arXiv:2603.02921v1 [math.AP] 3 Mar 2026

排名均值场规划博弈

ALI ALMADEH、TIGRAN BAKARYAN、DIOGO GOMES 和 MELIH ÜÇER

摘要。本文研究具有非局部、基于排名的耦合的一维平均场规划（MFP）系统。通过势函数表述，我们将该系统改写为一个相关的标量偏微分方程。我们证明了具有正密度的排名型平均场规划系统的经典解与相关势函数问题的经典解等价，并推导出显式的重构公式。随后，我们发现相关算子具有单调性结构；在严格凸性假设下，该结构可推出相关问题的经典解唯一，从而排名型平均场规划系统的解在价值函数相差一个加法常数的意义下唯一。最后，在超线性增长假设下，我们利用单调性，在低正则性框架下探讨解的存在性。通过为 q-拉普拉斯正则化算子构造变分不等式，我们应用 Minty方法，证明了松弛势函数表述在有界变差函数空间中存在弱解。

1. 引言

平均场博弈（MFG）理论研究无穷小主体总体中的纳什均衡，其中个体成本和动力学受状态总体分布的影响。这些模型从两个不同视角独立提出。基于偏微分方程的方法以简略形式发表于 [27, 28] ，随后在 [29],中作了更详细的阐述，该方法通过一组耦合偏微分方程刻画均衡。与此同时，纳什确定性等价（NCE）原理被用于大型总体的随机动态博弈 [24, 25]。这些系统的存在性、唯一性和正则性并非显然。针对时变模型的经典解已在多种情形下得到建立，包括次二次 [22] 和超二次哈密顿量 [21], ，以及对数型非线性 [19]。进一步的成果包括对哈密顿–雅可比分量的 Sobole夫估计 [11], ，这对于一阶模型的分析至关重要。有关这些技术的详细介绍，参见 [20]。

平均场规划问题（MFP）最初见于 [30] （2009年11月27日、12月4日至11日的讲座）。不同于终端成本固定的标准均值场博弈，MFP规定了初始和终端分布， m_0 以及 m_T，同时将终端价值函数 $u(T, \cdot)$留作自由变量。在MFP问题中，价值函数 u 仅确定到一个加法常数。在这一框架下，中央规划者旨在引导总体走向目标终态，同时假设无穷小主体仍会选择使其个体成本最小化的策略。MFP可写为

$$\begin{cases} -u_t + H(x, Du) = f(x, m), \\ m_t - \operatorname{div}(m D_p H(x, Du)) = 0, \\ m(0, x) = m_0(x), \quad m(T, x) = m_T(x). \end{cases}$$

这里， $H: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 是哈密顿量，而 $D_p H(x, p)$表示 H 关于动量变量 p的梯度。

具有二次增长哈密顿量和单调耦合的平均场规划问题的解的存在性与唯一性已在 [30]（2009年11月27日、12月4日至11日的讲座）中得到证明。这项工作随后扩展至涉及扩散的二阶平均场规划问题 [33],

日期：2026年3月4日。2020 数学主题分类。91A16, 35A01, 47H05, 35D30。关键词和短语。均值场博弈；平均场规划；基于排名的相互作用；透视函数；单调算子；BV弱解。研究得到KAUST基准经费的支持。T.B.的工作得到MESCS RA高等教育与科学委员会研究项目24IRF-1A001的支持。

该研究证明了弱解的存在性。在数值方面，主方程规划问题已通过有限差分格式 [1] 得到研究；近年来，一维模型的粒子近似也见于 [18]。

关于主方程规划问题的研究广泛借鉴了最优传输理论 [8]。特别地，主方程规划已被作为正则化质量传输问题加以分析 [23]，并通过最优熵传输对偶进行研究 [32]，还被扩展以纳入拥堵效应 [9]。

本文采用势函数表述，该表述最初在 [5] 中提出，其中将庞加莱引理应用于连续性方程，从而将主方程规划化为变分问题，并从系统中消去连续性方程。具体而言，我们考虑具有基于排名的非局部耦合的主方程规划，其中瞬时成本取决于智能体的分位数，该分位数由密度的累积分布函数（CDF）给出 m。

非局部耦合在均值场博弈文献中广泛出现，通常具有平滑效应 [10]；相比之下，基于排名的相互作用引入了正则性较弱的耦合。基于排名的相互作用出现在随机模型中，包括扩散控制博弈 [4]、带公共噪声的博弈 [6]、终端排名模型 [7]、一般均值场竞争 [31] 以及委托代理框架 [2]，也出现在具有排名与最近邻效应的博弈中 [12]。据我们所知，文献中尚无针对带排名相互作用的确定性一阶规划问题的基于偏微分方程的分析。由于累积分布函数耦合的正则性有限，我们采用单调算子方法下的弱表述。

通过排名产生交互的一维主方程规划的一般形式为

$$\begin{cases} -u_t + H\left(x, u_x\right) = V\left(\int_0^x f\left(m\left(t, y\right)\right) \mathrm{d}y\right), \\ m_t - \left(m D_p H\left(x, u_x\right)\right)_x = 0, \\ m\left(0, x\right) = m_0\left(x\right), \quad m\left(T, x\right) = m_T\left(x\right). \end{cases}$$

我们考虑一维空间的情形，其中 $x \in [0,1]$，设 $f(m) = m$ 和 $V(r) = r$，并将排名项解释为累积分布函数，从而得到问题 1中的系统。

一个启发性模型。 作为启发，我们对一系列企业进行建模，其成本取决于它们在排放分布中的排名。每个主体 $x(t) \in [0,1]$ 的状态表示其在时间 t 的归一化排放强度。这里，$x(t) = 0$ 对应碳中和状态，而 $x(t) = 1$ 表示允许的最大排放强度。

每家企业都力求将两种相互竞争因素构成的总成本降至最低：脱碳的运营成本，以及由其排名决定的市场声誉成本。企业控制其排放变化率 $v(t)$，该变化率决定其状态的演变：

$$\dot{x}(t) = v(t), \quad x(0) = x_0.$$

对排放水平的任何调整都会产生成本。减少排放（$v < 0$）通常需要投资绿色技术，而增加排放（$v > 0$）可能需要额外购买排放证书、缴纳碳税或支付监管罚款。这些成本由拉格朗日函数 $L(x, v)$ 建模，该函数取为哈密顿量 H 的勒让德变换：

$$L(x, v) = \sup_{p \in \mathbb{R}} \left(-vp - H(x, p)\right), \quad x \in [0,1]. \tag{1.1}$$

这种竞争性相互作用基于排名：企业承担的成本取决于其在总体中的相对位置。令 $m(t, y)$ 表示排放水平为 y 的主体密度。时间 t、状态 x 下企业的排名通常通过核 f 定义为

$$r(t, x) = \int_0^x f(m(t, y)) \, \mathrm{d}y.$$

每家企业都力求选择一个可容许控制 $v(\cdot)$，以使成本泛函最小化

$$\int_0^T \left[L\left(x\left(s\right), v\left(s\right)\right) + V\left(r\left(s, x\left(s\right)\right)\right)\right] \mathrm{d}s + u\left(T, x\left(T\right)\right),$$

其中 $V(\cdot)$ 表示依赖排名的声誉成本。由于 V 是递增的，企业被驱使降低其排名（即趋向 $x=0$）。在本文中，我们关注线性排名成本的情形，设定 $V(r)=r$ 以及 $f(m)=m$。

在平均场规划框架中，中央规划者（例如政府监管机构）观察初始分布 m_0，并规定目标分布 m_T（例如“绿色经济”合规目标）。终端成本 $u(T,\cdot)$并非预先给定，而是解的一部分。它是确保市场均衡自然演化至 m_T所需的激励政策。

问题表述。我们在定义域Ω上研究如下排名型平均场规划系统：$=(0,T)\times(0,1)$。

问题 1（排名MFP问题）。设 $H\colon\ [0,1]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 且 $m_0, m_T\colon\ [0,1]\to\mathbb{R}^+$。我们研究偏微分方程组的解$(u,m)$

$$\begin{cases} -u_t+H\left(x,u_x\right)=\displaystyle\int_0^x m\left(t,y\right)\,\mathrm{d}y, \\ m_t-\left(mD_pH\left(x,u_x\right)\right)_x=0, \end{cases} \quad \text{in} \quad \Omega, \tag{1.2}$$

它们满足 $m\geqslant 0$ 及边界条件

$$\begin{cases} m(0,x)=m_0(x), & x\in[0,1], \\ m(T,x)=m_T(x), & x\in[0,1], \\ -m(t,x)D_pH(x,u_x)=0, & \text{on } (0,T)\times\{0,1\}. \end{cases} \tag{1.3}$$

侧边界条件 $-mD_pH=0$ 表示零通量约束，它确保主体的总质量在定义域 $[0,1]$内守恒。

注释 1.1（关于耦合项的选择）。选择 $f(m)=m$ 和 $V(r)=r$ 在分析上具有重要意义，因为由此得到的累积分布函数耦合 $m\mapsto\int_0^x m$，在极限测度出现奇异部分时，作为从赋予 W_1 拓扑的概率测度到 $C([0,1])$ 的映射并不连续。由于缺乏平滑性，无法应用标准的不动点论证。尽管如此，线性选择仍会导出一个单调算子，从而允许建立一种BV 存在性理论。

为了分析问题 1，我们通过势函数表述引入一个关联问题。将庞加莱引理应用于与输运方程相关的无散场，我们得到一个势函数 φ，满足 $\varphi_x=m$（对于经典解，还满足 $\varphi_t=mD_pH(x,u_x)$）。这样，我们便可将该系统改写为关于 φ 的单个方程，并将其称为关联问题。更确切地说，规划约束由边界迹 $\varphi(0,\cdot)$ 和 $\varphi(T,\cdot)$ 编码。此外，零通量条件意味着φ 在 $x=0,1$ 上不随时间变化；结合质量归一化和参考势函数 φ^0，在经典情形下可得狄利克雷边界条件 $\varphi=\varphi^0$，其定义在 $\partial\Omega$ 上。具体推导详见第2.2节。为了形式化地定义这个问题，我们首先引入参考势函数 φ^0，它对边界数据进行插值，

$$\varphi^0\left(t,x\right)=\frac{T-t}{T}\int_0^x m_0\left(y\right)\,\mathrm{d}y+\frac{t}{T}\int_0^x m_T\left(y\right)\,\mathrm{d}y,$$

以及透视函数 F，其定义为部分勒让德变换

$$F(x,j,m)=\sup_{p\in\mathbb{R}}\big(-jp-mH(x,p)\big). \tag{1.4}$$

对于严格正密度 $m>0$，F 可表示为

$$F(x,j,m)=L\left(x,\frac{j}{m}\right)m, \quad j\in\mathbb{R}, \tag{1.5}$$

其中 L 是式（1.1）中定义的勒让德变换。

现在，我们的排名MFP问题的关联问题概述如下。

问题 2 (关联问题)**.** 考虑问题 1中的设定，并令 F 和 φ^0 如上所述。我们研究方程 φ的解

$$\left(F_j\left(x,-\varphi_t,\varphi_x\right)\right)_t+\left(-F_m\left(x,-\varphi_t,\varphi_x\right)\right)_x-\varphi_x=0 \qquad \text{in} \quad \Omega, \tag{1.6}$$

满足 $\varphi_x \geqslant 0$ 以及边界条件

$$\varphi=\varphi^0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega. \tag{1.7}$$

在定义了两个核心问题之后，我们现在概述主要结果以及分析的结构。我们的工作分为两个主要部分。

在第一部分中，我们首先着手建立这两个问题的经典解之间的形式等价，其途径为

$$\begin{cases} m(t,x)=\varphi_x(t,x), \\ u(t,x)=-\displaystyle\int_0^x F_j\Big(y,-\varphi_t(t,y),\varphi_x(t,y)\Big)\,\mathrm{d}y \\ \qquad\qquad -\displaystyle\int_0^t F_m\Big(0,-\varphi_t(s,0),\varphi_x(s,0)\Big)\,\mathrm{d}s. \end{cases}$$

归一化 $u(0,0)=0$ 决定了重构公式中的时间积分项。然后，我们证明了问题2的经典解的唯一性。在引理2.3的等价性下，该关联问题的这一唯一性结果可转移到排序平均场规划（在 u中相差一个加法常数）。定理1.2 与推论1.3 如下表述了这些结果。

定理1.2 （唯一性）。 设假设*1* 与*2* 成立。则问题*2* 至多存在一个经典解 φ 满足 $\varphi_x>0$。

推论 1.3. 假设条件*1* 和*2* 成立。则问题 *1* 至多存在一个经典解 $(u,\ m)$ 其中 $m>0$，且在 u 中相差一个加法常数。

在第二部分，我们的主要结果是定理 1.6 （ BV 弱解的存在性），通过单调算子理论以及问题 2 的 q-拉普拉斯正则化，再结合 Minty方法证明。我们将弱解定义如下。

定义 1.4（弱解）。函数 $\varphi\in BV(\Omega)$ 是问题 2 的一个弱解，若 $D_x\varphi\geqslant 0$ 在拉东测度的意义下，$\varphi(0,\cdot)=\varphi^0(0,\cdot)$，$\varphi(T,\cdot)=\varphi^0(T,\cdot)$，$\varphi(\cdot,0)\geqslant\varphi^0(\cdot,0)=0$，且 $\varphi(\cdot,1)\leqslant\varphi^0(\cdot,1)=1$ 在迹的意义下成立；并且对每个满足 $\eta_x>0$ 且在 $\partial\Omega$ 上满足 $\eta=\varphi^0$ 的测试函数$\eta\in\mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$，以下变分不等式成立

$$\begin{aligned}\int_\Omega\left[-F_j(x,-\eta_t,\eta_x)\eta_t+F_m(x,-\eta_t,\eta_x)\eta_x+\eta\eta_x\right]\mathrm{d}\Omega \\ -\left[\int_\Omega -F_j(x,-\eta_t,\eta_x)D_t\varphi+\int_\Omega F_m(x,-\eta_t,\eta_x)D_x\varphi+\int_\Omega \eta D_x\varphi\right. \\ \left.+L(0,0)\int_0^T\varphi(t,0)\,\mathrm{d}t+\big(L(1,0)+1\big)\int_0^T(1-\varphi(t,1))\,\mathrm{d}t\right]\geqslant 0,\end{aligned}$$

其中 $D_t\varphi$ 和 $D_x\varphi$ 是表示 φ的分布导数的拉东测度。

我们回顾一下 $BV(\Omega)$ 第 3.1.2小节中的基本事实。

备注 1.5（边界条件与Minty表述）。 定义 1.4 以Minty的意义表述了一个弱解，其中测试函数 η 出现在算子之中。经典问题在 $\varphi=\varphi^0$ 上施加逐点狄利克雷条件 $\partial\Omega$，而 BV表述则要求采用一种松弛处理。在侧边界 $(0,T)\times\{0,1\}$ 上，我们不施加逐点相等条件；相反，空间边界数据通过定义 1.4 中的单侧迹约束以及变分不等式中的边界项来编码。从物理上看，这些不等式允许开区间 (0,1)内发生质量损失，这对应于在 $x=0$ 和 $x=1$处形成集中的狄拉克质量。因此，

该表述自然地刻画了边界拥堵。相比之下， $t=0$ 和 $t=T$ 处的初始迹和终端迹则以迹的意义作为等式施加。

此外，变分不等式中的边界项以零速度时的运行成本 $L(x,0)$ 为权重，对边界集中 $\varphi(t,0)$ 和 $(1-\varphi(t,1))$ 进行加权（并计入 $x=1$ 处的额外排名贡献）。事实上，由于 $\eta=\varphi^0$ 在 $\partial\Omega$ 上成立，我们有 $\eta_t=\varphi_t^0$ 在 $(0,T)\times\{0,1\}$ 上成立；又因为对所有 t， $\varphi^0(t,0)=0$ 且 $\varphi^0(t,1)=1$，因此可得 $\eta_t(t,0)=\eta_t(t,1)=0$。利用 $F_m(x,0,m)=L(x,0)$（对 $m>0$），我们得到

$$F_m(0,-\eta_t(t,0),\eta_x(t,0))=L(0,0),\qquad F_m(1,-\eta_t(t,1),\eta_x(t,1))=L(1,0).$$

定理 1.6 (弱解的存在性)。 假设 *1*、*2*、*3*、*4* 成立。则存在问题 φ 的一个弱解， *2* 其意义符合定义 *1.4*。

为证明定理 1.6，我们采用基于自反巴拿赫空间中单调算子的框架。在希尔伯特空间中，这种方法已用于证明时变 [16] 和定常平均场博弈 [14, 15]弱解的存在性。近期，该方法已统一到用于定常平均场博弈的巴拿赫空间框架中，其中包括带拥堵和最小增长哈密顿量的模型 [17]。在本文中，我们对与问题 2 相关的算子采用 q-拉普拉斯正则化，如式（3.5）所示。利用单调强制算子的抽象存在定理（定理 3.3），我们证明正则化问题存在解。最后，我们应用 Minty方法取极限，从而得到 $BV(\Omega)$ 中的弱解，见第 3.2 节。

2. 经典解

本节考虑解足够光滑的情形。我们证明排序平均场规划与关联问题之间的等价性，并据此推导出经典解的唯一性。

2.1. **假设与预备恒等式**。

我们陈述本文通篇所用的关于哈密顿量与边界数据的结构性假设；存在性理论所需的额外增长假设引入于小节 3.1。

假设 1 （哈密顿量性质）。 哈密顿量 H 满足以下正则性条件：

$$H\in\mathcal{C}^1([0,1]\times\mathbb{R})\quad and\quad D_pH\in\mathcal{C}^1([0,1]\times\mathbb{R}).$$

此外， H 关于 p 是强制的且严格凸的。也就是说，对所有 $x\in[0,1]$,

$$\lim_{|p|\to\infty}\frac{H(x,p)}{|p|}=+\infty\quad and\quad D_{pp}H(x,p)>0.$$

为简洁起见，我们将分析限制在自治情形 $H(x,p)$；然而，这些论证可推广到时变哈密顿量 $H(t,x,p)$，只要其满足假设 1 的方式是一致的。

注 2.1（关于 L 与 F的性质）。 拉格朗日函数 $L(x,v)$ 由勒让德变换（1.1）定义。在假设1下，标准凸分析表明 L 关于 v 是严格凸的，并继承 H的正则性，具体如下：

$$L\in\mathcal{C}^1([0,1]\times\mathbb{R})\quad\text{and}\quad D_vL\in\mathcal{C}^1([0,1]\times\mathbb{R}).$$

我们将使用以下恒等式：

(1) **勒让德变换恒等式：** 在勒让德对偶成立的点处（即，$D_pH(x,p)=-v$ 且 $D_vL(x,v)=-p$），我们有

$$\begin{aligned}D_pH\left(x,-D_vL\left(x,v\right)\right)&=-v,\\ H\left(x,-D_vL\left(x,v\right)\right)&=vD_vL(x,v)-L(x,v).\end{aligned}\tag{2.1}$$

(2) **透视函数导数：** 对于 F 在（1.5）中给出时，其导数为

$$\begin{aligned}F_j&=D_vL\left(x,\frac{j}{m}\right),\\ F_m&=-D_vL\left(x,\frac{j}{m}\right)\cdot\left(\frac{j}{m}\right)+L\left(x,\frac{j}{m}\right).\end{aligned}\tag{2.2}$$

因此， F， F_j和 F_m 属于 $\mathcal{C}^1$（$[0,1]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$），这是因为（1.5）和（2.2）。此外，回顾（1.4）中的定义，我们注意到 F（x，$\cdot$，$\cdot$）是一个线性函数族的上确界；因此，对于任意固定的 $x\in[0,1]$，它关于所有变量联合凸。

引理 2.2. 假设条件 *1* 成立。对于任意 $x\in[0,1]$ 以及任意 $(j,m),(j_0,m_0)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$，有

$$F_j(x,j,m)j_0+F_m(x,j,m)m_0\leqslant F(x,j_0,m_0).$$

证明。 由 (2.2)，可得

$$F_j(x,j,m)j_0+F_m(x,j,m)m_0=m_0\left(D_vL\left(x,\frac{j}{m}\right)\left(\frac{j_0}{m_0}-\frac{j}{m}\right)+L\left(x,\frac{j}{m}\right)\right).$$

由注记 $L(x,\cdot)$ 中的凸性可得 2.1，有

$$D_vL\left(x,\frac{j}{m}\right)\left(\frac{j_0}{m_0}-\frac{j}{m}\right)+L\left(x,\frac{j}{m}\right)\leqslant L\left(x,\frac{j_0}{m_0}\right).$$

因此，

$$F_j(x,j,m)j_0+F_m(x,j,m)m_0\leqslant m_0L\left(x,\frac{j_0}{m_0}\right)=F(x,j_0,m_0).\qquad\square$$

最后，我们对边界数据施加以下条件。

假设 2 (边界数据的正性)。 我们假设初始分布和终端分布 $m_0,m_T\in\mathcal{C}^1([0,1])$ 是严格为正的概率密度。也就是说， $m_0(x)>0$,$m_T(x)>0$ 对所有 $x\in[0,1]$ 均成立，且 $\int_0^1 m_0(x)\,\mathrm{d}x=1$, $\int_0^1 m_T(x)\,\mathrm{d}x=1$。

2.2. **连接引理**。 本小节中，我们证明引理 2.3，从而确立排名MFP问题与经典解的关联问题之间的等价性。

引理 2.3 (连接引理)。 考虑问题 *1* 的设定，并假设假设 *1*和 *2*成立。

(1) 设 $\varphi\in\mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$ 是问题 *2*的一个经典解，且 $\varphi_x>0$。那么，由以下定义的数对(u,m) 为

$$\begin{cases} m(t,x)=\varphi_x(t,x),\\ u(t,x)=-\displaystyle\int_0^x F_j\Big(y,-\varphi_t(t,y),\varphi_x(t,y)\Big)\,\mathrm{d}y\\ \qquad\qquad -\displaystyle\int_0^t F_m\Big(0,-\varphi_t(s,0),\varphi_x(s,0)\Big)\,\mathrm{d}s \end{cases}\tag{2.3}$$

是问题*1*的一个经典解。

(2) 反之，设$(u,m)\in\mathcal{C}^2(\bar{\Omega})\times\mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$ 是问题*1* 的一个经典解，其中$m>0$ 以及 $u(0,0)=0$。则存在势函数 φ 满足(2.3)，且该势函数求解问题*2*。

证明。 首先，我们证明蕴含关系**关联问题** $\Longrightarrow$ **排名MFP问题** .

对 u 在（2.3）中关于 x 求导，并利用 F_j 在（2.2）中的恒等式，我们得 in

$$u_x=-F_j\left(x,-\varphi_t,\varphi_x\right)=-D_vL\left(x,\frac{-\varphi_t}{\varphi_x}\right).\tag{2.4}$$

接下来，我们将 u_x 代入项 $mD_pH(x,\ u_x)$ 和 $H(x,\ u_x)$。利用勒让德变换恒等式（2.1），取速度 $v=\frac{-\varphi_t}{\varphi_x}$，并回顾 $m=\varphi_x$ 由（2.3）可得

$$\begin{aligned} mD_pH\left(x,u_x\right)&=\varphi_xD_pH\left(x,-D_vL\left(x,\frac{-\varphi_t}{\varphi_x}\right)\right)=\varphi_x\left(\frac{\varphi_t}{\varphi_x}\right)=\varphi_t,\\ H\left(x,u_x\right)&=H\left(x,-D_vL\left(x,\frac{-\varphi_t}{\varphi_x}\right)\right)\\ &=\left(\frac{-\varphi_t}{\varphi_x}\right)D_vL\left(x,\frac{-\varphi_t}{\varphi_x}\right)-L\left(x,\frac{-\varphi_t}{\varphi_x}\right)=-F_m\left(x,-\varphi_t,\varphi_x\right). \end{aligned}\tag{2.5}$$

注意， $H(x,\ u_x)$ 的最终等式与（ $-F_m$ 中给出的恒等式一致（2.2） .

接下来，利用（2.3）中的第一个方程和（2.5）中的第一个恒等式，我们得到

$$0=(\varphi_x)_t-(\varphi_t)_x=m_t-\left(mD_pH\left(x,u_x\right)\right)_x.$$

也就是说，输运方程（1.2）对 (u,m)成立。

现在，对于 HJ 方程，注意到由（2.3）

$$u_t(t,x)=\left(-\int_0^x\frac{\partial}{\partial t}F_j(y,-\varphi_t(t,y),\varphi_x(t,y))\,\mathrm{d}y\right)-F_m(0,-\varphi_t(t,0),\varphi_x(t,0)).\tag{2.6}$$

利用（1.6），我们得到

$$\frac{\partial}{\partial t}F_j(y,-\varphi_t(t,y),\varphi_x(t,y))=\frac{\partial}{\partial y}F_m(y,-\varphi_t(t,y),\varphi_x(t,y))+\varphi_x(t,y).$$

将其代入（2.6），并利用（2.5）和（2.3），可得

$$\begin{aligned}u_t(t,x)&=-\int_0^x\frac{\partial}{\partial y}F_m(y,-\varphi_t(t,y),\varphi_x(t,y))\,\mathrm{d}y\\&\quad-\int_0^x\varphi_x(t,y)\,\mathrm{d}y-F_m(0,-\varphi_t(t,0),\varphi_x(t,0))\\&=-F_m(x,-\varphi_t(t,x),\varphi_x(t,x))-\int_0^x\varphi_x(t,y)\,\mathrm{d}y\\&=H(x,u_x)-\int_0^x m(t,y)\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

由此可知 $(u,m)\in\mathcal{C}^2(\bar{\Omega})\times\mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$ 是问题 1 的解。

为完成蕴含关系的证明，我们需要考察边界条件。假设 t

我们在 $\varphi=\varphi^0$ 上满足 $\partial\Omega$ 中的边界条件，如（1.7）所示。这意味着

$$\begin{aligned}\varphi\left(0,x\right)&=\varphi^0\left(0,x\right)=\int_0^x m_0\left(y\right)\,\mathrm{d}y,\\\varphi\left(T,x\right)&=\varphi^0\left(T,x\right)=\int_0^x m_T\left(y\right)\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}m\left(0,x\right)&=\varphi_x\left(0,x\right)=m_0\left(x\right),\\m\left(T,x\right)&=\varphi_x\left(T,x\right)=m_T\left(x\right).\end{aligned}$$

此外，

$$\begin{aligned}\varphi\left(t,0\right)&=\varphi^0\left(t,0\right)=0,\\\varphi\left(t,1\right)&=\varphi^0\left(t,1\right)=1.\end{aligned}$$

因此，我们有

$$\varphi_t\left(t,0\right)=\varphi_t\left(t,1\right)=0\implies-mD_pH\left(x,u_x\right)=0\quad\text{on }(0,T)\times\{0,1\}.$$

现在我们证明反向蕴含，即 **排名MFP问题** $\implies$ **关联问题**。假设 $(u,m)\in\mathcal{C}^2(\bar{\Omega})\times\mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$ 是问题 1的解，且满足 $m>0$。我们可以将输运方程 $m_t-\left(mD_pH\left(x,u_x\right)\right)_x=0$ 改写为以下形式

$$\mathrm{div}_{(t,x)}\left(m,-mD_pH\left(x,u_x\right)\right)=0.$$

由于 Ω 是单连通的，因此满足庞加莱引理的假设。因此，存在唯一的函数 $\varphi:\Omega\to\mathbb{R}$，使得

$$\begin{cases}\varphi_x=m,\\\varphi_t=mD_pH\left(x,u_x\right),\\\varphi(0,0)=0.\end{cases}\tag{2.7}$$

由于 $(u,m)\in\mathcal{C}^2(\bar{\Omega})\times\mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$，根据假设 H中的正则性 1，可得 $\varphi\in\mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$。

由（2.7）可得 $\frac{-\varphi_t}{\varphi_x} = -D_pH(x,u_x)$。将其代入（2.1）可得（2.4）和（2.5）中的关系。对（1.2）中的 HJ 方程关于 x求导，并利用（2.4）和（2.5），得到

$$\left(F_j\left(x,-\varphi_t,\varphi_x\right)\right)_t + \left(-F_m\left(x,-\varphi_t,\varphi_x\right)\right)_x - \varphi_x = 0,$$

即 (1.6)。现在，根据 φ的构造，(2.3) 中的第一个方程成立。对于第二个方程，对2.4) 关于 x积分，得到

$$u(t,x) = -\int_0^x F_j\Big(y,-\varphi_t(t,y),\varphi_x(t,y)\Big)\,\mathrm{d}y + u\left(t,0\right). \tag{2.8}$$

将 (1.2) 中的哈密顿–雅可比方程在 $x=0$ 处利用 (2.5) 求值，并对所得结果关于 t积分，得到

$$u\left(t,0\right) = -\int_0^t F_m\Big(0,-\varphi_t(s,0),\varphi_x(s,0)\Big)\,\mathrm{d}s. \tag{2.9}$$

结合 (2.8) 和 (2.9)，即可证明 (2.3) 中的第二个方程。因此，φ 满足 (2.3)，如前所述。最后，设 $(u,\ m)$ 满足 (1.3) 中的边界条件和无通量条件。则根据 φ 在 (2.7) 中的定义，有

$$\varphi_x\left(0,x\right) = m_0\left(x\right) \quad \text{and} \quad \varphi_x\left(T,x\right) = m_T\left(x\right).$$

此外，空间边界上的无通量条件 $-mD_pH = 0$ 意味着

$$\varphi_t\left(t,0\right) = \varphi_t\left(t,1\right) = 0,$$

对所有 $t\in[0,T]$ 均成立。这意味着

$$\varphi\left(t,0\right) = \varphi\left(0,0\right) = 0 \quad \text{and} \quad \varphi\left(t,1\right) = \varphi\left(0,1\right).$$

因此，根据微积分基本定理，我们得到

$$\varphi(0,1) = \varphi(0,0) + \int_0^1 \varphi_x\left(0,x\right)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 m_0\left(x\right)\,\mathrm{d}x = 1,$$

这意味着 $\varphi(t,\ 1)\ = 1$。结合空间导数可得

$$\varphi\left(0,x\right) = \int_0^x m_0\left(y\right)\,\mathrm{d}y \quad \text{and} \quad \varphi\left(T,x\right) = \int_0^x m_T\left(y\right)\,\mathrm{d}y.$$

因此，所需结论在 $\partial\Omega$ 上成立。

□

2.3. **经典解的唯一性**。在本小节中，我们证明关联问题至多存在一个经典解，这意味着排序平均场规划问题至多存在一个经典解（相差一个 u 加法常数）。该论证依赖于拉格朗日函数的严格凸性，而这种严格凸性继承自哈密顿量（见注 2.1）。

定理 *1.2* 的证明。假设 φ^1 和 φ^2 是问题 2 的两个不同经典解。由于 φ^1 和 φ^2 都是问题 2 中偏微分方程的解，省略参数以简化表达后，它们满足

$$\left(F_j^i\right)_t - \left(F_m^i\right)_x - \varphi_x^i = 0,$$

其中 $F^i = F(x,\ -\varphi_t^i,\ \varphi_x^i)$。将 $i=1$ 对应的方程从 $i=2$ 对应的方程中相减，以 $\varphi^2-\varphi^1$ 为测试函数，并在 Ω 上积分，再经分部积分可得

$$\int_\Omega \left[-(F_j^2-F_j^1)(\varphi_t^2-\varphi_t^1) + (F_m^2-F_m^1)(\varphi_x^2-\varphi_x^1) - (\varphi_x^2-\varphi_x^1)(\varphi^2-\varphi^1)\right]\,\mathrm{d}\Omega = 0.$$

由于边界条件，第三项经分部积分后消失。为简化记号，令 $v^i = \frac{-\varphi_t^i}{\varphi_x^i}$ 且 $L^i = L(x,\ v^i)$。因此，根据（2.2），我们有

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega \left[-(F_j^2-F_j^1)(\varphi_t^2-\varphi_t^1) + (F_m^2-F_m^1)(\varphi_x^2-\varphi_x^1)\right]\,\mathrm{d}\Omega \\ &= \int_\Omega \Big[-\left(D_vL^2-D_vL^1\right)\left(\varphi_t^2-\varphi_t^1\right) + \left(-v^2D_vL^2+L^2+v^1D_vL^1-L^1\right)\left(\varphi_x^2-\varphi_x^1\right)\Big]\,\mathrm{d}\Omega \end{aligned}$$

$$= \int_\Omega \left[\varphi_x^1 \left(L^1 - L^2 - D_v L^2(v^1 - v^2) \right) + \varphi_x^2 \left(L^2 - L^1 - D_v L^1(v^2 - v^1) \right) \right] \mathrm{d}\Omega.$$

由 $L(x, \cdot)$ 的严格凸性可知，对于所有 $a \neq b$，不等式 $L(a) > L(b) + D_v L(b) \cdot (a - b)$ 成立。这意味着最后一个被积函数中的两项均为非负：

$$\varphi_x^1 \underbrace{\left(L^1 - L^2 - D_v L^2(v^1 - v^2) \right)}_{\geqslant 0} + \varphi_x^2 \underbrace{\left(L^2 - L^1 - D_v L^1(v^2 - v^1) \right)}_{\geqslant 0}.$$

由于 $\varphi_x^i > 0$ 对于经典解，被积函数中的两项必须恒等于零 o.
由于 L的严格凸性，我们必须有

$$v^1(t,x) = v^2(t,x) \quad \text{in} \quad \Omega.$$

由于 $v^1 = v^2$，由（2.2）可立即得出 $F_j^1 = F_j^2$且 $F_m^1 = F_m^2$。

因此，差值 $\varphi-$ φ所满足的偏微分方程简化为 [2]

$$(\varphi_x^1 - \varphi_x^2) = 0 \quad \text{i.e.,} \quad \varphi_x^1 = \varphi_x^2.$$

现在我们有 $\varphi_x^1 = \varphi_x^2$ 和 $v^1 = v^2$，因此 $\varphi_t^1 = \varphi_t^2$。所以，梯度相同，即$\nabla\varphi^1 = \nabla\varphi^2$。这意味着 $\varphi^1 - \varphi^2$ 是一个常数。由于 φ^1 和 φ^2 都满足 Ω 上的相同狄利克雷边界条件 $\varphi = \varphi^0$，因此可得 $\varphi^1 = \varphi^2$。这与解彼此不同的假设相矛盾。因此，经典解是唯一的。□

作为引理 2.3和定理 1.2的推论，我们得到原始排名均值场规划系统问题1的唯一性。

推论 1.3 的证明。设 (u^1, m^1) 和 (u^2, m^2) 是满足 $m^1, m^2 > 0$ 的问题 1 的解。对于任意解 (u, m)，我们有 $(u - u(0,0)\ m)$ 也是一个解。根据引理 2.3 和定理1.2，解对 $(u^1 - u^1(0,0)\ m^1)$ 和 $(u^2 - u^2(0,0)\ m^2)$ 都对应于同一个势函数 φ。因此，$m^1 = m^2$ 和 $u^1 - u^2 = u^1(0,0) - u^2(0,0)$ 是一个常数。□

3. 弱解

本节构建与问题2 相关的变分不等式框架，并证明按照定义1.4的弱解存在。

我们在 $\partial\Omega$ 上施加 $\varphi = \varphi^0$。设

$$\psi = \varphi - \varphi^0,$$

从而 $\psi = 0$ 在 $\partial\Omega$上成立。对于 $0 < \varepsilon < 1$，我们加入一个 q-拉普拉斯型正则化，从而得到一个具有解 ψ^ε的强制性问题；随后令 $\varepsilon \to 0$ 趋于极限，并证明该极限给出问题 BV 的弱解2 (按照定义1.4)。

3.1. 预备知识与假设。我们回顾下文将用到的单调算子理论和有界变差函数的关键概念，并给出本文分析所需的最少假设。

3.1.1. 单调算子理论。设 X 是一个自反巴拿赫空间，其对偶空间为 X'，并设 $\mathbb{K} \subset X$ 是一个非空凸集。我们用 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示 X' 与 X 之间的对偶配对。

定义 3.1（算子的性质）。算子 $\mathcal{A} : \mathbb{K} \to X'$ 是

(1) 若对所有 $u,\ v \in \mathbb{K}$，则称其为**单调的**，

$$\langle \mathcal{A}u - \mathcal{A}v, u - v \rangle \geqslant 0.$$

(2) 若存在 $\bar{u} \in \mathbb{K}$ 使得，则称其为**强制的**

$$\frac{\langle \mathcal{A}u, u - \bar{u} \rangle}{\|u\|_X} \to \infty, \tag{3.1}$$

当 $\|u\|_X \to \infty$ 趋于 $u \in \mathbb{K}$时。

(3) 若对所有 $u,\ v \in \mathbb{K}$ 和 $w \in X$，映射**半连续**

$$s \longmapsto \langle \mathcal{A}\left(su + (1-s)\, v\right), w \rangle$$

在区间 $[0,1]$ 上连续。

引理 3.2。 设 $\mathcal{A}:\ \mathbb{K}\to X'$ 由 $\mathcal{A}=\mathcal{A}_1+\mathcal{A}_2$ 给出，其中 $\mathcal{A}_i$ 是针对 $i=1$ 的单调算子，2。若其中一个算子（例如 $\mathcal{A}_2$）是强制的，则 $\mathcal{A}$ 是强制的。

证明。 设 $\mathcal{A}_2$ 是强制的，且令 $\bar{u}\in\mathbb{K}$ 如（3.1）所示。根据 $\mathcal{A}_1$的单调性，对于任意 $u\in\mathbb{K}$

$$\langle\mathcal{A}_1u-\mathcal{A}_1(\bar{u}),u-\bar{u}\rangle\geqslant 0.$$

重新整理并利用对偶配对的性质，可得第一项的一个下界

$$\langle\mathcal{A}_1u,u-\bar{u}\rangle\geqslant\langle\mathcal{A}_1(\bar{u}),u-\bar{u}\rangle\geqslant-\|\mathcal{A}_1(\bar{u})\|_{X'}(\|u\|_X+\|\bar{u}\|_X).$$

现在，考虑完整算子 $\mathcal{A}$。我们有

$$\frac{\langle\mathcal{A}u,u-\bar{u}\rangle}{\|u\|_X}=\frac{\langle\mathcal{A}_1u,u-\bar{u}\rangle+\langle\mathcal{A}_2u,u-\bar{u}\rangle}{\|u\|_X}\geqslant\frac{\langle\mathcal{A}_2u,u-\bar{u}\rangle}{\|u\|_X}-\|\mathcal{A}_1(\bar{u})\|_{X'}\left(1+\frac{\|\bar{u}\|_X}{\|u\|_X}\right).$$

由于 $\mathcal{A}_2$ 是强制的，且右侧的负项有界，因此 $\mathcal{A}$是强制的。□

定理 3.3（抽象存在定理）。 进一步假设 $\mathbb{K}$ 是闭的。设 $\mathcal{A}$:$\mathbb{K}\to X'$ 是一个单调、强制且半连续的算子。则存在 $u\in\mathbb{K}$，使得

$$\langle\mathcal{A}u,v-u\rangle\geqslant 0,$$

对所有 $v\in\mathbb{K}$。

证明。参见 [26]。 □

3.1.2. 有界变差函数。 设 $U\subset\mathbb{R}^n$ 为一个有界开集。我们用 $\mathcal{H}^{n-1}$ 表示 $(n-1)$ 维豪斯多夫测度。若 U 具有利普希茨边界 ∂U，则 ν 表示 ∂U 的外单位法向量，它在 ∂U 上 $\mathcal{H}^{n-1}$- 几乎处处存在。

定义 3.4（有界变差）。 设 $f\in L^1(U)$。若 f的分布导数可由 U中的一个 $\mathbb{R}^n$值拉东测度 $Df=(D_1f,\ .....,\ D_nf)$ 表示，则称 f是 U 中的有界变差函数。即，

$$\int_U f\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x=-\int_U\phi D_if\quad\text{for all }\phi\in\mathcal{C}_c^\infty(U),\quad i=1,\dots,n.$$

U 中所有有界变差函数构成一个巴拿赫空间 $BV(U)$，其范数为

$$\|f\|_{BV(U)}:=\|f\|_{L^1(U)}+|Df|(U),$$

其中 $|Df|$表示测度 Df的全变差。

定理 3.5。 对于具有利普希茨边界 ∂U 的有界开集 U ，存在 a 唯一的有界线性映射

$$\mathrm{tr}:BV(U)\to L^1\left(\partial U;\mathcal{H}^{n-1}\right)$$

使得

$$\int_U f\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x=-\int_U\phi D_if+\int_{\partial U}(\phi\nu_i)\,\mathrm{tr}\,f\,\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1},\quad i=1,\dots,n,$$

对于所有 $f\in BV(U)$ 和 $\phi\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$。

证明。 参见 [13]。 □

定义 3.6（迹）。 设 U 是具有利普希茨边界 ∂U 的有界开集。对于$f\in BV(U)$，由上述定理给出的函数 tr $f\in L^1(\partial U)$ 称为 f 在 ∂U 上的迹。

定理 3.7（关于 BV函数的紧性）。 设 U 为具有利普希茨边界 ∂U的有界开集。假设 $\{f_k\}_{k=1}^\infty$是 $BV(U)$ 中满足

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}\|f_k\|_{BV(U)}=\sup_{k\in\mathbb{N}}\left\{\int_U|f_k|\,\mathrm{d}x+|Df_k|(U)\right\}<\infty.$$

则存在子列 $\{f_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$以及 $f \in BV(U)$，使得当$j \to \infty$时，$f_{k_j} \overset{*}{\rightharpoonup} f$在 $BV(U)$ 中。也就是说，

$$f_{k_j} \to f \quad in\ L^1(U),$$
$$Df_{k_j} \overset{*}{\rightharpoonup} Df \quad in\ the\ sense\ of\ measures.$$

证明。见 [3], 第3章。 □

引理 3.8。设 U 是一个具有利普希茨边界 ∂U 的有界开集。设 $f_k \overset{*}{\rightharpoonup} f$ 属于 $BV(U)$，使得 $f_k \in W^{1,1}_0(U)$。设 $\phi^k \to \phi$ 在 $\mathcal{C}(U)$ 中一致成立。则

$$\lim_{k\to\infty} \int_U \phi^k D_i f_k = \int_U \phi D_i f - \int_{\partial U} (\phi \nu_i) \operatorname{tr} f \, \mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1} \quad i = 1, \ldots, n.$$

证明。考虑由下式定义的 $\mathcal{C}$ 上的有界线性泛函 Λ $(\overline{U})$：

$$\Lambda(\eta) := \int_U \eta D_i f - \int_{\partial U} (\eta \nu_i) \operatorname{tr} f \, \mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1},$$

对任意 $\eta \in \mathcal{C}(\overline{U})$。

固定 $\epsilon > 0$。由于 $\overline{\mathcal{C}^1}(U)$ 在 $\mathcal{C}(U)$ 中稠密，存在函数 $\Phi_\epsilon \in \mathcal{C}^1(U)$ 使得 $\|\Phi_\epsilon - \phi\|_{L^\infty} < \epsilon$。由于 $f_k \in W^{1,1}_0(U)$，我们在 ∂U 上有 $f_k = 0$。通过分部积分可得

$$\int_U \Phi_\epsilon D_i f_k = -\int_U f_k \frac{\partial \Phi_\epsilon}{\partial x_i} \, \mathrm{d}x.$$

注意到，我们可以在右端取极限

$$\lim_{k\to\infty} \int_U \Phi_\epsilon D_i f_k = -\int_U f \frac{\partial \Phi_\epsilon}{\partial x_i} \, \mathrm{d}x,$$

因为 $f_k \to f$在 $L^1(U)$和 $\frac{\partial \Phi_\epsilon}{\partial x_i} \in L^\infty(U)$成立。利用高斯-格林公式（定理3.5），对于 BV 函数 f，我们将此极限表示为

$$-\int_U f \frac{\partial \Phi_\epsilon}{\partial x_i} \, \mathrm{d}x = \int_U \Phi_\epsilon D_i f - \int_{\partial U} (\Phi_\epsilon \nu_i) \operatorname{tr} f \, \mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1} = \Lambda(\Phi_\epsilon).$$

现在，利用全变差的统一有界性 M，我们估计序列 ϕ^k的差异：$= \sup_k |Df_k|(U) < \infty$。注意到

$$\begin{aligned}\left|\int_U \phi^k D_i f_k - \Lambda(\phi)\right| &\leqslant \left|\int_U (\phi^k - \Phi_\epsilon) D_i f_k\right| + \left|\int_U \Phi_\epsilon D_i f_k - \Lambda(\Phi_\epsilon)\right| + |\Lambda(\Phi_\epsilon) - \Lambda(\phi)| \\ &\leqslant M\|\phi^k - \Phi_\epsilon\|_{L^\infty} + \left|\int_U \Phi_\epsilon D_i f_k - \Lambda(\Phi_\epsilon)\right| + C\epsilon,\end{aligned}$$

其中 C取决于 $|Df|(U)$和 $\|\operatorname{tr} f\|_{L^1(\partial U)}$。当 k足够大时，$\|\phi^k - \Phi_\epsilon\|_{L^\infty} \leq 2\epsilon$，且第二项随着 $k \to \infty$趋于零。在不等式两边取 $k \to \infty$ 的上极限，得到

$$\limsup_{k\to\infty} \left|\int_U \phi^k D_i f_k - \Lambda(\phi)\right| \leqslant (2M + C)\epsilon.$$

由于 $\epsilon > 0$ 是任意的，令 $\epsilon \to 0$，即可证明该极限为零。 □

3.1.3. 增长假设。为进行存在性分析，我们对拉格朗日量 L施加以下增长条件。

假设3 (拉格朗日量的增长条件). 存在常数 $c > 0$ 和$l > 1$ 使得

$$|D_v L(x, v)| \leqslant c|v|^{l-1} + c,$$

对所有 $(x, v) \in [0, 1] \times \mathbb{R}$。

注 3.9。对 $D_v L$ 的上界意味着 L 的上界为

$$|L(x, v)| \leqslant c|v|^l + c.$$

假设 4 (拉格朗日函数的下界)。 存在常数 $c > 0$ 和 $\kappa > 1$，使得

$$L(x, v) \geqslant \frac{1}{c}|v|^{\kappa} - c,$$

对所有 $(x, v) \in [0,1] \times \mathbb{R}$。

3.2. **算子表述**。 首先，我们定义将要研究的算子。我们选取正则化指数 q，使得

$$q \geqslant l + 1, \tag{3.2}$$

其中 l 是拉格朗日函数 L 在假设 3中的增长参数。这一选择确保正则化算子是良定义且强制的（见命题3.13 与3.15）。此外，令 q' 为共轭指数，使得 $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$。

我们分别将定义域 $\mathcal{S}^+ \subset \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$、$\mathcal{M}_0^+ \subset W_0^{1,q}(\Omega)$ 与 $\mathcal{B}_0^t \subset BV(\Omega)$ 定义如下

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}^+ &= \left\{ w \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}) : w = 0 \text{ on } \partial\Omega,\ w_x + \varphi_x^0 > 0 \right\}, \\
\mathcal{M}_0^+ &= \left\{ w \in W_0^{1,q}(\Omega) : w_x + \varphi_x^0 \geqslant 0 \right\}, \\
\mathcal{B}_0^t &= \left\{ w \in BV(\Omega) : w(0,x) = w(T,x) = 0 \text{ in the sense of traces} \right\}.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

我们在 $\mathcal{S}^+$ （以及 $W_0^{1,q}(\Omega)$）中于 $\partial\Omega$ 上施加 $w = 0$，用以编码 $\partial\Omega$ 上的齐次狄利克雷条件 $\psi = 0$；与之相对，$\mathcal{B}_0^t$ 仅规定时间迹，而侧边界条件则通过变分不等式中的边界项加以强制。

命题3.10。 集合 $\mathcal{M}_0^+$ 是非空闭凸集。

证明。 集合 $\mathcal{M}_0^+$ 非空，因为它包含零函数 $w = 0$ （因为 $\varphi_x^0 \geqslant 0$）。为证明 $\mathcal{M}_0^+$ 是闭的，设 $\{w^n\} \subset \mathcal{M}_0^+$ 满足 $w^n \to w$ 在 $W_0^{1,q}(\Omega)$中强收敛，且 $n \to \infty$。强收敛意味着 $Dw^n \to Dw$ 在 $L^q(\Omega)$中。因此，存在一个重新编号的子列，使得 $w_x^n \to w_x$ 几乎处处成立。因此，几乎处处有

$$w_x + \varphi_x^0 = \lim_{n\to\infty} \left(w_x^n + \varphi_x^0 \right) \geqslant 0.$$

为证明 $\mathcal{M}_0^+$是凸的，设 $w^1, w^2 \in \mathcal{M}_0^+$且 $\lambda \in [0,1]$。根据线性，我们有

$$\begin{aligned}
\left(\lambda w^1 + (1-\lambda) w^2\right)_x + \varphi_x^0 &= \lambda w_x^1 + (1-\lambda) w_x^2 + \varphi_x^0 \\
&= \lambda w_x^1 + \lambda \varphi_x^0 + (1-\lambda) w_x^2 + (1-\lambda)\varphi_x^0 \\
&\geqslant 0.
\end{aligned}$$

因此，$\lambda w^1 + (1-\lambda) w^2 \in \mathcal{M}_0^+$。于是，$\mathcal{M}_0^+$是一个非空闭凸集，as 所需。 □

为简化计算中的符号，我们定义

$$\tilde{F}(t, x, j, m) = F\left(x, -j - \varphi_t^0, m + \varphi_x^0\right).$$

$\tilde{F}$ 的偏导数为

$$\begin{aligned}
\tilde{F}_j(t, x, j, m) &= -F_j(x, -j - \varphi_t^0, m + \varphi_x^0), \\
\tilde{F}_m(t, x, j, m) &= F_m(x, -j - \varphi_t^0, m + \varphi_x^0).
\end{aligned} \tag{3.4}$$

定义 3.11 （伴随算子及其正则化）。 我们将算子 $A : \mathcal{S}^+ \to (\mathcal{B}_0^t)'$ 定义为

$$\begin{aligned}
\langle Aw, \zeta \rangle = \int_\Omega \tilde{F}_j(t, x, w_t, w_x) D_t\zeta + \tilde{F}_m(t, x, w_t, w_x) D_x\zeta + \left(w + \varphi^0\right) D_x\zeta \\
+ \int_0^T \tilde{F}_m(t, 0, w_t, w_x)\zeta(t, 0)\,\mathrm{d}t - \int_0^T (\tilde{F}_m(t, 1, w_t, w_x) + 1)\zeta(t, 1)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

对任意 $w \in \mathcal{S}^+$ 和 $\zeta \in \mathcal{B}_0^t$。

此外，对于 $0 < \varepsilon < 1$，我们将正则化算子 A_ε 定义为：$\mathcal{M}_0^+ \to \left(W_0^{1,q}\right)'$

$$\langle A_\varepsilon w, \zeta\rangle = \int_\Omega \Big[\tilde{F}_j\left(t,x,w_t,w_x+\varepsilon\right)\zeta_t + \tilde{F}_m\left(t,x,w_t,w_x+\varepsilon\right)\zeta_x + \left(w+\varphi^0\right)\zeta_x + \varepsilon\left(|w|^{q-2}w\zeta + |Dw|^{q-2}Dw\cdot D\zeta\right)\Big]\,\mathrm{d}\Omega, \quad (3.5)$$

对于任意 $w\in\mathcal{M}_0^+$ 和 $\zeta\in W^{1,q}_0$。

备注 3.12. 定义域 $\mathcal{M}_0^+$ 不适用于非正则化算子 A，因为~偏导数 F_j 和 F_m 所涉及的分母会在总密度为零时消失。因此，A 定义在 $\mathcal{S}^+$上，其中密度严格为正（在紧集 Ω 上与~零保持正距离）。

（3.5）中的正则化项对应于算子 $-\Delta_q w+|w|^{q-2}w$的弱形式。以 w为检验函数时，该项会产生完整的 $W^{1,q}$-范数，从而保证强制性。

在下一节中，我们应用定理 3.3 来找到一个解 $\psi^\varepsilon\in\mathcal{M}_0^+$，使其满足正则化变分不等式

$$\langle A_\varepsilon\psi^\varepsilon, w-\psi^\varepsilon\rangle \geqslant 0,$$

对所有 $w\in\mathcal{M}_0^+$均成立。

3.3. **近似解的存在性**。为应用定理 3.3，我们验证算子 A_ε 是单调的、强制的且半连续的。为此，我们注意到 A_ε在（3.5）中定义，可分解为 $A_\varepsilon=\mathcal{A}_{\tilde{F}}+\mathcal{A}_g+\mathcal{A}_{reg}$，其中

视角部分 $\mathcal{A}_{\tilde{F}}$：

$$\langle \mathcal{A}_{\tilde{F}} w,\zeta\rangle = \int_\Omega \left[\tilde{F}_j\left(t,x,w_t,w_x+\varepsilon\right)\zeta_t + \tilde{F}_m\left(t,x,w_t,w_x+\varepsilon\right)\zeta_x\right]\,\mathrm{d}\Omega,$$

排序部分 $\mathcal{A}_g$：

$$\langle \mathcal{A}_g w,\zeta\rangle = \int_\Omega \left(w+\varphi^0\right)\zeta_x\,\mathrm{d}\Omega, \quad (3.6)$$

正则化部分 $\mathcal{A}_{reg}$：

$$\langle \mathcal{A}_{reg} w,\zeta\rangle = \varepsilon\int_\Omega \left(|w|^{q-2}w\zeta + |Dw|^{q-2}Dw\cdot D\zeta\right)\,\mathrm{d}\Omega.$$

当不存在歧义时，我们用 $\int_\Omega \tilde{F}_j\,\mathrm{d}\Omega$ 和 $\int_\Omega \tilde{F}_m\,\mathrm{d}\Omega$ 代替 $\int_\Omega \tilde{F}_j(t,x,w_t,w_x+\varepsilon)\,\mathrm{d}\Omega$ 和 $\int_\Omega \tilde{F}_m(t,x,w_t,w_x+\varepsilon)\,\mathrm{d}\Omega$，并省略对 $(t,x,w_t,w_x+\varepsilon)$ 的依赖。

我们首先验证 A_ε 是良定义的。

命题 3.13。假设 *1–3* 成立，且关系式 (3.2) 满足。则算子 A_ε 是良定义的。

证明。令 $0<\varepsilon<1$ 固定。我们只需证明 $\mathcal{A}_{\tilde{F}}$ 定义良好，因为 $\mathcal{A}_g$ 和 $\mathcal{A}_{reg}$ 的良定义性是显然的。由杨不等式可得

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega \tilde{F}_j\zeta_t\,\mathrm{d}\Omega\right| &\leqslant \int_\Omega \left|\tilde{F}_j\zeta_t\right|\,\mathrm{d}\Omega\\ &\leqslant \frac{q-1}{q}\int_\Omega \left|\tilde{F}_j\right|^{\frac{q}{q-1}}\,\mathrm{d}\Omega + \frac{1}{q}\int_\Omega |\zeta_t|^q\,\mathrm{d}\Omega =: \mathrm{I}+\mathrm{II}.\end{aligned}$$

注意，由于 $w\in\mathcal{M}_0^+$，我们有 $w_x+\varphi_x^0\geqslant 0$。由（3.4）和（2.2）以及假设3，我们注意到

$$\begin{aligned}\mathrm{I} = \int_\Omega \left|\tilde{F}_j\right|^{\frac{q}{q-1}}\,\mathrm{d}\Omega &\leqslant C\int_\Omega \left(\left|\frac{w_t+\varphi_t^0}{w_x+\varphi_x^0+\varepsilon}\right|^{l-1}\right)^{\frac{q}{q-1}}\,\mathrm{d}\Omega + C\\ &\leqslant C(\varepsilon)\int_\Omega \left|w_t+\varphi_t^0\right|^{(l-1)\frac{q}{q-1}}\,\mathrm{d}\Omega + C.\end{aligned}$$

因此，我们有

$$\left|\int_\Omega \tilde{F}_j\zeta_t\,\mathrm{d}\Omega\right| \leqslant C(\varepsilon)\int_\Omega \left|w_t+\varphi_t^0\right|^{(l-1)\frac{q}{q-1}}\,\mathrm{d}\Omega + \frac{1}{q}\int_\Omega |\zeta_t|^q\,\mathrm{d}\Omega + C.$$

由于 $q \geqslant l+1 > l$，我们有 $(l-1)\frac{q}{q-1} < q$，因此该积分定义良好。类似地，由（3.4）、（2.2）、假设3和注释3.9

$$\begin{aligned}\int_\Omega \left|\tilde{F}_m\right|^{\frac{q}{q-1}} \,\mathrm{d}\Omega &\leqslant C\int_\Omega \left(\left|\frac{w_t+\varphi_t^0}{w_x+\varphi_x^0+\varepsilon}\right|^l\right)^{\frac{q}{q-1}} \,\mathrm{d}\Omega + C\\ &\leqslant C(\varepsilon)\int_\Omega \left|w_t+\varphi_t^0\right|^{l\frac{q}{q-1}} \,\mathrm{d}\Omega + C.\end{aligned}$$

因此，我们有

$$\left|\int_\Omega \tilde{F}_m\zeta_x \,\mathrm{d}\Omega\right| \leqslant C(\varepsilon)\int_\Omega \left|w_t+\varphi_t^0\right|^{l\frac{q}{q-1}} \,\mathrm{d}\Omega + \frac{1}{q}\int_\Omega |\zeta_x|^q \,\mathrm{d}\Omega + C.$$

由于 $q \geqslant l+1$，我们有 $l\frac{q}{q-1} \leqslant q$，因此积分定义良好。证明至此完成。 □

现在，我们证明算子 A_ε 是单调且强制的。

命题 3.14。假设条件 *1-3* 成立，且关系式 (3.2)满足。*Th* *en* A_ε 在 $\mathcal{M}_0^+$ 中是单调的。

证明。我们将证明 A_ε（见（3.6））的各个部分都是单调的。

- **视角部分** $\mathcal{A}_{\tilde{F}}$: 令泛函 $\mathcal{J}\colon \mathcal{M}_0^+ \to \mathbb{R}$ 定义如下:

$$\mathcal{J}(w) = \int_\Omega \tilde{F}(t,x,w_t,w_x+\varepsilon)\,\mathrm{d}\Omega.$$

  ˜由于 F 如备注2.1中所述，在其最后两个自变量上是凸的，F 也具有凸性，因为它是通过坐标的线性变换得到的。积分保持凸性，因此 $\mathcal{J}$ 是一个凸泛函。注意

$$\langle \mathcal{A}_{\tilde{F}} w, \zeta\rangle = \frac{d}{d\lambda}\mathcal{J}(w+\lambda\zeta)\Big|_{\lambda=0},$$

  也就是说，$\mathcal{A}_{\tilde{F}}$是 $\mathcal{J}$的盖托导数。因此，它是一个单调算子。

- **排序部分** $\mathcal{A}_g$: 为了检验单调性，我们计算

$$\langle \mathcal{A}_g(w^1)-\mathcal{A}_g(w^2), w^1-w^2\rangle = \frac{1}{2}\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x}(w^1-w^2)^2\,\mathrm{d}\Omega = 0,$$

  由于 $w^1-w^2 \in W^{1,q}_0(\Omega)$，因此其在边界上的迹为零。

- **正则化部分** $\mathcal{A}_{reg}$**:** 该项

$$\zeta \mapsto \varepsilon\left(|w|^{q-2}w\zeta + |Dw|^{q-2}Dw\cdot D\zeta\right),$$

  是严格凸泛函的盖托导数

$$\frac{\varepsilon}{q}\left(\|w\|^q_{L^q(\Omega)} + \|Dw\|^q_{L^q(\Omega)}\right).$$

  因此，$\mathcal{A}_{reg}$ 是一个单调算子（甚至是严格单调的）。

由于 A_ε 是三个单调算子之和，它也是单调的。 □

命题 3.15. 设假设 *1–3* 成立，且关系 (3.2) 得到满足。则A_ε 在 $\mathcal{M}_0^+$中是强制的。

证明。在整个论证中，我们使用等价的 $W^{1,q}_0(\Omega)$ 范数 $\|w\| := \left(\|w\|^q_{L^q(\Omega)} + \|Dw\|^q_{L^q(\Omega)}\right)^{1/q}$。注意到 $0 \in \mathcal{M}_0^+$，我们证明

$$\frac{\langle A_\varepsilon w, w\rangle}{\|w\|} \to \infty, \quad \text{as} \quad \|w\| \to \infty.$$

回顾式（3.6）可知 $A_\varepsilon = \mathcal{A}_{\tilde{F}} + \mathcal{A}_g + \mathcal{A}_{reg}$。根据命题 3.14 以及单调算子之和仍为单调算子这一事实，我们得到 $\mathcal{A}_{\tilde{F}} + \mathcal{A}_g$ 是单调的。注意算子 $\mathcal{A}_{reg}$ 是强制的。事实上，根据定义，

$$\frac{\langle \mathcal{A}_{reg} w, w\rangle}{\|w\|} = \varepsilon \left[\int_\Omega \left(|w|^q + |Dw|^q\right) \mathrm{d}\Omega\right]^{\frac{q-1}{q}} \to \infty, \quad \text{as} \quad \|w\| \to \infty.$$

因此，由引理3.2， A_ε 是强制的。 □

命题 3.16。 假设条件 *1–3* 成立，且关系式 (3.2) 满足。那么，算子 A_ε 是半连续的。

证明。 对于任意 $\tilde{w} \in \mathcal{M}_0^+$，令 $z = \tilde{w} - w$ 为扰动方向。定义

$$\begin{aligned} I(s) := \langle A_\varepsilon(w+sz), \zeta\rangle = &\int_\Omega \tilde{F}_j\left(t, x, w_t + sz_t, w_x + sz_x + \varepsilon\right)\zeta_t \\ &+ \tilde{F}_m\left(t, x, w_t + sz_t, w_x + sz_x + \varepsilon\right)\zeta_x \\ &+ (w + sz + \varphi^0)\zeta_x + \varepsilon\left(|w+sz|^{q-2}(w+sz)\zeta + |D(w+sz)|^{q-2}D(w+sz)\cdot D\zeta\right)\mathrm{d}\Omega. \end{aligned}$$

应用命题3.13证明中的相同分析，我们推得 $I(s)$ 在 $[0,1]$ 上连续，这是由控制收敛定理得出的，因为被积函数中的各项都可以由一个与 s无关的可积函数控制。因此， A_ε 是半连续的。 □

结合上述性质，我们证明了近似解的存在性。

推论 3.17. 假设条件 *1–3* 成立，且关系式 (3.2) 满足。对于任意$0 < \varepsilon < 1$，存在一个解 $\psi^\varepsilon \in \mathcal{M}_0^+$满足正则化变分不等式

$$\langle A_\varepsilon \psi^\varepsilon, w - \psi^\varepsilon\rangle \geqslant 0, \quad \textit{for all } w \in \mathcal{M}_0^+. \tag{3.7}$$

证明。集合 $\mathcal{M}_0^+$ 是自反巴拿赫空间 W^1中的一个闭的、非空且凸的子集$_0{}^q$ **(Ω)**。由命题 3.13、3.14、3.15和3.16可知，算子 A_ε 定义良好、单调、强制且半连续。因此， ψ^ε 的存在性直接由定理3.3得出。 □

3.4. **先验估计与收敛**。 为了在 $\varepsilon \to 0$时取极限，我们首先证明$\|\psi^\varepsilon\|_{W^{1,\,1}\,0}$ 有界，且其界与 ε无关。我们先记录假设条件 1和 2的一个推论。

注记 3.18（参考路径的有限能量）。 在假设 1 和2下，我们观察到函数 $(t,x) \mapsto F(x, -\varphi_t^0$ (t,x) $\varphi_x^0(t,x))$ 在紧集 $\bar{}\Omega$上连续。因此，它有界，且存在 $\tilde{c} > 0$ 使得

$$\int_\Omega F\left(x, -\varphi_t^0, \varphi_x^0\right)\mathrm{d}\Omega \leqslant \tilde{c}.$$

命题 3.19。 假设*1–4* 成立，且关系 (3.2) 满足。设ψ^ε 是给定 $\varepsilon > 0$下变分不等式 (3.7) 的一个解。那么存在常数 $C > 0$，其与 ε无关，使得

$$\int_\Omega \frac{\left|\psi_t^\varepsilon + \varphi_t^0\right|^\kappa}{\left|\psi_x^\varepsilon + \varphi_x^0 + \varepsilon\right|^{\kappa-1}}\mathrm{d}\Omega \leqslant C \quad \textit{and} \quad \|D\psi^\varepsilon\|_{L^1(\Omega)} \leqslant C.$$

证明。 由变分不等式（3.7），可得

$$\langle A_\varepsilon \psi^\varepsilon, \psi^\varepsilon\rangle \leqslant 0,$$

令测试函数为 $w = 0$。也就是说，我们有

$$\int_\Omega \tilde{F}_j\psi_t^\varepsilon + \tilde{F}_m\psi_x^\varepsilon + \left(\psi^\varepsilon + \varphi^0\right)\psi_x^\varepsilon\,\mathrm{d}\Omega + \varepsilon\|\psi^\varepsilon\|_{W_0^{1,q}}^q \leqslant 0.$$

我们从不等式中去掉非负的正则化项 $\varepsilon\|\psi^\varepsilon\|_{W^{1,0}}^q{}^q$。

步骤 1：势函数项的下界。 我们分析涉及势函数的项。我们将积分拆分为

$$\int_\Omega \left(\psi^\varepsilon + \varphi^0\right) \psi_x^\varepsilon \,\mathrm{d}\Omega = \int_\Omega \psi^\varepsilon \psi_x^\varepsilon \,\mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \varphi^0 \psi_x^\varepsilon \,\mathrm{d}\Omega.$$

根据微积分基本定理和边界条件，第一项为零

$$\begin{aligned}\int_\Omega \psi^\varepsilon \psi_x^\varepsilon \,\mathrm{d}\Omega &= \int_\Omega \left(\frac{\left(\psi^\varepsilon\right)^2}{2}\right)_x \mathrm{d}\Omega \\ &= \int_0^T \left(\frac{\left(\psi^\varepsilon\right)^2}{2}(t,1)\right) - \left(\frac{\left(\psi^\varepsilon\right)^2}{2}(t,0)\right) \mathrm{d}t \\ &= 0.\end{aligned}$$

对于第二项，我们加上并减去 $\int_\Omega \varphi^0 \varphi_x^0 \,\mathrm{d}\Omega$。由于 $\psi^\varepsilon \in \mathcal{M}_0^+$，我们有 $\psi_x^\varepsilon + \varphi_x^0 \geqslant 0$。此外，由于 $m_0, m_T > 0$，插值势满足 $\varphi^0 \geqslant 0$。因此，$\int_\Omega (\psi_x^\varepsilon + \varphi_x^0)\varphi^0 \mathrm{d}\Omega \geqslant 0$，于是得到

$$\begin{aligned}\int_\Omega \varphi^0 \psi_x^\varepsilon + \varphi^0 \varphi_x^0 - \varphi^0 \varphi_x^0 \,\mathrm{d}\Omega &= \int_\Omega (\psi_x^\varepsilon + \varphi_x^0)\varphi^0 \,\mathrm{d}\Omega - \int_\Omega \left(\frac{\left(\varphi^0\right)^2}{2}\right)_x \mathrm{d}\Omega \\ &\geqslant -\int_0^T \left[\frac{\left(\varphi^0\right)^2}{2}(t,1) - \frac{\left(\varphi^0\right)^2}{2}(t,0)\right] \mathrm{d}t \\ &= -\frac{T}{2}.\end{aligned}$$

合并以上各式可得

$$\int_\Omega \left(\psi^\varepsilon + \varphi^0\right) \psi_x^\varepsilon \,\mathrm{d}\Omega \geqslant -\frac{T}{2}.$$

步骤 2：能量估计。 将这个下界代回主不等式，得到

$$\int_\Omega \tilde{F}_j \psi_t^\varepsilon + \tilde{F}_m \psi_x^\varepsilon \,\mathrm{d}\Omega \leqslant \frac{T}{2}.$$

在两边加上 $\int_\Omega \tilde{F}_j \varphi_t^0 \mathrm{d}\Omega$ 和 $\int_\Omega \tilde{F}_m \left(\varphi_x^0 + \varepsilon\right) \mathrm{d}\Omega$，可得

$$\begin{aligned}\int_\Omega \tilde{F}_j \left(\psi_t^\varepsilon + \varphi_t^0\right) + \tilde{F}_m \left(\psi_x^\varepsilon + \varphi_x^0 + \varepsilon\right) \mathrm{d}\Omega &\leqslant \int_\Omega \left[\tilde{F}_j \varphi_t^0 + \tilde{F}_m \left(\varphi_x^0 + \varepsilon\right)\right] \mathrm{d}\Omega + \frac{T}{2} \\ &\leqslant C\left(\tilde{c}, T\right),\end{aligned}$$

其中第二个不等式由（3.4）、引理 2.2和备注 3.18得出。注意，由于 $\varphi_x^0(t,x) \geqslant \min_y\{m_0(y)\ m_T(y)\} > 0$，透视函数中的质量参数始终严格大于某个正常数，从而保证界 $C(\tilde{c}, T)$ 关于 ε一致。

我们将左侧被积函数中的 $\psi_x^\varepsilon + \varphi_x^0 + \varepsilon$ 提取出来，得到

$$\int_\Omega \left(\psi_x^\varepsilon + \varphi_x^0 + \varepsilon\right) \left[\tilde{F}_j \cdot \left(\frac{\psi_t^\varepsilon + \varphi_t^0}{\psi_x^\varepsilon + \varphi_x^0 + \varepsilon}\right) + \tilde{F}_m\right] \mathrm{d}\Omega \leqslant C\left(\tilde{c}, T\right).$$

注意，由（3.4）和（2.2）可得 $\tilde{F}_j \cdot \left(\frac{\psi_t^\varepsilon + \varphi_t^0}{\psi_x^\varepsilon + \varphi_x^0 + \varepsilon}\right) + \tilde{F}_m = L\left(x, -\frac{\psi_t^\varepsilon + \varphi_t^0}{\psi_x^\varepsilon + \varphi_x^0 + \varepsilon}\right)$。因此，利用假设 4，我们对左侧进行下界估计，得到

$$\int_\Omega \left(\psi_x^\varepsilon + \varphi_x^0 + \varepsilon\right) \left[\frac{1}{c}\left|\frac{\psi_t^\varepsilon + \varphi_t^0}{\psi_x^\varepsilon + \varphi_x^0 + \varepsilon}\right|^\kappa - c\right] \mathrm{d}\Omega \leqslant C\left(\tilde{c}, T\right).$$

重新整理各项后，我们得出

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{\left|\psi_t^\varepsilon + \varphi_t^0\right|^\kappa}{\left|\psi_x^\varepsilon + \varphi_x^0 + \varepsilon\right|^{\kappa-1}} \mathrm{d}\Omega &\leqslant C\left(\tilde{c}, T\right) + c\int_\Omega \left(\psi_x^\varepsilon + \varphi_x^0 + \varepsilon\right) \mathrm{d}\Omega \\ &\leqslant C\left(c, \tilde{c}, T\right),\end{aligned}$$

因为 $\int_\Omega \left(\psi_x^\varepsilon + \varphi_x^0 + \varepsilon\right) \mathrm{d}\Omega \leqslant 2T$。

步骤 3： L^1 **界限。** $\|\psi_x^\varepsilon\|_{L^1}$ 上的界限可直接由此得出

$$\int_\Omega |\psi_x^\varepsilon| \, \mathrm{d}\Omega \leqslant \int_\Omega \left|\psi_x^\varepsilon + \varphi_x^0\right| \, \mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \left|\varphi_x^0\right| \, \mathrm{d}\Omega \leqslant 2T.$$

对于时间导数，我们结合杨不等式和三角不等式

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\psi_t^\varepsilon| \, \mathrm{d}\Omega &\leqslant \int_\Omega \left[\left|\varphi_t^0\right| + \left|\psi_t^\varepsilon + \varphi_t^0\right| \cdot \frac{\left|\psi_x^\varepsilon + \varphi_x^0 + \varepsilon\right|^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}}{\left|\psi_x^\varepsilon + \varphi_x^0 + \varepsilon\right|^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}} \right] \mathrm{d}\Omega \\ &\leqslant \left\|\varphi_t^0\right\|_{L^\infty} T + \frac{1}{\kappa} \int_\Omega \frac{\left|\psi_t^\varepsilon + \varphi_t^0\right|^\kappa}{\left|\psi_x^\varepsilon + \varphi_x^0 + \varepsilon\right|^{\kappa-1}} \, \mathrm{d}\Omega + \frac{\kappa-1}{\kappa} \int_\Omega \left|\psi_x^\varepsilon + \varphi_x^0 + \varepsilon\right| \, \mathrm{d}\Omega.\end{aligned}$$

右侧的两个积分均由前面的步骤得到了界。因此，我们得到

$$\|\psi_t^\varepsilon\|_{L^1} \leqslant C\left(\kappa, c, \tilde{c}, T\right). \qquad \square$$

推论 3.20（紧性）。设假设*1–4* 成立，且关系 (3.2) 得到满足。设 $\{\psi^\varepsilon\}$ 为变分不等式 (3.7)的一列解。则存在一个子列（仍记为 ψ^ε）以及一个极限函数 $\psi \in BV(\Omega)$，使得 $\psi^\varepsilon \to \psi$在 $L^1(\Omega)$ 中强收敛，且 $D\psi^\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} D\psi$ 在测度意义下收敛，当 $\varepsilon \to 0$。此外，ψ 满足$D_x\psi + \varphi_x^0 \geqslant 0$。

证明。由命题 3.19 中的估计可见，变分不等式 (3.7) 的任一解 ψ^ε 关于 ε 在 $W^{1,1}0(\Omega)$ 中一致有界，因而 $\{\psi^\varepsilon\}$ 在 $BV(\Omega)$ 中一致有界。因此，由定理 3.7，我们可以抽出一个子列（仍记为 ψ^ε），使得 $\psi^\varepsilon \to \psi$ 在 $L^1(\Omega)$ 中强收敛，且 $D\psi^\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} D\psi$ 在测度意义下收敛。最后，由于$\psi^\varepsilon \in \mathcal{M}_0^+$，我们有 $\psi_x^\varepsilon + \varphi_x^0 \geqslant 0$几乎处处成立，这意味着 $D_x\psi^\varepsilon + \varphi_x^0 \mathrm{d}x \geqslant 0$作为拉东测度。由于 $D_x\psi^\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} D_x\psi$ 在测度意义下成立，且非负拉东测度的弱* 极限是非负的，我们得出 $D_x\psi + \varphi_x^0 \mathrm{d}x \geqslant 0$，即 $D_x\psi + \varphi_x^0 \geqslant 0$ 在测度意义下成立。$\square$

BV 中的弱收敛不会保留迹。因此，极限函数的边界值需要单独分析。空间边界条件通过变分不等式施加；对于时间迹，下一个命题表明这些迹以强 L^1 意义达到。

命题 *3.21*（迹的达到）。假设假设 *1–4* 成立，且关系式 *(3.2)* 得到满足。设 ψ^ε 为推论 *3.17* 给出的近似解序列，ψ 为推论 *3.20* 给出的极限函数。那么，在 $BV(\Omega)$中的迹的意义下，ψ满足边界不等式 $\psi(t, 0) \geqslant 0$和 $\psi(t, 1) \leqslant 0$，对几乎处处的 $t \in (0, T)$成立；并且初始条件和终端条件 $\psi(0, x) = \psi(T, x) = 0$对几乎处处的 $x \in (0, 1)$成立。

证明。 我们首先证明空间边界不等式。设$C = \|\varphi_x^0\|_{L^\infty(\Omega)}$。由于 $\psi^\varepsilon \in \mathcal{M}_0^+$，对几乎所有的 $t \in (0, T)$和 $x \in (0, 1)$，我们有 $\psi_x^\varepsilon(t, x) \geqslant -C$。此外，对几乎处处的 t，$\psi^\varepsilon(t, 0) = 0$。

根据关于空间变量 x的微积分基本定理，对几乎处处的(t, x),

$$\psi^\varepsilon(t, x) = \int_0^x \psi_x^\varepsilon(t, y) \, \mathrm{d}y \geqslant -Cx.$$

取极限 $\varepsilon \to 0$（回顾 L^1中的 $\psi^\varepsilon \to \psi$），我们得到 $\psi(t, x) \geqslant -Cx$ 几乎处处成立。当 $x \to 0$时取（$BV(\Omega)$中的）空间迹，我们得出 $\psi(t,0) \geqslant 0$。从 x 积分到1的对称论证给出 $\psi(t,1) \leqslant 0$，从而完成本部分。

现在来看时间边界条件。我们给出终端时刻$t = T$的证明；$t = 0$的论证类似。考虑一个小的时间区间 $[T - \delta, T]$。根据共轭指数为 κ 和 $\kappa' = \frac{\kappa}{\kappa-1}$的霍尔德不等式，我们估计时间的 L^1 范数

导数 $\psi_t^\varepsilon + \varphi_t^0$

$$\begin{aligned}\int_{T-\delta}^{T}\int_0^1 |\psi_t^\varepsilon + \varphi_t^0|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t &= \int_{T-\delta}^{T}\int_0^1 \frac{|\psi_t^\varepsilon + \varphi_t^0|}{(\psi_x^\varepsilon + \varphi_x^0 + \varepsilon)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}}(\psi_x^\varepsilon + \varphi_x^0 + \varepsilon)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \left(\int_{T-\delta}^{T}\int_0^1 \frac{|\psi_t^\varepsilon + \varphi_t^0|^\kappa}{(\psi_x^\varepsilon + \varphi_x^0 + \varepsilon)^{\kappa-1}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)^{1/\kappa}\left(\int_{T-\delta}^{T}\int_0^1 (\psi_x^\varepsilon + \varphi_x^0 + \varepsilon)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}.\end{aligned}$$

利用命题 3.19中的能量界，第一项积分有上界 $C^{1/\kappa}$。第二项积分表示条带 $[T-\delta, T]\times[0,1]$上的质量。由于 $(\psi^\varepsilon + \varphi^0)$ 关于 x 是单调的，且 $(\psi^\varepsilon + \varphi^0)(t,1) - (\psi^\varepsilon + \varphi^0)(t,0) = 1$，我们有 $\int_0^1 (\psi_x^\varepsilon + \varphi_x^0 + \varepsilon)\mathrm{d}x = 1 + \varepsilon$。因此，

$$\int_{T-\delta}^{T}\int_0^1 |\psi_t^\varepsilon + \varphi_t^0|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \leqslant C^{1/\kappa}\big(\delta(1+\varepsilon)\big)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}. \tag{3.8}$$

令 $\varepsilon \to 0$ 趋于极限，并利用全变差的下半连续性，我们 e
得到极限 ψ

$$\big|D_t\psi + \varphi_t^0\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\big|\big([T-\delta, T]\times[0,1]\big) \leqslant C^{1/\kappa}\delta^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}. \tag{3.9}$$

我们在矩形区域 $[t,T]\times[0,x]$上应用高斯-格林公式（定理 3.5），并取测试函数 $\phi = 1$，得到

$$\int_0^x (\psi^\varepsilon + \varphi^0)(T,y)\,\mathrm{d}y - \int_0^x (\psi^\varepsilon + \varphi^0)(t,y)\,\mathrm{d}y = \int_t^T\int_0^x (\psi_t^\varepsilon + \varphi_t^0)(s,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s,$$

and

$$\int_0^x (\psi + \varphi^0)(T,y)\,\mathrm{d}y - \int_0^x (\psi + \varphi^0)(t,y)\,\mathrm{d}y = D_t\psi\big((t,T)\times(0,x)\big) + \int_t^T\int_0^x \varphi_t^0(s,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s.$$

对第一个方程在 $t\in[T-\delta, T]$上积分，取绝对值，利用（3.8），并应用富比尼定理（注意到 $\psi^\varepsilon(T,\cdot) = 0$ 在迹的意义下），得到

$$\left|\delta\int_0^x \varphi^0(T,y)\,\mathrm{d}y - \int_{T-\delta}^{T}\int_0^x (\psi^\varepsilon + \varphi^0)(t,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \delta\cdot C^{1/\kappa}\big(\delta(1+\varepsilon)\big)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}.$$

令 $\varepsilon\to 0$（回忆一下，$\psi^\varepsilon \to \psi$ 在 L^1 中）：

$$\left|\delta\int_0^x \varphi^0(T,y)\,\mathrm{d}y - \int_{T-\delta}^{T}\int_0^x (\psi + \varphi^0)(t,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \delta C^{1/\kappa}\delta^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}. \tag{3.10}$$

同理，直接由（3.9）对极限函数 ψ 重复上述过程，得到

$$\left|\delta\int_0^x (\psi + \varphi^0)(T,y)\,\mathrm{d}y - \int_{T-\delta}^{T}\int_0^x (\psi + \varphi^0)(t,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \delta C^{1/\kappa}\delta^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}. \tag{3.11}$$

由三角不等式，将两个估计式（3.10）和（3.11）相减，得到

$$\delta\left|\int_0^x (\psi + \varphi^0)(T,y)\,\mathrm{d}y - \int_0^x \varphi^0(T,y)\,\mathrm{d}y\right| \leqslant 2\delta C^{1/\kappa}\delta^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}.$$

两边除以 δ 并令 $\delta\to 0$（因为 $1-\frac{1}{\kappa} > 0$），右端趋于零。因此，对任意 $x\in[0,$ 1]

$$\int_0^x (\psi + \varphi^0)(T,y)\,\mathrm{d}y = \int_0^x \varphi^0(T,y)\,\mathrm{d}y.$$

对 x 求导，可得 $(\psi + \varphi^0)(T,x) = \varphi^0(T,x)$ 对几乎处处的 x 成立。也就是说，$\psi(T,x) = 0$ 对几乎处处的 $x\in(0,1)$ 成立。□

命题 3.22。假设条件 *1–4* 成立，且关系式 (3.2) 满足。令 ψ^ε为推论 *3.17* 给出的近似解序列，令 ψ 为推论 *3.20*给出的极限函数。那么，对于任意测试函数 $\tilde\eta\in\mathcal{S}^+$，其定义见 (3.3)，以下变分不等式成立

$$\int_\Omega \left[\tilde{F}_j(t,x,\tilde{\eta}_t,\tilde{\eta}_x)\tilde{\eta}_t+\tilde{F}_m(t,x,\tilde{\eta}_t,\tilde{\eta}_x)\tilde{\eta}_x+\left(\tilde{\eta}+\varphi^0\right)\tilde{\eta}_x\right]\mathrm{d}\Omega$$
$$-\left[\int_\Omega \tilde{F}_j(t,x,\tilde{\eta}_t,\tilde{\eta}_x)D_t\psi+\int_\Omega \tilde{F}_m(t,x,\tilde{\eta}_t,\tilde{\eta}_x)D_x\psi+\int_\Omega\left(\tilde{\eta}+\varphi^0\right)D_x\psi\right.$$
$$\left.+\int_0^T(\tilde{F}_m(t,0,0,\tilde{\eta}_x))\psi(t,0)\,\mathrm{d}t-\int_0^T(\tilde{F}_m(t,1,0,\tilde{\eta}_x)+1)\psi(t,1)\,\mathrm{d}t\right]\geqslant 0,$$

证明。我们使用Minty方法。固定 $\tilde{\eta}\in\mathcal{S}^+$。由于 ψ^ε 满足正则化变分 al 不等式（3.7），

$$\langle A_\varepsilon\psi^\varepsilon,\tilde{\eta}-\psi^\varepsilon\rangle\geqslant 0.$$

根据 A_ε的单调性，

$$\langle A_\varepsilon\tilde{\eta},\tilde{\eta}-\psi^\varepsilon\rangle\geqslant\langle A_\varepsilon\psi^\varepsilon,\tilde{\eta}-\psi^\varepsilon\rangle\geqslant 0.$$

我们考虑 $\varepsilon\to 0$时的极限。下文将证明 $\langle A_\varepsilon\tilde{\eta},\ \tilde{\eta}-\psi^\varepsilon\rangle\to\langle A\tilde{\eta},\ \tilde{\eta}-\psi\rangle$，由此可得不等式 $\langle A\tilde{\eta},\ \tilde{\eta}-\psi\rangle\geqslant 0$。根据 A_ε的定义，

$$\langle A_\varepsilon\tilde{\eta},\tilde{\eta}-\psi^\varepsilon\rangle=\int_\Omega \tilde{F}_j(t,x,\tilde{\eta}_t,\tilde{\eta}_x+\varepsilon)\tilde{\eta}_t+\tilde{F}_m(t,x,\tilde{\eta}_t,\tilde{\eta}_x+\varepsilon)\tilde{\eta}_x+(\tilde{\eta}+\varphi^0)\tilde{\eta}_x\,\mathrm{d}\Omega$$
$$-\int_\Omega \tilde{F}_j(t,x,\tilde{\eta}_t,\tilde{\eta}_x+\varepsilon)D_t\psi^\varepsilon-\int_\Omega \tilde{F}_m(t,x,\tilde{\eta}_t,\tilde{\eta}_x+\varepsilon)D_x\psi^\varepsilon-\int_\Omega(\tilde{\eta}+\varphi^0)D_x\psi^\varepsilon$$
$$+\varepsilon\left(\int_\Omega|\tilde{\eta}|^q+|D\tilde{\eta}|^q-|\tilde{\eta}|^{q-2}\,\tilde{\eta}\psi^\varepsilon\,\mathrm{d}\Omega-\int_\Omega|D\tilde{\eta}|^{q-2}\,D\tilde{\eta}\cdot D\psi^\varepsilon\right).$$

类似地，所声称的极限为

$$\langle A\tilde{\eta},\tilde{\eta}-\psi\rangle=\int_\Omega\left[\tilde{F}_j(t,x,\tilde{\eta}_t,\tilde{\eta}_x)\tilde{\eta}_t+\tilde{F}_m(t,x,\tilde{\eta}_t,\tilde{\eta}_x)\tilde{\eta}_x+(\tilde{\eta}+\varphi^0)\tilde{\eta}_x\right]\mathrm{d}\Omega$$
$$-\int_\Omega \tilde{F}_j(t,x,\tilde{\eta}_t,\tilde{\eta}_x)D_t\psi-\int_\Omega \tilde{F}_m(t,x,\tilde{\eta}_t,\tilde{\eta}_x)D_x\psi-\int_\Omega(\tilde{\eta}+\varphi^0)D_x\psi$$
$$-\int_0^T(\tilde{F}_m(t,0,0,\tilde{\eta}_x))\psi(t,0)\,\mathrm{d}t+\int_0^T(\tilde{F}_m(t,1,0,\tilde{\eta}_x)+1)\psi(t,1)\,\mathrm{d}t.$$

注意到，$(t,\ x,\ \tilde{\eta}_t(t,\ x)\ \tilde{\eta}_x(t,\ x)+\varepsilon)\to(t,\ x,\ \tilde{\eta}_t(t,\ x)\ \tilde{\eta}_x(t,\ x))$ 在 Ω 上一致成立，同时始终处于紧集内，因为 $0<\varepsilon<1$，

$$\{(t,x,j,m)\colon(t,x)\in\bar{\Omega},\ j=\tilde{\eta}_t(t,x),\ \tilde{\eta}_x(t,x)\leqslant m\leqslant\tilde{\eta}_x(t,x)+1\}.\tag{3.12}$$

因为 $\tilde{\eta}\in\mathcal{S}^+$，我们有 $\tilde{\eta}_x+\varphi^0_x>0$。因此，$m+\varphi^0_x\geqslant\tilde{\eta}_x+\varphi^0_x>0$ 在该集合上，它 ~ ~严格避开透视函数 F的零质量奇异性。由于 F_j 和 F_m在紧集（3.12）上一致连续，它们保持一致收敛。因此，我们有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{(t,x)}|\tilde{F}_j(t,x,\tilde{\eta}_t,\tilde{\eta}_x+\varepsilon)-\tilde{F}_j(t,x,\tilde{\eta}_t,\tilde{\eta}_x)|=0,$$

and

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{(t,x)}|\tilde{F}_m(t,x,\tilde{\eta}_t,\tilde{\eta}_x+\varepsilon)-\tilde{F}_m(t,x,\tilde{\eta}_t,\tilde{\eta}_x)|=0.$$

由线性，我们写成 $\langle A_\varepsilon\tilde{\eta},\ \tilde{\eta}-\psi^\varepsilon\rangle=\langle A_\varepsilon\tilde{\eta},\ \tilde{\eta}\rangle-\langle A_\varepsilon\tilde{\eta},\ \psi^\varepsilon\rangle$，并分别讨论每一项的收敛性。第一项，$\langle A_\varepsilon\tilde{\eta},\ \tilde{\eta}\rangle$，是

$$\int_\Omega\left[\tilde{F}_j(t,x,\tilde{\eta}_t,\tilde{\eta}_x+\varepsilon)\tilde{\eta}_t+\tilde{F}_m(t,x,\tilde{\eta}_t,\tilde{\eta}_x+\varepsilon)\tilde{\eta}_x+(\tilde{\eta}+\varphi^0)\tilde{\eta}_x\right]\mathrm{d}\Omega+\varepsilon\int_\Omega(|\tilde{\eta}|^q+|D\tilde{\eta}|^q)\,\mathrm{d}\Omega.$$

对第一个积分取极限，我们得到

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega \tilde{F}_j(t,x,\tilde{\eta}_t,\tilde{\eta}_x+\varepsilon)\tilde{\eta}_t+\tilde{F}_m(t,x,\tilde{\eta}_t,\tilde{\eta}_x+\varepsilon)\tilde{\eta}_x+(\tilde{\eta}+\varphi^0)\tilde{\eta}_x\,\mathrm{d}\Omega$$
$$=\int_\Omega \tilde{F}_j(t,x,\tilde{\eta}_t,\tilde{\eta}_x)\tilde{\eta}_t+\tilde{F}_m(t,x,\tilde{\eta}_t,\tilde{\eta}_x)\tilde{\eta}_x+(\tilde{\eta}+\varphi^0)\tilde{\eta}_x\,\mathrm{d}\Omega.$$

第二个积分是 ε 倍的常数，因此收敛到 0。第二项，$\langle A_\varepsilon \tilde{\eta},\ \psi^\varepsilon\rangle$，可写为

$$\int_\Omega \tilde{F}_j(t,x,\tilde{\eta}_t,\tilde{\eta}_x+\varepsilon)D_t\psi^\varepsilon+\int_\Omega \tilde{F}_m(t,x,\tilde{\eta}_t,\tilde{\eta}_x+\varepsilon)D_x\psi^\varepsilon+\int_\Omega(\tilde{\eta}+\varphi^0)D_x\psi^\varepsilon \quad (3.13)$$
$$+\varepsilon\int_\Omega |\tilde{\eta}|^{q-2}\,\tilde{\eta}\psi^\varepsilon\,\mathrm{d}\Omega+\varepsilon\int_\Omega |D\tilde{\eta}|^{q-2}\,D\tilde{\eta}\cdot D\psi^\varepsilon\,\mathrm{d}\Omega$$

由于 $D\psi^\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} D\psi$ 在测度意义下，我们可以对 (3.13) 中涉及 $D\psi^\varepsilon$的线性项取极限。具体而言，向量场 $\Phi=(\tilde{F}_j,\ \tilde{F}_m+\tilde{\eta}+\varphi^0)$ 一致收敛到其极限（因为 F 连续，且自变量一致收敛）。将引理 3.8 逐分量应用于向量场 Φ，可得

$$\lim_{\varepsilon\to0}\langle A_\varepsilon\tilde{\eta},\psi^\varepsilon\rangle=\int_\Omega\left[\tilde{F}_j(t,x,\tilde{\eta}_t,\tilde{\eta}_x)D_t\psi+\tilde{F}_m(t,x,\tilde{\eta}_t,\tilde{\eta}_x)D_x\psi+(\tilde{\eta}+\varphi^0)D_x\psi\right]$$
$$-\int_{\partial\Omega}\left[\tilde{F}_j(t,x,\tilde{\eta}_t,\tilde{\eta}_x)\nu_t+\left(\tilde{F}_m\left(t,x,\tilde{\eta}_t,\tilde{\eta}_x\right)+\tilde{\eta}+\varphi^0\right)\nu_x\right]\operatorname{tr}\psi\,\mathrm{d}\mathcal{H}^1.$$

根据命题 3.21，迹 $\operatorname{tr}\psi$ 在时间边界 $(t=0,T)$ 上消失，而在边界的其余部分$\nu_t=0$。因此，项 $\tilde{F}_j\nu_t\operatorname{tr}\psi$ 消失。由于 $\tilde{\eta}\in\mathcal{S}^+$，我们有$\tilde{\eta}(t,0)=\tilde{\eta}(t,1)=0$，这也意味着 $\tilde{\eta}_t(t,0)=\tilde{\eta}_t(t,1)=0$。结合 $\varphi^0(t,0)=0$和 $\varphi^0(t,1)=1$，边界积分恰好化简为变分不等式所需的形式：

$$\int_0^T\tilde{F}_m(t,0,0,\tilde{\eta}_x(t,0))\psi(t,0)\,\mathrm{d}t-\int_0^T\left(\tilde{F}_m(t,1,0,\tilde{\eta}_x(t,1))+1\right)\psi(t,1)\,\mathrm{d}t.$$

包含 ε 的项（3.13）趋于零，因为 ψ^ε 在 $L^1(\Omega)$ 中有界，且 $D\psi^\varepsilon$ 的全变差有界（根据命题 3.19），而涉及 $\tilde{\eta}$ 的系数一致有界。由于 $\lim_{\varepsilon\to0}\langle A_\varepsilon\tilde{\eta},\ \tilde{\eta}-\psi^\varepsilon\rangle=\langle A\tilde{\eta},\ \tilde{\eta}-\psi\rangle$ 且 $\langle A_\varepsilon\tilde{\eta},\ \tilde{\eta}-\psi^\varepsilon\rangle\geqslant0$ 对所有$0<\varepsilon<1$均成立，因此我们得出 $\langle A\tilde{\eta},\ \tilde{\eta}-\psi\rangle\geqslant0$。□

定理 *1.6* 的证明。设 ψ^ε 为命题 3.19中构造的近似解序列，并设 $\psi\in BV(\Omega)$ 为推论 3.20 给出的极限函数。定义 $\varphi=\psi+\varphi^0$。

首先，我们验证 φ 的性质。由于 $\psi\in BV(\Omega)$ 且 $\varphi^0\in\mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$，由此可得$\varphi\in BV(\Omega)$。根据命题 3.21，$\psi$ 在时间边界 $t=0$ 和 $t=T$ 上以迹意义消失；因此，φ 满足初始条件和终端条件：

$$\varphi(0,\cdot)=\varphi^0(0,\cdot)\quad\text{and}\quad\varphi(T,\cdot)=\varphi^0(T,\cdot).$$

类似地，$\psi(t,0)\geqslant0$且 $\psi(t,1)\leqslant0$；因此，$\varphi(t,0)\geqslant\varphi^0(t,0)=0$且 $\varphi(t,1)\leqslant\varphi^0(t,1)=1$。此外，由于 $\psi^\varepsilon\in\mathcal{M}_0^+$，我们有 $\psi_x^\varepsilon+\varphi_x^0\geqslant0$。取极限意味着$D_x\psi+\varphi_x^0\geqslant0$ 在测度意义下成立，这意味着 $D_x\varphi\geqslant0$。

现在，令 η 为满足定义 1.4 条件的任意测试函数，即$\eta\in\mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$，$\eta_x>0$，且 $\eta=\varphi^0$ 在 $\partial\Omega$ 上。我们定义 $\tilde{\eta}=\eta-\varphi^0$。由于$\eta=\varphi^0$ 在边界上，$\tilde{\eta}=0$在 $\partial\Omega$ 上。此外，$\tilde{\eta}_x+\varphi_x^0=\eta_x>0$。因此，$\tilde{\eta}\in\mathcal{S}^+$，也就是说，它是命题 3.22 中所确立的变分不等式的有效测试函数。将 $\psi=\varphi-\varphi^0$ 和$\tilde{\eta}=\eta-\varphi^0$ 代入命题 3.22 的不等式，并利用定义

$$\tilde{F}_j(t,x,\tilde{\eta}_t,\tilde{\eta}_x)=-F_j(x,-\eta_t,\eta_x)\quad\text{and}\quad\tilde{F}_m(t,x,\tilde{\eta}_t,\tilde{\eta}_x)=F_m(x,-\eta_t,\eta_x),$$

我们发现，代入 $\psi=\varphi-\varphi^0$ 后，涉及 φ_t^0 和 φ_x^0 的项在积分之间恰好相互抵消。

此外，由于 $\eta=\varphi^0$在 $\partial\Omega$ 上，且 $\varphi^0(t,0)=0$和 $\varphi^0(t,1)=1$，我们有 $\eta_t(t,0)=\eta_t(t,1)=0$。回顾透视函数的导数恒等式，我们注意到$F_m(x,0,m)=L(x,0)$。因此，边界积分可简化为：

$$\int_0^T F_m\big(0,-\eta_t(t,0),\eta_x(t,0)\big)\,\varphi(t,0)\,\mathrm{d}t-\int_0^T\left(F_m\big(1,-\eta_t(t,1),\eta_x(t,1)\big)+1\right)(\varphi(t,1)-1)\,\mathrm{d}t$$
$$=L(0,0)\int_0^T\varphi(t,0)\,\mathrm{d}t+\big(L(1,0)+1\big)\int_0^T(1-\varphi(t,1))\,\mathrm{d}t.$$

这就得到了定义 1.4 的精确变分不等式表述。因此， φ 是问题 2 的弱解。□

参考文献

[1] Y. Achdou、F. Camilli 和 I. Capuzzo-Dolcetta。均值场博弈：规划问题的数值方法。《SIAM 控制与优化杂志》, 50(1):77–109, 2012年。 [2] C. Alasseur、E. Bayraktar、R. Dumitrescu 和 Q. Jacquet。委托人与一群主体之间的基于排名的奖励：节能应用，2023年8月。[3] L. Ambrosio、N. Fusco 和 D. Pallara。《有界变差函数与自由间断问题》。牛津数学专著。Clarendon Press，牛津大学出版社，纽约，2000年。[4] S. Ankirchner、N. Kazi-Tani、J. Wendt 和 C. Zhou。具有扩散控制的均值场排名博弈。《数学与金融经济学》， 2024年3月。[5] T. Bakaryan、R. Ferreira 和 D. Gomes。一维均值场博弈规划的势方法。《纯粹与应用分析通讯》, 21(6):2147–2187, 2022年。 [6] E. Bayraktar 和 Y. Zhang。强形式下的基于排名的均值场博弈。《概率电子通讯》, 21(none):1–12, 2016年1月。 [7] E. Bayraktar 和 Y. Zhang。终端排名博弈。《运筹学数学》, 46(4):1349–1365, 2021年11月。 [8] J.-D. Benamou 和 Y. Brenier。求解蒙日–康托罗维奇质量转移问题的计算流体力学方法。《数值数学》, 84(3):375–393, 2000年。 [9] J.-D. Benamou、G. Carlier 和 F. Santambrogio。变分均值场博弈。载于《活性粒子》第1卷：《理论、模型与应用进展》， Model. Simul. Sci. Eng. Technol.，第141–171页。Birkhäuser/Springer，Cham，2017年。 [10] P. Cardaliaguet、J.-M. Lasry、皮埃尔-路易·利翁斯和 A. Porretta。具有非局部耦合的均值场博弈长期平均。《SIAM 控制与优化杂志》, 51(5):3558–3591, 2013年1月。 [11] P. Cardaliaguet、A. Porretta 和 D. Tonon。一阶哈密顿–雅可比方程的索博列夫正则性。《变分法与偏微分方程》, 54(3):3037–3065, 2015年。 [12] R. Carmona 和 D. Lacker。均值场博弈的概率弱形式及其应用。《应用概率年刊》, 25(3):1189–1231, 2015年。 [13] L. C. Evans 和 R. F. Gariepy。《测度论与函数的精细性质》（修订版）。数学教材。CRC出版社，2015年。 [14] R. Ferreira 和 D. Gomes。通过变分不等式证明平稳均值场博弈弱解的存在性。《SIAM 数学分析杂志》, 50(6):5969–6006, 2018年。 [15] R. Ferreira、D. Gomes 和 T. Tada。具有狄利克雷条件的一阶平稳均值场博弈弱解的存在性。《美国数学会会刊》, 147 4731, 2019 11 4713( ): – .[16] R. Ferreira、D. Gomes 和 T. Tada。时变均值场博弈弱解的存在性。《非线性分析》, 212:论文编号112470, 31, 2021年。 [17] R. Ferreira、D. Gomes 和 M. Ucer。巴拿赫空间中利用单调性方法求解均值场博弈，2025年6月。[18] M. D. Francesco、S. Duisembay、D. A. Gomes 和 R. Ribeiro。具有局部相互作用的一维均值场博弈的粒子近似。《离散与连续动力系统》, 42 3569, 2022 7( ): .[19] D. Gomes 和 E. Pimentel。具有对数型非线性的时变均值场博弈。《SIAM 数学分析杂志》, 47(5):3798–3812, 2015年。 [20] D. Gomes、E. Pimentel 和 V. Voskanyan。《均值场博弈系统的正则性理论》。Springer数学简明丛书。Springer， [Cham], 2016。[21] D. A. Gomes、E. Pimentel 和 H. Sánchez-Morgado。次二次情形下的时变均值场博弈。《ESAIM：控制、优化与变分法》, 22(2):562–580, 2016年4月。[22] D. A. Gomes、E. A. Pimentel 和 H. Sánchez-Morgado。次二次情形下的时变均值场博弈。《偏微分方程通讯》, 40(1):40–76, 2015年1月。 [23] P. J. Graber、A. R. Mészáros、F. J. Silva 和 D. Tonon。均值场博弈中的规划问题作为正则化质量输运。《变分法与偏微分方程》, 58(3):115, 2019年6月。[24] M. Huang、P. E. Caines 和 R. P. Malhame。具有非均质智能体的大群体成本耦合线性二次高斯问题：个体质量行为与分散式 ε-纳什均衡。《IEEE 自动控制汇刊》, 52(9):1560–1571, 2007年9月。 [25] M. Huang、R. P. Malhamé 和 P. E. Caines。大群体随机动态博弈：闭环麦基恩–弗拉索夫系统与纳什确定性等价原理。《信息与系统通讯》, 6(3):221–251, 2006年。 [26] D. Kinderlehrer 和 G. Stampacchia。《变分不等式及其应用导论》， 应用数学经典丛书第31卷。工业与应用数学学会（SIAM）， 宾夕法尼亚州费城，2000年。[27] J.-M. Lasry 和 皮埃尔-路易·利翁斯。均值场博弈。I. 平稳情形。《法国科学院数学报告》， 343(9):619–625, 2006年。

[28] J.-M. Lasry 和 皮埃尔-路易·利翁斯。均值场博弈。II——有限时域与最优控制。《法国科学院数学报告》，343(10):679–684, 2006年。 [29] J.-M. Lasry 和 皮埃尔-路易·利翁斯。均值场博弈。《日本数学期刊》, 2(1):229–260, 2007年3月。[30] P. L. Lions。法兰西公学院均值场博弈课程。2007年。 [31] M. Nutz 和 Y. Zhang。平均场竞争，2017年8月。 [32] C. Orrieri、A. Porretta 和 G. Savaré。均值场规划问题的变分方法。《泛函分析杂志》，277(6):1868–1957, 2019年。 [33] A. Porretta。关于平均场博弈系统的规划问题。《动态博弈及其应用》，4(2):231–256, 2014年。阿卜杜拉国王科技大学（KAUST），CEMSE学部，沙特阿拉伯图沃勒23955-6900。电子邮箱：ali.almadeh@kaust.edu.sa 亚美尼亚国家科学院数学研究所、科学创新与教育中心、埃里温国立大学，亚美尼亚埃里温。电子邮箱：tigran.bakaryan@csie.am 阿卜杜拉国王科技大学（KAUST），CEMSE学部，沙特阿拉伯图沃勒23955-6900。电子邮箱：diogo.gomes@kaust.edu.sa 阿卜杜拉国王科技大学（KAUST），CEMSE学部，沙特阿拉伯图沃勒23955-6900。电子邮箱：melih.ucer@kaust.edu.sa