算子的引理 5（见式 (26)）也仍然成立。
换言之，第 3 章中假设的奇异权函数，使用 $\rho(\zeta) = \frac{1}{\|\zeta\|} \notin C^0(\mathrm{R}^d)$，代表了一种更困难、但在实际中很有意义的特殊情形。因此，上述证明很容易简化，从而得到适用于由 $\rho \in C^0(\mathrm{R}^d)$ 定义的更正则权函数的相应收敛结果，这并不令人意外。具体而言，通过调整第 3 章中的步骤，可以针对以下选择得到类似的收敛结果。

1. Constant functions: $\rho \equiv 1$ yielding $\omega(x' - x) = \chi_{[0,\delta)}(\|x' - x\|)$.
2. 某些圆锥函数（见 [2], [8]）

$$\omega(\zeta) = \chi_{[0,\delta)}(\|\zeta\|)\rho(\zeta) := C\max\Big(0, 1 - \frac{\|\zeta\|}{\delta}\Big).$$

3. 多项式（见 [22], [20], [21]）

$$\omega(\zeta) = \chi_{[0,\delta)}(\|\zeta\|)\rho(\zeta) := \chi_{[0,\delta)}(\|\zeta\|)\frac{p_n(\|\zeta\|)}{\|\zeta\|^\alpha} \tag{39}$$

对于某个多项式 $p_n : [0, \delta] \to \mathrm{R}_{\geq 0}$，使得满足假设 1.1，且$\alpha \in \{0,1\}$。 $\alpha = 0$ 的证明可由 $p_n(\mathrm{k}\cdot\mathrm{k}) \in C^0(\mathrm{R}^d)$ 得出。若 $\alpha = 1$，则

$$\frac{p_n(\|\zeta\|)}{\|\zeta\|^\alpha} = \frac{C}{\|\zeta\|} + p_n'(\|\zeta\|)$$

对于另一个多项式 p'_n(kζk)。由于引理 3.21、3.16、命题 3.17 中除 m^{num}、α^{num} 和 τ^{num} 之外的项，以及引理 3.14 中的 $m(x) - m^{\mathrm{num}}(x_i)$ 项关于 ρ 都是（次）线性的，因此可以将使用 ρ(kζk) $= \frac{1}{\|\zeta\|}$ 的证明与使用 ρ(kζk) $= p'_n$(kζk) 的证明结合起来，从而也利用$\alpha = 1$ 得出情形（39）的收敛性。注意，引理 3.14 处理了 m^{num}、α^{num} 和τ^{num} 项的收敛性。

致谢

本研究由德国研究联合会（DFG，德国研究基金会）资助，项目编号为 377472739/GRK 2423/2-2023。作者对这项支持深表感谢。

作者声明不存在利益冲突。

参考文献

[1] Hans Wilhelm Alt. 线性泛函分析. Springer Berlin, Heidelberg, 2012. ISBN 978-3-642-22260-3. URL https://doi.org/10.1007/978-3-642-22261-0.

[2]Florin Bobaru、Mijia Yang、Leonardo Frota Alves、Stewart A. Silling、Ebrahim Askari 和 Jifeng Xu。 一维近场动力学中的收敛、自适应细化与尺度变换。《工程数值方法国际期刊》，77(6):852–877，2009。doi: https://doi.org/10.1002/nme.2439。URL https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/nme.2439.[3] Florin Bobaru、John T. Foster、Philippe H. Geubelle 和 Stewart A. Silling。《近场动力学建模手册（第*1*版）》。Chapman and Hall/CRC，2016。URL https://doi.org/10.1201/9781315373331.[4] Qiang Du、Max Gunzburger、R. B. Lehoucq 和 Kun Zhou。非局部向量微积分、非局部体积约束问题与非局部平衡定律。《应用科学中的数学模型与方法》，23(03):493–540，2013。doi: 10.1142/S0218202512500546。URL https://doi.org/10.1142/S0218202512500546.[5] Qiang Du、Yunzhe Tao 和 Xiaochuan Tian。具有键断裂的断裂力学近场动力学模型。《弹性学杂志》，132(2):197–218，2018年8月。ISSN 1573-2681。doi: 10.1007/s10659-017-9661-2。URLhttps://doi.org/10.1007/s10659-017-9661-2.

[6] Otto Forster。分析学 *3*。Springer Spektrum Wiesbaden，2017。ISBN 978-3-658-16746-2。URL https://doi.org/10.1007/978-3-658-16746-2.[7]Kai Friebertshäuser、Christian Wieners 和 Kerstin Weinberg。基于连续体运动学的近场动力学中的动态断裂。《*AIMS*材料科学》，9(6):791–807，2022。ISSN 2372-0484。doi: 10.3934/matersci.2022049。URL https://www.aimspress.com/article/doi/10.3934/matersci.2022049。

[8]Youn Doh Ha 和 Florin Bobaru。利用近场动力学研究动态裂纹扩展与裂纹分叉。《国际断裂学杂志》，162(1): 229–244，2010年3月。ISSN 1573-2673。doi: 10.1007/s10704-010-9442-4。URLhttps://doi.org/10.1007/s10704-010-9442-4.[9] A. Javili、A.T. McBride 和 P. Steinmann。受连续体运动学启发的近场动力学：力学问题。《固体力学与物理学杂志》，131:125–146，2019。ISSN 0022-5096。doi: https://doi.org/10.1016/j.jmps.2019.06.016。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022509619300456.[10]P. K. Jha 和 R. Lipton。非局部动态断裂模型的有限元近似。《离散与连续动力系统*B*辑》，26 (3):1675–1710，2021。ISSN 1531-3492。doi: 10.3934/dcdsb.2020178。URL https://www.aimsciences.org/article/id/7e1359b9-fe44-49f6-be2f-f88830a1

746d。

[11] Prashant K Jha 和 Robert Lipton。赫尔德空间中非局部断裂模型的数值分析。*SIAM*数值分析期刊，56(2):906–941，2018。

[12]Prashant K. Jha 和 Robert Lipton。基于状态的近场动力学断裂模型有限差分近似的数值收敛性。应用力学与工程中的计算方法，351:184–225，2019。ISSN 0045-7825。doi: https://doi.org/10.1016/j.cma.2019.03.024。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782519301537。

[13]Adnan Kefal、Abdolrasoul Sohouli、Erkan Oterkus、Mehmet Yildiz 和 Afzal Suleman。利用近场动力学对含裂纹结构进行拓扑优化。《连续介质力学与热力学》，31(6):1645–1672，2019年11月。ISSN 1432-0959。doi: 10.1007/s00161-019-00830-x。URLhttps://doi.org/10.1007/s00161-019-00830-x。

[14] Robert Lipton。内聚动力学与脆性断裂。《弹性学杂志》，124 (2):143–191，2016年8月。ISSN 1573-2681。doi: 10.1007/s10659-015-9564-z。URL https://doi.org/10.1007/s10659-015-9564-z。

[15] Robert Lipton、Eyad Said 和 Prashant K. Jha。基于非局部双稳势的动态脆性断裂：一种态基模型，第1265–1291页。Springer International Publishing，Cham，2019。ISBN 978-3-319-58729-5。doi: 10.1007/ 978-3-319-58729-5_33。URL https://doi.org/10.1007/978-3-319-58729-5_33。

[16]Robert P. Lipton 和 Prashant K. Jha。非局部弹性动力学与断-裂。非线性微分方程与应用 *NoDEA*，28(3):23，2021年3月。ISSN 1420-9004。doi: 10.1007/s00030-021-00683-x。URLhttps://doi.org/10.1007/s00030-021-00683-x。

[17]Hengjie Liu 和 Ziguang Chen。《近场动力学中单点求积离散化：来自蒙特卡洛积分的新视角》。计算机物理通讯，298：109115，2024。ISSN 0010-4655。doi: https://doi.org/10.1016/j.cpc.2024.109115。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0010465524000389。

[18]Tadele Mengesha 和 Qiang Du。线性近场动力学纳维方程的非局部约束值问题。《弹性学杂志》，116(1)：27–51，2014年6月。ISSN 1573-2681。doi：10.1007/s10659-013-9456-z。URLhttps://doi.org/10.1007/s10659-013-9456-z。

[19]Francesco Scabbia、Mirco Zaccariotto 和 Ugo Galvanetto。三维近场动力学中部分体积的精确计算。工程计算，39(1)：959–991，2023年2月。ISSN 1435-5663。doi：10.1007/s00366-022-01725-3。URLhttps://doi.org/10.1007/s00366-022-01725-3。

[20]Pablo Seleson。基于解析计算改进二维近场动力学模型的单点求积算法。《计算机方法在应用力学与工程》，282：184–217，2014。ISSN 0045-7825。doi：https://doi.org/10.1016/j.cma.2014.06.016。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782514002023。

[21] Pablo Seleson 和 David J. Littlewood。无网格近场动力学模拟的收敛性研究。《计算机与数学及其应用》，71(11)：2432–2448，2016。ISSN 0898-1221。doi：https://doi.org/10.1016/j.camwa.2015.12.021。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0898122115005891。

[22] Pablo Seleson 和 David J. Littlewood。提高无网格近场动力学离散收敛性的数值工具，第 1–27 页。Springer International Publishing，Cham，2018。ISBN 978-3-319-22977-5。doi: 10.1007/978-3-319-22977-5_39-1。URLhttps://doi.org/10.1007/978-3-319-22977-5_39-1。

[23] Pablo Seleson 和 Michael Parks。影响函数在近场动力学理论中的作用。《多尺度计算工程国际期刊》，9：689–706，2011 年 1 月。doi: 10.1615/IntJMultCompEng.2011002527。

[24] S. A. Silling。近场动力学状态线性化理论。《弹性学杂志》，99 (1)：85–111，2010 年 3 月。ISSN 1573-2681。doi: 10.1007/s10659-009-9234-0。URL https://doi.org/10.1007/s10659-009-9234-0。

[25]S. A. Silling、M. Epton、O. Weckner、J. Xu 和 E. Askari。近场动力学状态与本构建模。《弹性学杂志》，88(2):151–184，2007年8月。ISSN 1573-2681。doi: 10.1007/s10659-007-9125-1。URLhttps://doi.org/10.1007/s10659-007-9125-1。

[26] S.A. Silling。针对不连续性和长程力的弹性理论重构。《力学与固体物理学杂志》，48:175–209，2000年。

[27]S.A. Silling 和 E. Askari。一种基于固体力学近场动力学模型的无网格方法。《计算机与结构》，83(17):1526–1535，2005年。ISSN 0045-7949。doi: https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2004.11.026。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045794905000805。《无网格方法进展》。

[28]S.A. Silling 和 R.B. Lehoucq。《固体力学中的近场动力学理论》。载于 Hassan Aref 和 Erik van der Giessen 编，《应用力学进展》第 44 卷《应用力学进展》，第 73–168 页。Elsevier，2010。doi：https://doi.org/10.1016/S0065-2156(10)44002-8。URLhttps://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0065215610440028。

[29] Gérald Tenenbaum。《解析与概率数论导论：第三版》。美国数学会，2015。ISBN 978-0-8218-9854-3。URLhttps://doi.org/10.1090/gsm/163。

[30] Nathaniel Trask、Huaiqian You、Yue Yu 与 Michael L. Parks。一种适用于非局部问题的渐近相容无网格求积公式及其在近场动力学中的应用。《计算机方法在应用力学与工程中的应用》，343:151–165，2019。ISSN 0045-7825。doi: https://doi.org/10.1016/j.cma.2018.08.016。URLhttps://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S004578251830402X。

[31]Jiangming Zhao、Siavash Jafarzadeh、Ziguang Chen 与 Florin Bobaru。在具有奇异性及任意区域上的扩散近场动力学模型中施加局部边界条件。工程计算，41(1):247–266，2025年2月。ISSN 1435-5663。doi: 10.1007/s00366-024-01995-z。URLhttps://doi.org/10.1007/s00366-024-01995-z。

[32]Kun Zhou 和 Qiang Du. 具有非局部边界条件的线性近场动力学模型的数学与数值分析。《*SIAM* 数值分析杂志》，48(5):1759–1780，2010。ISSN 00361429。URL http://www.jstor.org/stable/41149024。

A 附录

引理 A.1引理 2.4 成立。

证明。 我们稍作修改，采用 [6], §3, Satz 8 的方法：适当扩展闭立方体，再取其内部，将其替换为开立方体。由此得到一列边长为有理数的开立方体 W_n $p_n/q_n,\ p_n, q_n \in \mathrm{N}$，对每个满足以下条件的 $\epsilon > 0$,

$$A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} W_n,\ \mathrm{vol}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} W_n\right) < \epsilon.$$

由于 A 的紧性以及 W_n的开性，只需有限个立方体即可。令 F_ϵ 为这组有限立方体的指标集合。接着，将每个立方体细分为边长为 $(\mathrm{lcm}_{n\in F_\epsilon} q_n)^{-1}$ 的小立方体。再将这些立方体扩展为体积相等的半闭立方体，证明即告完成。 □

引理 A.2 引理 3.9 中的陈述成立。

证明。 设 $x \in \Omega_i$ 与 $\vec{u} \in \mathrm{R}^{d|I^\kappa|}$，则

$$\begin{aligned}
-[\mathcal{L}_\kappa^{\mathrm{num}} \mathcal{K}_\kappa \vec{u}](x) &= \frac{1}{V_i}\sum_{j\neq i} B_{ij}^{\mathrm{num}} \vec{u}_j + \frac{1}{V_i} B_{ii}^{\mathrm{num}} \vec{u}_i \\
&= \frac{1}{V_i}\sum_{j\neq i}\left(\sum_{m\notin\{i,j\}} \mathcal{I}_{mij}^{2,\mathrm{num}} - \sum_{m\neq i} \mathcal{I}_{imj}^{2,\mathrm{num}} - \sum_{m\neq j} \mathcal{I}_{jim}^{2,\mathrm{num}} - \mathcal{I}_{ij}^{1,\mathrm{num}}\right)\vec{u}_j \\
&\quad + \frac{1}{V_i}\left(\sum_{n\neq i}\sum_{m\neq i} \mathcal{I}_{inm}^{2,\mathrm{num}} + \sum_{m\neq i} \mathcal{I}_{mii}^{2,\mathrm{num}} + \sum_{m\neq i} \mathcal{I}_{im}^{1,\mathrm{num}}\right)\vec{u}_i.
\end{aligned}$$

分离出涉及$\mathbf{I}^{1,\mathrm{num}}$的各项，则有

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{V_i}\sum_{j\neq i}\mathcal{I}_{ij}^{1,\mathrm{num}}(\vec{u}_i-\vec{u}_j)\\
&=\frac{1}{V_i}\sum_{j\neq i}V_iV_j^{(i)}\rho(x_j-x_i)(\alpha^{\mathrm{num}}(x_i)+\alpha^{\mathrm{num}}(x_j))\frac{(x_j-x_i)\,(x_j-x_i)^\top}{\|x_j-x_i\|\|x_j-x_i\|}(\vec{u}_i-\vec{u}_j)\ \mathbf{d}x'\ \mathbf{d}x,
\end{aligned}
$$

这就是 $-\mathbf{L}_1^{\mathrm{num}}$项。对于其余各项，

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{V_i}\sum_{j\neq i}\left(\sum_{m\notin\{i,j\}}\mathcal{I}_{mij}^{2,\mathrm{num}}-\sum_{m\neq i}\mathcal{I}_{imj}^{2,\mathrm{num}}-\sum_{m\neq j}\mathcal{I}_{jim}^{2,\mathrm{num}}\right)\vec{u}_j\\
&\quad+\frac{1}{V_i}\left(\sum_{n\neq i}\sum_{m\neq i}\mathcal{I}_{inm}^{2,\mathrm{num}}+\sum_{m\neq i}\mathcal{I}_{mii}^{2,\mathrm{num}}\right)\vec{u}_i\\
&=\frac{1}{V_i}\sum_{j\neq i}\Bigg(\sum_{m\notin\{i,j\}}V_mV_i^{(m)}V_j^{(m)}\tau^{\mathrm{num}}(x_m)\rho(x_i-x_m)\rho(x_j-x_m)\,(x_i-x_m)\,(x_j-x_m)^\top\\
&\qquad\qquad-\sum_{m\neq i}V_iV_m^{(i)}V_j^{(i)}\tau^{\mathrm{num}}(x_i)\rho(x_m-x_i)\rho(x_j-x_i)\,(x_m-x_i)\,(x_j-x_i)^\top\\
&\qquad\qquad-\sum_{m\neq j}V_jV_i^{(j)}V_m^{(j)}\tau^{\mathrm{num}}(x_j)\rho(x_i-x_j)\rho(x_m-x_j)\,(x_i-x_j)\,(x_m-x_j)^\top\Bigg)\vec{u}_j\\
&\quad+\frac{1}{V_i}\Bigg(\sum_{n\neq i}\sum_{m\neq i}V_iV_n^{(i)}V_m^{(i)}\tau^{\mathrm{num}}(x_i)\rho(x_n-x_i)\rho(x_m-x_i)\,(x_n-x_i)\,(x_m-x_i)^\top\\
&\qquad\qquad+\sum_{m\neq i}V_mV_i^{(m)}V_i^{(m)}\tau^{\mathrm{num}}(x_m)\rho(x_i-x_m)\rho(x_i-x_m)\,(x_i-x_m)\,(x_i-x_m)^\top\Bigg)\vec{u}_i\\
&=-\mathcal{L}_2^{\mathrm{num},x}(\vec{u}_i-\vec{u}_j)\\
&\quad+\frac{1}{V_i}\sum_{j\neq i}\Bigg(\sum_{m\notin\{i,j\}}V_mV_i^{(m)}V_j^{(m)}\tau^{\mathrm{num}}(x_m)\rho(x_i-x_m)\rho(x_j-x_m)\,(x_i-x_m)\,(x_j-x_m)^\top\\
&\qquad\qquad-\sum_{m\neq\{j,i\}}V_jV_i^{(j)}V_m^{(j)}\tau^{\mathrm{num}}(x_j)\rho(x_i-x_j)\rho(x_m-x_j)\,(x_i-x_j)\,(x_m-x_j)^\top\Bigg)\vec{u}_j\\
&\quad+\frac{1}{V_i}\Bigg(\sum_{j\neq i}V_jV_i^{(j)}V_i^{(j)}\tau^{\mathrm{num}}(x_j)\rho(x_i-x_j)\rho(x_i-x_j)\,(x_i-x_j)\,(x_i-x_j)^\top\Bigg)(\vec{u}_i-\vec{u}_j)\\
&=-\mathcal{L}_2^{\mathrm{num},x}(\vec{u}_i-\vec{u}_j)-\mathcal{L}_2^{\mathrm{num},x'}(\vec{u}_i-\vec{u}_j)-\mathcal{L}_2^{\mathrm{num},p}(\vec{u}_i-\vec{u}_j)\\
&\quad+\frac{1}{V_i}\Bigg(\sum_{j\neq i}\sum_{m\notin\{i,j\}}V_mV_i^{(m)}V_j^{(m)}\tau^{\mathrm{num}}(x_m)\rho(x_i-x_m)\rho(x_j-x_m)\,(x_i-x_m)\,(x_j-x_m)^\top\\
&\qquad\qquad-\sum_{j\neq i}\sum_{m\neq\{j,i\}}V_jV_i^{(j)}V_m^{(j)}\tau^{\mathrm{num}}(x_j)\rho(x_i-x_j)\rho(x_m-x_j)\,(x_i-x_j)\,(x_m-x_j)^\top\Bigg)\vec{u}_i,
\end{aligned}
$$

其中，通过交换最后两行求和中的指标，

$$
\frac{1}{V_i}\Bigg(\sum_{j\neq i}\sum_{m\notin\{i,j\}}V_mV_i^{(m)}V_j^{(m)}\tau^{\mathrm{num}}(x_m)\rho(x_i-x_m)\rho(x_j-x_m)\,(x_i-x_m)\,(x_j-x_m)^\top
$$

$$
\left.
-\sum_{j\neq i}\sum_{m\neq\{j,i\}} V_j V_i^{(j)} V_m^{(j)} \tau^{\mathrm{num}}(x_j)\rho(x_i-x_j)\rho(x_m-x_j)\,(x_i-x_j)\,(x_m-x_j)^\top
\right)
$$

$$
=\frac{1}{V_i}\left(
\sum_{j\neq i}\sum_{m\notin\{i,j\}} V_m V_i^{(m)} V_j^{(m)} \tau^{\mathrm{num}}(x_m)\rho(x_i-x_m)\rho(x_j-x_m)\,(x_i-x_m)\,(x_j-x_m)^\top
\right.
$$

$$
\left.
-\sum_{j\neq i}\sum_{m\neq\{j,i\}} V_m V_i^{(m)} V_j^{(m)} \tau^{\mathrm{num}}(x_m)\rho(x_i-x_m)\rho(x_j-x_m)\,(x_i-x_m)\,(x_j-x_m)^\top
\right)=0.
$$

□

引理 A.3 引理 3.19 中的结论成立。

证明。我们首先使用引理 A.2 中给出的显式形式,

$$
\begin{aligned}
&\vec{u}^\top \vec{B}^{\mathrm{num}}\vec{u} = \langle \mathcal{K}_\kappa \vec{u}, -\mathcal{L}^{\mathrm{num}}\mathcal{K}_\kappa\vec{u}\rangle_{L^2(\Omega)^d}\\
&=\sum_i \int_{\Omega_i} \vec{u}_i^\top \sum_{j\neq i}\int_{\Omega_j} w_{ij}\rho(x_j-x_i)(\alpha^{\mathrm{num}}(x_i)+\alpha^{\mathrm{num}}(x_j))\tfrac{(x_j-x_i)(x_j-x_i)^\top}{\|x_j-x_i\|\|x_j-x_i\|}(\vec{u}_i-\vec{u}_j)\,\mathbf{d}x'\,\mathbf{d}x\\
&\quad+\sum_i \int_{\Omega_i} \vec{u}_i^\top \sum_{j\neq i}\int_{\Omega_j}\sum_{m\notin\{i,j\}}\int_{\Omega_m} w_{mj}w_{mi}\tau^{\mathrm{num}}(x_m)\\
&\qquad\qquad\times\rho(x_i-x_m)\rho(x_j-x_m)\,(x_i-x_m)\,(x_j-x_m)^\top(\vec{u}_j-\vec{u}_i)\,\mathbf{d}p\,\mathbf{d}x'\,\mathbf{d}x\\
&\quad-\sum_i \int_{\Omega_i} \vec{u}_i^\top \sum_{j\neq i}\int_{\Omega_j}\sum_{m\neq i}\int_{\Omega_m} w_{ij}w_{im}\tau^{\mathrm{num}}(x_i)\\
&\qquad\qquad\times\rho(x_m-x_i)\rho(x_j-x_i)\,(x_m-x_i)\,(x_j-x_i)^\top(\vec{u}_j-\vec{u}_i)\,\mathbf{d}p\,\mathbf{d}x'\,\mathbf{d}x\\
&\quad-\sum_i \int_{\Omega_i} \vec{u}_i^\top \sum_{j\neq i}\int_{\Omega_j}\sum_{m\neq j}\int_{\Omega_m} w_{jm}w_{ji}\tau^{\mathrm{num}}(x_j)\\
&\qquad\qquad\times\rho(x_i-x_j)\rho(x_m-x_j)\,(x_i-x_j)\,(x_m-x_j)^\top(\vec{u}_j-\vec{u}_i)\,\mathbf{d}p\,\mathbf{d}x'\,\mathbf{d}x.
\end{aligned}
$$

将总和在α 项处拆分并重新命名常数后，第一个加数很容易转化为如下形式,

$$
\begin{aligned}
&\sum_i \int_{\Omega_i} \vec{u}_i^\top \sum_{j\neq i}\int_{\Omega_j} w_{ij}\rho(x_j-x_i)(\alpha^{\mathrm{num}}(x_i)+\alpha^{\mathrm{num}}(x_j))\frac{(x_j-x_i)\,(x_j-x_i)^\top}{\|x_j-x_i\|\|x_j-x_i\|}(\vec{u}_i-\vec{u}_j)\,\mathbf{d}x'\,\mathbf{d}x\\
&=\sum_i \int_{\Omega_i} \vec{u}_i^\top \sum_{j\neq i}\int_{\Omega_j} w_{ij}\rho(x_j-x_i)\alpha^{\mathrm{num}}(x_i)\frac{(x_j-x_i)\,(x_j-x_i)^\top}{\|x_j-x_i\|\|x_j-x_i\|}(\vec{u}_i-\vec{u}_j)\,\mathbf{d}x'\,\mathbf{d}x\\
&\quad+\sum_i \int_{\Omega_i} \vec{u}_i^\top \sum_{j\neq i}\int_{\Omega_j} w_{ij}\rho(x_j-x_i)\alpha^{\mathrm{num}}(x_j)\frac{(x_j-x_i)\,(x_j-x_i)^\top}{\|x_j-x_i\|\|x_j-x_i\|}(\vec{u}_i-\vec{u}_j)\,\mathbf{d}x'\,\mathbf{d}x\\
&=\sum_i \int_{\Omega_i} (\vec{u}_i-\vec{u}_j)^\top \sum_{j\neq i}\int_{\Omega_j} w_{ij}\rho(x_j-x_i)\alpha^{\mathrm{num}}(x_i)\frac{(x_j-x_i)\,(x_j-x_i)^\top}{\|x_j-x_i\|\|x_j-x_i\|}(\vec{u}_i-\vec{u}_j)\,\mathbf{d}x'\,\mathbf{d}x\\
&=\sum_i \int_{\Omega_i} \alpha^{\mathrm{num}}(x_i)\sum_{j\neq i}\int_{\Omega_j} w_{ij}\rho(x_j-x_i)\left(\frac{(x_j-x_i)^\top(\vec{u}_i-\vec{u}_j)}{\|x_j-x_i\|}\right)^2\,\mathbf{d}x'\,\mathbf{d}x.
\end{aligned}
$$

其余各项在重新命名并平移指标后，等于

$$\begin{aligned}
&\sum_j \sum_{m\neq j} \sum_{i\notin\{m,j\}} \int_{\Omega_j}\int_{\Omega_m}\int_{\Omega_i} \vec{u}_j^{\top} w_{im} w_{ij} \tau^{\mathrm{num}}(x_i) \\
&\qquad\qquad \times \rho(x_j - x_i)\rho(x_m - x_i)\,(x_j - x_i)\,(x_m - x_i)^{\top}\,(\vec{u}_m - \vec{u}_j)\ \mathbf{d}p\ \mathbf{d}x'\ \mathbf{d}x \\
&-\sum_i \sum_{j\neq i} \sum_{m\neq i} \int_{\Omega_i}\int_{\Omega_j}\int_{\Omega_m} \vec{u}_i^{\top} w_{im} w_{ij} \tau^{\mathrm{num}}(x_i) \\
&\qquad\qquad \times \rho(x_m - x_i)\rho(x_j - x_i)\,(x_m - x_i)\,(x_j - x_i)^{\top}\,(\vec{u}_j - \vec{u}_i)\ \mathbf{d}p\ \mathbf{d}x'\ \mathbf{d}x \\
&+\sum_j \sum_{i\neq j} \sum_{m\neq i} \int_{\Omega_j}\int_{\Omega_i}\int_{\Omega_m} \vec{u}_j^{\top} w_{im} w_{ij} \tau^{\mathrm{num}}(x_i) \\
&\qquad\qquad \times \rho(x_j - x_i)\rho(x_m - x_i)(x_j - x_i)(x_m - x_i)\,(\vec{u}_j^{\top} - \vec{u}_i)\ \mathbf{d}p\,\mathbf{d}x'\,\mathbf{d}x
\end{aligned}$$

将求和顺序重新排列后，把第 1 项与第 3 项相加，得到

$$\begin{aligned}
=&\sum_j \sum_{m\neq j} \sum_{i\notin\{m,j\}} \int_{\Omega_j}\int_{\Omega_m}\int_{\Omega_i} \vec{u}_j^{\top} w_{im} w_{ij} \tau^{\mathrm{num}}(x_i) \\
&\qquad\qquad \times \rho(x_j - x_i)\rho(x_m - x_i)\,(x_j - x_i)\,(x_m - x_i)^{\top}\,(\vec{u}_m - \vec{u}_i)\ \mathbf{d}p\ \mathbf{d}x'\ \mathbf{d}x \\
&-\sum_i \sum_{j\neq i} \sum_{m\neq i} \int_{\Omega_i}\int_{\Omega_j}\int_{\Omega_m} \vec{u}_i^{\top} w_{im} w_{ij} \tau^{\mathrm{num}}(x_i) \\
&\qquad\qquad \times \rho(x_m - x_i)\rho(x_j - x_i)\,(x_m - x_i)\,(x_j - x_i)^{\top}\,(\vec{u}_j - \vec{u}_i)\ \mathbf{d}p\ \mathbf{d}x'\ \mathbf{d}x \\
&+\sum_j \sum_{i\neq j} \int_{\Omega_j}\int_{\Omega_i}\int_{\Omega_j} \vec{u}_j^{\top} w_{ij}^2 \tau^{\mathrm{num}}(x_i) \\
&\qquad\qquad \times \rho(x_j - x_i)\rho(x_j - x_i)\,(x_j - x_i)\,(x_j - x_i)^{\top}\,(\vec{u}_j - \vec{u}_i)\ \mathbf{d}p\ \mathbf{d}x'\ \mathbf{d}x
\end{aligned}$$

将求和顺序重新排列后，把前两项相加，得到

$$\begin{aligned}
=&\sum_j \sum_{m\neq j} \sum_{i\notin\{j,m\}} \int_{\Omega_j}\int_{\Omega_m}\int_{\Omega_i} w_{ij} w_{im} \tau^{\mathrm{num}}(x_i) \rho(x_j - x_i)\,(x_j - x_i)^{\top}\,(\vec{u}_j - \vec{u}_i) \\
&\qquad\qquad \times \rho(x_m - x_i)\,(x_m - x_i)^{\top}\,(\vec{u}_m - \vec{u}_i)\ \mathbf{d}p\ \mathbf{d}x'\ \mathbf{d}x \\
&-\sum_i \sum_{j\neq i} \int_{\Omega_i}\int_{\Omega_j}\int_{\Omega_j} w_{ij}^2 \vec{u}_i^{\top} \tau^{\mathrm{num}}(x_i) \\
&\qquad\qquad \times \rho(x_j - x_i)\rho(x_j - x_i)\,(x_j - x_i)\,(x_j - x_i)^{\top}\,(\vec{u}_j - \vec{u}_i)\ \mathbf{d}p\ \mathbf{d}x'\ \mathbf{d}x \\
&+\sum_j \sum_{i\neq j} \int_{\Omega_j}\int_{\Omega_i}\int_{\Omega_j} w_{ij}^2 \vec{u}_j^{\top} \tau^{\mathrm{num}}(x_i) \\
&\qquad\qquad \times \rho(x_j - x_i)\rho(x_j - x_i)(x_j - x_i)(x_j - x_i)\,(\vec{u}_j^{\top} - \vec{u}_i)\ \mathbf{d}p\,\mathbf{d}x'\,\mathbf{d}x
\end{aligned}$$

将所有加项相加，先合并最后两项，再合并其余各项，可得

$$\begin{aligned}
&= \sum_i \int_{\Omega_i} \tau^{\mathrm{num}}(x_i) \sum_{j\neq i} \int_{\Omega_j} w_{ij}\rho(x_j - x_i)\,(x_j - x_i)^{\top}\,(\vec{u}_j - \vec{u}_i)\ \mathbf{d}x' \\
&\qquad\qquad \times \sum_{m\neq i} \int_{\Omega_m} w_{im}\rho(x_m - x_i)\,(x_m - x_i)^{\top}\,(\vec{u}_m - \vec{u}_i)\ \mathbf{d}p\ \mathbf{d}x \\
&= \sum_i \int_{\Omega_i} \tau^{\mathrm{num}}(x_i) \left(\sum_{j\neq i} \int_{\Omega_j} w_{ij}\rho(x_j - x_i)\,(x_j - x_i)^{\top}\,(\vec{u}_j - \vec{u}_i)\ \mathbf{d}x' \right)^2 \mathbf{d}x.
\end{aligned}$$

结合前面的各项，我们得到 $\vec{u}^\top \vec{B}^{\mathrm{num}} \vec{u}$ 的以下形式，

$$
\begin{aligned}
&\sum_i \int_{\Omega_i} \left(k(x_i) - \frac{l(x_i)}{d^2} \right) \left(\frac{d}{m^{\mathrm{num}}(x_i)} \sum_{j \neq i} \int_{\Omega_j} w_{ij} \rho(x_j - x_i) \left(x_j - x_i\right)^\top \left(\vec{u}_j - \vec{u}_i\right) \mathbf{d}x' \right)^2 \\
&\quad + \alpha^{\mathrm{num}}(x_i) \sum_{j \neq i} \int_{\Omega_j} w_{ij} \rho(x_j - x_i) \left(\frac{\left(x_j - x_i\right)^\top \left(\vec{u}_j - \vec{u}_i\right)}{\|x_j - x_i\|} \right)^2 \mathbf{d}x' \, \mathbf{d}x \\
&= \sum_i \int_{\Omega_i} k(x_i) \left(\frac{d}{m^{\mathrm{num}}(x_i)} \sum_{j \neq i} \int_{\Omega_j} w_{ij} \rho(x_j - x_i) \left(x_j - x_i\right)^\top \left(\vec{u}_j - \vec{u}_i\right) \mathbf{d}x' \right)^2 \\
&\quad - 2 \frac{\alpha^{\mathrm{num}}(x_i) m^{\mathrm{num}}(x_i)}{d^2} \left(\frac{d}{m^{\mathrm{num}}(x_i)} \sum_{j \neq i} \int_{\Omega_j} w_{ij} \rho(x_j - x_i) \left(x_j - x_i\right)^\top \left(\vec{u}_j - \vec{u}_i\right) \mathbf{d}x' \right)^2 \\
&\quad + \alpha^{\mathrm{num}}(x_i) m^{\mathrm{num}}(x_i) \left(\frac{1}{m^{\mathrm{num}}(x_i)} \sum_{j \neq i} \int_{\Omega_j} w_{ij} \rho(x_j - x_i) \left(x_j - x_i\right)^\top \left(\vec{u}_j - \vec{u}_i\right) \mathbf{d}x' \right)^2 \\
&\quad + \alpha^{\mathrm{num}}(x_i) \sum_{j \neq i} \int_{\Omega_j} w_{ij} \rho(x_j - x_i) \left(\frac{\left(x_j - x_i\right)^\top \left(\vec{u}_j - \vec{u}_i\right)}{\|x_j - x_i\|} \right)^2 \mathbf{d}x' \, \mathbf{d}x \\
&= \sum_i \int_{\Omega_i} k(x_i) \left(\frac{d}{m^{\mathrm{num}}(x_i)} \sum_{j \neq i} \int_{\Omega_j} w_{ij} \rho(x_j - x_i) \left(x_j - x_i\right)^\top \left(\vec{u}_j - \vec{u}_i\right) \mathbf{d}x' \right)^2 \\
&\quad - 2 \alpha^{\mathrm{num}}(x_i) \left(\sum_{j \neq i} \int_{\Omega_j} w_{ij} \rho(x_j - x_i) \left(x_j - x_i\right)^\top \left(\vec{u}_j - \vec{u}_i\right) \mathbf{d}x' \right) \\
&\qquad\qquad \times \left(\frac{1}{m^{\mathrm{num}}(x_i)} \sum_{j \neq i} \int_{\Omega_j} w_{ij} \rho(x_j - x_i) \left(x_j - x_i\right)^\top \left(\vec{u}_j - \vec{u}_i\right) \mathbf{d}x' \right) \\
&\quad + \alpha^{\mathrm{num}}(x_i) \sum_{j \neq i} \int_{\Omega_j} w_{ij} \rho(x_j - x_i) \|x_j - x_i\|^2 \\
&\qquad\qquad \left(\frac{1}{m^{\mathrm{num}}(x_i)} \sum_{m \neq i} \int_{\Omega_j} w_{im} \rho(x_m - x_i) \left(x_m - x_i\right)^\top \left(\vec{u}_m - \vec{u}_i\right) \mathbf{d}p \right)^2 \mathbf{d}x' \\
&\quad + \alpha^{\mathrm{num}}(x_i) \sum_{j \neq i} \int_{\Omega_j} w_{ij} \rho(x_j - x_i) \|x_j - x_i\|^2 \left(\frac{\left(x_j - x_i\right)^\top \left(\vec{u}_j - \vec{u}_i\right)}{\|x_j - x_i\|^2} \right)^2 \mathbf{d}x' \, \mathbf{d}x \\
&= \sum_i \int_{\Omega_i} k(x_i) \left(\frac{d}{m^{\mathrm{num}}(x_i)} \sum_{j \neq i} \int_{\Omega_j} w_{ij} \rho(x_j - x_i) \left(x_j - x_i\right)^\top \left(\vec{u}_j - \vec{u}_i\right) \mathbf{d}x' \right)^2 \\
&\quad + \alpha^{\mathrm{num}}(x_i) \sum_{j \neq i} \int_{\Omega_j} w_{ij} \rho(x_j - x_i) \|x_j - x_i\|^2 \left(\frac{\left(x_j - x_i\right)^\top \left(\vec{u}_j - \vec{u}_i\right)}{\|x_j - x_i\|^2} \right. \\
&\qquad\qquad \left. - \frac{1}{m^{\mathrm{num}}(x_i)} \sum_{m \neq i} \int_{\Omega_m} w_{im} \rho(x_m - x_i) \left(x_m - x_i\right)^\top \left(\vec{u}_m - \vec{u}_i\right) \mathbf{d}p \right)^2 \mathbf{d}x'
\end{aligned}
$$

□