arXiv:2603.02920v1 [math.AP] 3 Mar 2026

非线性抛物薄集与抛物型沃尔夫不等式

Marcelo F. de Almeida * 和 Edilson P. dos Santos Filho †

摘要

我们证明了一个适用于内禀尺度变换 $\delta_c(x,t) = (cx, c^2 t)$ 的抛物型沃尔夫不等式类比，并将其表述为关于时间后向抛物二进矩形的形式。由此，我们获得了在这一几何框架下抛物型 (α, q)-薄性的等价刻画，并建立了相应的 Kellogg性质和 Choquet性质。进一步地，我们利用以分数阶热球定义的 $(\alpha,2)$-薄性概念，证明热算子的非正则边界点集 $z_0 \in \partial\Omega$ 以及退化算子 $\partial_t - \Delta_{\mathscr{L}} a = \partial_t(|y|^a \cdot) - \operatorname{div}(|y|^a \nabla \cdot)$ 在 $\Omega \subset \mathbb{R}^{d+1}$ 中，分别相对于热容量 $\mathrm{cap}^{\mathscr{T}}$ 和抛物型贝塞尔容量 $C_{\alpha,2}$ 均为零测集。

MSC2020年: 31C45, 31B15, 31C40, 42B37.

关键词： 抛物型贝塞尔势、抛物薄性、二进制 Wolff 不等式、凯洛格性质。

目录

1 引言与主要结果 **2**2 预备知识 **8**2.1 测度的抛物势 .92.2 分数阶热球 .102.3 抛物容量 .133

抛物二进制与连续 Wolff 不等式 **16**3.1 二进制 Wolff 不等式 .163.2 连续 Wolff 不等式 .203.3 正则化二进制 Wolff 势 .224 抛物二进容量 **23**4.1 极值测度 .24

*塞尔希培联邦大学数学系，圣克里斯托旺，SE，49000-000，巴西。电子邮箱：marcelo@mat.ufs.br。获巴西国家科学技术发展委员会资助，项目编号：311321/2021-6。

†数学系，巴西利亚大学，巴西利亚，联邦区，70910-900，巴西。电子邮箱：edp9786@gmail.com。第二作者获得了巴西高等教育人员提升协调会的资助。

4.2 $\mathscr{C}$–与 Wolff 势相关的容量测度 .244.2.1 通过 Wolff 势刻画 .264.2.2 任意集合的容量测度 .28

5 热薄性、凯洛格性质与 Choquet性质 **30**5.1 热薄性 .315.2 凯洛格性质 .335.3 Choquet 性质 .355.4 非线性抛物薄性 .366 利益冲突 **40**

1 引言与主要结果

根据 Perron-Wiener-Brelot方法，我们知道，对于$\partial\Omega$上的连续函数f，存在$u_f \in C^2(\Omega)$，它在 Ω 中调和，并由边界$\partial\Omega$上的f唯一确定，即广义Dirichlet问题

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in} \quad \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = f & \text{on} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

对每个给定的$f \in C(\partial\Omega)$都可解，其中 Ω 是任意有界区域。然而，由于存在非正则边界点，问题（1.1）通常无解，经典的勒贝格刺便是一个例子，见 $\mathbb{R}^3$。这引出了一个自然的问题：对于哪些边界点 $x \in \partial\Omega$，调和函数 u_f满足

$$\lim_{\substack{y\to x \\ y\in\Omega}} u_f(y) = f(x)? \tag{1.2}$$

若边界点 $x \in \partial\Omega$ 满足（1.2），对 f 在 $\partial\Omega$上的每个连续函数都成立，则称其为正则边界点；否则，称为非正则边界点。1924年，维纳 [32] 解决了上述问题，并将结论概括如下：

定理 1.1 （维纳准则）。 设 $d \geq 3$ 且 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 是一个 *Borel* 集。那么，$x \in \partial\Omega$ 是（1.1）的正则点当且仅当

$$\int_0^1 \frac{C_2(\Omega^c \cap B_r(x))}{r^{d-2}} \frac{dr}{r} = \infty,$$

其中 $\Omega^c = \mathbb{R}^d \backslash \Omega$ 和 $C_2(\cdot) := c^{1,2}(\cdot)$ 表示集合 E 的 *Bessel* 容量，其定义为

$$c_{\alpha,q}(E) = \inf\left\{ \int_{\mathbb{R}^d} |g(x)|^q dx : \ g \geq 0, \ G_\alpha * g \geq \mathbb{1}_E \right\}, \tag{1.3}$$

而 G_α 是所谓的 *Bessel*核。

经典的Wiener准则启发人们引入了(1,2)-薄集的概念，这一概念由 M. Brelot [5] 首创，并在位势理论中占据核心地位。如今，这一概念可以优雅地表述如下：若集合 $E \subset \mathbb{R}^d$ 满足（α,2）–薄

于x_0,，则称其为薄集；条件是$x_0 \notin E$，或者$x_0 \in E$且存在一个正的 Radon 测度 $\mu \in \mathrm{M}^+$，使得

$$G_{2\alpha} * \mu(x_0) < \liminf_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E \setminus \{x_0\}}} G_{2\alpha} * \mu(x), \quad 0 < \alpha \leq d/2. \tag{1.4}$$

经典位势论（参见 [20, 定理 5。10], [1, 定理 6.3。2]）表明，以下断言等价：

(E_1) 集合 $E \subset \mathbb{R}^d$ 在 (，2) 意义下于 x_0 处是薄的。

(E_2) 设 $B_r(x_0)$ 为一个开球，且 $x_0 \in \mathbb{R}^d$，则

$$\int_0^1 \frac{c_{\alpha,2}(E \cap B_r(x_0))}{r^{d-2\alpha}} \frac{dr}{r} < \infty.$$

(E_3) 点 $x_0 \in E$ 是不正则的。

狄利克雷问题（1.1）的这一等价关系可表述如下：

$$x_0 \in \partial\Omega \text{ is regular } \Leftrightarrow \int_0^1 \frac{c_{1,2}(\Omega^c \cap B_r(x_0))}{r^{d-2}} \frac{dr}{r} = +\infty \Leftrightarrow \Omega^c \text{ is not } (1,2) - \text{thin at } x_0.$$

数十年来，如何为有界时空区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^{d+1}$ 中的狄利克雷问题建立精确的抛物型 Wiener 准则对应形式，一直是抛物位势论中的一个核心未解问题。Landis [21, 定理 2]（另见 [30, 定理 1.3], ，其中为 Hörmander 型次椭圆算子建立了 Wiener–Landis准则）研究了热方程的边界正则性，但其方法依赖递归序列和几何条件，而非基于容量的框架。Lanconelli [22, 定理 1.2], 取得了关键进展，他将抛物容量引入为一种严谨工具，连接了椭圆位势论与抛物型偏微分方程，并在建立抛物Wiener准则方面取得了部分进展。Evans 和 Gariepy [9], 最终给出了完整解决方案，提出了热算子边界点正则性的充要条件。该准则与椭圆情形下的前身类似，通过一个基于容量的条件刻画正则性；这一条件衡量了边界点附近补集Ω^c 的“厚度”，并与抛物势的内禀尺度变换相一致。为说明这一问题的背景，考虑热方程的狄利克雷问题：

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0 & \text{in} \quad \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = f & \text{on} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.5}$$

其中，$u = H_f^\Omega$表示 Perron-Wiener-Brelot-Bauer 意义下的广义解，对每个连续函数 f: $\partial\Omega \to \mathbb{R}$。若对于所有 $f \in C(\partial\Omega)$，都有 $\lim_{z \to z_0} H_f^\Omega(z) = f(z_0)$，则称点 $z_0 \in \partial\Omega$ 对算子 $\partial_t - \Delta$ 在 Ω 上是正则的。

定理 1.2 ([22, 9]). 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^{d+1}$ 是一个开有界集。点 $z_0 \in \partial\Omega$ 对于 (1.5)正则，当且仅当

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{\frac{kd}{2}} \operatorname{cap}^{\mathscr{T}}\left(\Omega^c \cap \left(\overline{\Omega_{2^{-k}}(z_0)} \backslash \Omega_{2^{-(k+1)}}(z_0)\right)\right) = +\infty, \tag{1.6}$$

其中 $\Omega_r(z_0) = \{(y, s) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ : \Gamma(x_0 - y, t_0 - s) > (4\pi r)^{-d/2}\}$ 是所谓的热球，而容$^{\mathscr{T}}(K)$ 表示紧集 K 上的热容量 $\subset \mathbb{R}^{d+1}$

$$\operatorname{cap}^{\mathscr{T}}(K) := \sup\{\mu(K) : \mu \in \mathfrak{M}^+(K) \text{ and } \Gamma * \mu \leq 1 \text{ on } \mathbb{R}^{d+1}\},$$

且 $\Gamma(x, t)$ 是热方程的基本解。

定理1.2 已推广至具有光滑变系数的散度形式抛物型算子，见 [13, 定理 1.1], ; 也推广至具有C^1–Dini 连续系数的情形，见 [11, 定理 1.1]。此外，该定理还推广至退化抛物型算子 $\mathscr{L}_a = \partial_t(|y|^a \cdot) -$ 散度$(|y|^a \nabla \cdot)$ 在 [14]对于一个 $\in (-1, 1)$。

回顾一下，$E \subset \mathbb{R}^{d+1}$ 称为在$z_0 \in \mathbb{R}^{d+1}$ 处热薄（见 [33]），如果满足以下任一条件：$z_0 \notin E$，或者$z_0 \in E$ 且存在一个定义在z_0某邻域内的超温函数u，使得

$$u(z_0) < \liminf_{\substack{z \to z_0 \\ z \in E \backslash \{z_0\}}} u(z).$$

众所周知，我们可以根据紧集 K 的扫掠函数 $V_K = \widehat{R}_1^K$来定义热薄性。更准确地说，如果存在一个以时间为中心的向后抛物球 $Q_r(z_0) = B_r(x_0) \times (t_0 - r^2, t_0)$，使得 $V_{E \cap Q_r}(z_0)(z_0) < 1$，那么 $E \subset \mathbb{R}^{d+1}$ 在 z_0 处是热薄的。因此，根据边界正则性与薄性之间广为人知的关系，我们得到以下等价关系（见 [22, 引理 1.3] 和定理 1.2），其中 $E = \Omega^c$ 为闭集：

$$E \text{ is heat } (1,2)\text{-thin at } z_0 \iff \int_0^1 \frac{\operatorname{cap}^{\mathscr{T}}(E \cap \Omega_r(z_0))}{r^{d/2}} \frac{dr}{r} < \infty. \tag{1.7}$$

这种关于热薄性的经典刻画已在定理 1.11]中推广到任意集合E[4, 。

本文探讨了由先前讨论引出的两个基本分析问题，并将其置于 Jones 和 Sampson 研究的抛物势背景下；他们在抛物情形下引入了贝塞尔核 $\mathscr{G}_\alpha(z)$ 和黎曼核 $\Gamma^\alpha(z)$（见第 2.1 节）。记 $C_{\alpha,2}(\cdot)$ 为 $n \ \ 0 < \alpha < n/2$ 的抛物型贝塞尔容量（见第 2.3 节），其中 $n = d + 2$ 是赋予伪距离 $d_{\mathscr{P}}(z, z_0) = \max\{|x - x_0|, |t - t_0|^{1/2}\}$ 的时空的齐次维数。对于任意集合 $E \subset \mathbb{R}^{d+1}$，我们考察以下等价关系是否成立：

(P_1) 对于$z_0 \in \overline{E}$，我们有容量条件

$$\int_0^1 \frac{\dot{C}_{\alpha,2}(E \cap \Theta_r^{2\alpha}(z_0))}{r^{\frac{n-2\alpha}{2}}} \frac{dr}{r} < \infty, \tag{1.8}$$

其中， $\Theta_{s\rho}(z_0)$ 表示分数阶热球

$$\Theta_\rho^s(z_0)=\left\{(y,\tau):\Gamma^s(x_0-y,t_0-\tau)>c_s\rho^{-\frac{n-s}{2}}\right\},\quad 0<s<n.$$

(P_2) 存在一个向后抛物球 $Q_r(z_0)$，以及一个 $\overline{\dot{C}_{\alpha,\,2}}$−容量测度 μ^A，其支集位于 $A=E\cap Q_r(z_0)$ 中，使得 $(\Gamma^{2\alpha}*\overline{\mu^A})(z_0)<1$。

(P_3) 对于 $z_0\in\overline{E}$，存在一个正的 Radon 测度 $\mu\in \mathrm{M}^+(\mathbb{R}^{d+1})$，使得

$$(\Gamma^{2\alpha}*\mu)(z_0)<\liminf_{\substack{z\to z_0\\ z\in E\setminus\{z_0\}}}(\Gamma^{2\alpha}*\mu)(z). \tag{1.9}$$

接下来的任务是研究基于向后抛物球的抛物 (α,q)-薄性，其中 $q\neq 2$。如 [16](另见 [15])所述，非线性椭圆 Havin-Mazya 势 $\mathcal{V}_{\alpha,\,q}^{\mu}=G_\alpha*(G_\alpha*\mu)^{q'-1}$（[25]）不足以刻画所有 $1<q\le d/\alpha$ 下的椭圆 (α,q)-薄性。因此，抛物 (α,q)-薄性的一种自然定义如下：

定义 1.3 （非线性抛物薄集）。设 $E\subset\mathbb{R}^{d+1}$ *and* $1<q\le n/\alpha$ *with* $0<\alpha<n$。若 $z_0\notin E$，则称集合 E 在 $z_0\in\mathbb{R}^{d+1}$ 处抛物（$\alpha,\,q$）−薄；或者若 $z_0\in\overline{E}$ 且

$$\Phi_{\mathrm{cyl}}(z_0)=\int_0^1\left(\frac{C_{\alpha,q}(E\cap Q_r(z_0))}{r^{n-\alpha q}}\right)^{q'-1}\frac{dr}{r}<\infty, \tag{1.10}$$

其中 $C_{\alpha,\,q}$ 表示抛物型贝塞尔容量（参见第 2.3 节），且 $q'=q/(q-1)$。

该定义蕴含了基于分数阶热球的定义，其中将（1.10）替换为

$$\Phi_{\mathrm{heat}}^s(z_0)=\int_0^1\left(\frac{\dot{C}_{\alpha,q}(E\cap\Theta_r^s(z_0))}{r^{\frac{n-s}{2}}}\right)^{q'-1}\frac{dr}{r}<\infty,\quad s=q\alpha<n, \tag{1.11}$$

因为 $\Theta_{sr}(z_0)\subset Q_{c\sqrt{r}}(z_0)$ 对某个 $c>0$成立，参见（2.13）。特别地，若 E按照定义（1，2）−的意义在 z_0处是抛物薄的，其中 1.3，则

$$\int_0^1\frac{\mathrm{cap}^{\mathscr{T}}(E\cap\Omega_r(z_0))}{r^{d/2}}\frac{dr}{r}\lesssim c^d\int_0^1\frac{C_{1,2}(E\cap Q_s(z_0))}{s^d}\frac{ds}{s}<\infty,$$

因为对 $0<\mathrm{r}<1$，$\mathrm{C}^{1,2}(\mathrm{Q}_r)\simeq\dot{\mathrm{C}}^{1,2}(\mathrm{Q}_r)=\mathrm{cap}^{\mathscr{T}}(\mathrm{Q}_r)$（参见命题 2.2 和推论 2.6）。然而，鉴于几何上的非包含关系 $\mathrm{Q}_1(0)\not\subseteq\Theta_1^\alpha(0)$（参见第 2.2 节），反向结论似乎并不成立。这两种薄性概念之间的几何差异并不影响我们的分析，因为我们的分析完全基于向后抛物球及其对应的抛物二进格 $\mathscr{D}$；该二进格在时间上向后定义，并适应缩放 $\delta_c(\mathrm{x},\mathrm{t})=(\mathrm{cx},\mathrm{c}^2\mathrm{t})$。

本文的主要结果之一是证明，定义 1.3等价于不等式（1.9）的一个修正版，其中 $\Gamma^{2\alpha}$ 被非线性抛物沃尔夫势所取代。具体而言，我们有：

定理 1.4。 设 $\alpha > 0$ 满足 $1 < q \le n/\alpha$。集合 $E \subset \mathbb{R}^{d+1}$ 在 $z_0 \in E$ 处是抛物$(\alpha, q)-$ 薄集，当且仅当存在 $\mu \in \mathfrak{M}^+(\mathbb{R}^{d+1})$ 使得

$$(\mathbf{W}_{\alpha,q}\mu)(z_0) < \liminf_{\substack{z \to z_0 \\ z \in E \setminus \{z_0\}}} (\mathbf{W}_{\alpha,q}\mu)(z), \tag{1.12}$$

其中 $\mathbf{W}_{\alpha,q}\mu$ 表示抛物型 *Wolff* 势

$$(\mathbf{W}_{\alpha,q}\mu)(z) = \int_0^1 \left(\frac{\mu(B_r(x) \times (t - r^2, t))}{r^{n-\alpha q}} \right)^{q'-1} \frac{dr}{r}. \tag{1.13}$$

为了证明该定理（见第 5.4 节），我们的主要挑战是引入一种抛物型二进网格 $\mathscr{D}$，它位于 $\mathbb{R}^{d+1}_+$ 中，遵循 Lerner 和 Nazarov [23], 的思路，并与时间向后抛物矩形 R^-（见图 3）以及抛物型缩放 $\delta_c(\mathrm{x,t}) = (\mathrm{cx}, \mathrm{c}^2\mathrm{t})$ 内禀地联系起来。该网格需要经过精心设计，以覆盖整个空间 $\mathbb{R}^{d+1}_+$，而不仅仅是 Saari [28] 研究的抛物型二进网格 $\mathrm{D}(\mathrm{R}^-)$ 所覆盖的部分（详见第 3.1 节）。抛物二进格（见定义 3.2）在内禀抛物几何框架下构造沃尔夫势的二进类比中发挥了关键作用。因此，我们建立了抛物型二进 Wolff 不等式（见定理 3.3），并由此进一步推导出以下结果:

定理 1.5（抛物型 Wolff 不等式）。 设 $\mu \in \mathrm{M}^+(\mathbb{R}^{d+1})$ 且 $0 < \alpha < n$。若$1 < q \le n/\alpha$，则

$$\mathrm{E}_{\alpha,q}\mu := \int_{\mathbb{R}^{d+1}} |\breve{\mathscr{G}}_\alpha \mu|^{q'} dxdt \simeq \int_{\mathbb{R}^{d+1}} (\mathbf{W}_{\alpha,q}\mu) d\mu,$$

其中，$\breve{\mathscr{G}}_\alpha\mu$ 表示向后抛物型 *Bessel* 势 $\breve{\mathscr{G}}_\alpha\mu(z) = \int_{\mathbb{R}^{d+1}} \mathscr{G}_\alpha(z - z_0) d\mu(z)$。

我们还给出了前一定理的齐次版本（见定理3.6），其内容如下

$$\dot{\mathrm{E}}_{\alpha,q}\mu \simeq \int_{\mathbb{R}^{d+1}} (\dot{\mathbf{W}}_{\alpha,q}\mu) d\mu,$$

对所有 $0 < \alpha < n$ 以及 $1 < q < n/\alpha$，其中

$$(\dot{\mathbf{W}}_{\alpha,q}\mu)(z) = \int_0^\infty \left(\frac{\mu(B_r(x) \times (t - r^2, t))}{r^{n-\alpha q}} \right)^{q'-1} \frac{dr}{r}. \tag{1.14}$$

Kuusi 和 Mingione 引入的抛物型 Wolff 势 [18]（另见[19]）与退化 p-拉普拉斯型演化方程的内在几何（见 [8]）相关，例如方程 $u_t - \mathrm{div}(|Du|^{p-2}Du) = 0$。在缩放后的时间向后抛物球 $Q_r^\lambda(z) = B_r(x) \times (t - \lambda^{2-p} r^2, t)$ 上，这些方程类似于热方程，其中 $\lambda > 0$，正如 [18] 中所观察到的。

抛物型二进小波不等式（定理 3.3）及其连续对应形式（定理1.5）为引入抛物型二进 Bessel 容量提供了主要工具

$$\mathscr{C}_{\alpha,q}(K)^{1/q} := \sup\left\{\|\mu\| : \mu \in \mathfrak{M}^+(K) \text{ and } \mathscr{E}\mu \le 1\right\},$$

其中 K $\subset \mathbb{R}^{d+1}$ 是一个紧集，$\mathscr{E}$ 表示正则化二进非线性能量 (3.18)。此外，鉴于引理 3.8 以及命题 2.4 中给出的容量的对偶表述，$\mathscr{C}_{\alpha,q}$(K) 等价于标准抛物型贝塞尔容量 Cα,q(K)。此外，借助紧集的 $\mathscr{C}_{\alpha,q}$−极值测度（见定义 4.2）和均衡（$\mathscr{C}_{\alpha,q}$−容量）测度（见定义 4.4）的概念，我们基于抛物型正则化二进小波势给出了抛物型二进贝塞尔容量的若干刻画（见定理 4.7 和 4.11）

$$\mathscr{W}^{\mathscr{D}}_{\alpha,q}\mu = \sum_{\substack{R\in\mathscr{D}\\ \ell_R<1}} \left(\ell_R^{\alpha q-n}\mu(\eta_R)\right)^{q'-1}\eta_R, \tag{1.15}$$

其中 $\eta_R \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{d+1})$ 和 $\mu(\eta_R) := \int_{\mathbb{R}^{d+1}} \eta_R d\mu$，详见第 4 节中的详细分析。因此，凭借上述所有结果，令

$$e^{\mathscr{D}}_{\alpha,q}(E) = \left\{z_0 \in \mathbb{R}^{d+1} : \int_0^1 \left(\frac{C_{\alpha,q}(E\cap Q_r(z_0))}{r^{n-\alpha q}}\right)^{q'-1}\frac{dr}{r} < \infty\right\}, \tag{1.16}$$

对所有 $\alpha > 0$ 满足 $1 < q \le n/\alpha$。随后我们建立了以下抛物型 Kellogg 性质（见命题5.4）：

$$C_{\alpha,q}\left(E \cap e^{\mathscr{D}}_{\alpha,q}(E)\right) = 0.$$

凯洛格性质也是 Choquet 性质的推论，而后者是精细连续性分析的核心。

定理 1.6（抛物型 Choquet 性质）。设 $\alpha > 0$ 满足 $1 < q \le n/\alpha$。对于任意集合 $E \subset \mathbb{R}^{d+1}$ 和 $\varepsilon > 0$，存在一个开集 $G \subset \mathbb{R}^{d+1}$ 满足

$$e^{\mathscr{D}}_{\alpha,q}(E) \subset G \quad and \quad \mathscr{C}_{\alpha,q}(E\cap G) < \varepsilon. \tag{1.17}$$

此外，我们还建立了以分数阶热球表述的相应凯洛格性质（见命题5.6）

$$C_{\alpha,2}\left(E \cap e^{\text{heat}}_{\alpha,2}(E)\right) = 0, \tag{1.18}$$

其中 $e^{\text{heat}}_{\alpha\,2}$，(E) $= \{z_0 \in \mathbb{R}^{d+1}:\ \Phi^{2\alpha}_{\text{heat}}(z_0) < \infty\}$。由于退化抛物型算子 $\mathscr{L}_a$ 是 $(\partial_t - \Delta)^{\alpha/2}$ 在 $0 < \alpha < 2$时的延拓算子，凯洛格性质 (1.18) 蕴含 [14, 定理 1.1] 的维纳检验刻画了 C$\alpha,2$− 几乎处处的正则边界点。特别地，定理 1.2 中维纳级数收敛的点 $z_0 \in \partial\Omega$所组成的集合在 cap$^{\mathscr{T}}$ −意义下可忽略。

作为引言的总结，我们指出，引理 5.3 和定理 1.4 共同推出以下注记。

注记 1.7. 设 $0<\alpha<n$ 和 $1<q\le n/\alpha$。以下陈述等价：

(i) E 在 z_0 处是抛物α,q薄的。

(ii) 设 V 是 z_0 的一个邻域。若 V 足够小，则存在一个平衡测度 μ^A，对应于 $A=E\cap V$，使得

$$(\mathbf{W}_{\alpha,q}\mu^A)(z_0)<1. \tag{1.19}$$

(iii) 对于 $z_0\in E$，存在 $\mu\in\mathfrak{M}^+(\mathbb{R}^{d+1})$，使得

$$(\mathbf{W}_{\alpha,q}\mu)(z_0)<\liminf_{\substack{z\to z_0\\ z\in E\setminus\{z_0\}}}(\mathbf{W}_{\alpha,q}\mu)(z).$$

上述备注构成了对（1.7）的一个非线性类比，其中将热球表述替换为向后抛物球框架。对于通过分数阶热球定义的（α,2）–薄性，引理 5.5 结合定理 1.4证明的第二部分，以 $\Gamma^{2\alpha}*\mu$ 代替$\mathbf{W}_{\alpha,q}\mu$，可得以下蕴含关系

$$P_1\Rightarrow P_2\Rightarrow P_3,$$

对所有 $0<\alpha<n/2$ 均成立。蕴含关系 $P_3\Rightarrow P_1$ 对 $\alpha\in(0,n/2)$ 仍是一个未解决的问题。

2 预备知识

本文中的时空 $\mathbb{R}^{d+1}=\mathbb{R}^d_x\times\mathbb{R}_t=\{(x,\ t):x\in\mathbb{R}^d,\ t\in\mathbb{R}\}, d\ge 2$，赋予了各向异性伪距离

$$d_{\mathscr{P}}((x,t),(y,s))=\max\left\{|x-y|,|t-s|^{1/2}\right\} \tag{2.1}$$

它等价于方程的唯一解 $\rho(z)$（抛物距离）（详情请见 [10] ）

$$\frac{|x|^2}{\rho^2}+\frac{|t|^2}{\rho^4}=1. \tag{2.2}$$

伪距离$d_{\mathscr{P}}$ 关于膨胀是一次齐次的

$$(x,t)\mapsto\delta_\gamma(x,t):=(\gamma x,\gamma^2 t),\quad \gamma>0. \tag{2.3}$$

度量测度空间 $\left(\mathbb{R}^{d+1},d_{\mathscr{P}},d\mathscr{L}\right)$配备勒贝格测度$d\mathscr{L}=dxdt$，按 Coifman 和 Weiss [6, 第 3], 章中的定义，它是一个齐次型空间，其齐次维数为 $n:=\log_2 c_D=d+2$。这里，$c_D=2^{d+2}$ 是倍增测度的常数

$$\mathscr{L}(\delta_2 C_r)\le 2^{d+2}\mathscr{L}(C_r)$$

对于时空 $\mathbb{R}^d_x \times \mathbb{R}_t$中的每个完整抛物柱 $C_r(x,t) = B_r(x) \times (t - r^2, t + r^2)$。缩放 $(x, t) \mapsto \delta_\gamma(x,t)$ 自然地促使人们引入以下坐标变换（参见 Fabes 和 Riviere [10]）

$$\begin{cases} x_d &= \rho \sin\varphi_1 \cdots \sin\varphi_{d-1} \sin\varphi_d \\ x_{d-1} &= \rho \sin\varphi_1 \cdots \sin\varphi_{d-1} \cos\varphi_d \\ &\vdots \\ x_1 &= \rho \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 \\ t &= \rho^2 \cos\varphi_1, \end{cases} \tag{2.4}$$

其中 $0 \le \varphi_d \le 2\pi$且$0 \le \varphi_j \le \pi$，对所有$j = 1, \cdots, d-1$。因此，体积元素由下式给出

$$d\mathscr{L} = \rho^{n-1}(1 + \cos^2\varphi_1) d\rho d\sigma, \tag{2.5}$$

其中$d\sigma$ 表示抛物单位球面 $\Sigma_d = \{(x,t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ : \frac{|x|^2}{\rho^2} + \frac{t^2}{\rho^4} = 1\}$上的面测度。

2.1 测度的抛物势

我们定义函数

$$\Gamma^\alpha(x,t) = [(4\pi)^{\frac{d}{2}}\Gamma(\alpha/2)]^{-1} t^{-\frac{n-\alpha}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \mathbb{1}_{\{t>0\}}, \quad \alpha > 0 \tag{2.6}$$

称为抛物黎斯核。该核 $\Gamma^\alpha(x,t)$关于抛物型缩放是次数为$\alpha - n$ 的齐次函数（2.3），即，

$$\Gamma^\alpha(\lambda x, \lambda^2 t) = \lambda^{\alpha-n}\Gamma^\alpha(x,t). \tag{2.7}$$

此外，通过直接的坐标变换（见（2.4））可知，该核$\Gamma^\alpha(x,t)$是局部可积的。因此，其在 $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^{d+1})$中的傅里叶变换是良定义的，并由下式给出（见 [27, 定理 2.2] 与 [29]）

$$\widehat{\Gamma^\alpha}(\xi,\tau) = (|\xi|^2 + i\tau)^{-\frac{\alpha}{2}} \quad \text{for} \quad 0 < \alpha < n. \tag{2.8}$$

设$f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{d+1})$ 且 $0 < \alpha < n$。阶为 α 的分数阶积分，记作 $\Gamma^\alpha f$，定义为

$$(\Gamma^\alpha f)(x,t) = \int_{\mathbb{R}^{d+1}} \Gamma^\alpha(x-y, t-s) f(y,s) dyds$$

并称为f的抛物型黎斯势。令 $M(\mathbb{R}^{d+1})$ 表示 $\mathbb{R}^{d+1}$ 上配备弱$^\star-$ 拓扑的 Radon 测度空间。对于 $\mu \in M(\mathbb{R}^{d+1})$，$\mu$ 的抛物型黎斯势定义为

$$(\Gamma^\alpha \mu)(x,t) = \int_{\mathbb{R}^{d+1}} \Gamma^\alpha(x-y, t-s) d\mu(y,s). \tag{2.9}$$

考虑抛物型贝塞尔核

$$\mathcal{G}_\alpha(x,t) = (4\pi)^{-\frac{d}{2}}\Gamma(\alpha/2)^{-1}t^{-\frac{n-\alpha}{2}}\exp\left\{-t-\frac{|x|^2}{4t}\right\}\mathbb{1}_{\{t>0\}}, \quad \operatorname{Re}\alpha>0. \tag{2.10}$$

该核 $\mathcal{G}^\alpha \in L^1(\mathbb{R}^{d+1})$ 满足 $\|\mathcal{G}^\alpha\|_{L^1}=1$，其傅里叶变换（见 [17]）由下式给出

$$\widehat{\mathcal{G}_\alpha}(\xi,\tau) = (1+|\xi|^2+i\tau)^{-\frac{\alpha}{2}} \quad \text{as} \quad \alpha>0. \tag{2.11}$$

由L^p中的杨不等式，贝塞尔势

$$\mathcal{G}_\alpha f(x,t) = \int_{\mathbb{R}^{d+1}} \mathcal{G}_\alpha(x-y,t-s)f(y,s)dyds$$

是良定义的，并且 $\mathcal{G}_\alpha$ 可延拓为$L^p(\mathbb{R}^{d+1})$上的有界算子，对所有 $1\le p\le\infty$均成立。众所周知，核 $\Gamma^\alpha(x,t)$ 和 $\mathcal{G}_\alpha(x,t)$ 都是下半连续的，而坐标变换（2.4）可直接推出以下性质：

(a) $\Gamma^\alpha \notin L^{q'}(\mathbb{R}^{d+1})$, for all $0<\alpha<n$.

(b) $\int_{\rho>1}[\Gamma^\alpha(x,t)]^{q'}d\mathscr{L}<\infty$, only if $\alpha q<n$.

(c) $\mathcal{G}_\alpha \notin L^{q'}(\mathbb{R}^{d+1})$, only if $\alpha q\le n$.

(d) $\int_{\rho>1}[\mathcal{G}_\alpha(x,t)]^{q'}d\mathscr{L}<\infty$, for all $\alpha>0$,

其中 $1<q<\infty$。上述性质与椭圆型贝塞尔核和黎兹核类似，但时间变量所起的特殊作用带来了新的挑战。例如，这会影响与这些核相关的二进和连续 Wolff 不等式的分析（见第3节）。

2.2 分数阶热球

令$z=(x,t)\in\mathbb{R}^{d+1}$并且 $\rho>0$，我们将以z 为中心、半径为 ρ 的分数阶热球 $\Theta^\alpha_\rho(z)$定义为水平集

$$\Theta^\alpha_\rho(z) = \left\{(y,s):\Gamma^\alpha(x-y,t-s)>c_\alpha\rho^{-\frac{n-\alpha}{2}}\right\}, \quad c_\alpha=(4\pi)^{-d/2}\Gamma(\alpha/2)^{-1}, \tag{2.12}$$

其中 $0<\alpha<n$。简单计算可得

$$\Theta^\alpha_\rho(z) = \left\{(y,s):t-\rho<s<t,\ |x-y|<r_\rho(s)\right\},$$

其中 $r_\rho(s)=\left[2(n-\alpha)(t-s)\log\left(\frac{\rho}{t-s}\right)\right]^{1/2}$。则 $r_\rho(s)\le c\sqrt{\rho}$，且 $c=\sqrt{2(n-\alpha)/e}$，由此得到

$$\Theta^\alpha_\rho(z)\subset Q_{c\sqrt{\rho}}(z). \tag{2.13}$$

注意，分数阶热球的中心 z 位于其边界上，该边界分解为

$$\partial\Theta_\rho^\alpha(z) = \Gamma_{\text{lat}} \cup \Gamma_{\text{pas}} \cup \Gamma_{\text{pre}}, \tag{2.14}$$

其中侧边界 $\Gamma_{\text{lat}} = \{(y, s) : t - \rho < s < t,\ |y - x| = r\rho(s)\}$ 是一个光滑曲面，过去时刻中最远的点对应于 $\Gamma_{\text{pas}} = \{(x, t - \rho)\}$，而当前时刻点 $\Gamma_{\text{pre}} = \{z\}$ 标记了当 $s \to t^-$ 时的极限位置（见图1）。因此，对每个 $c > 0$，都有 $Q_{c\sqrt{\rho}}(z) \not\subset \Theta_\rho^\alpha(z)$，因为 $z \in \partial\Theta_\rho^\alpha(z)$。更精确地说，

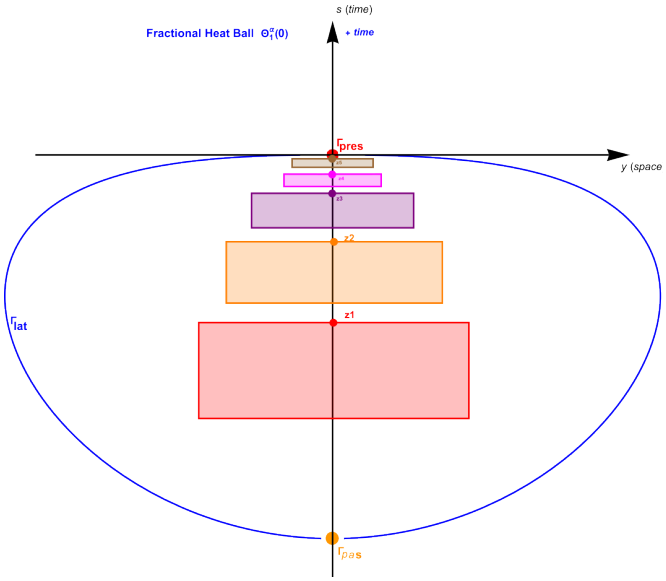

图1：以 $z = 0$（红色）为中心的分数阶热球，以及中心为 $z_k = (0, t_k)$ 的时间反向球 $Q_c(z_k)$。

通过缩放和平移，只需考虑 $z = 0 = (0,0)$ 且 $\rho = 1$ 的情形。定义

$$z_k = (x_k, t_k) = \left(\frac{2}{k} \left(1 + \frac{1}{k} \right) \sqrt{(n-\alpha)\log k}\, e, -\frac{1}{k^2} \right), \quad k \in \mathbb{N}$$

对每个满足 $|e| = 1$ 的 $e \in \mathbb{R}^d$。则

$$z_k \in Q_1(0) = B_1(0) \times (-1, 0),$$

而

$$\Gamma^\alpha(-x_k, -t_k) = c_\alpha k^{n-\alpha} \exp\left(-(n-\alpha) \left(1 + \frac{1}{k} \right)^2 \log k \right) = c_\alpha k^{(n-\alpha)\left[1 - (1+\frac{1}{k})^2\right]}.$$

由此可得

$$\Gamma^\alpha(-x_k, -t_k) < c_\alpha$$

对所有充分大的 k 均成立。因此 $z_k \notin \Theta_1^\alpha(0)$。

与可用欧几里得球表示的椭圆型黎斯势（见 [1, 第 77] 页）相对应，抛物型黎斯势可以用热球来表述。

引理 2.1. 设 $0<\alpha<n$ 且 $\mu\in\mathfrak{M}^{+}(\mathbb{R}^{d+1})$。那么，除一个仅依赖于 n 和 α的常数因子外，有

$$(\Gamma^{\alpha}\mu)(z)=\int_{0}^{\infty}r^{-\frac{n-\alpha}{2}}\mu(\Theta_{r}^{\alpha}(z))\frac{dr}{r}.$$

证明。 由于 Γ^{α} 在 $\mathbb{R}^{d+1}$中非负且局部可积，根据卡瓦列里原理并作变量代换 $r\to c\alpha r^{-\frac{n-\alpha}{2}}$，我们得到

$$(\Gamma^{\alpha}\mu)(z)=\int_{0}^{\infty}\mu(\{(y,s):\Gamma^{\alpha}(x-y,t-s)>r\})dr\simeq\int_{0}^{\infty}r^{-\frac{n-\alpha}{2}}\mu(\Theta_{r}^{\alpha}(z))\frac{dr}{r},$$

如所求。 ❑

为了结束本节，考虑由下式定义的抛物型向后黎斯势 $\check{}\,\Gamma^{\alpha}\mu$

$$(\check{\Gamma}^{\alpha}\mu)(y,s)=\int_{\mathbb{R}^{d+1}}\Gamma^{\alpha}(z-y,\tau-s)d\mu(z,\tau).$$

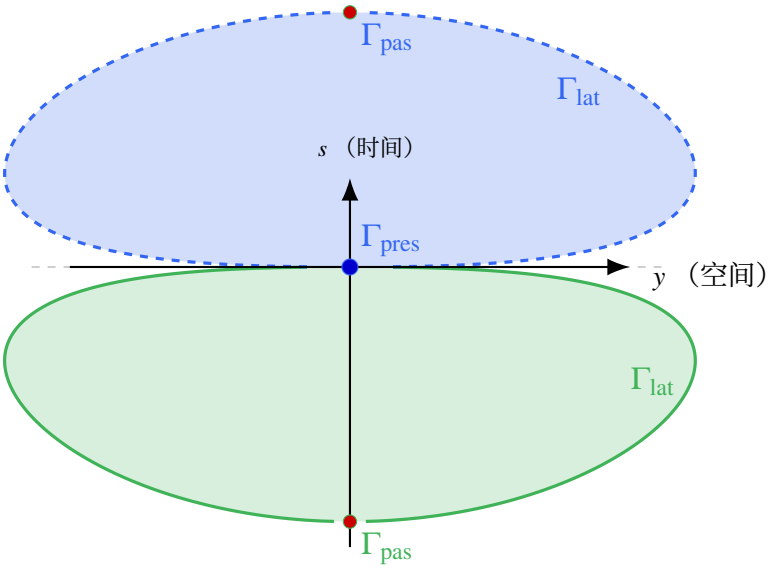

图 2：集合 $\check{}\,\Theta_{r}^{\alpha}(0)$（蓝色）只是热球（绿色）的镜像对应物。

势 $\check{}\,\Gamma^{\alpha}\mu$ 在对偶容量的构造中具有基本作用（见第2.3节）。此外，如引理2.1所述，势 $\check{}\,\Gamma^{\alpha}\mu$ 具有如下表示

$$(\check{\Gamma}^{\alpha}\mu)(y,s)=\int_{0}^{\infty}r^{-\frac{n-\alpha}{2}}\mu(\check{\Theta}_{r}^{\alpha}(y,s))\frac{dr}{r},\tag{2.15}$$

其中 $\check{}\,\Theta^{\alpha}{}_{r}(y,s)=\{(x,t)\ \Gamma^{\alpha}(x-y,t-s)>c_{\alpha}\rho^{-\frac{-\alpha}{n2}}\}$ 它是热球在时间上的反射（见图2）。

2.3 抛物容量

设 $1<q<\infty$ 且 $0<\alpha<n=d+2$。对于任意集合 $A\subset\mathbb{R}^{d+1}$，抛物型黎曼容量 $\dot{C}_{\alpha,q}(A)$ 定义为

$$\dot{C}_{\alpha,q}(A)=\inf\left\{\int|f|^q d\mathscr{L}:f\in\dot{\Omega}_A\right\},\tag{2.16}$$

其中 $\dot{\Omega}_A$ 表示满足 $\Gamma^\alpha * 非负函数 \in L^q(\mathbb{R}^{d+1})$ such that $\Gamma^\alpha * f\geq 1_A$ 的集合。如果 $\dot{\Omega}_A=/0$，则定义 $\dot{C}_{\alpha,q}(A)=+\infty$。对于 $\alpha>0$，集合 A 的抛物型贝塞尔容量$C_{\alpha,q}$ 定义如下

$$C_{\alpha,q}(A)=\inf\left\{\int|f|^q d\mathscr{L}:f\in\Omega_A\right\},\tag{2.17}$$

其中 $\Omega_A=\{f\in L^q:f\geq 0$ 且 $\mathscr{G}_\alpha * f\geq 1_A\}$。

命题 2.2。

(i) 集合函数 $C_{\alpha,q}$ *(*分别为 $C_{\alpha,q}$*)* 是 *Meyers* 意义下的容量 *[24]*。

(ii) 集合函数 $C=C_{\alpha,q}$ *(*分别为 $C=C_{\alpha,q}$*)* 是外容量

$$C(A)=\overline{C}(A):=\inf\{C(E):E\supset A \text{ for open sets } E\}.\tag{2.18}$$

(iii) 设 $\tau_{(x,t)}$ 是一个平移，则对于所有的$(x,t)\in\mathbb{R}^{d+1}$，有 $\dot{C}_{\alpha,q}(\tau_{(x,t)}A)=\dot{C}_{\alpha,q}(A)$。此外，我们有缩放性质

$$\dot{C}_{\alpha,q}(\delta_\lambda A)=\lambda^{n-\alpha}\dot{C}_{\alpha,q}(A),\quad \lambda>0.\tag{2.19}$$

(iv) 设 $0<\alpha<n$，使得 $1<q<n/\alpha$。则 $\dot{C}_{\alpha,q}(\Theta_r^\alpha)>0$，并且

$$\dot{C}_{\alpha,q}(\Theta_r^\alpha)=r^{(n-\alpha q)/2}\dot{C}_{\alpha,q}(\Theta_1^\alpha)\quad for\quad r>0.\tag{2.20}$$

(v) 设 $0<\alpha<n$，使得 $1<q<n/\alpha$。则对于每个紧集 K，我们有

$$\dot{C}_{\alpha,q}(K)\leq C_{\alpha,q}(K)\lesssim\dot{C}_{\alpha,q}(K)+\dot{C}_{\alpha,q}(K)^{n/(n-\alpha q)}.\tag{2.21}$$

特别地，有 $C_{\alpha,q}(B_r\times(t-r^2,t+r^2))\simeq r^{n-\alpha q}$，当 $0<r<1$ 时。

(vi) If $\alpha q=n$, *then* $C_{\alpha,q}(B_r\times(t-r^2,t+r^2))\simeq(\log(1/r))^{1-q}$ *for* $0<r<1/2$.

证明。结论 (i) 和 (ii) 的证明可由标准论证得到，见 [24,1]。为证明 (iii)，只需回忆 $\|\delta_\lambda f\|_{L^p(\mathbb{R}^{d+1})}=\lambda^{-n/p}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^{d+1})}$ and$\Gamma^\alpha(\delta_\lambda f)=\lambda^{-\alpha}\delta_\lambda(\Gamma^\alpha f)$。为证明 (iv)，回忆若 $1<q<n/\alpha$，则 $\int_{\rho>1}[\Gamma^\alpha(x,t)]^{q'}dxdt<\infty$。然后采用与 [1, 命题 2.6.1(c)], 相同的推理，可得 $\dot{C}_{\alpha,q}(\Theta_1^\alpha)^{1/q}\geq c$。现在由 $\delta_{\sqrt{r}}\Theta_1^\alpha(x,t)=\Theta^\alpha r(x,t)$ 和缩放 (2.19)，得到 (2.20)。(v) 和 (vi) 的证明见 [26, 注 4.14]。❑

根据 Choquet 定理（见 [1, 定理 2.3。11]），$\mathbb{R}^{d+1}$ 中的所有 Borel 集都是$\dot{C}\alpha$-可容量的；$_q$一鉴于下文的命题 2.3 （见 [24,定理 6 和定理 7]），

命题 2.3 ([24]). 设 $1<q<\infty$，$C=C_{\alpha,q}$ 作为 $\alpha>0$ 且 $C=C_{\alpha,q}$ 作为 $0<\alpha<n$。

(i) 若 $K_1\supset K_2\supset\cdots$ 是 $\mathbb{R}^{d+1}$ 中的紧集且 $K=\cap jK_j$，则 $\lim j\to\infty C(Kj)=C(K)$。

(ii) 若 $A_1\subset A_2\subset\cdots$ 是 $\mathbb{R}^{d+1}$ 中的任意集合且 $A=\cup jAj$，则 $\lim j\to\infty C(Aj)=C(A)$。

由于 $C_{\alpha,q}$ 满足（见 [24, 定理 2]）

$$\dot{C}_{\alpha,q}(\{(x,t):(\Gamma^{\alpha}*f)(x,t)\geq\lambda\})\leq\lambda^{-q}\int_{\mathbb{R}^{d+1}}|f|^q d\mathscr{L}, \tag{2.22}$$

则 $\dot{C}_{\alpha,q}(A)=0$ 当且仅当 $A\subset\{(x,t):(\Gamma^{\alpha}*f)(x,t)=+\infty\}$ 对所有 $f\in L^q(\mathbb{R}^{d+1})$成立。设 $\mu\in\mathrm{M}^+$ 且 $A\subset\mathbb{R}^{d+1}$ 是一个 μ–可测子集。 $\dot{C}_{\alpha,q}$的对偶容量由集合函数定义

$$\dot{\mathrm{Cap}}_{\alpha,q}(A)=\sup\left\{\mu(A):\mu\in\mathfrak{M}^+(A)\text{ and }\|\check{\Gamma}^{\alpha}\mu\|_{L^{q'}}\leq 1\right\}, \tag{2.23}$$

其中 $\mathrm{M}^+(A)=\{\mu\in\mathrm{M}^+(\mathbb{R}^{d+1}):\mu(A^c)=0\}$，对所有 $1<q<\infty$ 和 $0<\alpha<n$均成立。同样，$C_{\alpha,q}$ 的对偶容量定义为

$$\mathrm{Cap}_{\alpha,q}(A)=\sup\left\{\mu(A):\mu\in\mathfrak{M}^+(A)\text{ and }\|\check{\mathscr{G}}_{\alpha}\mu\|_{L^{q'}}\leq 1\right\}, \tag{2.24}$$

对所有 $\alpha>0$均成立。仿照 [3, 定理 3.5。1], 我们可以证明，$\mathrm{Cap}_{\alpha,q}$ 和 $\mathrm{Cap}_{\alpha,q}$ 是可测集域上的内容量 。此外，运用冯·诺伊曼极小极大定理并仿照 [3, 定理 3.6.1] 的证明（另见[1]），我们得到抛物容量及其对偶之间的如下关系。

命题 2.4. 设 $1<q<\infty$ 且 $K\subset\mathbb{R}^{d+1}$ 为紧集。

(i) If $0<\alpha<n$, *then* $[\dot{C}_{\alpha,q}(K)]^{1/q}=\dot{\mathrm{Cap}}_{\alpha,q}(K)$.

(ii) 若 $\alpha>0$，则 $[C_{\alpha,q}(K)]^{1/q}=\mathrm{Cap}_{\alpha,q}(K)$。

设 $\mu\in\mathrm{M}^+$ 且 $1<q<\infty$。与 Riesz 核 $\Gamma^{\alpha}(x,t)$ 相关的抛物型 Havin-Mazya 势定义为

$$(\dot{\mathbf{V}}_{\alpha,q}\mu)(x,t)=\int_{\mathbb{R}^{d+1}}\Gamma^{\alpha}(x-y,t-s)[(\check{\Gamma}^{\alpha}\mu)(y,s)]^{q'-1}dyds, \tag{2.25}$$

其中 $0<\alpha<n$。根据 Fubini 定理，有

$$\int_{\mathbb{R}^{d+1}}(\dot{\mathbf{V}}_{\alpha,q}\mu)d\mu=\int_{\mathbb{R}^{d+1}}(\check{\Gamma}^{\alpha}\mu)^{q'}d\mathscr{L}. \tag{2.26}$$

类似地，我们有

$$\int_{\mathbb{R}^{d+1}}(\mathbf{V}_{\alpha,q}\mu)d\mu=\int_{\mathbb{R}^{d+1}}(\check{\mathcal{G}}_\alpha\mu)^{q'}d\mathcal{L}, \tag{2.27}$$

w此处$\mathbf{V}_{\alpha,\ q}$表示与 Bessel 核相关的抛物型 Havin-Mazya 势 nel

$$(\mathbf{V}_{\alpha,q}\mu)(x,t)=\int_{\mathbb{R}^{d+1}}\mathcal{G}_\alpha(x-y,t-s)[(\check{\mathcal{G}}_\alpha\mu)(y,s)]^{q'-1}dyds,\quad \alpha>0.$$

命题 2.5 （[3]）。设 $K\subset\mathbb{R}^{d+1}$ 是满足 $C_{\alpha,\ q}(K)<\infty$ 的紧集，其中 $\alpha>0$ 且 $1<q<\infty$。则存在一个测度 γ^K 支集包含于 K，即 支集（γ^K）$\subset K$，使得

(i) $\gamma^K(K)=C_{\alpha,q}(K)$

(ii) $\mathbf{V}_{\alpha,q}\gamma^K=\mathcal{G}_\alpha*(\check{\mathcal{G}}_\alpha\gamma^K)^{q'-1}=\mathcal{G}_\alpha f^K\geq 1\quad C_{\alpha,q}$-*a.e on* K

(iii) $\mathbf{V}_{\alpha,q}\gamma^K\leq 1$ *on* $spt(\gamma^K)$,

其中容量函数$fK=$（$\check{}\mathcal{G}_\alpha\gamma^K$）$^{q'-1}$在 $\mathbb{R}^{d+1}$上几乎处处成立，且 （$\mathcal{G}_\alpha fK$） ≥ 1 $C_{\alpha,\ q}$−在 K 上几乎处处成立。特别地，我们有

$$C_{\alpha,q}(K)=\sup\left\{\mu(K):\mu\in\mathfrak{M}^+(K)\ and\ \mathbf{V}_{\alpha,q}\mu\leq 1\text{ on spt}(\mu)\right\}. \tag{2.28}$$

注意到，由 Fubini 定理可得

$$(\dot{\mathbf{V}}_{\alpha,2}\mu)(x,t)=\int_{\mathbb{R}^{d+1}}(\Gamma^\alpha*\Gamma^\alpha)(x-z,t-\tau)d\mu(z,\tau).$$

设 $0<\alpha,\ \beta<n$满足 $\alpha+\beta<n$。由恒等式（2.8）可得 $\Gamma^\alpha*\Gamma^\beta=\Gamma^{\alpha+\beta}$。因此，$\dot{}\mathbf{V}_{\alpha,\ 2}\mu=\Gamma^{2\alpha}\mu$。类似地，

$$(\mathbf{V}_{\alpha,2}\mu)(x,t)=\int_{\mathbb{R}^{d+1}}(\mathcal{G}_\alpha*\mathcal{G}_\alpha)(x-z,t-\tau)d\mu(z,\tau)=(\mathcal{G}_{2\alpha}\mu)(x,t).$$

特别地，紧集 K 的热容量 $\text{cap}^{\mathcal{T}}$（参见例如 [22, 9]）可表示为:

$$\text{cap}^{\mathcal{T}}(K)=\dot{C}_{1,2}(K)=\sup\{\mu(K):\mu\in\mathfrak{M}^+(K),\ \Gamma*\mu\leq 1\text{ on }\mathbb{R}^{d+1}\}.$$

一般而言，我们有以下推论。

推论 2.6. 设 $K\subset\mathbb{R}^{d+1}$ 为紧集。

(i) 假设对所有 $0<\alpha<n/2$，都有 $\dot{}C_{\alpha,2}(K)<\infty$。那么，

$$\dot{C}_{\alpha,2}(K)=\sup\{\mu(K):\mu\in\mathfrak{M}^+(K)\ and\ \Gamma^{2\alpha}*\mu\leq 1\ on\ spt(\mu)\}.$$

(ii) 假设对所有 $\alpha>0$，$C_{\alpha,2}(K)<\infty$，则，

$$C_{\alpha,2}(K)=\sup\{\mu(K):\mu\in\mathfrak{M}^+(K)\ and\ \mathcal{G}_{2\alpha}*\mu\leq 1\ on\ spt(\mu)\}.$$

3 抛物型二进与连续 Wolff 不等式

本节将证明抛物型二进 Wolff 不等式，并由此得到其连续版本。

3.1 二进 Wolff 不等式

设$Q = Q(x\ \ell) \subset \mathbb{R}^d$是一个开立方体，其边平行于坐标轴，边长为 ℓ_Q。边长为 $\ell = \ell_R = \ell_Q$、中心为 $(x,\ t)$ 的开抛物型矩形$R((x,\ t)\ \ell) \subset \mathbb{R}^{d+1}$定义为

$$R((x,t),\ell) = Q \times (t-\ell^2, t+\ell^2), \tag{3.1}$$

对所有 $t > 0$ 均成立。此外，我们将时间正向和时间反向抛物矩形定义为

$$R^+((x,t),\ell,\gamma) = Q \times (t+(1-\gamma)\ell^2, t+\ell^2) \ \text{ and } \ R^-((x,t),\ell,\gamma) = Q \times (t-\ell^2, t-(1-\gamma)\ell^2),$$

其中 $0 < \gamma \le 1$ 称为时间滞后，见图 3。相对于R 的膨胀

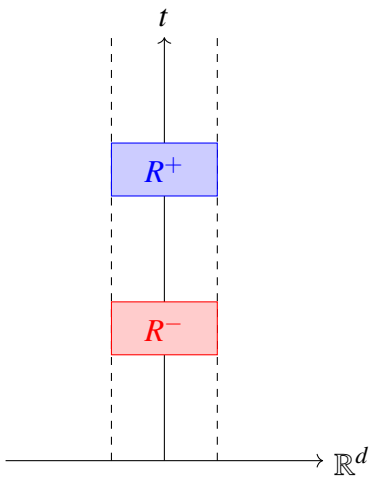

图 3： $\mathbb{R}^{d+1}_+$ 中的时间正向和时间反向抛物矩形。

$\delta_\lambda(x,t) = (\lambda x, \lambda^2 t)$ is given by $\delta_\lambda R((x,t),\ell) = \lambda Q \times (t-\lambda^2\ell^2, t+\lambda^2\ell^2)$.

遵循 [7] 与 [16], ， $\mathrm{I}_\alpha\mu$ 和$\mathrm{W}\alpha$的二进表述$_q\mu$ 在内蕴抛物框架中需要一个适应这一几何的二进制网格。为此，我们考虑由时间向后抛物矩形R^- =R^-(z ℓ, 1)经缩放映射(x,t) $\mapsto$(λx λ^2t)得到的二进矩形。我们更倾向于回顾一种基于缩放(x,t) $\mapsto$(λx λpt)（针对 1 $<$p $<\infty$）的构造，它自然可以引出抛物Wolff不等式之广义形式的推广。为此，Saari [28] 针对(x,t) $\mapsto$(λx λpt)（其中p $\in$ (1,∞)）构造了二进制网格D(Q_0)，其中$\mathrm{Q}_0 \subset \mathbb{R}^{d+1}$ 是一个抛物矩形。

引理 3.1 ([28])。 设Q_0 为一个边长为 $\ell(Q_0)>0$的抛物矩形。则存在具有二进树性质的盒子，它们几乎是Q_0 的抛物子矩形，使得

(i) $\mathfrak{D}(Q_0)=\bigcup_{j=0}^{\infty}\mathfrak{D}_j(Q_0)$, *where* $\mathfrak{D}_j(Q_0)=\{R_k^{(j)}\}_k$ *and* $\bigcup_k R_k^{(j)}=Q_0\in\mathfrak{D}_0$.

(ii) 给定 R，$R'\in\mathfrak{D}(Q_0)$ 满足 $R\cap R'\in\{/0,R,R'\}$. 对每个 $R\in\mathfrak{D}j(Q_0)$，存在唯一的 $R'\in\mathfrak{D}j-1(Q_0)$，使得 $R'\supset R$ 且 $|R|\simeq|R'|$。

(iii) 对于每个 $R\in\mathfrak{D}j(Q_0)$，存在一个抛物矩形 R'，它由 Q_0 经过膨胀$(x,t)\mapsto(\lambda x\ \lambda pt)$和平移得到，使得 $\ell(R')=2^-j\ell(Q_0)$，$R'\supset R$，且 $|R|\simeq|R'|$，对所有 $1<p<\infty$ 均成立。

注意，D(R^-) 仅覆盖空间 $\mathbb{R}^{d+1}_+$ 的一部分。为了用与抛物几何及时间反向结构内在关联的二进矩形铺砌$\mathbb{R}^{d+1}_+$，可以考虑 Lerner 和 Nazarov [23] 引入的二进格 $\mathscr{D}$。具体而言，Lerner 和 Nazavov 意义下的抛物二进格 $\mathscr{D}$ 定义如下:

定义 3.2。 $\mathscr{D}$ 中的抛物二进格 $\mathbb{R}^{d+1}_+$是由时间向后矩形 Q 组成的任意集合，满足

(i) 若 $Q\in\mathscr{D}$，则 $\mathfrak{D}(Q)\in\mathscr{D}$，也就是说，由引理 *3.1* 得到的 Q 的每个子矩形都属于 $\mathscr{D}$。

(ii) 若 Q'、$Q''\in\mathscr{D}$，则存在 $Q\in\mathscr{D}$，使得 Q',$Q''\in\mathfrak{D}(Q)$。

(iii) 对每个紧集 $K\subset\mathbb{R}^{d+1}_+$，都存在 $Q\in\mathscr{D}$，使得 $K\subset Q$。

给定一个时间向后矩形 $R^-\in\mathscr{D}$，根据定义 3.2(ii)，我们可以将 $\mathscr{D}$划分为若干代 $\mathscr{D}_k$，其中每个矩形 R 的边长由 $\ell(R)=2^{-k}\ell(R^-)$给出，对所有 $k\in\mathbb{Z}$均成立。现在利用定义 3.2(iii)，并运用定义3.2(ii) 中的一个技巧，则 $\mathscr{D}_k$ 覆盖 $\mathbb{R}^{d+1}_+$。

设 $\mu\in\mathrm{M}^+(\mathbb{R}^{d+1})$，并令 $\mathbf{I}_\alpha\mu$ 为其抛物势，定义为

$$(\mathbf{I}_\alpha\mu)(z)=\int_0^\infty\frac{\mu(Q_s(z))}{s^{n-\alpha}}\frac{ds}{s},$$

对 $0<\alpha<n$ 成立。众所周知（参见 [26, 命题 4.8]），

$$\|\Gamma^\alpha\mu\|_{L^q(\mathbb{R}^{d+1})}\simeq\|\mathbf{I}_\alpha\mu\|_{L^q(\mathbb{R}^{d+1})}\simeq\|\check{\Gamma}^\alpha\mu\|_{L^q(\mathbb{R}^{d+1})}. \tag{3.2}$$

现在我们可以将前述抛物势形式化为一个二进版本。对于 $\mu\in\mathrm{M}^+(\mathbb{R}^{d+1})$，$\mathbf{I}_\alpha\mu$ 的抛物二进分解定义为

$$(\mathbf{I}_\alpha^{\mathscr{D}}\mu)(y,s)=\sum_{R\in\mathscr{D}}\ell_R^{\alpha-n}\mu(R)\mathbb{1}_R(y,s). \tag{3.3}$$

（齐次）抛物二进沃尔夫势 $\dot{\mathbf{W}}^{\mathscr{D}}_{\alpha,\,q}\mu$ 定义为

$$\dot{\mathbf{W}}^{\mathscr{D}}_{\alpha,q}\mu(x,t)=\sum_{R\in\mathscr{D}}\Big(\ell_R^{\alpha q-n}\mu(R)\Big)^{q'-1}\mathbb{1}_R(x,t),\tag{3.4}$$

其中求和遍历所有时间后向抛物二进矩形 $R\in\mathscr{D}_j$，其边长为 $\ell(R)=2^{-j}\ell(R^-)$，其中 $j=0$、±1、±2、$\cdots$。对于每个 $\delta\in(0,\infty)$，根据 [26, 命题 4.8]，我们已知

$$\|\mathscr{G}_\alpha\mu\|_{L^q(\mathbb{R}^{d+1})}\simeq\|\mathbf{I}^\delta_\alpha\mu\|_{L^q(\mathbb{R}^{d+1})}\simeq\|\breve{\mathscr{G}}_\alpha\mu\|_{L^q(\mathbb{R}^{d+1})}\tag{3.5}$$

对于所有 $1<q<\infty$ 和 $0<\alpha<n$，其中截断的 $\mathbf{I}^\delta_\alpha$ 势定义为

$$(\mathbf{I}^\delta_\alpha\mu)(z)=\int_0^\delta\frac{\mu(Q_s(z))}{s^{n-\alpha}}\frac{ds}{s}.$$

这促使我们将 $\mathscr{G}_\alpha\mu$ 的抛物型二进版本定义如下

$$(\mathscr{G}^{\mathscr{D}}_\alpha\mu)(y,s)=\sum_{R\in\mathscr{D},\,\ell(R)<1}\ell_R^{\alpha-n}\mu(R)\mathbb{1}_R(y,s),$$

以及（非齐次）抛物型二进沃尔夫势 $\mathbf{W}^{\mathscr{D}}_{\alpha,\,q}\mu$ 定义为

$$(\mathbf{W}^{\mathscr{D}}_{\alpha,q}\mu)(x,t)=\sum_{R\in\mathscr{D},\,\ell(R)<1}\Big(\ell_R^{\alpha q-n}\mu(R)\Big)^{q'-1}\mathbb{1}_R(x,t),$$

其中求和遍历抛物型二进矩形 $R\in\mathscr{D}_j$，满足 $\ell_R<1$。我们定义 $\mu\in\mathrm{M}(\mathbb{R}^{d+1})$ 的齐次抛物型二进能量，并分别将其非齐次变体定义为

$$\dot{\mathrm{E}}^{\mathscr{D}}_{\alpha,q}\mu=\int_{\mathbb{R}^{d+1}}|\mathbf{I}^{\mathscr{D}}_\alpha\mu|^{q'}d\mathscr{L}\quad\text{and}\quad\mathrm{E}^{\mathscr{D}}_{\alpha,q}\mu=\int_{\mathbb{R}^{d+1}}|\mathscr{G}^{\mathscr{D}}_\alpha\mu|^{q'}d\mathscr{L},$$

其中 $1<q<\infty$ 和 $0<\alpha<n$。

定理 3.3（抛物型二进 Wolff 不等式）。设 $\mu\in\mathrm{M}(\mathbb{R}^{d+1})$ 且 $1<q<\infty$。若 $\alpha q<n$，则

$$\dot{\mathrm{E}}^{\mathscr{D}}_{\alpha,q}\mu\simeq\int_{\mathbb{R}^{d+1}}(\dot{\mathbf{W}}^{\mathscr{D}}_{\alpha,q}\mu)d\mu.\tag{3.6}$$

若 $0<\alpha\le n/q$，则

$$\mathrm{E}^{\mathscr{D}}_{\alpha,q}\mu\simeq\int_{\mathbb{R}^{d+1}}(\mathbf{W}^{\mathscr{D}}_{\alpha,q}\mu)d\mu.\tag{3.7}$$

定理 3.3 的证明依赖于 [7, 命题 2. 的一个关键抛物型二进制版本2]。事实上，设 $1\le s<\infty$ 和 $\Lambda=\{\lambda_R\}_{R\in\mathscr{D}}$ 是一列非负数。设 $\sigma\in\mathfrak{M}^+(\mathbb{R}^{d+1})$ 是 $\mathbb{R}^{d+1}$ 上的一个正测度，并令

$$\begin{aligned}
A_1(\Lambda)&=\int_{\mathbb{R}^{d+1}}\Big[\sum_{R\in\mathscr{D}}\frac{\lambda_R}{\sigma(R)}\mathbb{1}_R(x,t)\Big]^s d\sigma(x,t)\\
A_2(\Lambda)&=\sum_{R\in\mathscr{D}}\lambda_R\Big(\frac{1}{\sigma(R)}\sum_{R'\subset R}\lambda_{R'}\Big)^{s-1}\\
A_3(\Lambda)&=\int_{\mathbb{R}^{d+1}}\Big[\sup_{(x,t)\in R}\Big(\frac{1}{\sigma(R)}\sum_{R'\subset R}\lambda_{R'}\Big)\Big]^s d\sigma(x,t),\quad\text{for all}\quad R\in\mathscr{D}.
\end{aligned}$$

引理 3.4 ([7])。如果 $\sigma \in \mathfrak{M}^+(\mathbb{R}^{d+1})$ 是一个博雷尔测度，且 $1 < s < \infty$，那么 $A_1(\Lambda)$、$A_2(\Lambda)$ 和 $A_3(\Lambda)$等价，因为

$$A_1(\Lambda) \lesssim_s A_2(\Lambda) \lesssim_s A_3(\Lambda) \le \|\mathbf{M}_\sigma^{\mathscr{D}}\|_{L^s(\sigma)\to L^s(\sigma)} A_1(\Lambda), \tag{3.8}$$

其中$\mathbf{M}_\sigma^{\mathscr{D}}\mu$ 是二进 *Hardy–Littlewood* 极大函数，定义如下：

$$(\mathbf{M}_\sigma^{\mathscr{D}}\mu)(x,t) = \sup_{R\in\mathscr{D}} \frac{\mu(R)}{\sigma(R)} \tag{3.9}$$

上确界取遍所有包含$(x, t$的时间滞后抛物型二进长方形 R。).

二进极大函数 $\mathrm{M}_\sigma^{\mathscr{D}}\mu$在 $\mathrm{L}^s(\sigma)$ 上的连续性是证明引理 3.4 的关键。事实上，对于 $1 < \mathrm{s} \le \infty$，$\mathrm{M}_\sigma^{\mathscr{D}}\mu$满足 $\mathrm{d}\mu = |\mathrm{f}\ |\mathrm{d}\sigma$，且在 $\mathrm{L}^s(\sigma)$ 上连续（例如参见 [23, 定理 15.1]）。设 $\mathrm{K}: \mathscr{D} \to [0,+\infty)$ 是一个函数，我们将抛物型二进核定义为

$$K_{\mathscr{D}}((x,t),(y,s)) = \sum_{R\in\mathscr{D}} K(R)\mathbb{1}_R(x,t)\mathbb{1}_R(y,s)$$

对所有 $(x,t),(y,s) \in \mathbb{R}_+^{d+1}$。令 $\mu \in \mathrm{M}(\mathbb{R}^{d+1})$，与$K_{\mathscr{D}}$ 相关联的二进算子$T_{\mathscr{D}}\mu$定义为

$$(T_{\mathscr{D}}\mu)(x,t) = \sum_{R\in\mathscr{D}} K(R)\mu(R)\mathbb{1}_R(x,t). \tag{3.10}$$

注意，势$\mathbf{I}_\alpha^{\mathscr{D}}\mu$ 的二进核仅取决于R的大小，即$K(R) = \ell_R^{\alpha-n}$。一般而言，我们将核$K_{\mathscr{D}}$ 关于倍增测度 σ 的平均定义如下：

$$\overline{K}(R)(x,t) = \frac{1}{\sigma(R)} \sum_{R'\subset R} K(R')\sigma(R')\mathbb{1}_{R'}(x,t).$$

现在由 [7, 命题 2.4(i)] 可得：

命题 3.5 ([7])。 如果 $d\sigma = d\mathscr{L}$，且存在一个非增函数 f，使得对于每个 $R \in \mathscr{D}$，$K(R) = f(\ell_R)$，那么

$$\overline{K}(R) \simeq \ell_R^{-n} \int_0^{\ell_R} f(s)s^{n-1}ds. \tag{3.11}$$

定理的证明 *3.3*。 注意到 $\mathbf{I}_\alpha^{\mathscr{D}}\mu$ 的核由 $K(R) = \ell_R^{\alpha-n}$给出，我们令$\lambda_R := K(R)\,\mu(R)\,\sigma(R)$ 且 $s = q'$。然后，由命题 3.5我们得到

$$\begin{aligned}
A_2(\{\lambda_R\}) = \sum_{R\in\mathscr{D}} \lambda_R \left(\frac{1}{\sigma(R)} \sum_{R'\subset R} \lambda_{R'}\right)^{q'-1} &= \sum_{R\in\mathscr{D}} K(R)\mu(R)\sigma(R) \left(\int_R \bar{K}(R)d\mu\right)^{q'-1} \\
&= \int_{\mathbb{R}^{d+1}} \sum_{R\in\mathscr{D}} K(R)\sigma(R) \left(\int_R \bar{K}(R)d\mu\right)^{q'-1} \mathbb{1}_R d\mu \\
&= \int_{\mathbb{R}^{d+1}} \sum_{R\in\mathscr{D}} \ell_R^{\alpha-n}|R| \left(\int_R \ell_R^{\alpha-n}d\mu\right)^{q'-1} \mathbb{1}_R d\mu \\
&= \int_{\mathbb{R}^{d+1}} (\dot{\mathbf{W}}_{\alpha,q}^{\mathscr{D}}\mu)d\mu.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

注意到 $A_1(\{\lambda_R\}) = \dot{\mathrm{E}}^{\mathscr{D}}_{\alpha,q}\mu$。此外，我们有 $A_3(\{\lambda_R\}) = \int_{\mathbb{R}^{d+1}}(\mathbf{M}^{\mathscr{D}}_{K,\sigma}\mu)^{q'}d\sigma$，其中 $\mathbf{M}^{\mathscr{D}}_{K,\sigma}\mu$ 由下式定义

$$(\mathbf{M}^{\mathscr{D}}_{K,\sigma}\mu)(x,t) = \sup_{(x,t)\in R}\frac{1}{\sigma(R)}\left(\sum_{R'\subset R}K(R')\sigma(R')\mu(R')\right).$$

立即应用引理3.4 即可得到（3.6）。类似地可以推出（3.7）。❑

3.2 连续 Wolff 不等式

本节将建立抛物型二进 Wolff 不等式的连续版本。为此，我们定义前面抛物型二进非线性能量 $\mu\in\mathrm{M}(\mathbb{R}^{d+1})$ 的连续版本，

$$\dot{\mathrm{E}}_{\alpha,q}\mu = \int_{\mathbb{R}^{d+1}}|\check{\Gamma}^{\alpha}\mu|^{q'}d\mathscr{L} \quad\text{and}\quad \mathrm{E}_{\alpha,q}\mu = \int_{\mathbb{R}^{d+1}}|\check{\mathscr{G}}_{\alpha}\mu|^{q'}d\mathscr{L}, \tag{3.13}$$

其中 $1<q<\infty$ 且 $0<\alpha<n$。

定理 3.6（连续抛物型 Wolff 不等式）。对于 $\mu\in\mathrm{M}^{+}(\mathbb{R}^{d+1})$ 和 $1<q<\infty$，有：

（*i*）若 $0<\alpha<n/q$，则

$$\dot{\mathrm{E}}_{\alpha,q}\mu \simeq \int_{\mathbb{R}^{d+1}}(\dot{\mathbf{W}}_{\alpha,q}\mu)d\mu.$$

(ii) 若 $0<\alpha\le n/q$，则

$$\mathrm{E}_{\alpha,q}\mu \simeq \int_{\mathbb{R}^{d+1}}(\mathbf{W}_{\alpha,q}\mu)d\mu.$$

要证明定理3.6，只需证明以下不等式：

$$\dot{\mathrm{E}}_{\alpha,q}\mu \lesssim \int_{\mathbb{R}^{d+1}}(\dot{\mathbf{W}}_{\alpha,q}\mu)d\mu \quad\text{and}\quad \mathrm{E}_{\alpha,q}\mu \lesssim \int_{\mathbb{R}^{d+1}}(\mathbf{W}_{\alpha,q}\mu)d\mu. \tag{3.14}$$

事实上，我们先引入截断抛物型 Wolff 势

$$(\mathbf{W}^{\delta}_{\alpha,q}\mu)(z) = \int_0^{\delta}\left(\frac{\mu(Q_r(z))}{r^{n-\alpha q}}\right)^{q'-1}\frac{dr}{r}, \tag{3.15}$$

对 $0<\delta\le\infty$。若假设 $\mathbf{V}^{\delta}_{\alpha,q}\mu(x,t)\gtrsim\mathbf{W}^{\delta}_{\alpha,q}\mu(x,t)$ 对 $(x,t)\in\mathbb{R}^{d+1}$ 成立，且 $\delta\in(0,\infty]$（见引理 3.7），那么根据 Fubini 定理可得

$$\int_{\mathbb{R}^{d+1}}(\dot{\mathbf{W}}_{\alpha,q}\mu)d\mu \lesssim \int(\dot{\mathbf{V}}_{\alpha,q}\mu)d\mu = \int_{\mathbb{R}^{d+1}}|\check{\Gamma}^{\alpha}\mu|^{q'}d\mathscr{L} = \dot{\mathrm{E}}_{\alpha,q}\mu.$$

现在，由等价关系 $\|\mathbf{I}^{\delta}_{\alpha}\mu\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^{d+1})}\simeq\|\check{\mathscr{G}}_{\alpha}\mu\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^{d+1})}$ 对每个 $0<\delta<\infty$，可得

$$\int(\mathbf{W}^{\delta}_{\alpha,q}\mu)d\mu \lesssim \int(\mathbf{V}^{\delta}_{\alpha,q}\mu)d\mu = \int|\mathbf{I}^{\delta}_{\alpha}\mu|^{q'}d\mu \simeq \mathrm{E}_{\alpha,q}\mu.$$

定理 3.6 的证明。 将 $\mathscr{D}$ 分成 j–代 $\mathscr{D}_j$，我们可以估计

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_\alpha\mu(y,s)=\int_0^\infty\frac{\mu(B_\rho(y)\times[s-\rho^2,s))}{\rho^{n-\alpha}}\frac{d\rho}{\rho}&\simeq\sum_{j\in\mathbb{Z}}(2^{-j}\ell_0)^{\alpha-n}\mu(Q_{2^{-j}\ell_0}(y,s))\\&\lesssim\sum_{R\in\mathscr{D}}\ell_R^{\alpha-n}\mu(\tilde{R})\mathbb{1}_R(y,s)\\&\lesssim\sum_{\tilde{R}\in\widetilde{\mathscr{D}}}\ell_{\tilde{R}}^{\alpha-n}\mu(\tilde{R})\mathbb{1}_R(y,s)=\mathbf{I}_\alpha^{\mathscr{D}}\mu(y,s),\end{aligned}$$

由三格定理 [23, 定理 3。1] 可知 $\widetilde{\mathscr{D}}=\bigcup_{j=1}^{3^n}\mathscr{D}^{(j)}$，其中每个 $\mathscr{D}^{(j)}$ 都是定义3.2意义下的二进格。因此，矩形 $\tilde{R}=\delta_3 R\in\mathscr{D}$ 可视为抛物型二进矩形。注意，

$$\dot{\mathbf{W}}_{\alpha,q}\mu(x,t)\simeq\sum_{j\in\mathbb{Z}}\Big((2^{-j}\ell_0)^{\alpha q-d-2}\mu(B_{2^{-j}\ell_0}(x)\times[t-4^{-j}\ell_0^2,t))\Big)^{q'-1}.$$

于是，我们有

$$\dot{\mathbf{W}}_{\alpha,q}\mu(x,t)\gtrsim\sum_{R\in\mathscr{D}}\Big(\ell_R^{\alpha q-n}\mu(R)\Big)^{q'-1}\mathbb{1}_R(x,t)=\dot{\mathbf{W}}_{\alpha,q}^{\mathscr{D}}\mu(x,t).\tag{3.16}$$

因此，由前述不等式和定理3.3可得

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^{d+1}}(\dot{\mathbf{W}}_{\alpha,q}\mu)d\mu\gtrsim\int_{\mathbb{R}^{d+1}}(\dot{\mathbf{W}}_{\alpha,q}^{\mathscr{D}}\mu)d\mu\simeq\dot{\mathrm{E}}_{\alpha,q}^{\mathscr{D}}\mu=\int_{\mathbb{R}^{d+1}}|\mathbf{I}_\alpha^{\mathscr{D}}\mu|^{q'}d\mathscr{L}\\\gtrsim\int_{\mathbb{R}^{d+1}}|\mathbf{I}_\alpha\mu|^{q'}d\mathscr{L}\simeq\dot{\mathrm{E}}_{\alpha,q}\mu,\end{aligned}$$

对所有 $1<q<n/\alpha$，因为 $\|\mathbf{I}^\alpha\mu\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^{d+1})}\simeq\|\nabla\Gamma^\alpha\mu\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^{d+1})}$ (见 [26, 命题 4。8])。定理3.6(ii)可沿类似思路证明。事实上，

$$\int_{\mathbb{R}^{d+1}}(\mathbf{W}_{\alpha,q}\mu)d\mu\gtrsim\int_{\mathbb{R}^{d+1}}(\mathbf{W}_{\alpha,q}^{\mathscr{D}}\mu)d\mu\simeq\int_{\mathbb{R}^{d+1}}|\mathscr{G}_\alpha^{\mathscr{D}}\mu|^{q'}d\mathscr{L}\gtrsim\int_{\mathbb{R}^{d+1}}|\mathbf{I}_\alpha^{\delta}\mu|^{q'}d\mathscr{L}\simeq\mathrm{E}_{\alpha,q}\mu,$$

如所需。 ❑

还需验证不等式 $\mathbf{V}_{\alpha,q}^{\delta}\mu(x,t)\gtrsim\mathbf{W}_{\alpha,q}^{\delta}\mu(x,t)$ 对于 $(x,t)\in\mathbb{R}^{d+1}$ 和 $\delta\in(0,\infty]$. 这就是下面引理所要处理的问题。

引理 3.7. 设 $\mu\in\mathfrak{M}^+(\mathbb{R}^{d+1})$ 且 $0<\alpha<n$，则 $\mathbf{V}_{\alpha,q}^{\delta}\mu(x,t)\gtrsim\mathbf{W}_{\alpha,q}^{\delta}\mu(x,t)$ 对所有 $(x,t)\in\mathbb{R}^{d+1}$。

证明。 对于每个 $(y,s)\in Q_{2^{-i-1}\delta}(x,t)$，都有 $Q_{2^{-i}\delta}(y,s)\supseteq Q_{2^{-i-1}\delta}(x,t)$。事实上，令 $(z,\tau)\in Q_{2^{-i-1}\delta}(x,t)$，则

$$|z-y|+|\tau-s|^{\frac12}\le(|z-x|+|\tau-t|^{\frac12})+(|x-y|+|t-s|^{\frac12})<2^{-i}\delta.$$

因此，对于 $0<\delta<\infty$，定义测度 $d\nu(y,\ s)\ =(\mathbf{I}_\alpha^\delta\mu)^{q'-1}dyds$，我们可以估计

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}_{\alpha,q}^{\delta}\mu(x,t) &:= \int_0^\delta \frac{\nu(B_\rho(x)\times[t-\rho^2,t))}{\rho^{n-\alpha}}\frac{d\rho}{\rho}\\
&\simeq \sum_{i=0}^{\infty}(2^{-i}\delta)^{\alpha-n}\nu(Q_{2^{-i}\delta}(x,t))\\
&\geq \sum_i (2^{-i}\delta)^{\alpha-n}\int_{Q_{2^{-i-1}\delta}(x,t)}[\mathbf{I}_\alpha^\delta\mu(y,s)]^{q'-1}dyds\\
&\geq \sum_i (2^{-i}\delta)^{\alpha-n}(2^{-i}\delta)^{(\alpha-n)(q'-1)}\int_{Q_{2^{-i-1}\delta}(x,t)}\mu(Q_{2^{-i}\delta}(y,s))^{q'-1}dyds\\
&\geq \sum_i (2^{-i}\delta)^{(\alpha-n)q'}\mu(Q_{2^{-i-1}\delta}(x,t))^{q'-1}m(Q_{2^{-i-1}\delta}(x,t))\\
&= c\sum_{i=0}^{\infty}\left((2^{-i}\delta)^{\alpha q-n}\mu(B_{2^{-i}\delta}(x)\times[s-4^{-i}\delta^2,s))\right)^{q'-1}\\
&\simeq \mathbf{W}_{\alpha,q}^{\delta}\mu(x,t).
\end{aligned}$$

情形 $\delta=\infty$ 可通过类似的论证得出。证明至此完成。 ❑

3.3 正则化二进 Wolff 势

二进非线性势 $\mathbf{W}_{\alpha,q}^{\mathscr{D}}\mu$ 在 $\mathbb{R}^{d+1}$上不是下半连续的。它可以按以下方式正则化

$$(\mathscr{W}_{\alpha,q}^{\mathscr{D}}\mu)(x,t)=\sum_{R\in\mathscr{D},\,\ell_R<1}\left(\ell_R^{\alpha q-n}\mu(\eta_R)\right)^{q'-1}\eta_R(x,t) \tag{3.17}$$

对所有 $\mu\in\mathfrak{M}^+(\mathbb{R}^{d+1})$，其中 $\eta_R\in C_c^\infty(\mathbb{R}^{d+1})$ 使得 $\mathbb{1}_R\leq\eta_R\leq\mathbb{1}_{\delta_3 R}$ 且 $\mu(\eta_R):=\int_{\mathbb{R}^{d+1}}\eta_R d\mu$。那么，根据定理 3.3，正则化二进非线性能量可定义为

$$\mathscr{E}\mu=\int_{\mathbb{R}^{d+1}}\left(\mathscr{W}_{\alpha,q}^{\mathscr{D}}\mu\right)d\mu=\sum_{R\in\mathscr{D},\,\ell_R<1}b(R)[\mu(\eta_R)]^{q'}, \tag{3.18}$$

其中 $b(R):=\ell^{(\alpha q-n)(q'-1)}{}_R$，对所有 $0<\alpha<n$ 以及 $1<q\leq n/\alpha$。利用定理 3.3和定理 3.6(ii)，可得以下等价关系。

引理 3.8。设 $0<\alpha<n$ 和 $1<q\leq n/\alpha$。对于 $\mu\in\mathfrak{M}^+$，有

$$\mathrm{E}_{\alpha,q}^{\mathscr{D}}\mu\simeq\mathscr{E}\mu\simeq\mathrm{E}_{\alpha,q}\mu.$$

证明。对于每个紧集K，都存在一个抛物型二进矩形$R\in\mathscr{D}$ con-

包含 K （见定义 3.2）。因此，

$$(\mathbf{W}^{\mathscr{D}}_{\alpha,q}\mu)(x,t) \lesssim (\mathbf{W}_{\alpha,q}\mu)(x,t) \simeq \sum_{i=0}^{\infty} \left((2^{-i}\ell_0)^{\alpha q-n}\mu(B_{2^{-i}\ell_0}(x)\times[t-(2^{-i}\ell_0)^2,t))\right)^{q'-1}$$
$$\lesssim \sum_{\ell_R<1} \left(\frac{\mu(R)}{\ell_R^{n-\alpha q}}\right)^{q'-1} \mathbb{1}_R(x,t). \tag{3.19}$$

因此，我们得到

$$\int_{\mathbb{R}^{d+1}} (\mathbf{W}^{\mathscr{D}}_{\alpha,q}\mu)d\mu \lesssim \int_{\mathbb{R}^{d+1}} (\mathbf{W}_{\alpha,q}\mu)d\mu \lesssim \sum_{\ell_R<1} b(R)\mu(R)^{q'}. \tag{3.20}$$

现在，由前面的不等式、定理3.3 和3.6 可得

$$\mathrm{E}^{\mathscr{D}}_{\alpha,q}\mu \simeq \mathrm{E}_{\alpha,q}\mu.$$

下面只需证明 $\mathscr{E}\mu \simeq \mathrm{E}^{\mathscr{D}}_{\alpha,q}\mu$。为此，回顾 $\mathbb{1}_R \le \eta_R \le \mathbb{1}_{\tilde{R}}$ and$\mathscr{E}\mu = \int (\mathscr{W}^{\mathscr{D}}_{\alpha,q}\mu)\, d\mu$，其中 $\tilde{R} = \delta_3 R$。于是，

$$\sum_{\substack{R\in\mathscr{D}\\ \ell_R<1}} b(R)\mu(R)^{q'} \le \mathscr{E}\mu \le \sum_{\substack{\tilde{R}\in\mathscr{D}\\ \ell_R<1}} b(\tilde{R})\mu(\tilde{R})^{q'}$$

因为根据三格定理 [23, 定理 3.1]，，矩形 R可以被视为 Lerner-Nazarov 意义下的抛物型二进矩形（见定义3.2）。因此，根据定理 3.3，我们得到 $\mathscr{E}\mu \simeq \mathrm{E}^{\mathscr{D}}_{\alpha,q}\mu$ 如所要求。❑

4 抛物二进容量

受贝塞尔容量的对偶刻画（见命题 2.4）启发，紧集 $K \subset \mathbb{R}^{d+1}$ 的抛物型二进贝塞尔容量定义为

$$\mathscr{C}_{\alpha,q}(K)^{1/q} := \sup\left\{\|\mu\| : \mu \in \mathfrak{M}^+(K) \text{ and } \mathscr{E}\mu \le 1\right\}.$$

在第4 章和5章中，我们假设 $\alpha \in (0,n)$且 $1 < q \le n/\alpha$。由引理3.8 和命题 2.4 可知，该定义等价于抛物型贝塞尔容量：$\mathscr{C}_{\alpha,q}(K) \simeq C_{\alpha,q}(K)$。此外，容量$\mathscr{C}_{\alpha,q}$ 可以按通常方式推广到任意集合。

引理 4.1. 设 $K \subset \mathbb{R}^{d+1}$ 为紧集，且$\mathfrak{M}^+_1(K) := \{\mu \in \mathfrak{M}^+(K) : \|\mu\| = 1\}$。那么，

$$[\mathscr{C}_{\alpha,q}(K)]^{-1} = \inf\left\{(\mathscr{E}\nu)^{q-1} : \nu \in \mathfrak{M}^+_1(K)\right\},$$

证明。 设 $\mu \in \mathrm{M}^+(K)$ 满足 $\mathscr{E}\mu \le 1$。那么 $\nu := \frac{\mu}{\|\mu\|} \in \mathrm{M}^+_1(K)$，并且我们有

$$\mathscr{E}\nu = \mu(K)^{-q'}\mathscr{E}\mu \le \mu(K)^{-q'}$$

由此得到 $(\mathscr{E}\nu)^{q/q'} \le [\mathscr{C}_{\alpha,q}(K)]^{-1}$。因此，

$$\inf_{\nu\in\mathfrak{M}_1^+(K)} (\mathscr{E}\nu)^{q-1} = \inf_{\nu\in\mathfrak{M}_1^+(K)} (\mathscr{E}\mu)^{q/q'} \le [\mathscr{C}_{\alpha,q}(K)]^{-1}.$$

对于反向不等式，取 $\nu\in \mathrm{M}^+(K)$，使得 $\nu(K)=1$。令 $\mu:=(\mathscr{E}\nu)^{-1/q'}\nu$，并注意到 $\mathscr{E}\mu=1$ 和 $\mu(K)=(\mathscr{E}\nu)^{-1/q'}$。因此，我们得到

$$[\mathscr{C}_{\alpha,q}(K)]^{1/q} \ge \|\mu\| = (\mathscr{E}\nu)^{-1/q'},$$

由此得到所需的上界。 ❑

4.1 极值测度

定义 4.2. 设 $A\subset\mathbb{R}^{d+1}$ 为任意集合。若测度 $\gamma_A\in\mathfrak{M}_1^+$ 满足$\mathscr{C}_{\alpha,q}$−则称其为 A 的极值测度，其中 支集$(\gamma_A)\subset A$，且 γ_A 在$\mathfrak{M}_1^+(A)$上使能量 $\mathscr{E}\mu$ 达到最小，满足

$$\mathscr{E}\gamma_A = [\mathscr{C}_{\alpha,q}(A)]^{1-q'}. \tag{4.1}$$

引理 4.3. 每个紧集 K 都存在一个 $\mathscr{C}_{\alpha,q}$−极值测度 γ_K。

证明。 取序列 $\{\mu_n\}\in \mathrm{M}_1^+(K)$，使得 $\lim_{n\to\infty}\mathscr{E}\mu_n = \inf_{\mu\in\mathfrak{M}_1^+(K)}\mathscr{E}\mu$。由于 $\mathrm{M}_1^+(K)$ 在 M^+ 的弱*–拓扑下是紧集，因此我们可以找到一个极小化测度 $\gamma_K\in\mathrm{M}_1^+(K)$，使得 $\mu_{n_j}\rightharpoonup\gamma_K$，且对所有 $\mu\in\mathrm{M}_1^+(K)$，都有 $\mathscr{E}\gamma_K\le\mathscr{E}\mu$。事实上，由于

$$\mu\mapsto\mathscr{E}\mu=\int(\mathscr{W}_{\alpha,q}^{\mathscr{D}}\mu)d\mu$$

在 $\mathrm{M}^+(\mathbb{R}^{d+1})$ 的弱*–拓扑中是下半连续的，则

$$\mathscr{E}\gamma_K \le \liminf_{j\to\infty}\mathscr{E}\mu_{n_j} = \inf_{\mu\in\mathfrak{M}_1^+(K)}\mathscr{E}\mu \tag{4.2}$$

这意味着 $\mathscr{E}\gamma_K\le\mathscr{E}\mu$。现在由引理 4.1 我们得到

$$[\mathscr{C}_{\alpha,q}(K)]^{\frac{1}{q-1}} = \left(\inf_{\mu\in\mathfrak{M}_1^+(K)}\mathscr{E}\mu\right)^{-1} = [\mathscr{E}\gamma_K]^{-1}$$

从而得到（4.1），即为所求。 ❑

在命题 4.9 中，我们将该引理推广到任意集合。

4.2 $\mathscr{C}$–与 Wolff 势相关联的容量测度

本节中，我们将证明紧集存在容量测度，并给出容量的若干刻画，$\mathscr{C}_{\alpha q}$。

定义 4.4（与 Wolff 势相关的容量测度）。设 $E \subset \mathbb{R}^{d+1}$ 满足 $0 < \mathscr{C}_{\alpha,\,q}(E) < \infty$。若 $\mu^E \in \underline{\mathfrak{M}}^+$ 是 E 的 $\mathscr{C}$–容量测度，且其支集（μ^E）$\subset E$，并且

(i) $\mu^E(\overline{E}) = \mathscr{C}_{\alpha,q}(E)$

(ii) $(\mathscr{W}^{\mathscr{D}}_{\alpha,q}\mu^E)(x,t) \geq 1 \ \ \mathscr{C}_{\alpha,q}-a.e \ \ (x,t) \in E$

(iii) $(\mathscr{W}^{\mathscr{D}}_{\alpha,q}\mu^E)(x,t) \leq 1 \ \ \forall\,(x,t) \in \mathrm{spt}(\mu^E).$

命题 4.5. 设 γ 是紧集 K 的一个 $\mathscr{C}$–极值测度，则

（**A**）（$\mathscr{W}^{\mathscr{D}}_{\alpha,\,q}\gamma$）（$x,\,t$）$\geq \mathscr{E}\gamma$ 对 $\mathscr{C}_{\alpha,\,q}$ − 几乎处处成立，其中（$x,\,t$）$\in$ 属于 K；（**B**）（$\mathscr{W}^{\mathscr{D}}_{\alpha,\,q}\gamma$）（$x,\,t$）$\leq \mathscr{E}\gamma$ 对所有（x,t）$\in$ 属于支集（γ）。

In particular, we have $(\mathscr{W}^{\mathscr{D}}_{\alpha,q}\gamma)(x,t) = \mathscr{E}\gamma \ \ for \ \ \mathscr{C}_{\alpha,q} - a.e \ \ (x,t) \in \mathrm{spt}(\gamma).$

证明。设 $\mathrm{K}_0 \subset \mathrm{K}$ 是一个紧集，使得 $\mathscr{C}_{\alpha,q}(\mathrm{K}_0) > 0$，且 $\mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{t}) := \mathscr{E}\gamma - (\mathscr{W}^{\mathscr{D}}_{\alpha},\mathrm{q}\gamma)(\mathrm{x},\mathrm{t}) > 0$ 对所有 $(\mathrm{x},\mathrm{t}) \in \mathrm{K}_0$ 成立。由于 $(\mathscr{W}^{\mathscr{D}}_{\alpha},\mathrm{q}\gamma)(\cdot)$ 在 $\mathbb{R}^{d+1}$ 上是下半连续的，因此对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得集合 $\mathrm{F} := \mathrm{B}((\mathrm{x},\mathrm{t})\ \delta/2) \cap \mathrm{K}_0$ 是紧集，且 $\mathscr{C}_{\alpha,q}(\mathrm{F}) > 0$，并且我们有

$$F \subset K \cap \left\{(x,t) : (\mathscr{W}^{\mathscr{D}}_{\alpha,q}\gamma)(x,t) < \mathscr{E}\gamma - \varepsilon\right\}. \tag{4.3}$$

设 $\mu \in \mathrm{M}_1^+(K)$ 满足 $\mathscr{E}\mu < \infty$，并令 $\mu_\delta := \delta\mu + (1-\delta)\gamma$ 对所有 $\delta \in [0,1]$ 成立。由于 $\mathrm{M}_1^+(K)$ 是凸集，且 γ 使能量最小化，因此 $\mu_\delta \in \mathrm{M}_1^+(K)$，从而对所有 $\delta \in (0,1)$ 有 $\mathscr{E}\gamma \leq \mathscr{E}\mu_\delta$。我们将证明这会导致矛盾。事实上，对函数 $g_R(\delta) = [\gamma(\eta_R) + \delta(\mu(\eta_R) - \gamma(\eta_R))]^{q'}$ 应用中值定理，可得存在 $0 < s < \delta$ 使得

$$g_R(\delta) = g_R(0) + \delta g_R'(s) = [\gamma(\eta_R)]^{q'} + \delta q'[\mu_s(\eta_R)]^{q'-1}(\mu(\eta_R) - \gamma(\eta_R)).$$

因此，

$$\begin{aligned}\mathscr{E}\mu_\delta = \sum_{\ell_R<1} b(R)g_R(\delta) &= \sum_{\ell_R<1} b(R)\left\{[\gamma(\eta_R)]^{q'} + \delta\, q'[\mu(\eta_R) - \gamma(\eta_R)][\mu_s(\eta_R)]^{q'-1}\right\} \\ &= \mathscr{E}\gamma + \delta p \sum_{\ell_R<1} b(R)[\mu(\eta_R) - \gamma(\eta_R)]\mu_s(\eta_R)^{q'-1}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

式（4.4）在（0，δ）上一致收敛。事实上，其绝对值有界于

$$\sum_{\ell_R<1} b(R)[\gamma(\eta_R) + \mu(\eta_R)]^{q'} \lesssim \mathscr{E}\gamma + \mathscr{E}\mu.$$

因此，将 $\delta \to 0$ 代入（4.4）的右端，并应用（4.3），可得：

$$\begin{aligned}
\mathscr{E}\mu_\delta &= \mathscr{E}\gamma + \delta q' \sum_{\ell_R<1} \left(\ell_R^{\alpha q-n}\gamma(\eta_R)\right)^{q'-1}\mu(\eta_R) - \delta q' \sum_{\ell_R<1} b(R)\gamma(\eta_R)^{q'} + o(\delta) \\
&= \mathscr{E}\gamma + \delta q' \int_{\mathbb{R}^{d+1}} (\mathscr{W}^{\mathscr{D}}_{\alpha,q}\gamma)d\mu - \delta q'\mathscr{E}\gamma + o(\delta) \\
&= \mathscr{E}\gamma + \delta q' \left\{ \int_{\mathbb{R}^{d+1}} \left((\mathscr{W}^{\mathscr{D}}_{\alpha,q}\gamma)(x,t) - \mathscr{E}\gamma\right) d\mu \right\} + o(\delta) \\
&< \mathscr{E}\gamma - \delta q'\varepsilon + o(\delta) < \mathscr{E}\gamma,
\end{aligned}$$

对于足够小的 $\delta > 0$，这就产生了矛盾。

我们来证明**(B)**。假设 $\mathscr{W}^{\mathscr{D}}_{\alpha,q}\gamma(z_0) > \mathscr{E}\gamma$ 对某个$z_0 \in \mathrm{spt}(\gamma)$成立。由于 $(\mathscr{W}^{\mathscr{D}}_{\alpha,q}\gamma)(\cdot)$ 关于 $\mathbb{R}^{d+1}$ 是（下半连续的），存在一个包含$z_0 \in \mathrm{spt}(\gamma)$ 的开集V，使得

$$(\mathscr{W}^{\mathscr{D}}_{\alpha,q}\gamma)(x,t) > \mathscr{E}\gamma \quad \text{for all} \quad (x,t) \in V. \tag{4.5}$$

现在，利用前面的结果**(A)** 并注意到 $\gamma \ll \mathscr{C}_{\alpha,q}$（$\mathscr{C}$–绝对连续），我们得到 $(\mathscr{W}^{\mathscr{D}}_{\alpha,q}\gamma)(x,t) \geq \mathscr{E}\gamma$ 在K上几乎处处成立。这导致矛盾。事实上，

$$\mathscr{E}\gamma = \int (\mathscr{W}^{\mathscr{D}}_{\alpha,q}\gamma)d\gamma = \int_V (\mathscr{W}^{\mathscr{D}}_{\alpha,q}\gamma)d\gamma + \int_{\mathrm{spt}(\gamma)\setminus V} (\mathscr{W}^{\mathscr{D}}_{\alpha,q}\gamma)d\gamma > \mathscr{E}\gamma.$$

至此，所需的证明便告完成。 ❑

现在我们可以证明紧集的 $\mathscr{C}_{\alpha,q}$−容量测度存在。

定理 4.6. 对于任意满足 $0 < \mathscr{C}_{\alpha,q}(K) < \infty$ 的紧集 $K \subset \mathbb{R}^{d+1}$，存在一个 $\mathscr{C}_{\alpha,q}$−容量测度 γ^K。

证明。设 $\gamma \in \mathrm{M}^+(\mathrm{K})$ 为 K 的一个 $\mathscr{C}$–极值测度（见引理 4.3），并考虑平衡测度 $\gamma^K = \mathscr{C}_{\alpha,q}(\mathrm{K})\gamma$。显然，我们有支集$(\gamma^K) \subset \mathrm{K}$ 以及 $\gamma^K(\mathrm{K}) = \mathscr{C}_{\alpha,q}(\mathrm{K})$。现在，由定义 4.2，我们有

$$\begin{aligned}
(\mathscr{W}^{\mathscr{D}}_{\alpha,q}\gamma^K)(z) = \sum_{\ell_R<1} \left(\ell_R^{\alpha q-n}\gamma^K(\eta_R)\right)^{q'-1}\eta_R(z) &= [\mathscr{C}_{\alpha,q}(K)]^{q'-1} \sum_{\ell_R<1} \left(\ell_R^{\alpha q-n}\gamma(\eta_R)\right)^{q'-1}\eta_R(z) \\
&= [\mathscr{E}(\gamma)]^{-1}(\mathscr{W}^{\mathscr{D}}_{\alpha,q}\gamma)(z).
\end{aligned}$$

因此，由命题 4.5 以及定义4.4 我们得到所需结果。 ❑

4.2.1 通过 Wolff 势的刻画

本节将利用相应的沃尔夫势，推导抛物型二进制容量针对紧集的刻画。

定理 4.7。

(A) 若 $\mu\in\mathfrak{M}^+(\mathbb{R}^{d+1})$ 具有有限能量 $\mathscr{E}\mu<\infty$ 且 $K\subset E_\vartheta=\{(x,t):(\mathscr{W}_\alpha^{\mathscr{D}},q\mu(x,t)>\vartheta\}$ 是一个紧集，则

$$\mathscr{C}_{\alpha,q}(K)\le\vartheta^{-q}\mathscr{E}\mu,$$

对所有 $\vartheta>0$。特别地，我们有

$$\mathscr{C}_{\alpha,q}(E_\vartheta)\le\vartheta^{-q}\mathscr{E}\mu.$$

(B) 设 $K\subset\mathbb{R}^{d+1}$ 是一个紧集，则

$$\mathscr{C}_{\alpha,q}(K)=\inf\left\{\mathscr{E}\mu:\mu\in\mathfrak{M}^+\ and\ \mathscr{W}^{\mathscr{D}}\mu\ge1\ \ \mathscr{C}_{\alpha,q}-a.e\ on\ K\right\}.$$

(C) 设 $K\subset\mathbb{R}^{d+1}$ 是一个紧集，则

$$\mathscr{C}_{\alpha,q}(K)=\sup\left\{\mu(K):\mu\in\mathfrak{M}^+(K)\ and\ \mathscr{W}^{\mathscr{D}}_{\alpha,q}\mu\le1\ \ on\ \ \mathrm{spt}(\mu)\right\}.$$

证明。 设 $\gamma\in\mathrm{M}_1^+(K)$ 满足：在 $\mathrm{spt}(\gamma)$ 上有 $\mathscr{E}\gamma<\infty$ $\subset E_\vartheta$。于是，由 Hölder 不等式可得

$$\begin{aligned}\vartheta\le\int_{\mathbb{R}^{d+1}}\mathscr{W}^{\mathscr{D}}_{\alpha,q}\mu\,d\gamma&=\sum_{\ell_R<1}\left(\ell_R^{\alpha q-n}\mu(\eta_R)\right)^{q'-1}\gamma(\eta_R)\\&=\sum_{\ell_R<1}\left(\ell_R^{(\alpha q-n)\frac{q'-1}{q}}[\mu(\eta_R)]^{q'-1}\right)\left(\ell_R^{(\alpha q-n)\frac{q'-1}{q'}}\gamma(\eta_R)\right)\\&\le\left(\sum_{\ell_R<1}\ell_R^{(\alpha q-n)(q'-1)}[\mu(\eta_R)]^{q'}\right)^{1/q}\left(\sum_{\ell_R<1}\ell_R^{(\alpha q-n)(q'-1)}[\gamma(\eta_R)]^{q'}\right)^{1/q'}\\&\le(\mathscr{E}\mu)^{1/q}(\mathscr{E}\gamma)^{1/q'}.\end{aligned}\tag{4.6}$$

现在，根据引理 4.3，我们可以假设 $\gamma=\gamma_K$ 是 $\mathscr{C}$–紧集 $K\subset E_\vartheta$上的极值测度。然后利用定义 4.2 和不等式（4.6），可得

$$\mathscr{C}_{\alpha,q}(K)=(\mathscr{E}\gamma_K)^{-q/q'}\le\vartheta^{-q}\mathscr{E}\mu.$$

下面证明**(B)**。对于每个紧集$K\subset E_1,$，由第**(A)** 项可得 $\mathscr{C}_{\alpha,\ q}(K)\le\mathscr{E}\mu$。特别地，

$$\mathscr{C}_{\alpha,q}(K)\le\inf\left\{\mathscr{E}\mu:\mu\in\mathfrak{M}^+\text{ and }\mathscr{W}^{\mathscr{D}}_{\alpha,q}\mu\ge1\ \ \mathscr{C}-\text{a.e on }K\right\}.$$

上文提到的下确界恰好在 μ^K 处达到，即 K 的 $\mathscr{C}$–容量测度。事实上，可以证明

$$\mathscr{E}\mu^K=\mu^K(K)=\mathscr{C}_{\alpha,q}(K).\tag{4.7}$$

证明**(C)**。只需证明，对于任意满足 $\mathscr{W}^{\mathscr{D}}_{\alpha,\ q}\mu\le1$ 在 $\mathrm{spt}(\mu)$ 上的 $\mu\in\mathrm{M}^+(K)$，都有 $\mu(K)\le\mathscr{C}_{\alpha,q}(K)$。事实上，定理4.6保证存在一个 $\mathscr{C}$- 容量测度 μ，其对应于K，并且满足 $\mathscr{C}_{\alpha,\ q}(K)=\mu(K)$。因此，假设 $\mu\in\mathrm{M}^+(K)$

使得 $\mathscr{W}_{\alpha,q}^{\mathscr{D}}\mu \le 1$ 在 $\mathrm{spt}(\mu)$ 上成立，并令 γ^K 为一个 $\mathscr{C}$–容量测度，对应于 K。由于$\gamma^K \ll \mathscr{C}_{\alpha,q}$，于是 $\mathscr{W}_{\alpha,q}^{\mathscr{D}}\gamma^K \ge 1$ 对于 γ–在 K上几乎处处成立。现在仿照（4.6）的证明，利用 $\mathscr{E}\mu \le \mu(K)$ 和（4.7），可得

$$\mu(K) \le \int \mathscr{W}_{\alpha,q}^{\mathscr{D}}\gamma^K d\mu \le \left(\mathscr{E}\gamma^K\right)^{1/q}(\mathscr{E}\mu)^{1/q'} \le \mathscr{C}_{\alpha,q}(K)^{1/q}\mu(K)^{1/q'},$$

从而得到 $\mu(K) \le \mathscr{C}_{\alpha,q}(K)$，如所需。 ❑

4.2.2 任意集合的容量测度

本节旨在证明一般集合 $\mathscr{C}$的 E-容量测度存在。经典证明依赖于 L^p 中的克拉克森不等式（见 [16]）。然而，只需使用下面的引理4.8 即可。为方便读者，我们概述其证明。

引理 4.8。对于任意 a、$b \in \mathbb{R}$，我们有

(i) $\left|\frac{a-b}{2}\right|^p + \left|\frac{a+b}{2}\right|^p \le 2^{1-p}(|a|^p + |b|^p)$, *as* $1 < p \le 2$.

(ii) $\left|\frac{a-b}{2}\right|^p + \left|\frac{a+b}{2}\right|^p \le \frac{1}{2}(|a|^p + |b|^p)$, *as* $2 \le p < \infty$.

证明。由于函数 $\mathbb{R}_+ \ni t \mapsto t^{r/s}$ 关于 $s \le r$ 是凸函数，因此 $M(s) = \left(\sum_{i=1}^n x_i^s n\right)^{1/s}$ 是递增函数。事实上，由詹森不等式可得 $\left(\sum_{i=1}^n x_i^s n\right)^{r/s} \le \sum_{i=1}^n x_i^r n$，从而得到 $M(s) \le M(r)$。因此，对于所有 $1 < p \le 2$，都有 $M(p) \le M(2)$。特别地，当 $x_1 = |a-b|/2$ 且 $x_2 = |a+b|/2$ 时，我们有

$$\frac{x_1^p + x_2^p}{2} \le \left(\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}\right)^{\frac{p}{2}} = \left(\frac{a^2+b^2}{4}\right)^{\frac{p}{2}} \le 2^{-p}(|a|^p + |b|^p),$$

由于 $p/2 \le 1$。注意，$x_1^p + 1 \le \left(x_1^2+1\right)^{p/2}$ 当 $2 \le p < \infty$ 时成立，因为函数 $f(t) = (t^2+1)^{p/2} - t^p - 1 \ge 0$。因此，我们有 $x_1^p + x_2^p \le \left(x_1^2 + x_2^2\right)^{p/2}$，再由函数 $t \mapsto t^{p/2}$ 的凸性，得到

$$x_1^p + x_2^p \le \left(x_1^2 + x_2^2\right)^{p/2} = \left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^{p/2} \le \frac{1}{2}|a|^p + \frac{1}{2}|b|^p,$$

如所要求的。 ❑

命题 4.9。令 $\mathscr{O} \subset \mathbb{R}^{d+1}$ 满足 $\mathscr{C}_{\alpha,q}(\mathscr{O}) < \infty$。

（A）若 $\mathscr{O}$ 是一个开集，则存在一个关于 $\mathscr{O}$ 的 $\mathscr{C}$–极值测度 γ，使得

$$(\mathscr{W}_{\alpha,q}^{\mathscr{D}}\gamma)(x,t) \ge \mathscr{E}\gamma \quad \mathscr{C}_{\alpha,q} - a.e \quad (x,t) \in \mathscr{O}. \tag{4.8}$$

（**B**）若 $\mathscr{O}$ 是任意集合，则存在一个关于 $\mathscr{O}$ 的 $\mathscr{C}$–极值测度 γ，使得

$$(\mathscr{W}_{\alpha,q}^{\mathscr{O}}\gamma)(x,t) \geq \mathscr{E}\gamma \quad \mathscr{C}_{\alpha,q}-a.e \quad (x,t)\in\mathscr{O}. \tag{4.9}$$

(C)$(\mathscr{W}_{\alpha}^{\mathscr{O}},\ q\gamma)(x,\ t) \leq \mathscr{E}\gamma$对所有$(x,t)\in$支集$(\gamma)$。

证明。由于 $\mathscr{C}_{\alpha,q}(\cdot) \simeq C_{\alpha,q}(\cdot)$，且开集是 $\mathscr{C}$–可容量化的（见命题 2.3），我们可以选取一个递增的紧集序列 $K_n \subset K_{n+1} \subset \mathscr{O}$，使得 $K=\bigcup_n K_n$，且 $\mathscr{C}_{\alpha,q}(K_n) \to \sup_{K_n\subset\mathscr{O}} \mathscr{C}_{\alpha,q}(K) = \mathscr{C}_{\alpha,q}(\mathscr{O})$。由引理 4.3，令 $\{\gamma_n\} \in M_1^+(K_n)$ 为 K_n 的一列极值测度。根据弱紧性，我们可以找到一个子序列 $\{\gamma_{n_j}\}$ 和一个 Radon 测度 $\gamma\in M^+(\mathscr{O})$，使得 $\gamma_{n_j} \rightharpoonup \gamma$。但是，$\mu \mapsto \mathscr{E}\mu$ 在 M^+ 的弱*–拓扑下是下半连续的，因此

$$\mathscr{E}\gamma \leq \liminf_{j\to\infty} \mathscr{E}\gamma_{n_j}. \tag{4.10}$$

我们断言 $\mathscr{E}\gamma_{n_j} \searrow [\mathscr{C}_{\alpha,q}(\mathscr{O})]^{1-q'}$ 和 $\mathscr{E}\gamma_{n_j} \leq \mathscr{E}\left((\gamma_{n_j}+\gamma_{m_j})/2\right)$。事实上，由于 $\mathscr{C}_{\alpha,q}(K^{n_j}) \leq \mathscr{C}_{\alpha,q}(K^{n_{j+1}})$，我们有 $\mathscr{E}\gamma_{n_j} \geq \mathscr{E}\gamma_{n_{j+1}}$。此外，

$$\lim_{j\to\infty} \mathscr{E}\gamma_{n_j} = \lim_{j\to\infty} [\mathscr{C}_{\alpha,q}(K_{n_j})]^{1-q'} = [\mathscr{C}_{\alpha,q}(\mathscr{O})]^{1-q'}.$$

断言 $\mathscr{E}\gamma_{n_j} \leq \mathscr{E}\left((\gamma_{n_j}+\gamma_{m_j})/2\right)$ 可通过注意到 $(\gamma_{n_j}+\gamma_{m_j})/2$ 属于 $\mathfrak{M}_1^+$，并且 $\mathscr{E}(\cdot)$ 在 $\mathfrak{M}_1^+$(见定义 4.2) 上使能量最小。

我们断言 γ是开集 $\mathscr{C}$–的极值测度 $\mathscr{O}$。为此，我们将证明 $\mathscr{E}\gamma=$极限$_{j\to\infty}\mathscr{E}\gamma_{n_j}$。事实上，回忆一下，$_j \searrow [\mathscr{C}_{\alpha,q}(\mathscr{O})]^{1-q'}$以及 $\mathscr{E}\gamma_{m_j} \searrow [\mathscr{C}_{\alpha,q}(\mathscr{O})]^{1-q'}$当 $n_j,m_j \to \infty$时成立。于是，由引理 4.8 可得

$$\begin{aligned}
\mathscr{E}_{n_j,m_j} &:= \mathscr{E}\left(\gamma_{n_j}-\gamma_{m_j}\right) = 2^{q'}\sum_{\ell_R<1} b(R)\left(\frac{\gamma_{n_j}(\eta_R)-\gamma_{m_j}(\eta_R)}{2}\right)^{q'} \\
&\leq 2^{q'}c_{q'}\left\{\sum_R b(R)\gamma_{n_j}(\eta_R)^{q'} + \sum_R b(R)\gamma_{m_j}(\eta_R)^{q'}\right\} - 2^{q'}\sum_{\ell_R<1} b(R)\left(\frac{\gamma_{n_j}(\eta_R)+\gamma_{m_j}(\eta_R)}{2}\right)^{q'} \\
&= 2^{q'}c_{q'}\{\mathscr{E}\gamma_{n_j}+\mathscr{E}\gamma_{m_j}\} - 2^{q'}\mathscr{E}\left(\frac{\gamma_{n_j}+\gamma_{m_j}}{2}\right) \\
&\leq 2^{q'}c_{q'}\{\mathscr{E}\gamma_{n_j}+\mathscr{E}\gamma_{m_j}\} - 2^{q'}\mathscr{E}\gamma_{n_j} \ \to\ 0,
\end{aligned} \tag{4.11}$$

其中，当 $1<c^{q'}=(1/2)^{q'-1}\,q' \leq 2$ 时，或当 $2<c_{q'}=1/2\,q'<\infty$ 时成立。因此，对于每个$\varepsilon>0$，当 m_j 足够大时，我们有

$$\mathscr{E}(\gamma_{m_j}-\gamma) \leq \liminf_{j\to\infty} \mathscr{E}(\gamma_{m_j}-\gamma_{n_j}) < \varepsilon. \tag{4.12}$$

现在我们可以证明 (4.8) 了。令 $E_\vartheta = \{(x,t) \in \mathscr{O}: [\mathscr{W}_{\alpha,}^{\mathscr{O}} q(\gamma_{m_j}-\gamma)](x,t) > \vartheta\}$。注意，定理 4.7(A) 和 (4.12) 蕴含 $\mathscr{C}_{\alpha,q}(E_\vartheta) \leq \vartheta^{-}q\mathscr{E}(\gamma_{m_j}-\gamma) := \vartheta^{-}q\mathscr{E}_{m_j}(\gamma) \to 0$ as $m\,j \to \infty$。现在令 $\varepsilon>0$，并选取 $\sum_{j=1}^{\infty}\vartheta^{-}q\,j\,\mathscr{E}_{m_j}(\gamma) < \varepsilon$，使得 $\vartheta j \to 0$ 且 $m\,j \to \infty$。

那么 $A=\bigcup_j E\vartheta_j$的容量为零，因为 $\mathscr{C}_{\alpha,\,q}(A)\le\sum_{j=1}^{\infty}\vartheta^{-}{}_{qj}\mathscr{E}_{m_j}(\gamma)\;<\varepsilon$。因此，对于所有满足 $(x,\;t)\;\in\mathscr{O}\backslash A$ 的点，我们得到

$$[\mathscr{W}_{\alpha,q}^{\mathscr{D}}(\gamma_{m_j}-\gamma)](x,t)\le\vartheta_j. \tag{4.13}$$

这表明$\mathscr{W}_{\alpha}^{\mathscr{D}},{}_{q}\gamma_{m_j}$几乎处处收敛于$\mathscr{W}_{\alpha}^{\mathscr{D}},{}_{q}\gamma$ $\mathscr{C}-$在 $\mathscr{O}$上。现在，应用命题4.5 和不等式（4.12），即可得到所需结果。

证明 (B)。再次根据命题 2.3，我们可以选取开集 $\mathrm{A}_{n+1}\subset\mathrm{A}_n$ 的一个递减序列 $\mathrm{A}_{\overline{n}}\supseteq\mathscr{O}$，使得 $\mathscr{O}=\bigcap_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\mathrm{A}_n$ 且 $\mathscr{C}_{\alpha,q}(\mathrm{A}_n)\to\mathscr{C}_{\alpha,\overline{q}}(\mathscr{O})$，当 $\mathrm{n}\overline{\to}\infty$时成立。根据前一项，令 $\gamma_n\in\mathrm{M}^{+}(\mathrm{A}_n)$ 为 A_n的一个极值测度。仿照 (A) 的证明并使用引理 4.8，存在一个 $\gamma\in\mathrm{M}^{+}(\mathscr{O})$，使得$\mathscr{E}(\gamma_{m_j}-\gamma)\;\to0$，当 $\mathrm{m\,j}\;\to\infty$时成立。因此，由前述论证可得 (4.9)。

❑

设 $E\;\subset\mathbb{R}^{d+1}$ 是任意集合，满足 $0<\mathscr{C}_{\alpha,\,q}(E)\;<\infty$。那么，根据命题 4.9，并仿照定理 4.6的证明进行论证，可得存在一个 $\mathscr{C}$-容量测度，其支集为 E。

推论 4.10。 设 $E\;\subset\mathbb{R}^{d+1}$ 是任意集合，满足 $0<\mathscr{C}_{\alpha,\,q}(E)\;<\infty$。则 E 存在一个 $\mathscr{C}_{\alpha,\,q}-$容量测度 γ^{E}。

仿照定理 4.7的证明，此定理可自然地推广到任意集合。

定理 4.11。

(A) 若 $\mu\in\mathfrak{M}^{+}$ 具有有限能量 $\mathscr{E}\mu<\infty$，则对每个任意集合 $E\;\subset E_{\vartheta}=\{(x,\;t):\;\;(\mathscr{W}_{\alpha}^{\mathscr{D}},\,q\mu)(x,t)>\vartheta\}$，我们有

$$\mathscr{C}_{\alpha,q}(E)\le\vartheta^{-q}\mathscr{E}\mu,\quad\vartheta>0.$$

(B) 设 $E\;\subset\mathbb{R}^{d+1}$ 是任意集合，则

$$\mathscr{C}_{\alpha,q}(E)=\inf\left\{\mathscr{E}\mu:\;\mu\in\mathfrak{M}^{+}\;and\;\mathscr{W}_{\alpha,q}^{\mathscr{D}}\mu\ge1\;\;\mathscr{C}_{\alpha,q}-a.e\;on\;E\right\}.$$

(C) 设 $E\;\subset\mathbb{R}^{d+1}$ 是任意集合，则

$$\mathscr{C}_{\alpha,q}(E)=\sup\left\{\mu(E):\;\mu\in\mathfrak{M}^{+}(E)\;and\;\mathscr{W}_{\alpha,q}^{\mathscr{D}}\mu\le1\;\;on\;\;\mathrm{spt}(\mu)\right\}.$$

5 热薄性、Kellogg 和 Choquet性质

在本节中，我们证明存在一个包含$e_{\alpha}^{\mathscr{D}},{}_{q}(E)$的开集 $\mathscr{O}\subset\mathbb{R}^{d+1}$，使得

$$\mathscr{C}_{\alpha,q}(E\cap\mathscr{O})<\varepsilon\quad\text{for all}\quad\varepsilon>0,$$

称为抛物型 Choquet 性质。此外，我们证明了两个凯洛格性质和定理 1.4。

5.1 热薄性

沿用 [11, 命题 1。2] 和 [4, 定理 1。13], 的方法，可以得到抛物型 $(\alpha,\ q)$-薄性的若干等价刻画。

命题 5.1. 以下各陈述等价。

(i) 对每个 $z\ \in\overline{E,}$ 我们有

$$W^E_{\alpha,q}(z)=\int_0^1\left(\frac{\mathscr{C}_{\alpha,q}(E\cap Q_r(z))}{r^{n-\alpha q}}\right)^{q'-1}\frac{dr}{r}<\infty. \tag{5.1}$$

(ii) 设 $Q\,j(z)=Q_{2^{-j}}(z)$，则

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left(2^{j(n-\alpha q)}\mathscr{C}_{\alpha,q}(E\cap Q_j(z))\right)^{q'-1}<\infty. \tag{5.2}$$

(iii) 设 $A_j(z)=\overline{Q\,j(z)\backslash Q\,j_{+1}(z)}$ 为环带 $Q\,j(z)\backslash Q\,j_{+1}(z)$的闭包，则

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left(2^{j(n-\alpha q)}\mathscr{C}_{\alpha,q}(E\cap A_j(z))\right)^{q'-1}<\infty. \tag{5.3}$$

证明。 由于 $\mathscr{C}_{\alpha,q}(E\cap Q_{2^{-j}}(z))\lesssim 2^{-j(n-\alpha q)}$(见命题 2.2(v))，因此 (i) 等价于 (ii)。事实上，我们有

$$\begin{aligned}W^E_{\alpha,q}(z)=\sum_{j=0}^{\infty}\int_{2^{-j-1}}^{2^{-j}}\left(\frac{\mathscr{C}_{\alpha,q}(E\cap Q_r(z))}{r^{n-\alpha q}}\right)^{q'-1}\frac{dr}{r}&\simeq\sum_{j=0}^{\infty}\left(2^{j(n-\alpha q)}\mathscr{C}_{\alpha,q}(E\cap Q_j(z))\right)^{q'-1}\\&=\sum_{j=1}^{\infty}\left(2^{j(n-\alpha q)}\mathscr{C}_{\alpha,q}(E\cap Q_j(z))\right)^{q'-1}+c,\end{aligned}$$

其中 $c=\mathscr{C}_{\alpha,q}(E\cap Q_1(z))^{q'-1}\lesssim 1$。显然，*(ii)* 蕴含 *(iii)*，因为 $E\cap Aj(z)\ \subset E\cap Qj(z)$。还需验证可以由 *(iii)* 得到 *(ii)*。为此，由于$Q_j(z)\ \subset Aj(z)\cup Q_{j+1}(z)$，我们得到

$$\mathscr{C}_{\alpha,q}(E\cap Q_j(z))\le\mathscr{C}_{\alpha,q}(E\cap A_j(z))\cup\mathscr{C}_{\alpha,q}(E\cap Q_{j+1}(z)),$$

这就导出

$$\sum_{j=1}^{k}b_j^{q'-1}\le\sum_{j=1}^{k}a_j^{q'-1}+\sum_{j=1}^{k-1}\left(2^{j(n-\alpha q)}\mathscr{C}_{\alpha,q}(E\cap Q_{j+1})\right)^{q'-1}+\left(2^{k(n-\alpha q)}\mathscr{C}_{\alpha,q}(E\cap Q_{k+1})\right)^{q'-1}$$

其中 $b\,j(z)=2j(n-\alpha q)\mathscr{C}_{\alpha,q}(E\ \cap Q\,j(z))$ 且 $a\,j(z)=2^{j(n-\alpha q)}\mathscr{C}_{\alpha,q}(E\ \cap A\,j(z))$。现由

经过繁琐的计算，我们可以写出

$$\sum_{j=1}^{k} b_j^{q'-1} - \sum_{j=1}^{k-1} \Big(2^{j(n-\alpha q)}\mathscr{C}_{\alpha,q}(E\cap Q_{j+1})\Big)^{q'-1} = \sum_{j=1}^{k} b_j^{q'-1} - 2^{-(n-\alpha q)(q'-1)} \sum_{j=1}^{k-1} b_{j+1}^{q'-1}$$
$$= c\sum_{j=2}^{k} b_j^{q'-1} + \big(2^{n-\alpha q}\mathscr{C}_{\alpha,q}(E\cap Q_1(z))\big)^{q'-1}$$
$$= \mathscr{C}_{\alpha,q}(E\cap Q_1(z))^{q'-1} + c\sum_{j=1}^{k} b_j^{q'-1},$$

其中 $c = 1-2^{-(n-\alpha q)(q'-1)}$。由命题 2.2(v)，则有 $2^{k(n-\alpha q)}\mathscr{C}_{\alpha,q}(E\cap Q_k(z)) \lesssim 1$。于是，

$$\sum_{j=1}^{\infty} b_j(z)^{q'-1} \lesssim \sum_{j=1}^{\infty} \Big(2^{j(n-\alpha q)}\mathscr{C}_{\alpha,q}(E\cap A_j(z))\Big)^{q'-1} + 1 < \infty$$

如所欲证。 ❑

引理 5.2 ($\mathscr{C}$–拟连续地)**.** 设 $\mu\in\mathfrak{M}^+$ 满足 $\mathscr{E}\mu<\infty$。则对每个 $\varepsilon>0$，存在开集 $\mathscr{O}\subset\mathbb{R}^{d+1}$，使得 $\mathscr{C}_{\alpha,q}(\mathscr{O})<\varepsilon$，从而 $\mathscr{W}^{\mathscr{D}}_{\alpha,q}\mu$ 在 $\mathscr{O}^c$ 上连续。

证明. 对每个 $N\in\mathbb{N}$，我们定义

$$(\mathscr{W}^{\mathscr{D}}_{N}\mu)(x,t) = \sum_{j=1}^{N}\sum_{\ell_R=2^{-i}\ell_j} (\ell_R^{\alpha q-n}\mu(\eta_R))^{q'-1}\eta_R(x,t).$$

则 $\mathscr{W}^{\mathscr{D}}{}_N\ \mu$ 在 $\mathbb{R}^{d+1}$ 中连续。此外，由于 $\mathscr{E}\mu$ 有限，我们有

$$\mathscr{E}_N(\mu) = \int (\mathscr{W}^{\mathscr{D}}_{\alpha,q}\mu - \mathscr{W}^{\mathscr{D}}_{N}\mu)d\mu = \sum_{j>N}\sum_{\ell_R=2^{-i}\ell_j} b(R)\mu(\eta_R)^{q'} \to 0 \quad \text{as} \quad N\to\infty.$$

现考虑集合 $E_\vartheta = \big\{(x,t):\ \mathscr{W}^{\mathscr{D}}_{\alpha,q}\mu(x,t) - \mathscr{W}^{\mathscr{D}}{}_N\ \mu(x,t) > \vartheta\big\}$ 对 $\vartheta>0$。按照定理4.7(A) 的相同步骤，我们有

$$\vartheta \le \int (\mathscr{W}^{\mathscr{D}}_{\alpha,q}\mu - \mathscr{W}^{\mathscr{D}}_{N}\mu)d\gamma = \sum_{j>N}\sum_{\ell_R=2^{-i}\ell_j} (\ell_R^{\alpha q-n}\mu(\eta_R))^{q'-1}\gamma(\eta_R)$$
$$\le (\mathscr{E}_N(\mu))^{1/q}(\mathscr{E}_N(\gamma))^{1/q'},$$

其中 γ 是紧集 K $\subset E_\vartheta$ 的 $\mathscr{C}$– 极值测度。于是 $\mathscr{C}_{\alpha,q}$(K) $\le \vartheta^{-}$q$\mathscr{E}_N(\mu)$，由此得到 $\mathscr{C}_{\alpha,q}(E_\vartheta) \le \vartheta^{-}q\mathscr{E}_N(\mu)$。现在，对每个 $\varepsilon>0$，选取 $\Sigma_{j=1}^{\infty}\vartheta^{-}$q j $\mathscr{E}_{N_j}(\mu) <\varepsilon$，使得 ϑj $\to 0$ 且 N j $\to\infty$。那么开集 $\mathscr{O} = \bigcup$j E_{ϑ_j} 的容量为零，因为$\mathscr{C}_{\alpha,q}(\mathscr{O}) \le \Sigma_{j=1}^{\infty}\vartheta^{-}$q j $\mathscr{E}_{N_j}(\gamma) <\varepsilon$。因此，对于 (x,t) $\in\mathscr{O}^c$，我们得到

$$\mathscr{W}^{\mathscr{D}}_{\alpha,q}\mu(x,t) - \mathscr{W}^{\mathscr{D}}_{N_j}\mu(x,t) \le \vartheta_j. \tag{5.4}$$

因此，序列 $\mathscr{W}^{\mathscr{D}}{}_{N_j}\mu$ （一致）收敛到 $\mathscr{W}^{\mathscr{D}}{}_{\alpha,\ q}\mu$，在 $\mathscr{O}$ 上几乎处处成立。特别地，$\mathscr{W}^{\mathscr{D}}{}_{\alpha,\ q}\mu$ 在 $\mathscr{O}^c$ 上连续。❑

5.2 凯洛格性质

本节我们关注抛物型 Kellogg 性质。为此，下面的引理提供了一个关键要素。

引理 5.3。 假设 $0<\alpha<n$ 和 $1<q\le n/\alpha$。

(i) 设 $E\subset\mathbb{R}^{d+1}$ 满足 $0<\mathscr{C}_{\alpha,q}(E)<\infty$，并令 μ 表示 E 的一个 $\mathscr{C}_{\alpha,q}$−容量测度。那么，对每个 *Borel* 集 $S\subset\mathbb{R}^{d+1}$，

$$\mu(S)\le\mathscr{C}_{\alpha,q}(E\cap S).$$

(ii) 假设 E 在 z_0 处是抛物型 (α,q)−薄的。那么，对每个 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbb{N}$，使得对于每个集合 $V\subset Q_{2^{-N}}(z_0)$，都可以找到一个 $\mathscr{C}_{\alpha,q}$−容量测度 μ，其对应于 $E\cap V$，并满足

$$\mathscr{W}^{\mathscr{D}}_{\alpha,q}\mu(z_0)<\varepsilon,\qquad \mathscr{W}^{\mathscr{D}}_{\alpha,q}\mu\ge 1\ \textit{for}\ \mathscr{C}-a.e.\ \textit{on}\ E\cap V.$$

证明。 (i) 的证明 **遵循** [1, 命题6.3.13], 中概述的方法，用 $\mathscr{V}^{\mu}_{\alpha,p}$ 替换 $\mathscr{W}^{\mathscr{D}}_{\alpha,q}\mu$。或者，我们可以应用 [16, 命题 9]中的论证。在这种情况下，必须使用定理 4.6 来证明存在一个由 $\mathscr{C}_{\alpha,q}$−容量测度组成的序列，它们对应于紧集 F_n。然后，根据定理 4.7**(C)**，我们得到 $\mu_n(K)\le\mathscr{C}_{\alpha,q}(K\cap F_n)$。

证明**(ii)**。首先，根据推论4.10，我们可以为$E\cap V$找到一个 $\mathscr{C}$−容量测度$\mu=\mu^{E\cap V}$。回顾一下，对于每个二进矩形R，都有$\mathbb{1}_R\le\eta_R\le\mathbb{1}_{\delta_3 R}$和 $\mu(\eta_R)=\int\eta_R d\mu$。于是，

$$\begin{aligned}\mathscr{W}^{\mathscr{D}}_{\alpha,q}\mu(z_0)&\lesssim\sum_{\ell_R<1}\Big(\frac{\mu(\delta_3 R)}{\ell_R^{n-\alpha q}}\Big)^{q'-1}\mathbb{1}_R(z_0)\\&\le\sum_{j=1}^{\infty}\Big(2^{-j(\alpha q-n)}\mu(Q_{3\sqrt{d}2^{-j}}(z_0))\Big)^{q'-1},\end{aligned}\tag{5.5}$$

因为对于所有包含 z 的二进时间向后矩形 $R\in\mathscr{D}_{j,0}$，我们得到 $\delta_3 R\subset Q_{3\sqrt{d}2^{-j}}(z_0)$。不失一般性，假设 $3\sqrt{d}=1$。由于 E 在 z_0 处是抛物型 $(\alpha,\overline{q})$−薄集，利用 (5.5)、引理 5.3(i) 和命题 5.1，可得

$$\mathscr{W}^{\mathscr{D}}_{\alpha,q}\mu(z_0)\lesssim\sum_{j\in\mathbb{N}}\Big(2^{j(n-\alpha q)}\mathscr{C}_{\alpha,q}(E\cap Q_{2^{-j}}(z_0))\Big)^{q'-1}<\infty.\tag{5.6}$$

因此，对于任意 $\varepsilon'>0$，都存在一个足够大的$N\in\mathbb{N}$，使得

$$\sum_{j=N}^{\infty}\Big(2^{j(n-\alpha q)}\mathscr{C}_{\alpha,q}(E\cap Q_{2^{-j}}(z_0))\Big)^{q'-1}<\varepsilon'.$$

再次利用引理 5.3**(i)** 其中 $\mu=\mu^{E\cap V}$ 且 $V\subset Q_{2^{-N}}(z_0)$，可推出

$$\mu(Q_{2^{-j}}(z_0))\le\mathscr{C}_{\alpha,q}(Q_{2^{-j}}(z_0)\cap E\cap V)\le\mathscr{C}_{\alpha,q}(E\cap V)\le\mathscr{C}_{\alpha,q}(E\cap Q_{2^{-N}}(z_0)).$$

此外，由收敛性（5.6）可得

$$\lim_{N\to\infty}\Big(2^{N(n-\alpha q)}\mathscr{C}_{\alpha,q}(E\cap Q_{2^{-N}}(z_0))\Big)^{q'-1}=0.$$

然后，取 $\varepsilon'=\varepsilon/2$ 和 N 足够大，我们有

$$\begin{aligned}\mathscr{W}^{\mathscr{D}}_{\alpha,q}\mu(z_0)&\lesssim\varepsilon'+\sum_{j=1}^{N-1}\Big(2^{j(n-\alpha q)}\mathscr{C}_{\alpha,q}(E\cap Q_j(z_0))\Big)^{q'-1}\\&\le\varepsilon'+\mathscr{C}_{\alpha,q}(E\cap Q_{2^{-N}}(z_0))^{q'-1}\sum_{j=1}^{N-1}2^{-j(n-\alpha q)(q'-1)}\\&=\varepsilon'+\big(2^{N(n-\alpha q)}\mathscr{C}_{\alpha,q}(E\cap Q_{2^{-N}}(z_0))\big)^{q'-1}\sum_{j=1}^{N-1}2^{(j-N)(n-\alpha q)(q'-1)}\\&\le\varepsilon'+\varepsilon'\sum_{j=1}^{\infty}2^{(j-N)(n-\alpha q)(q'-1)}\quad\text{for}\quad j<N\\&\lesssim\varepsilon,\end{aligned}$$

由此完成证明。 ❑

命题 5.4 (抛物型 Kellogg 性质)。 设 $0<\alpha<n$ 和 $1<q\le n/\alpha$。那么，对每个 $E\subset\mathbb{R}^{d+1}$，我们有

$$\mathscr{C}_{\alpha,q}\big(E\cap e^{\mathscr{P}}_{\alpha,q}(E)\big)=0.$$

证明。设 E $\subset\mathbb{R}^{d+1}$ 和 $\{\mathscr{O}_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\mathbb{R}^{d+1}$ 中抛物型开球的一个枚举，其半径足够小，使得 E$\cap\mathscr{O}_n\neq/0$。令 $\{\mu_n\}$ 为 E $\cap\mathscr{O}_n$ 的一列 $\mathscr{C}-$ 容量测度，并设 $A_n=\{z\in E\cap\mathscr{O}_n:(\mathscr{W}^{\mathscr{D}}_{\alpha},q\mu_n)(z)<1\}$。于是，由引理 5.3(ii)，我们有 E $\cap e^{\mathscr{P}}_{\alpha,q}(E)\subset\bigcup^{\infty}$n=1(E $\cap$An)。但是 $\mathscr{W}^{\mathscr{D}}_{\alpha},q\mu_n\ge1$ $\mathscr{C}_{\alpha,q}-$ 在 E $\cap\mathscr{O}_n$ 上几乎处处成立，因此对所有 n，$\mathscr{C}_{\alpha,q}$(E $\cap$An) $=0$。由此可得 $\mathscr{C}_{\alpha,q}\big(E\cap e^{\mathscr{P}}_{\alpha,q}(E)\big)\le\sum_{n=1}^{\infty}\mathscr{C}_{\alpha,q}$(E $\cap$An)$=0$，从而证得结论。❑

为了处理热球形式的$C_{\alpha,\,2}\big(E\cap e^{\text{heat}}_{\alpha\,2,\,}(E)\big)=0$，我们需要以下引理。

引理 5.5。 设 $0<\alpha<n/2$ 且 $E\subset\mathbb{R}^{d+1}$。假设 $z_0\in E$ 满足

$$\int_0^1\left(\frac{\dot{C}_{\alpha,2}(E\cap\Theta^{2\alpha}_r(z_0))}{r^{(n-2\alpha)/2}}\right)\frac{dr}{r}<\infty.\tag{5.7}$$

那么对于每个 $\varepsilon>0$，都存在 $R>0$ 和 $\dot{C}_{\alpha,\,2}$-容量测度 μ^A，其对应集合为 $A=\overline{E\cap Q_R}(z_0)$，使得

$$\Gamma^{2\alpha}*\mu^A(z_0)<\varepsilon,\qquad\Gamma^{2\alpha}*\mu^A(z)\ge1\quad\dot{C}_{\alpha,2}\text{-a.e.}\quad z\in A.$$

证明。 由命题 2.5（针对$C_{\alpha,2}$ 作了调整；见推论 2.6(i)），存在 $R>0$ 以及一个 $\dot{C}_{\alpha,2}$-容量测度 μ^A，其支集包含于 $A\subset Q_R(z_0)$，使得

$$\mu^A(A)=\dot{C}_{\alpha,2}(A)\quad\text{and}\quad \Gamma^{2\alpha}*\mu^A\geq 1\quad \dot{C}_{\alpha,2}\text{-a.e on } A. \tag{5.8}$$

由引理 2.1、引理5.3(i) 以及容量的单调性，

$$\Gamma^{2\alpha}*\mu^A(z_0)\leq\int_0^R\frac{\mu^A(\Theta_r^{2\alpha}(z_0))}{r^{(n-2\alpha)/2}}\frac{dr}{r}\leq\int_0^R\frac{\dot{C}_{\alpha,2}(E\cap\Theta_r^{2\alpha}(z_0))}{r^{(n-2\alpha)/2}}\frac{dr}{r}.$$

那么，对每个 $\varepsilon>0$，条件 (5.7) 蕴含 $\Gamma^{2\alpha}*\mu^A(z_0)<\varepsilon$ 当$R>0$充分小时成立。 ❑

命题 5.6。 设 $0<\alpha<n/2$。那么，对每个 $E\subset\mathbb{R}^{d+1}$，我们有

$$C_{\alpha,2}\big(E\cap e_{\alpha,2}^{\text{heat}}(E)\big)=0.$$

证明。 证明沿用命题 5.4 的论证，其中 $\mathscr{C}_{\alpha,q}$ 替换为 $C_{\alpha,2}$ 并将二进 Wolff 势 $\mathscr{W}_{\alpha,q}$ 替换为热势 $\Gamma^{2\alpha}$。此外，引理5.3(ii) 由引理 5.5替代。细节从略。 ❑

5.3 Choquet 性质

本节将证明 Choquet 性质。

定理 5.7 (抛物型 Choquet 性质)。 设 $0<\alpha<n$ 和 $1<q\leq n/\alpha$。对于任意集合 $E\subset\mathbb{R}^{d+1}$ 和 $\varepsilon>0$，存在一个开集 $G\subset\mathbb{R}^{d+1}$ 使得

$$e_{\alpha,q}^{\mathscr{P}}(E)\subset G\quad and\quad \mathscr{C}_{\alpha,q}(E\cap G)<\varepsilon. \tag{5.9}$$

证明。考虑抛物型 Kellogg 性质证明中所描述的集合 $\mathscr{O}_n$ 和 A_n。令 $\varepsilon>0$。由于 $(\mathscr{W}_\alpha^{\mathscr{D}},q\mu_n)(x,t)\geq 1$ $\mathscr{C}_\alpha$在 $E\cap\mathscr{O}_n$ 上几乎处处成立，且 $\mathscr{W}_\alpha^{\mathscr{D}},q\mu_n$ 是 $\mathscr{C}-$ 5 2 $\mathscr{C}_{\alpha\,q}$ $_n$ <准连续的（见引理 . $\varepsilon 2^{-n}$ $\mathscr{W}_\alpha^{\mathscr{D}}\mu_n$ $_n$ $\mathscr{W}_\alpha^{\mathscr{D}}\mu_n$, ≥ 1 , $\in$ ），因此存在一个开集 V，使得 , (V)，从而 ,q 在 V 外连续。于是，对于所有 (x t) $E\cap\mathscr{O}_n\cap V$ c n，有 (,q)(x t)。定义集合 $F=E\setminus(\bigcup_{n\geq 1}V_n)=E\cap(\bigcap_{n\geq 1}V\ cn)$。注意，$F=E\cap(\bigcap_{n\geq 1}V\ cn)$ 且 $F\cap(\bigcup_{n\geq 1}V_n)=/0$。我们声称，$G=F^c$满足 (5.9)。事实上，根据引理 5.3(ii)，有

$$e_{\alpha,q}^{\mathscr{P}}(E)\subset\overline{E}^c\cap\Big(\bigcup_{n\geq 1}A_n\Big). \tag{5.10}$$

由 $\mathscr{W}_\alpha^{\mathscr{D}},q\mu_n$ 在 F 上的连续性，以及 $(\mathscr{W}_\alpha^{\mathscr{D}},q\mu_n)(x,t)\geq 1$ $\mathscr{C}_{\alpha,q}-$ 几乎处处在 F 上成立 $\cap\mathscr{O}_n$，可得 $(\mathscr{W}_\alpha^{\mathscr{D}},q\mu_n)(x,t)\geq 1$ 对所有 $(x,t)\in F\cap\mathscr{O}_n$ 均成立。因此 $F\cap A_n=/0$。特别地，$(\bigcup_{n\geq 1}A_n)\subset F^c$，并且由包含关系 (5.10) 可得

$$e_{\alpha,q}^{\mathscr{P}}(E)\subset\overline{E}^c\cap\overline{F}^c\subset\overline{F}^c.$$

此外，我们得到$\mathscr{C}_{\alpha,q}(E\cap F^c)\leq\mathscr{C}_{\alpha,q}(\bigcup_{n=1}^{\infty}V_n)\leq\sum_{n=1}^{\infty}\mathscr{C}_{\alpha,q}(V_n)<\varepsilon$。 ❑

5.4 非线性抛物薄性

假设 $\mu \in \mathfrak{M}^+(\mathbb{R}^{d+1})$ 具有有限能量，由推论 4.11(A) 可得

$$\mathscr{C}_{\alpha,q}\left(\left\{\mathscr{W}^{\mathscr{D}}_{\alpha,q}\mu(x,t) > \vartheta\right\}\right) \le c\,\vartheta^{-q}\mathscr{E}\mu. \tag{5.11}$$

然而， μ 的能量通常不是有限的。下面给出一种替代方法 .

命题 5.8。 设 $\mu \in \mathfrak{M}^+(\mathbb{R}^{d+1})$ 是一个有限测度，且 K 是 $E\vartheta = \{\mathscr{W}^{\mathscr{D}}_{\alpha,}q\mu(x,t) > \vartheta\}$ 的一个紧子集。如果 $0 < \alpha < n$ 且 $1 < q \le n/\alpha$，则存在常数 $c > 0$ 使得

$$\mathscr{C}_{\alpha,q}(K) \le c\,\vartheta^{1-q}\mu(\mathbb{R}^{d+1}), \tag{5.12}$$

对所有 $\vartheta > 0$均成
立。

证明。 存在常数 $c > 0$ 使得

$$\mathbf{W}_{\alpha,q}\mu(x,t) \le c\,\mathscr{W}^{\mathscr{D}}_{\alpha,q}\mu(x,t) \quad \text{for all } (x,t).$$

事实上，由于 $\mathbb{1}_R \le \eta_R \le \mathbb{1}_{\delta_3 R}$ 和 $\mu(\eta_R) = \int \eta_R d\mu$，不等式（3.19）蕴含

$$\mathbf{W}_{\alpha,q}\mu(x,t) \le c\sum_{\ell_R<1}\left(\ell_R^{\alpha q-n}\mu(R)\right)^{q'-1}\mathbb{1}_R(x,t) \le c\,\mathscr{W}^{\mathscr{D}}_{\alpha,q}\mu(x,t).$$

因此，只需证明 $\{\mathbf{W}_{\alpha,q}\mu(x,t) > \vartheta\}$。设 $\mu \in \mathrm{M}^+(\mathbb{R}^{d+1})$，并设 $\gamma = \gamma^K \in \mathrm{M}^+(\mathbb{R}^{d+1})$ 是 $K \subset \{\mathbf{W}_{\alpha,q}\mu(x,t) > \vartheta\}$ 的一个容量测度，我们将中心极大函数 $M_\gamma\mu$ 定义如下

$$(M_\gamma\mu)(x,t) = \sup\frac{\mu(Q_{5r}(x,t))}{\gamma(Q_r(x,t))},$$

其中，上确界取遍所有向后抛物球 $Q_r(x,t)$。于是，对于所有 $(x,t) \in \mathrm{spt}(\gamma) \subset \{\mathbf{W}_{\alpha,q}\mu(x,t) > \vartheta\}$，我们得到

$$\begin{aligned}\vartheta < \mathbf{W}_{\alpha,q}\mu(x,t) = \int_0^1\left(\frac{\mu(Q_r(x,t))}{r^{n-\alpha q}}\right)^{q'-1}\frac{dr}{r} &\le \left(\sup_{r>0}\frac{\mu(Q_{5r}(x,t))}{\gamma(Q_r(x,t))}\right)^{q'-1}\mathbf{W}_{\alpha,q}\gamma(x,t)\\ &\le c[M_\gamma\mu(x,t)]^{q'-1},\end{aligned}$$

因为根据定义 4.4，有 $\mathscr{W}^{\mathscr{D}}_{\alpha,q}\gamma(x,t) \le 1$ 在 $\mathrm{spt}(\gamma)$ 上，进而，$\mathbf{W}_{\alpha,q}\gamma(x,t) \le c$。因此，我们有

$$\mathrm{spt}(\gamma) \subset \left\{(x,t) : [M_\gamma\mu(x,t)]^{q'-1} > \vartheta/c\right\} = \left\{(x,t) : M_\gamma\mu(x,t) > (\vartheta/c)^{1/(q'-1)}\right\}.$$

这表明，在 spt(γ) 上， $^{\mu}(\mathrm{Q}_{5r}(\mathrm{x,t}))\,\gamma(\mathrm{Q}_r(\mathrm{x,t})) > (\vartheta/\mathrm{c})^{1/(q'-1)}$。令 $\mathscr{F} = \{\mathrm{Q}_{r_i}(\mathrm{z}_i)$: $\mathrm{z}_i \in \mathrm{spt}(\gamma)$ 且 $\mathrm{i} \in \mathrm{J}\}$ 为覆盖 K $\supset \mathrm{spt}(\gamma)$ 的向后抛物球族，并满足 $\mu(\mathrm{Q}^{5r_i}(\mathrm{z}_i))\,\gamma(\mathrm{Q}^{r_i}$ $(\mathrm{z}_i)) > (\vartheta/\mathrm{c})^{1/(q'-1)}$。由于 K 是紧集，且 $(\mathbb{R}^{d+1}, \mathrm{d}_{\mathscr{P}}, \mathrm{d}_{\mathscr{L}})$ 是齐性空间，因此根据维塔利覆盖定理（例如参见 [6, 定理 1.2] 或 [2,

引理 2.1]），存在一个由两两不相交的向后球组成的有限子族 $\mathscr{F}_I \subset \mathscr{F}\{Q_j = Q^{r_j}(z_j)\}_{j\in I}$，使得 $\{5Q_j\}_{j\in I}$覆盖 $K \supset \mathrm{spt}(\gamma)$，并且

$$\frac{\mu(5Q_j)}{\gamma(Q_j)} > (\vartheta/c)^{1/(q'-1)}.$$

因此，

$$\mathscr{C}_{\alpha,q}(K) = \gamma(K) \le \sum_j \gamma(Q_j) < \left(\frac{c}{\vartheta}\right)^{q-1} \sum_j \mu(5Q_j) \le \vartheta^{1-q}|\mu|(K),$$

这就完成了所需的证明。 ❑

现在我们实际上已经达成了目标。

定理 5.9。 集合 $E \subset \mathbb{R}^{d+1}$ 在 $z_0 \in E$ 处是抛物(α, q)–薄的，当且仅当存在 $\mu \in \mathfrak{M}^+$ 使得

$$\mathbf{W}_{\alpha,q}\mu(z_0) < \liminf_{\substack{z\to z_0 \\ z\in E\setminus\{z_0\}}} \mathbf{W}_{\alpha,q}\mu(z). \tag{5.13}$$

证明。 不等式 (5.13) 等价于以下条件：存在一个向后抛物球 $B_R = Q_R(z_0)$ 以及一个正测度 $\mu \in \mathfrak{M}^+(\mathbb{R}^{d+1})$ 使得

(i) $\mathbf{W}_{\alpha,q}\mu(z_0) < \infty$,

(ii) $\mathbf{W}_{\alpha,q}\mu(z) \ge \mathbf{W}_{\alpha,q}\mu(z_0) + \eta \quad$ for all $\quad z \in E \cap B_R \setminus \{z_0\}$.

对某个 $\eta > 0$。我们将证明，最后一个条件蕴含 E 在 z_0 处是抛物 (α,q)–细的。首先，我们将构造一个支撑在 B_R 上的测度 $\gamma \in \mathrm{M}^+$，使得

$$\mathbf{W}_{\alpha,q}\gamma(z_0) < \varepsilon \quad \text{and} \quad \mathbf{W}_{\alpha,q}\gamma(z) \ge 1 \quad \forall z \in E \cap B_R \setminus \{z_0\},$$

对所有 $\varepsilon > 0$。为此，令 $\mu_R = \mu_{\lfloor B(z_0,R)}$ 为 μ 到后向球 $B(z_0,R)$ 的限制。选取 $z \in B(z_0,R/2)$，只要$\delta < R/2$，我们便有 $B(z,\delta) \subset B(z_0,R)$。于是，$\mu_R(B(z,\delta)) = \mu(B(z,\delta))$，从而得到

$$\mathbf{W}_{\alpha,q}\mu(z) - \mathbf{W}_{\alpha,q}\mu_R(z) = \int_{R/2}^1 \frac{\mu(B(z,\delta))^{q'-1} - \mu_R(B(z,\delta))^{q'-1}}{\delta^{(n-\alpha q)(q'-1)}} \frac{d\delta}{\delta}.$$

上述表达式在 z 处是连续函数。因此，对任意 $\varepsilon > 0$，存在后向球 $B_R(z_0)$，使得

$$\mathbf{W}_{\alpha,q}\mu_R(z) - \mathbf{W}_{\alpha,q}\mu_R(z_0) \ge \mathbf{W}_{\alpha,q}\mu(z) - \mathbf{W}_{\alpha,q}\mu(z_0) - \varepsilon \ge \eta - \varepsilon \quad ,$$

对所有 $z \in E \cap B_R(z_0)\setminus\{z_0\}$。特别地，我们有

$$\mathbf{W}_{\alpha,q}\mu_R(z) \ge \mathbf{W}_{\alpha,q}\mu_R(z_0) + \eta \quad \forall z \in B_R(z_0) \cap E \setminus \{z_0\}. \tag{5.14}$$

注意，当 $R \to 0$ 时，$\mathbf{W}_{\alpha,q}\mu_R(z_0) \to 0$。于是，我们可以选取足够小的 $R>0$，使得对所有 $\varepsilon>0$，$\mathbf{W}_{\alpha,q}\mu_R(z_0) < \eta\varepsilon$。因此，对于 $\gamma = \eta^{1-q}\mu_R$，

$$\mathbf{W}_{\alpha,q}\gamma(z_0) = \eta^{(1-q)(q'-1)}\mathbf{W}_{\alpha,q}\mu_R(z_0) < \varepsilon. \tag{5.15}$$

此外，由不等式（5.14），

$$\begin{aligned}\mathbf{W}_{\alpha,q}\gamma(z) = \eta^{(1-q)(q'-1)}\mathbf{W}_{\alpha,q}\mu_R(z) &\geq \eta^{(1-q)(q'-1)}\left(\mathbf{W}_{\alpha,q}\mu_R(z_0)+\eta\right)\\ &= \mathbf{W}_{\alpha,q}\gamma(z_0)+1 \geq 1,\end{aligned} \tag{5.16}$$

当 $R>0$ 足够小时，且 $z \in B_R(z_0)\cap E\setminus\{z_0\}$。对于每个固定的 $\rho<R$，令 $\gamma_\rho = \gamma_{\lfloor B(z_0,\rho)}$ 表示 γ 在后向球 $B(z0,\rho)$ 上的限制，而 $\gamma'_\rho = \gamma_{\lfloor B(z_0,\rho)^c}$ 表示其在 $B(z0,\rho)$ 补集上的限制。假设在 $E\cap B(z0,\rho/2)\setminus\{z_0\}$ 上，$W\alpha,q\gamma\rho(z) > 1/4A$，其中 $A>0$ 为常数。那么，由命题 5.8 可得

$$\mathscr{C}_{\alpha,q}(E\cap B(z_0,\rho/2)) \leq \mathscr{C}_{\alpha,q}(\{\mathbf{W}_{\alpha,q}\gamma_\rho(z) > 1/4A\}) \leq c\gamma(B(z_0,\rho)).$$

因此，

$$\int_0^1 \left(\frac{\mathscr{C}_{\alpha,q}(E\cap B(z_0,\rho/2))}{\rho^{n-\alpha q}}\right)^{q'-1}\frac{d\rho}{\rho} \leq \int_0^1 \left(\frac{\gamma(B(z_0,\rho))}{\rho^{n-\alpha q}}\right)^{q'-1}\frac{d\rho}{\rho} < \infty,$$

如所需。还需证明，对于$z\in E\cap B(z0,\rho/2)\setminus\{z_0\}$，$\mathbf{W}_{\alpha,q}\gamma_\rho(z) > 1/4A$。为此，我们首先证明

$$\mathbf{W}_{\alpha,q}\gamma'_\rho(z) \leq c\,\mathbf{W}_{\alpha,q}\gamma(z_0), \quad \text{for} \quad z\in B(z_0,\rho/2).$$

事实上，注意到

$$\begin{aligned}\mathbf{W}_{\alpha,q}\gamma'_\rho(z) &= \int_{\rho/2}^1 \left(\frac{\gamma'_\rho(B(z,\delta))}{\delta^{n-\alpha q}}\right)^{q'-1}\frac{d\delta}{\delta}\\ &\leq \int_{\rho/2}^1 \left(\frac{\gamma(B(z,\delta))}{\delta^{n-\alpha q}}\right)^{q'-1}\frac{d\delta}{\delta}\\ &= \int_{\rho/2}^{2R} \left(\frac{\gamma(B(z,\delta))}{\delta^{n-\alpha q}}\right)^{q'-1}\frac{d\delta}{\delta} + \int_{2R}^1 \left(\frac{\gamma(B(z,\delta))}{\delta^{n-\alpha q}}\right)^{q'-1}\frac{d\delta}{\delta}\\ &= I_1 + I_2,\end{aligned} \tag{5.17}$$

因为对于 $\delta<\rho/2$，有 $B(z\ \delta)\cap[B(z0,\rho)]^c = /0$。下面估计 I_2。对于任意 $z\in B(z0,\rho/2)$，若满足 $\delta/2>R>\rho$，则有 $B(z\ \delta)\subset B(z0,2\delta)$。因此，

$$I_2 \leq \int_{2R}^1 \left(\frac{\gamma(B(z_0,2\delta))}{\delta^{n-\alpha q}}\right)^{q'-1}\frac{d\delta}{\delta} = c\int_{4R}^1 \left(\frac{\gamma(B(z_0,r))}{r^{n-\alpha q}}\right)^{q'-1}\frac{dr}{r} \leq c\mathbf{W}_{\alpha,q}\gamma(z_0).$$

同样地，如果 $\rho/2<\delta<2R$那么 $B(z\ \delta)\subset B(z0,2\delta)$，从而得到

$$I_1 \leq c\int_\rho^{4R} \left(\frac{\gamma(B(z_0,r))}{r^{n-\alpha q}}\right)^{q'-1}\frac{dr}{r} \leq c\mathbf{W}_{\alpha,q}\gamma(z_0).$$

将前面的估计代入（5.17）可得所需的控制。然后，不等式（5.15）导出

$$\mathbf{W}_{\alpha,q}\gamma'_\rho(z) \le c\mathbf{W}_{\alpha,q}\gamma(z_0) < c\varepsilon. \tag{5.18}$$

由于$\mathbf{W}_{\alpha,q}\gamma(z) \le A(\mathbf{W}_{\alpha,q}\gamma_\rho(z) + \mathbf{W}_{\alpha,q}\gamma'_\rho(z))$，由（5.18）和（5.16）我们得到

$$\mathbf{W}_{\alpha,q}\gamma_\rho(z) \ge \frac{1}{A}\mathbf{W}_{\alpha,q}\gamma(z) - \mathbf{W}_{\alpha,q}\gamma'_\rho(z) > \frac{1}{A} - c\varepsilon > \frac{1}{4A} \quad \text{on} \quad E\cap B(z_0,\rho/2)\backslash\{z_0\},$$

选取 ε 和 ρ 充分小。

现在假设E 是抛物（α，q）–细的，位于z_0。由引理5.3（ii）可知，对每一个 $\varepsilon>0$，存在一个后向球T =B_r（z_0）以及一个容量测度$\gamma\in\mathfrak{M}^+$，对于$E\cap T$，使得

$$\mathbf{W}_{\alpha,q}\gamma(z_0) < \varepsilon \quad \text{and} \quad \mathbf{W}_{\alpha,q}\gamma(z) \ge 1 \quad \mathscr{C}_{\alpha,q}-a.e. \quad z\in E\cap T.$$

特别地，存在 $\eta>0$ 充分小，使得

$$\mathbf{W}_{\alpha,q}\gamma(z) \ge \mathbf{W}_{\alpha,q}\gamma(z_0)+\eta \quad \mathscr{C}_{\alpha,q}-a.e. \quad E\cap T.$$

我们需要证明存在一个测度 $\mu\in \mathrm{M}^+$（$\mathbb{R}^{d+1}$）以及一个常数c >0 使得 t

$$\mathbf{W}_{\alpha,q}\mu(z) \gtrsim \mathbf{W}_{\alpha,q}\mu(z_0) + \frac{\eta}{2} \quad \text{for all} \quad z\in E\cap T\backslash\{z_0\}. \tag{5.19}$$

事实上，设e = $\{z$ $\in E\cap T$：$\mathbf{W}_{\alpha,\ q}\gamma$（$z$）$<\mathbf{W}_{\alpha,\ q}\gamma$（$z_0$）$+\eta\}$并假设存在一个测度 $\upsilon\in\mathrm{M}^+$ 使得

$$\mathbf{W}_{\alpha,q}\upsilon(z) \gtrsim \mathbf{W}_{\alpha,q}\gamma(z_0)+\eta \quad \text{for all} \quad z\in e\backslash\{z_0\} \tag{5.20}$$

$$\mathbf{W}_{\alpha,q}\upsilon(z_0) < \frac{\eta}{2}. \tag{5.21}$$

那么，测度 $\mu=\gamma+\upsilon$ 满足（5.19）。事实上，由于 $\mathbf{W}\alpha,q\mu(z_0)$ $\le c(\mathbf{W}\alpha,q\gamma(z_0)$ + $\mathbf{W}\alpha,q\upsilon(z_0))$，对于$z$ $\in e\backslash\{z_0\}$，有：

$$\begin{aligned}
\mathbf{W}_{\alpha,q}\mu(z) \ge \mathbf{W}_{\alpha,q}\upsilon(z) &\gtrsim \mathbf{W}_{\alpha,q}\gamma(z_0)+\eta \\
&\ge \frac{1}{c}\mathbf{W}_{\alpha,q}\mu(z_0) - \mathbf{W}_{\alpha,q}\upsilon(z_0)+\eta \\
&= \left(\frac{1}{c}\mathbf{W}_{\alpha,q}\mu(z_0)+\frac{\eta}{2}\right) + \left(\frac{\eta}{2} - \mathbf{W}_{\alpha,q}\upsilon(z_0)\right) \\
&> \frac{1}{c}\mathbf{W}_{\alpha,q}\mu(z_0)+\frac{\eta}{2}.
\end{aligned}$$

类似地，对于 $z\in E\cap T\backslash(e\cup\{z_0\})$,

$$\mathbf{W}_{\alpha,q}\mu(z) \ge \mathbf{W}_{\alpha,q}\gamma(z) \ge \mathbf{W}_{\alpha,q}\gamma(z_0)+\eta > \frac{1}{c}\mathbf{W}_{\alpha,q}\mu(z_0)+\frac{\eta}{2}.$$

还需验证（5.20）和（5.21）。对每个$j\in\mathbb{N}$，令e_j =$e\cap\mathscr{A}_j$，其中 $\mathscr{A}_j$ =B(z0, $2^{-}{}^{j+1}r)\backslash B(z0,2^{-}{}^{j}r)$，并令 λ_j为e_j的 $\mathscr{C}$-容量测度。定义

$$\upsilon = (\mathbf{W}_{\alpha,q}\gamma(z_0)+\eta)^{q-1}\lambda, \quad \text{with} \quad \lambda=\sum_j \lambda_j.$$

那么 $\upsilon\in\mathfrak{M}^{+}$ 满足（5.20）和（5.21）。事实上，对于 $z\in e\backslash\{z_0\}$,

$$\begin{aligned}\mathbf{W}_{\alpha,q}\upsilon(z)=\big(\mathbf{W}_{\alpha,q}\gamma(z_0)+\eta\big)^{(q-1)(q'-1)}\,\mathbf{W}_{\alpha,q}\lambda(z)&\geq\big(\mathbf{W}_{\alpha,q}\gamma(z_0)+\eta\big)\,\mathbf{W}_{\alpha,q}\lambda_j(z)\\&\geq\mathbf{W}_{\alpha,q}\gamma(z_0)+\eta.\end{aligned}$$

由于 $\mathscr{C}_{\alpha,q}(e)=0$，引理 5.3(ii) 允许对每个 λ_j作出选择，使得 $\mathbf{W}_{\alpha,q}\lambda_j(z_0)<\varepsilon_j$。因此，

$$\mathbf{W}_{\alpha,q}\upsilon(z_0)\leq c(\mathbf{W}_{\alpha,q}\gamma(z_0)+\eta)\sum_j\mathbf{W}_{\alpha,q}\lambda_j(z_0)\leq c(\mathbf{W}_{\alpha,q}\gamma(z_0)+\eta)\sum_j\varepsilon_j.$$

选取 $\varepsilon_j>0$使得 $\sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon_j\leq\eta/c(\mathbf{W}_{\alpha,q}\gamma(z_0)+\eta)$，我们得到 (5.21)，完成证明。❑

6 利益冲突

代表所有作者，通讯作者声明不存在利益冲突。

参考文献

[1]D. R. Adams 和 L. I. Hedberg，《函数空间与位势理论》，数学科学基础丛书，第 314 卷，施普林格，柏林，1996年。[2] H. A. Aimar，椭圆与抛物型 BMO 及哈纳克不等式，《美国数学会会刊》**306** (1988年)，第 1 期，265–276。[3] H. Aikawa 和 M. R. Essén，《位势理论——专题选编》，数学讲义，第 1633 卷，施普林格，柏林，1996年。[4] M. Brzezina，关于抛物位势论中的基与本质基，《捷克斯洛伐克数学杂志》**40(115)** (1990年)，第 1 期，87–103。[5] M. Brelot，关于细集，《数学科学通报》(2) **68** (1944年)，12–36。[6] R. R. Coifman 和 G. L. Weiss，《某些齐性空间上的非交换调和分析》，数学讲义，第 242 卷，施普林格，柏林，1971年。[7] C. Cascante、J. Ortega 和 I. E. Verbitsky，广义二进制核与径向核的非线性势及双权迹不等式，《印第安纳大学数学杂志》**53** (2004年)，第 3 期，845–882。[8] E. DiBenedetto，《退化抛物方程》，Universitext，施普林格，纽约，1993年。

[9] L. C. Evans 和 R. F. Gariepy，热方程的 Wiener准则，《数学分析档案》**78** (1982年)，第 4 期，293–314。[10] E. B. Fabes 和 N. Rivière，具有混合齐次性的奇异积分，《数学研究》**27**(1966年)，19–38。[11] E. B. Fabes、N. Garofalo 和 E. Lanconelli，具有C^1-Dini 连续系数的散度型抛物算子的 Wiener准则，《杜克数学杂志》**59** (1989年)，第 1 期，191–232。[12] R. F. Gariepy 和 W. P. Ziemer，热容量与边界正则性，《微分方程杂志》**45** (1982年)，第 3 期，374–388。[13] N. Garofalo 和 E. Lanconelli，变系数抛物型方程的 Wiener准则及其推论，《美国数学会会刊》**308** (1988年)，第 2 期，811–836。[14]X. Hu、L. Tang，退化抛物方程的 Wiener准则，arXiv:2303.08350。[15] L. I. Hedberg，非线性势与解析函数的平均逼近，《数学杂志》**129** (1972年)，299–319。[16] L. I. Hedberg 和 T. H. Wolff，非线性位势理论中的薄集，《傅里叶研究所年刊（格勒诺布尔）》**33** (1983年)，第 4 期，161–187。[17] B. F. Jones Jr.，利普希茨空间与热方程，《数学与力学杂志》**18**(1968/69)，379–409。[18] T. Kuusi 和 G. Mingione，黎斯势与非线性抛物型方程，《数学分析档案》**212** (2014年)，第 3 期，727–780。[19] T. Kuusi 和 G. Mingione，非线性抛物型方程的梯度正则性，《比萨高等师范学校科学年刊》(5) **12** (2013年)，第 4 期，755–822[20] N. S. Landkof，《现代位势理论基础》，A. P. Doohovskoy 从俄文译出，数学科学基础丛书，第 180 卷，施普林格，纽约—海德堡，1972年。[21] E. Landis，热方程狄利克雷问题边界点正则性的充要条件，《苏联科学院通报》**185** (1969年)，517–520。[22] E. Lanconelli，关于热方程的狄利克雷问题，《纯粹与应用数学年刊》(4)**97** (1973年)，83–114。[23] A. K. Lerner 和 F. L. Nazarov，直观的二进制演算：基础，《数学展望》**37**(2019年)，第 3 期，225–265[24] N. G. Meyers，勒贝格类函数的势的容量理论，《斯堪的纳维亚数学杂志》**26**(1970年)，255–292（1971年）。

[25] V. G. Maz’ya 和 V. P. Khavin，《非线性位势理论》，《数学科学成就》**27** (1972年)，第 6 期，67–138 页。[26] Q.-H. Nguyen，《测度数据下的位势估计与拟线性抛物方程》，《美国数学会纪要》**291**(2023年)，第 1449 号，v+123 页。[27] C. H. Sampson，《抛物型勒贝格空间的刻画》，博士学位论文，莱斯大学，ProQuest LLC，密歇根州安娜堡，1968年。[28] O. Saari，《抛物BMO与前向极大算子》，《纯粹与应用数学年刊》（第 4 辑）**197** (2018年)，第 5 期，1477–1497 页。[29] C. Segovia Fernández 和 R. L. Wheeden，关于函数 g_λ^* 与热方程，《数学研究》**37** (1970年)，57–93 页。[30] G. Tralli 和 F. Uguzzoni，《演化赫尔曼德算子的 Landis 型维纳检验》，《泛函分析杂志》**278**(2020年)，第 6 期，108410，34 页。[31] W. P. Ziemer，《抛物变分不等式弱解的正则性》，《美国数学会会刊》**309**(1988年)，第 2 期，763–786 页。[32] N. G. 维纳，《不连续边界条件与狄利克雷问题》，《美国数学会会刊》**25** (1923年)，第 3 期，307–314 页。[33] N. A. Watson，《热位势理论导论》，数学综述与专著，第 182 卷，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2012年。