arXiv:2603.02947v1 [math.CO] 3 Mar 2026

度和圈长受限的有向图中的无环集与着色

Ararat Harutyunyan*† Colin McDiarmid‡ Gil Puig i Surroca†

2026年3月4日

摘要

给定一个有向图 D，我们用 $\vec{\alpha}(D)$ 表示 D 的无环集（即诱导出不含有向圈的子有向图的顶点集）的最大大小，用 $\vec{\chi}(D)$ 表示将 $V(D)$ 划分为无环集所需的最少数量。本文从多个角度研究 $\vec{\alpha}(D)$ 和 $\vec{\chi}(D)$，其中包括对度和圈长的限制。我们的一个主要结果是：若 D 是一个阶为 n 的随机 r-正则无双向弧简单有向图，则以高概率有 $\vec{\alpha}(D) = \Theta(n\log r/r)$。这对应于 Spencer 和 Subramanian 关于 Erd˝os–R´enyi 随机有向图模型 [29]的一个结果。在此过程中，我们还推导出一些相关结果，并提出若干猜想。例如，我们给出了 Bondy 定理的一个类比；该定理用任意强定向的周长来界定图的色数。

K关键词： 有向图、无环染色、无环 $sets$

1 引言

如果图没有自环或重边，则称其为简单图。本文中的图均为简单图。类似地，如果有向图没有自环或平行弧，则称其为简单有向图。我们主要关注简单有向图。有时，我们会要求有向图是定向图，也就是说，禁止出现长度为二的有向圈（称为二元有向圈）。有向图通常记作 $D = (V, A)$，其中 V 是顶点集，A 是

*通讯作者。电子邮箱：ararat.harutyunyan@lamsade.dauphine.fr
†LAMSADE，巴黎第九大学 - PSL，巴黎，法国
‡统计系，牛津大学，牛津，英国

弧集。有向图 D 的顶点子集 S 称为无环的，如果其在 S 上的导出子有向图不含有向圈。我们用 $\vec{\alpha}(D)$ 表示 D中无环集的最大大小。有向图D 的有向色数 $\vec{\chi}(D)$是满足以下条件的最小整数 k： $V(D)$可以划分为 k 个集合 V_1，.....，V_k，其中每个 V_i 都是无环的。注意，等价地说，有向色数是最小整数 k，使得可以用 k 种颜色给 D 的顶点着色，且不存在单色有向圈。容易看出，对于任意无向图 G及其双向有向图 D （由 G 将每条边替换为方向相反的两条弧得到），有$\chi(G) = \vec{\chi}(D)$，其中 $\chi(G)$是 G的色数，即为 G的顶点着色且使任意两个相邻顶点颜色不同所需的最少颜色数。有向色数最早由 Neumann-Lara [26]引入。

近年来，这一主题受到广泛关注，许多研究结果表明，这个有向图不变量推广了许多关于图色数的结果（例如，见 [4,5, 7, 19, 20]）。这一令人惊讶的关系有若干佐证，包括：将 Gallai 关于列表着色的经典定理推广到有向图，见 [20],；将 Erd˝os 关于稀疏图可能具有较大色数的重要结果推广到有向图，见 [7], ；推导出 Bollob´as 的一项经典结果的类似结论，见 [19], ；等等。

本文研究一般有向图中大规模无环集的存在性，以及有向色数的界。我们用 n表示顶点数，用 m表示边或弧的数量。以下两个猜想是本研究的出发点。第一个猜想由 Aharoni、Berger 和 Kfir 提出。

猜想 1.1. [1] 如果 D 是一个定向图，那么

$$\vec{\alpha}(D) \geq (1 + o(1)) \frac{n^2}{m} \log_2 \frac{m}{n}.$$

对于一个有 n 个顶点的竞赛图 D，我们有 $m = n(n-1)/2$，因此对于较大的竞赛图，该猜想表明

$$\vec{\alpha}(D) \geq (2 + o(1)) \log_2 n \quad \text{as} \quad n \to \infty.$$

这一结果已知到相差一个因子 2 的程度；每个有 n 个顶点的竞赛图都包含一个阶为 $\lfloor \log_2 n \rfloor + 1$ 的传递子竞赛图。因子 2 是否确实能够实现，是一个重要的公开问题，Erd˝os 和 Moser [17] 早已对此进行过讨论。

猜想 1.1 的一种等价表述是：如果 D 的平均出度为 $d^+ = \frac{m}{n}$，那么

$$\vec{\alpha}(D) \geq (1+o(1))\, n \log_2 d^+ / d^+.$$

我们注意到，术语 $o(1)$ 有意义的解释适用于 d^+ 较大的情形：若对于一个有向图 D，$\vec{\alpha}(D) \leq (1-\varepsilon) n \log_2 d^+ / d^+$（例如，七阶帕雷锦标赛 [17]，或某些其他特定阶数的情形 [27]），那么任意多个 D 副本的不交并也满足这一不等式。

另一方面，如果允许存在二元有向圈，那么显然不可能找到大小大于 $\Theta(n/d^+)$ 的无环集；这直接源于这样一个事实：在对称有向图中，无环集对应于底层图的独立集。只有考虑有向围长至少为三的有向图时，才会出现额外的对数因子。有趣的是，在无向图的背景下，独立集中也会出现类似现象。

定理 1.2. [2] 每个平均度为 d 的无三角形图 G 都有 $\alpha(G) \geq \frac{n}{\ln_{100} d}$。

Shearer [28] 将常数 $1/100$ 改进为 $1+o(1)$（见 $d \to \infty$）。随后，Johansson [22, 25] 研究了该问题的着色版本。

定理 1.3. 存在一个常数 c，使得对于任意最大度为 $\Delta \geq 2$ 的无三角形图 G，$\chi(G) \leq c\Delta / \ln \Delta$。

同样在这种情况下，常数已被改进为 $1+o(1)$（见 $\Delta \to \infty$）[24]。对于定向图，Erdős 和 Neumann-Lara [15] 猜想，Johansson 定理的类似结论（以及猜想 1.1 的推广）应当成立：可以用 $O(\Delta / \log \Delta)$ 种颜色对 D 着色，使得每个颜色类都是无环的。

促使我们撰写本文的下一个猜想如下：

猜想 1.4. 对于每个竞赛图 H，存在 $\varepsilon_H > 0$，使得任意不含 H 的竞赛图 T 若有 n 个顶点，则满足 $\vec{\alpha}(T) \geq n^{\varepsilon_H}$。

（在本文中，H-自由有向图 D 指的是不含与 H 同构的子有向图的有向图 D。）Alon、Pach 和 Solymosi [3] 证明了上述猜想等价于 Erdős–Hajnal 猜想，这是极值图论中的核心问题之一。

猜想 1.5. [16] 对于每个图 H，存在 $\varepsilon_H > 0$，使得任何含有 n 个顶点且不以 H 为诱导子图的图 G 都满足最大值$\{\alpha(G)\ \omega(G)\} \geq n^{\varepsilon_H}$。

本文的结构如下。第 2 节中，我们证明一个关于有向图着色的定理，该定理令人想起 Bondy 的一个著名定理。本节的结果给出了一个上界：当有向图中最长圈的长度有界时，其有向色数也有相应的上界。第 3 节中，我们提出 Erd˝os–Hajnal 猜想的一个强化版本，并以若干特殊情形作为依据。最后，第 4 节讨论随机有向图：我们证明，除了一个乘法常数因子外，随机 r-正则定向图以高概率满足 Aharoni–Berger–Kfir 猜想。此外，我们还给出了一个上界，它与下界的差异本质上是一个 4 倍因子。

2 有向图着色与 Bondy 定理

我们将有向图 D 的周长 定义为有向圈的最大长度（谈及 D的周长时，我们假设D 含有一个有向圈）。Bondy 证明了以下经典定理。

定理 2.1. [9] 设 G 是一个图，D 是 G 的一个强连通定向。假设 D 的周长为 s。则 $\chi(G) \leq s$。

有向图 D 的一个 k-列表指派 L 是一个指派 $L: V(D) \to \mathcal{P}(\mathbb{Z}^+)$，即将正整数集合指派给 D 的顶点，使得对每个顶点 v都有 $|L(v)| \geq k$。若 $V(D)$可以划分为无环集 $V_1, \ldots, V_s$，使得对每个顶点 v都有 $v \in \cup_{i \in L(v)} V_i$，则 D 是 L-可着色。令 $\vec{\chi}_\ell(D)$表示 D的列表有向色数，即最小的 k，使得对于 D的任意 k-列表指派，D 都是L-可着色的。有向图的列表着色在 [20] 中被引入，随后在 [5]中得到研究。

定理 2.2. 设 D 是一个简单有向图，其中所有（有向）圈长都属于集合 K，且满足 $|K| = k$。则 $\vec{\chi}_\ell(D) \leq k + 1$；而且事实上，给定任意大小为 $k + 1$的相应列表，我们可以在多项式时间内找到一个列表无圈着色。

我们注意到，定理 2.1 与定理 2.2 都是紧的；事实上，K_n以及具有 n 个顶点的双向完全有向图分别可作为例子。定理 2.2 的下述推论与 Bondy 的结果（定理 2.1）精神一致。

推论 2.3. 设 D 是周长为 $s \geq 3$的定向图。则$\vec{\chi}_\ell(D) \leq s-1$。

为推导该推论，注意到在 D 中，圈长至多有 $s-2$ 种。定理由下面三个简单引理得出。若有向图 D 的每个子有向图（包括 D 自身）中都存在一个入度或出度至多为 k的顶点，则称 D 是 k-退化的 。 D的 k-退化序 是对顶点的一种排列，记为 v_1、.....、 v_n，使得对每个 $j=2$、.....、 n，顶点v_j 在由 D 诱导的子有向图中入度或出度至多为 k 。

引理 2.4。 设 K 是一个由 k 个正整数组成的集合， D 是一个简单有向图，且所有（有向）圈的圈长都属于 K。则 D 是 k-退化的。

证明。 设 D'是 D的一个子有向图。设 $P=$(v1、 v2、 v3、.....)是 D'中的一条最长（有向）路径。若 v_1 在 D' 中有一个入邻点 w ，则 w 必定在P上，而 w 只能是某个 $j \in K$对应的顶点v_j 。因此 v_1 的入度至多为 k，证毕。

□

引理 2.5. 设有向图 D 是 k-退化的。则我们可以在多项式时间内为 D 找到一个 k-退化序。

证明。 计算每个顶点的入度和出度。先建立一个空列表。反复选择一个入度或出度至多为 k 的顶点 v ，将 v 放到当前列表的开头，并从 D 中删除 v ，同时更新其余顶点的入度和出度。

□

引理 2.6. 设无自环有向图 D 具有一个给定的 k-退化序$v_1, \ldots, v_n$。那么，给定任意大小为 $k+1$ 的列表，我们可以在多项式时间内读出一个列表无圈着色 f 。

证明。 对每个 $j=1,\ldots,n$，按如下方式处理。设 A_j 是两个集合 $N^-(v_j) \cap \{v_1,\ldots,v_{j-1}\}$ 和 $N^+(v_j) \cap \{v_1,\ldots,v_{j-1}\}$ 中较小的一个，因此 $|A_j| \leq k$；并令 $f(v_j)$ 为 $L(v_j) \setminus \{f(w) : w \in A_j\}$ 中任意一个颜色。没有（有向）圈 C 是单色的：因为若 j 是满足v_j 属于 C的最大下标，那么C 必定包含一个顶点 $w \in A_j$ ，且 $f(v_j) \neq f(w)$。

□

至此完成了定理 2.2 的证明。接下来我们将证明，对于竞赛图，可以得到远优于定理 2.2 和推论 2.3 的结果。我们首先指出一个简单而有用的引理。

引理 2.7. 对于任意有向图 D， $\vec{\chi}(D)$（分别为 $\vec{\chi}_\ell(D)$）等于 $\vec{\chi}(D')$ （分别为 $\vec{\chi}_\ell(D')$）在D的强连通分量 D' 上的最大值。

证明。 设 t 为 $\vec{\chi}(D')$在 D的强连通分量 D' 上的最大值。我们可以使用 $[t]$ 中的颜色对每个强连通分量进行正常着色。由此可得 D的一个正常着色，因为每个有向圈都包含在某个分量内。列表着色也可用同样的证明。

□

对于每个 $n \in \mathbb{N}$，令 $t(n)$ 为 T 在所有 n 阶竞赛图中取遍时 $\vec{\chi}_\ell(T)$ 的最大值。等价地， $t(n)$ 是 D 在所有 n 阶定向图中取遍时 $\vec{\chi}_\ell(D)$ 的最大值。由 [17] 和 [5] 可得

$$(1/2 + o(1))\, n/\log_2 n \le t(n) \le (1 + o(1))\, n/\log_2 n \ \text{ as } n \to \infty \qquad (1)$$

（下界来自随机竞赛图）。回顾一下，强连通竞赛图包含一个（有向）哈密顿圈 [10]；因此，对于竞赛图，其周长等于强连通分量的最大阶数。所以，根据上一个引理，若 T 是周长至多为 s 的竞赛图，则 $\vec{\chi}_\ell(T) \le t(s)$。由 (1) 可得：

定理 2.8。 若 T 是周长至多为 s 的竞赛图，则

$$\vec{\chi}_\ell(T) \le (1 + o(1))\, s/\log_2 s \ \ as\ s \to \infty\,.$$

现在我们证明，定理 2.8 在本质上已是最优的（相差一个常数因子）。事实上，只需取一个有 $n = s$ 个顶点的随机竞赛图即可。已知该竞赛图以正概率不含大小至少为 $2\log_2 n + 2$ 的无环集（实际上，当 $n \to \infty$ [17] 时，该概率趋于 1）。下一个定理表明，我们也可以选取任意阶的竞赛图。

定理 2.9. 对于所有正整数 s 和 n 满足 $s \le n$，存在一个 n-顶点竞赛图 T，其周长至多为 s，使得 $\vec{\alpha}(T) \le \frac{4n}{s}\log_2(2s)$，因此 $\vec{\chi}(T) \ge 4^{\frac{n}{s\log_2(2s)}}$.

证明。 令 T为如下竞赛图。将顶点划分为 $\lceil \frac{n}{s} \rceil$个集合： $A_1, \ldots, A_{\lceil n/s \rceil}$，每个集合至多含有 s个顶点。在每个 A_i中的顶点上定向边，使得 A_i 中的最大无环集大小小于 $2\log_2 s + 2$（这总是可行的，因为在 s个顶点上的随机竞赛图以正概率达到这一界）。对于任意两个顶点 $v_i \in A_i$ 和$v_j \in A_j$，其中 $i < j$，从 v_i 向v_j添加一条弧。注意， T中的每个圈 C 都包含在某个集合 A_i内，因此 C 的长度至多为 s。此外，由于 $\vec{\alpha}(A_i) < 2\log_2 s + 2$，可得

$$\vec{\alpha}(T) < \lceil n/s \rceil (2\log_2 s + 2) < \tfrac{4n}{s}\, \log_2(2s).$$

最后， $\vec{\chi}(T) \geq n/\vec{\alpha}(T) > 4^{\frac{s}{\text{对数}_2(2s)}}$。 □

现在我们考虑一般定向图中的这个问题。我们将在推论 2.13 中看到，由于有向围长至少为 3，我们可以比上述推论 2.3 的非列表版本多获得一个因子 2。

定理 2.10. 设 D 是一个周长为 s 且有向围长为 g的简单有向图。那么 $\vec{\chi}(D) \leq \lceil \frac{s}{g-1} \rceil$。

我们注意到，这个定理的一个略弱版本已为人所知： [13] 中证明了 $\vec{\chi}(D) \leq \lceil \frac{s-1}{g-1} \rceil + 1$。我们的界显然至多为这个值，并且对于许多 s 和 g 的取值，它都改进了 1。此外，我们的证明稍短，也不那么繁琐。为了证明定理 2.10，我们将使用 Bessy 和 Thomass´e 的一个结果。

首先，我们需要引入一些记号。设 D 是一个顶点集为 V的强简单有向图。 V的一个枚举 $E = v_1, \ldots, v_n$与另一个枚举 E'基本等价，当且仅当满足以下条件之一： $E' = v_n, v_1, \ldots, v_{n-1}$；或者 $E' = v_2, v_1, v_3, \ldots, v_n$，且 v_1v_2和 v_2v_1都不是 D中的弧。若 V 的两个枚举 E, E' 之间存在一个序列$E = E_1, \ldots, E_k = E'$，使得对每个 i， E_i与 E_{i+1}都基本等价，则称这两个枚举等价。这种等价关系的等价类称为 D的循环序。给定一个枚举 $E = v_1, \ldots, v_n$，若弧v_iv_j 满足 $i < j$，则称其为（相对于 E的）前向弧，否则称为后向弧。 D 中的有向路称为前向路，如果其所有弧都是前向弧。有向圈 C, $i_E(C)$的指标是 C中后向弧的数量。重要的是，在给定的循环序 $\mathcal{C}$ 中，圈的指标是不变的。指标为一的圈称为简单圈。若对于 $\mathcal{C}$ 的每个枚举 E of $\mathcal{C}$ 以及其中的每条后向弧v_jv_i ，都存在一条从 v_i 到v_j的前向路，则称循环序 $\mathcal{C}$ 是相干的。下一个引理与 [6]的引理 1 类似。

引理 2.11。 设 D 是一个强简单有向图， C 是 D 的一个有向圈。那么， D 具有一个相干循环序，使得 C 是简单的。

证明。 在 D 的所有使 C 为简单的循环序中，选取一个循环序 $\mathcal{C}$ ，使所有圈指标之和最小。于是， [6] 中引理 1 的证明表明， $\mathcal{C}$ 是相干的。 □

引理 2.12。 [6, 第 4] 节。设 $D = (V, A)$ 是一个强简单有向图， C 是 D中的一个最长圈，长度为 k。假设 $\mathcal{C}$ 是 D 的一个相干循环序，使得 C 在 $\mathcal{C}$中是简单的。那么，存在 $\mathcal{C}$ 的一个枚举 $E =$$v_1$、……、 v_{i_1}、 v_{i_1+1}、……、 v_{i_2}、 v_{i_2+1}、……、 v_{i_k}，使得对于所有 $j = 0$、……、 $k-1$ （其中 $i_0 := 0$）， $\{v_{i_j+1}, \ldots, v_{i_{j+1}}\}$都是稳定集。

定理 *2.10* 的证明。 注意，只需证明该结果对强有向图成立。事实上，若 D 有 r 个强连通分量 D_1、.....、D_r，我们就用至多 $\lceil \frac{s}{g-1} \rceil$ 种颜色为每个 D_i 着色。由于 D 的每个有向圈都完全包含在某个 D_i中，因此这就给出了 D的一个正常着色。

因此，我们可以假设 D 是强连通的。设 C 为 D中长度为 s 的一个圈。由引理 2.11， D 有一个相干循环序 $\mathcal{C}$，使得 C 是简单的。现在由引理 2.12，存在 $\mathcal{C}$的一个枚举 $E = v_1, \ldots, v_{i_1}, v_{i_1+1}, \ldots, v_{i_2}, v_{i_2+1}, \ldots, v_{i_s}$，使得对每个 $j = 1, \ldots, s$， $I_j := \{v_{i_{j-1}+1}, \ldots, v_{i_j}\}$都是稳定集。我们断言，对每个 $1 \leq j \leq j' \leq \min\{j+g-2, s\}$， $I_j \cup I_{j+1} \cup \ldots \cup I_{j'}$都是无环集。事实上，由于 I_j、I_{j+1}、. . .、$I_{j'}$都是稳定集， $I_j \cup \ldots \cup I_{j'}$上的任一圈都必须使用一条后向弧 $v_q v_p$，其中 $v_q \in I_{j+r}$ 与 $v_p \in I_{j+k}$，且 $r > k \geq 0$。现在，由于假定D 的有向围长为 g，故不存在从 v_p 到 v_q的前向路。这与 $\mathcal{C}$ 相干这一事实相矛盾。因此，我们可以用一种颜色对由$I_j \cup \ldots \cup I_{j'}$导出的有向图进行着色。将连续的（$g-1$）元组$I_j$， . . . ， I_{j+g-2}（以及可能一个较短的元组）各用单一颜色着色，便得到一种至多使用 $\left\lceil \frac{s}{g-1} \right\rceil$ 种颜色的着色。

□

推论 2.13。 设 D 是一个周长为 s 的定向图。那么$\vec{\chi}(D) \leq \lceil \frac{s}{2} \rceil$。

显然，当 $s = 3$ 或 $s = 4$ 时，该推论是紧的，但我们认为对于较大的 s，它并非最优（见定理 2.8）。

猜想 2.14。 若 D 是一个不含长度大于 s 的有向圈的定向图，则 $\vec{\chi}(D) = O(s/\log s)$ 当 $s \to \infty$ 时。

Neumann-Lara [26] 证明了，若 D 是一个只含奇圈或只含偶圈的定向图，则 $\vec{\chi}(D) \leq 2$。另一方面，Chen、Ma 和 Zang 得到了以下结果。

定理 2.15。 [11] 设 k 和 r 为满足 $k \geq 2$ 和 $0 \leq r \leq k-1$ 的整数。若简单有向图 D 不含长度模 k 为 r 的有向圈，则$\vec{\chi}(D) \leq k$。

我们证明，当模 k 为 0 时，该定理无法强化为列表着色版本。

命题 2.16。 对于任意正整数 $k \geq 3$ 和 t，存在一个定向图 D，使得 D 的所有圈的长度均模 k 为 0，且 $\vec{\chi}_\ell(D) > t$。

证明。 令 $k \geq 3$ 和 $t \geq 1$。设 $c = k(t-1) + 1$。考虑以下有向图 D。取有向圈 C_k，其顶点为 v_1、.....、v_k，并将其扩张

将每个顶点 v_i 扩张为一个由 B_i 个独立顶点组成的集合，大小为 $\binom{c}{t}$。现在，在每一对 $(B_i,\ B_{i+1})$ 之间放置一个完全二分图，边从 B_i 指向 B_{i+1}（这里，B_{k+1} 是 B_1）。将此有向图记为 D。显然，D 的所有圈长都是 k的倍数。令 L 为 D的一个列表赋值，每个列表大小为t，并且在每个集合 B_i中，每个 $\{1,\dots,c\}$的 t-子集都出现一次。

现在假设 D 是 L-可着色的。在任何这样的着色中，对于任意给定的 B_i，c 种颜色中至多有 $t-1$种缺失。事实上，假设在某个 B_i上我们至少看不到 t 种颜色，比如说颜色 $\{1,\dots,t\}$。这显然是不可能的，因为那样一来，B_i 中列表为 $\{1,\dots,t\}$ 的顶点就没有被着色。因此，在所有 B_i中总共至多缺失 $k(t-1)$种颜色。因此，存在某种颜色 j 出现在所有 B_i上。但这是一个矛盾，因为我们得到了一个颜色为 j的有向圈。因此，D 不是 L-可着色的，并且$\vec{\chi}_\ell(D) > t$。

□

3 强Erd˝os–Hajnal猜想

在本节中，我们提出如下对Erd˝os–Hajnal猜想的加强（见猜想1.4和1.5）。

猜想 3.1。对于每个竞赛图 T，存在某个 $\varepsilon_T > 0$，使得对于任意 n 顶点的 T-自由简单有向图 D，$\vec{\alpha}(D) \geq n^{\varepsilon_T}$。

如果上述猜想对 T 成立，我们就称竞赛图 T 具有强 *Erd˝os–Hajnal* 性质 。下述定理给出了猜想中常数 ε_T 的一个上界。

定理 3.2。设 T 是一个有 $t \geq 3$ 个顶点的竞赛图，设 $\varepsilon_T > 0$，并假设对于每个 n 顶点的 T-自由定向图，都有 $\vec{\alpha}(D) \geq n^{\varepsilon_T}$。那么 $\varepsilon_T \leq 2/t$。

证明采用概率方法。如果事件 A_1，A_2，..... 以高概率（*whp*）成立，也就是说，$\mathbb{P}(A_n) \to 1$ 当 $n \to \infty$时成立。二项随机定向图$D_{n,\ p}$ 的构造方法是：从完全图 K_n开始，以概率 $2p$ 独立地选取 $\binom{n}{2}$ 条无向边，再将选出的边各自独立地以相同概率定向为两个方向之一$_{1\ 2}$。因此，$D_{n,\ p}$ 中的每个顶点的期望入度和期望出度均为 $(n-1)p$。

证明。考虑随机定向图 $D_{n,p}$ 其中 $p = \frac{1}{2}n^{-2/t}$。Spencer 和 Subramanian [29] 证明了，whp $\vec{\alpha}(D_{n,p}) \leq {}^{2}_{\ln(np)\ln(1-p)^{-1}}(1+o(1))$。因此，

$\vec{\alpha}(D_{n,p}) \le 4n^{2/t}\ln n$ whp。令 X_T 表示 $D_{n,p}$ 中 T 的副本数。显然，

$$\mathbb{E}[X_T] \le \binom{n}{t} t!\, p^{\binom{t}{2}} \le n^t n^{-t+1}/2^{t(t-1)/2} \le n/8.$$

现在，根据马尔可夫不等式，$\mathbb{P}(X_T \ge n/4) \le 1/2$。因此，存在一个具有 n 个顶点的定向图 D，其中 T 的副本数至多为 $n/4$，且 $\vec{\alpha}(D) \le 4n^{2/t}\ln n$。我们可以从 D 中的每个 T 副本各删除一个顶点，从而得到一个 T-自由定向图 D'，其至少有 $3n/4$ 个顶点。但 $\vec{\alpha}(D') \le \vec{\alpha}(D) \le 4n^{2/t}\ln n$，定理得证。□

以下这个猜想 3.1 的特殊情形值得关注。

猜想 3.3。有向三角形具有强 *Erd˝os–Hajnal* 性质。

我们没有任何办法处理上述特殊情形。然而，归纳论证表明，下面这个较弱的界成立。

命题 3.4。令 $0 < \delta < \sqrt{\ln 4}$。则存在一个常数 $c_\delta > 0$，使得对于每个阶为 n 的 $\vec{C}_3$-自由有向图 D，都有 $\vec{\alpha}(D) \ge c_\delta \exp(\delta\sqrt{\ln n})$。

证明。令 $f_\delta(n) := \exp(\delta\sqrt{\ln n})$。令 n_δ 为一个正整数，我们假设它足够大。通过取足够小的 c_δ，该命题对每个阶为 $n \le n_\delta$ 的有向图 D 都自动成立。

假设 D 的阶为 $n \ge n_\delta$，并且该命题对所有阶更小的有向图都成立。我们可以假设 $\Delta_{\min}(D) := \max_{v\in V(D)} \min\{\text{indeg}(v), \text{outdeg}(v)\} \ge 2n/f_\delta(n)$；否则

$$\vec{\alpha}(D) \ge \frac{n}{\vec{\chi}(D)} \ge \frac{n}{\Delta_{\min}(D)+1} \ge \frac{n}{2\frac{n}{f_\delta(n)}+1} \ge \tfrac{1}{3} f_\delta(n).$$

设 v 为满足 $\min\{\text{indeg}(v), \text{outdeg}(v)\} \ge 2n/f_\delta(n)$ 的顶点。由于 D 是 $\vec{C}_3$-自由的，因此不存在从 $N^+(v)$ 到 $N^-(v)$ 的弧。特别地，集合 $N^+(v) \cap N^-(v)$ 不含弧，因此 $\vec{\alpha}(D) \ge |N^+(v) \cap N^-(v)|$。所以，我们也可以假设 $|N^+(v) \cap N^-(v)| \le f_\delta(n)$。因此，若 n^+ 和 n^- 分别是由 $N^+(v) \setminus N^-(v)$ 和 $N^-(v) \setminus N^+(v)$ 诱导的子图 D^+ 和 D^- 的阶，则 $n^+, n^- \ge 2n/f_\delta(n) - f_\delta(n) \ge n/f_\delta(n)$。对不相交的子图 D^+ 和 D^- 应用归纳假设，可知

$$\vec{\alpha}(D) \ge \vec{\alpha}(D^+) + \vec{\alpha}(D^-) \ge c_\delta f_\delta(n^+) + c_\delta f_\delta(n^-) \ge 2c_\delta f_\delta\left(\frac{n}{f_\delta(n)}\right) \ge c_\delta f_\delta(n),$$

其中，最后一个不等式由以下计算得出

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2f_\delta\left(\frac{x}{f_\delta(x)}\right)}{f_\delta(x)}=2\lim_{x\to\infty}\exp\left(\delta\sqrt{\ln x-\delta\sqrt{\ln x}}-\delta\sqrt{\ln x}\right)$$

$$=2\exp\left\{\delta\lim_{x\to\infty}x\left(\sqrt{1-\frac{\delta}{x}}-1\right)\right\}=2\exp\left(\frac{-\delta^2}{2}\right)>1.$$

□

有趣的是，当禁止出现由三个顶点构成的传递竞赛图时，证明就很直接。

命题 3.5. 设 T 为由三个顶点构成的传递竞赛图。那么， T 具有强 *Erd˝os–Hajnal* 性质。此外，对于任意 n-顶点T-自由简单有向图 D，若其最大（总）度为 Δ，则 $\vec{\chi}(D)=O(\Delta/\log\Delta)$。

证明。 设 D 为一个 T-自由有向图。对顶点进行排序，并从有向图 D 中仅保留正向边，构造图 G_f 。注意，由于 D 不包含 T， G_f 是无三角形图。注意， G_f 中的独立集是 D中的无环集。现在，由于 G_f 是无三角形图，根据 Ramsey 理论（事实是 $R(3,t)\sim t^2/\log t$，见 [23]），可得 $\alpha(G_f)=\Omega(\sqrt{n\log n})$。因此， D中存在一个大小为 $\Omega(\sqrt{n\log n})$ 的无环集。该断言的第二部分由 Johansson 关于着色的定理应用于无三角形图 G_f得出。 □

4 随机正则有向图

如果每个顶点恰有 r 条入弧和 r 条出弧，则称（多重）有向图为 r-正则。对于随机 r-正则、含 n 个顶点的定向图，我们证明其最大无环集的大小以高概率为 $\Theta(n\ln r/r)$；参见定理 4.3 和 4.5。这与二项随机定向图 $D_{n,\,p}$ 的性质一致，其中 $p=r/n$，每个顶点的期望入度和期望出度均为 $r(1-1/n)$。（回顾一下，$D_{n,\,p}$ 是在定理 3.2 之后立即引入的。）事实上，根据 Spencer 和 Subramanian 的结果（见 [29] 中的推论 1.1），当 $r\to\infty$ 时，

$$\vec{\alpha}(D_{n,r/n})=(1+o(1))\,\tfrac{2n\ln r}{r}\quad\text{whp.}$$

随机正则图可以通过配置模型 [8, 第 2 节4]构造。设 n和 r 为正整数，且 nr 为偶数。对于每个顶点 $i\in[n]$，我们创建一个 r 元素集 $G[i]$，其中集合 $G[1]$、...、...、$G[n]$

两两不相交。然后，我们在 $\cup_{i=1}^{n} G[i]$的所有元素之间均匀随机地进行配对（即一种配置）。令 $G^*(n,\ r)$，或简记为 G^*，表示在顶点集 $[n]$上得到的 r 正则多重图；对于 $G[i]$ 中每个与 $G[j]$ 中的一个元素配对的元素，都有一条边ij。对于固定的 r 和 $n > r$，G^* 为简单图的概率有一个与 n无关的正常数下界；此外，每个 r正则的 n顶点（简单）图作为 G^* [8]出现的概率都相同。记$\mathscr{G}^*(n,\ r)$为顶点集 $[n]$上的所有 r正则 n顶点多重图构成的集合，记$\mathscr{G}(n,\ r)$为（简单） r正则 n顶点图构成的子集，并记 $P_{n,\ r}$为与 G^*相关联的 $\mathscr{G}^*(n,\ r)$上的概率测度。

在有向情形下，我们考虑以下与配置模型相对应的模型。设 n 和 r 为正整数。对于每个顶点 $i \in [n]$，我们创建两个 r-元集合： $D^+[i]$ 和 $D^-[i]$, 其中 $D^+[1]$、$D^-[1]$、.....、$D^+[n]$、$D^-[n]$两两不相交。我们分别用 D^+ 和 D^- 表示它们的并集 $\cup_{i=1}^{n} D^+[i]$ 和$\cup_{i=1}^{n} D^-[i]$。接着，在 D^+的元素与 D^- 的元素之间均匀随机地选取一个配对（即一个有向配置）。令 D^*（$n,\ r$），或简写为 D^*，表示在顶点集 $[n]$上得到的 r-正则多重有向图，其中每个与某个$v \in D^-[j]$配对的元素 $u \in D^+[i]$ 都对应一条弧 ij。在这里，同一个 r-元集合 $D^+[i]$ 或 $D^-[i]$ 中的不同元素作用相同，因此对它们进行置换不会影响所得的多重有向图。更准确地说，这些置换生成一个作用于所有有向配置集合上的群，每个轨道都对应一个（ r-正则、 n顶点的）多重有向图 D。因此， D 恰好对应$r!^{2n}\Pi_{a\in A(D)}{}^{1}\ \mathrm{mult}(a)!$个有向配置，其中 A（D）是D 的弧集，而$\mathrm{mult}(a)$是弧 a的重数。特别地，每个简单有向图作为 D^*出现的概率都相同。

如果我们忽略 D^*的弧的方向，便得到一个 $2r$-正则n-顶点多重图，我们称之为$\mathrm{forg}\, D^*$。我们用$Q_{n,r}$ 表示 $\mathscr{G}^*(n, 2r)$上与$\mathrm{forg}\ D^*$相关联的概率测度。

注 4.1. 我们可以通过对欧拉定向进行枚举，建立 $\mathrm{forg}\ D^*(n, r)$ 与 $G^*(n, 2r)$ 之间的联系。讨论多重图的方向时，我们必须说明边是否带有标号。除非另有说明，我们不区分同一条边的多个副本。多重图 G 的 欧拉定向 是指图 G 的一个定向D，使得对每个顶点 v，$\mathrm{indeg}_D(v) = \mathrm{outdeg}_D(v)$。令 $E^*_{n,r}(G)$ 表示 $G \in \mathscr{G}^*(n, r)$ 的带标号欧拉定向数（即边带有标号），并约定自环有两种定向方式。

于是，对所有正整数 n 和 r，

$$\frac{E^*_{n,2r}}{\mathbb{E}[E^*_{n,2r}]} = \frac{Q_{n,r}}{P_{n,2r}}, \tag{2}$$

其中，期望取自 $G^*(n,\ 2r)$。

式 *(2)* 的证明。注意，在参数为 n, $2r$ 的配置模型中，有 $c_{n,\ 2r} := \frac{(2nr)!}{(nr)!\,2^{nr}}$ 种可能的配对；而在参数为 n, r 的配置模型有向版本中，有 $d_{n,\ r} := (nr)!$ 种可能的配对。因此我们看到，对于每个 $2r$-正则的 n 顶点多重图 G，

$$P_{n,2r}(G) = \frac{(2r)!^n}{2^{\ell(G)} c_{n,2r}} \prod_{e \in E(G)} \frac{1}{\mathrm{mult}(e)!},$$

其中，$\ell(G)$ 是 G 的自环数，而 $E(G)$ 是其边集。类似地，

$$Q_{n,r}(G) = \frac{r!^{2n}}{d_{n,r}} \sum_{D \in \mathrm{EO}(G)} \prod_{a \in A(D)} \frac{1}{\mathrm{mult}(a)!},$$

其中 $\mathrm{EO}(G)$ 是 G 的欧拉定向集合，而 $A(D)$ 是 D 的弧集。另一方面，

$$E^*_{n,2r}(G) = 2^{\ell(G)} \sum_{D \in \mathrm{EO}(G)} \prod_{e \in E'(G)} \binom{\mathrm{mult}_G(e)}{\mathrm{mult}_D(e^+)},$$

其中，$E'(G)$ 是 G 的非自环边集合，并且对于每个 $e \in E'(G)$，e^+ 是 e 的一个固定定向（注意，前一个表达式与此选择无关）。结论由以下事实得出：

$$\mathbb{E}[E^*_{n,2r}] = \frac{2^{nr}\binom{2r}{r}^n}{\binom{2nr}{nr}}$$

（参见 [14] 中定理 3.47 的证明：在那里，$E^*_{n,\ 2r}$ 的定义方式有所不同）。 □

与无向情形类似，D^* 是定向图的概率至少为一个正常数。我们未能在文献中找到这一结果，因此在此给出证明以求完整。（相比之下，D^*是简单图的概率已有研究；例如参见 [12, 命题 4.2]。）

引理 4.2。 固定一个正整数 r，并对每个正整数 i，令$\mu_i = {}_{(2r-1)_{2i}}{}^{i+1}$。那么，

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(D^*(n,r) \text{ is an oriented (simple) graph}) = e^{-\mu_1-\mu_2}.$$

证明。 给定整数 k, j，记 $k(k-1)\ldots(k-j+1)$ 为 $(k)_j$。对每个正整数 i，令$X_{i,n}$ 为随机变量，表示 $G^*(n,2r)$ 中长度为 i 的圈的数量。 [14, 引理 3.51] 证明了

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}[E^*_{n,2r}(X_{1,n})_{j_1}\ldots(X_{k,n})_{j_k}]}{\mathbb{E}[E^*_{n,2r}]} = \prod_{i=1}^{k} \mu_i^{j_i}$$

对任意非负整数集合 $j_1,\ldots,j_k$，其中期望是在 $G^*(n,2r)$ 上取的。根据注 4.1，

$$\frac{\mathbb{E}[E^*_{n,2r}(X_{1,n})_{j_1}\ldots(X_{k,n})_{j_k}]}{\mathbb{E}[E^*_{n,2r}]} = \mathbb{E}\left[\tfrac{Q_{n,r}}{P_{n,2r}}(X_{1,n})_{j_1}\ldots(X_{k,n})_{j_k}\right] =$$

$$\sum_{G\in\mathscr{G}^*(n,2r)} \left(\tfrac{Q_{n,r}}{P_{n,2r}}(X_{1,n})_{j_1}\ldots(X_{k,n})_{j_k}\right)(G)P_{n,2r}(G) = \mathbb{E}_{Q_{n,r}}[(X_{1,n})_{j_1}\ldots(X_{k,n})_{j_k}],$$

其中 $\mathbb{E}_{Q_{n,r}}$ 是在 forg $D^*(n,r)$ 上取的期望。因此，根据矩方法（参见 [21, 定理 6.10]），在测度 $Q_{n,r}$ 下，当 $n\to\infty$ 时，$X_{i,n} \xrightarrow{d} \tilde{X}_i$ 对所有 i 联合成立，其中 $\tilde{X}_i \in \mathrm{Po}(\mu_i)$ 是相互独立的泊松随机变量（另见 [21, 引理 9.17]）。因此，

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(D^*(n,r) \text{ is an oriented graph}) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\operatorname{forg} D^*(n,r) \in \mathscr{G}(n,2r)) = \lim_{n\to\infty} Q_{n,r}(\mathscr{G}(n,2r)) \\
&= \lim_{n\to\infty} Q_{n,r}(X_{1,n} = X_{2,n} = 0) = e^{-\mu_1-\mu_2}.
\end{aligned}$$

□

我们称事件 $A_1, A_2, \ldots$ 以极高概率成立（以高概率）如果$\mathbb{P}(A_n) = 1 - e^{-\Omega(n)}$ 当 $n\to\infty$。

定理 4.3。 令 r 为正整数，并令 D 为从所有带标号顶点的 r 正则 n 顶点定向图中均匀选取的随机有向图。则， $\vec{\alpha}(D) \le {}^{2\ln r+4}_{r}n$ 以高概率成立。

证明。令 D^* 为通过配置模型的有向版本生成的随机 r 正则 n 顶点多重有向图。根据引理 4.2，D^* 为定向图（即没有平行弧、自环或二元有向圈）的概率有一个与 $n \to \infty$ 无关的正下界。此外，每个 r 正则 n 顶点定向图以相同的概率作为 D^* 出现。因此，只需证明 $\mathbb{P}(\vec{\alpha}(D^*) \geq {}^{2}\ln_r^{r+4} n) = e^{-\Omega(n)}$ 当 $n \to \infty$ 时成立。

设 k 为正整数，$0 < \beta < 1$ 为实数，目前二者均未具体指定。设 ℓ 为区间$[\beta n, \beta n + k)$中能被 k 整除的整数。假设某个大小为 $|A| = \ell$的 $A \subseteq V(D^*)$是无环的。则存在 A σ的一个排序：$\{1, \ldots, \ell\} \to A$，使得 $D^*[A]$ 中的每条弧都具有形式 $\sigma(i) \to \sigma(j)$，其中 $i < j$为某个值。这意味着 A 可以划分为 k 个子集 $A_1, \ldots, A_k$，使得

(a) $|A_i| = \frac{\ell}{k}$;

(b) 对每一对 $1 \leq i < j \leq k$，不存在从 A_j 的任一元素到 A_i的任一元素的弧。

若 $\vec{\alpha}(D^*) \geq \ell$，则对于 $V(D^*)$的某个 ℓ-子集 A，上述条件必定成立。选择 A的方式数为 $\binom{n}{\ell}$，而将这样的集合 A划分为 k个部分 $A_1, \ldots, A_k$的方式数显然至多为 k^ℓ。因此，总共至多有 $\binom{n}{\ell} k^\ell \leq (\frac{ekn}{\ell})^\ell$ 种选择。

现在，假设我们固定了一个集合 $A \subseteq V(D^*)$，其中包含 $|A| = \ell$，以及一个划分 A_1、.....、A_k，它将 A划分为 $|A_i| = \frac{\ell}{k}$。不失一般性，我们可以假设 $A = \{1, \ldots, \ell\}$，并且 $A_1 = \{1, \ldots, \frac{\ell}{k}\}$、.....、$A_k = \{(k-1)\frac{\ell}{k} + 1, \ldots, \ell\}$。我们希望计算不存在反向弧的概率，即对任意 $j > i$，都不存在从 A_j 到 A_i 的弧。令 E_1 表示对所有 $i < k$，都不存在从 A_k 到任一 A_i的弧这一事件。显然，

$$\mathbb{P}(E_1) = \prod_{j=0}^{r\frac{\ell}{k}-1} \frac{rn - r(k-1)\frac{\ell}{k} - j}{rn - j} \leq \left(1 - \frac{(k-1)\ell}{kn}\right)^{\frac{r\ell}{k}}.$$

一般地，令 E_i 表示 A_{k-i+1} 中没有顶点具有后向弧这一事件。

Then

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E_i \mid E_1, \ldots, E_{i-1}) &= \prod_{j=0}^{r\frac{\ell}{k}-1} \frac{rn - r(i-1)\frac{\ell}{k} - r(k-i)\frac{\ell}{k} - j}{rn - r(i-1)\frac{\ell}{k} - j} \\ &\leq \left(1 - \frac{(k-i)\frac{\ell}{k}}{n-(i-1)\frac{\ell}{k}}\right)^{\frac{r\ell}{k}} \leq \left(1 - \frac{(k-i)\ell}{kn}\right)^{\frac{r\ell}{k}} \\ &\leq \exp\left(-\frac{r(k-i)\ell^2}{k^2 n}\right).\end{aligned}$$

因此， A 具有划分 A_1，……， A_k 且满足 (b) 的概率至多为

$$\exp\left(-\sum_{i=1}^{k} \frac{r(k-i)\ell^2}{k^2 n}\right) = \exp\left(-\frac{r(1-\frac{1}{k})\ell^2}{2n}\right).$$

因此，存在大小为 ℓ 的无环集的概率至多为

$$\left(\frac{ekn}{\ell}\right)^{\ell} \exp\left(-\frac{r(1-\frac{1}{k})\ell^2}{2n}\right) \leq \exp\left\{\ell\left(1 + \ln k - \ln\beta - \frac{\beta r}{2}\left(1-\frac{1}{k}\right)\right)\right\},$$

其中我们使用了如下事实： $\frac{ekn}{\ell} \leq \frac{ek}{\beta}$ 以及 $r(1-\frac{1}{k})\ell^2 \geq r(1-\frac{1}{k})\beta n\ell$。

现在，我们固定 $\beta = \frac{2}{\ln(3r/4)_r} + 4$ 以及 $k = \lceil \beta r/2 \rceil$。显然，我们可以假设 $r \geq 2$。这意味着 $\beta > \frac{4}{r}$，因此我们得到界 $k < \frac{\beta r}{2} + 1 < \frac{3\beta r}{4}$。记 $c_r := 1 + \ln k - \ln \beta - \frac{\beta r}{2}\left(1 - \frac{1}{k}\right)$，并注意 $c_r < 1 + \ln \frac{3r}{4} - \frac{\beta r}{2} + 1 = 0$。此外，注意 c_r 与 n无关。因此，当 n 足够大时，

$$\mathbb{P}(\vec{\alpha}(D^*) \geq \tfrac{2\ln r + 4}{r} n) \leq \mathbb{P}(\vec{\alpha}(D^*) \geq \beta n + k) \leq \mathbb{P}(\vec{\alpha}(D^*) \geq \ell) \leq e^{c_r \ell} \leq e^{c_r \beta n},$$

从而完成证明。 □

遗憾的是，定理 4.3 的界对于较小的 r 没有意义。将上述分析进一步推进，以试图找到一个常数 $c < 1$，使得以高概率 $\vec{\alpha}(D) \leq cn$，是有意义的。注意，我们不能期望这对 $r = 1$ 成立。事实上，众所周知，均匀随机排列 $\pi \in S_n$的圈数集中在其均值 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$ [18,例 III.4] 附近。由此可知，当 $r = 1$时， $\vec{\alpha}(D^*) = n - (1 + o(1)) \ln n$，其概率在 $n \to \infty$ 时趋于 1。下一个命题表明，对于 $r \geq 2$，已经可以取 $c = 99/100$。无论如何，定理 4.3 与定理 4.5 的界仍然相距甚远，使它们更加接近仍是一个未决问题。

命题 4.4. 设 $r \geq 2$ 为整数，并设 D 为随机有向图，在所有具有带标号顶点的 r-正则 n-顶点定向图中均匀选取。则 $\vec{\alpha}(D) \leq \frac{99}{100}n$ 以高概率。

证明。 沿用定理 4.3 的证明，我们现在将事件 E_i 在给定 $E_1 \cap \ldots \cap E_{i-1}$ 条件下的概率界定如下:

$$\mathbb{P}(E_i \,|\, E_1, \ldots, E_{i-1}) = \prod_{j=0}^{r\frac{\ell}{k}-1} \frac{rn + r\frac{\ell}{k} - r\ell - j}{rn - r(i-1)\frac{\ell}{k} - j} \leq \left(\frac{n + \frac{\ell}{k} - \ell}{n - (i-1)\frac{\ell}{k}} \right)^{\frac{r\ell}{k}}$$

$$\leq \left(\frac{\frac{k}{\beta} + 1 - k}{\frac{k}{\beta} + 1 - i} \right)^{\frac{r\ell}{k}},$$

因此，乘积 $\prod_{i=1}^{k} \mathbb{P}(E_i)$ 的上界为

$$\left(\left(\frac{k}{\beta} + 1 - k \right)^k \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{\frac{k}{\beta} + 1 - i} \right)^{\frac{r\ell}{k}}.$$

我们有

$$\sum_{i=1}^{k} \ln\left(\tfrac{k}{\beta} + 1 - i \right) \geq \int_1^k \ln\left(\tfrac{k}{\beta} + 1 - x \right) dx$$

$$= \left[-x - \left(\tfrac{k}{\beta} + 1 - x \right) \ln\left(\tfrac{k}{\beta} + 1 - x \right) \right]_1^k$$

$$= 1 - k - \left(\tfrac{k}{\beta} + 1 - k \right) \ln\left(\tfrac{k}{\beta} + 1 - k \right) + \tfrac{k}{\beta} \ln \tfrac{k}{\beta},$$

因此， $\mathbb{P}(\vec{\alpha}(D^*) \geq \ell)$ 至多为

$$\exp\left\{ \ell \left(1 + r\left(1 - \tfrac{1}{k}\right) + \left(1 - \tfrac{r}{\beta}\right) \ln \tfrac{k}{\beta} + r\left(\tfrac{1}{\beta} + \tfrac{1}{k} \right) \ln\left(\tfrac{k}{\beta} + 1 - k \right) \right) \right\}.$$

因此，只需满足

$$1 + r\left(1 - \tfrac{1}{k}\right) + \left(1 - \tfrac{r}{\beta}\right) \ln \tfrac{k}{\beta} + r\left(\tfrac{1}{\beta} + \tfrac{1}{k} \right) \ln\left(\tfrac{k}{\beta} + 1 - k \right) < 0,$$

对于 $r \geq 2$， $k = 100$ 和 $\beta = 99/100$ 满足该条件。 □

有一种自然（快速）的贪心算法，可以在无自环有向图 D 中求得一个无环集。（U 表示“未使用”。）

输入：一个有向图 D 和 $\preceq$ 上的一个全序；在 $V(D)$ 上设置 $A = U = \emptyset$ 和 $W = V(D)$；当 $W \neq \emptyset$ 时，令 w 为 W 中第一个（最小的）顶点，并揭示 $N^+(w)$；将 w 移入 A，并将 $N^+(w) \cap (W \backslash \{w\})$ 移入 U；输出：A

注意，如果忽略任何自环，输出集 A 是无环的，因为所有弧都“向后”指向更早加入的顶点。我们称 A 为关于 $\preceq$ 的 D 的贪心无环集，并用 $\vec{\alpha}(D, \preceq)$ 表示其大小。（如果我们想在一般的无自环有向图中寻找一个大的无环集，而该图不一定是随机的，那么就会均匀随机地选取 $\preceq$。）

定理 4.5。设 $\preceq$ 是 $[n]$ 上的一个全序，r 是一个正整数，并且 D 是从 $[n]$ 上所有 r-正则定向图中均匀选取的随机有向图。那么 $\vec{\alpha}(D, \preceq) \geq \frac{1}{5} n$ 对数 $2(r+1)/r$ 以高概率成立。此外，对于任意 $\varepsilon > 0$，存在一个 r_ε，使得如果 $r \geq r_\varepsilon$，那么 $\vec{\alpha}(D, \preceq) \geq (\frac{1}{2} - \varepsilon)\, n \ln(r+1)/r$ 以高概率成立。

注意，我们对 $\vec{\alpha}(D, \preceq)$ 的下界与定理 4.3 中关于 $\vec{\alpha}(D)$ 的上界在常数因子意义下相符。此后，log 表示 $\log_2$。设 $0 < \alpha < 1$ 固定。为证明定理 4.5，我们将使用上述贪心算法的截断版本，把条件 “当 $W \neq \emptyset$” 替换为 “当 $W \neq \emptyset$ 且 $|A| \leq \alpha n$”。稍后我们将设定 $\alpha = \frac{1}{5}$。

我们将证明，当 $\alpha = \frac{1}{5}$ 时，对于 D^*，由配置模型的有向版本得到的随机 n 顶点 r-正则多重有向图（如定理 4.3 的证明中那样），该算法产生一个集合 A，满足

$$|A| \geq \tfrac{1}{5} n \log(r+1)/r \quad \text{wvhp.} \tag{3}$$

但由引理 4.2，D^* 为定向图的概率远离 0，并且所有定向图作为 D^* 出现的概率相同，因此该定理成立。（下面的证明表明，本质上，定理 4.5 的界对 $\vec{\alpha}(D^*)$ 也同样成立，因为 D^* 中自环的期望个数为 r。）

我们使用一个预备引理。设 $n \geq 1$ and $0 \leq a, b \leq n$。设 U and$V$ 为互不相交的 n-集，并设 G 为部集U 和 V构成的完全二分图。设 M 为在 G 中均匀随机选取的随机完美匹配

该图中有 $n!$ 个完美匹配。设 $A \subseteq U$ 满足 $|A| = a$，且 $B \subseteq V$ 满足$|B| = b$。令随机变量 $X(n, A, B)$（或者不太严谨地记作 $X(n, a, b)$）表示 M 中连接 A 与 B的边数。注意到 $\mathbb{E}[X] = ab/n$。

若 X，Y 是两个随机变量，则称 X 被 Y 随机支配，如果对于每个 t，都有 $\mathbb{P}(X \geq t) \leq \mathbb{P}(Y \geq t)$，记作 $X \leq_s Y$。

引理 4.6。设 $n, n' \geq 1$，令 $a, b \leq n$，令 $a', b' \leq n'$；并假设 $n' \leq n$，$a' \geq a$ 和 $b' \geq b$。令 $Y = X(n, a, b)$ 和 $Y' = X(n', a', b')$。则 $Y \leq_s Y'$。

引理 *4.6* 的证明。只需证明以下三个简单的断言。

$$\text{If } a+1 \leq n \text{ then } X(n,a,b) \leq_s X(n,a+1,b). \tag{4}$$

$$\text{If } b+1 \leq n \text{ then } X(n,a,b) \leq_s X(n,a,b+1). \tag{5}$$

$$X(n+1,a,b) \leq_s X(n,a,b). \tag{6}$$

为证明 (4)，令 $a+1 \leq n$；令 $A \subseteq A' \subseteq U$，其中 $|A| = a$，$|A'| = a+1$；并令 $B \subseteq V$，其中 $|B| = b$。则总有 $X(n, A, B) \leq X(n, A', B)$，因此 (4) 成立。我们可以用同样的方法证明 (5)。

还需证明 (6)。令 U 和 V 为互不相交的 $(n+1)$-集，令 $A \subseteq U$ 满足 $|A| = a \leq n$，并令 $B \subseteq V$ 满足 $|B| = b \leq n$。令 $u \in U \backslash A$，并令 v 为随机匹配 M 中与 u 配对的 V 中的随机顶点。那么对于每个相关的整数 i

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(X(n+1,a,b) \geq i) \\
= \;& \mathbb{P}((X(n+1,A,B) \geq i) \wedge (v \in B)) + \mathbb{P}((X(n+1,A,B) \geq i) \wedge (v \notin B)) \\
= \;& \tfrac{b}{n+1}\,\mathbb{P}(X(n,a,b-1) \geq i) + \tfrac{n+1-b}{n+1}\,\mathbb{P}(X(n,a,b) \geq i) \\
\leq \;& \tfrac{b}{n+1}\,\mathbb{P}(X(n,a,b) \geq i) + \tfrac{n+1-b}{n+1}\,\mathbb{P}(X(n,a,b) \geq i) \quad \text{by (5)} \\
= \;& \mathbb{P}(X(n,a,b) \geq i).
\end{aligned}$$

现在 (6) 得证，证明完毕。 □

证明 *(3)*，从而证明定理 *4.5*。考虑算法执行到一半、即将揭示 $N^+(w)$ 时的情形。此时，我们知道 G中由顶点组成的集合 A、U 和 W；我们知道 A 中每个顶点的所有出关联弧（也就是说，我们知道随机匹配 M 中与对应于某个顶点的出关联的点相对应的边，

A)，而且所有这些弧都从 A 指向 $A \cup U$。 M 中剩余的 $r(n-|A|)$ 条边构成剩余点上的二分图中的一个均匀随机完美匹配 M' 。将揭示 $N^+(w)$ 时的代价 Y 定义为 W规模随之减少的量。那么

$$Y \leq_s 1 + X(r(n-|A|), r, r|W|) \leq_s 1 + X(r(n-\lfloor \alpha n \rfloor), r, r|W|), \qquad (7)$$

其中第二个不等式使用了引理 4 6 $\leq_s$ $1 \leq Y \leq$。

注意， $\mathbb{E}[Y] \leq 1 + \frac{r|W|}{n\ 1-\alpha()}$。 $r+1$

令 $b \geq 1 + r^{-1}$ 为一个常数。我们假设 n 足够大。将算法的运行划分为若干阶段 $s = 1$，2，.....，其中阶段 s 对应于 $nb^{-s+1} \geq |W| > nb^{-s}$时。考虑阶段 s，其中 $1 \leq s \leq \log_b(r+1)$。令 Y_1， Y_2，.....为本阶段加入 A 的第一个、第二个.....顶点所对应的代价；若算法在加入第 i个顶点之前停止，或 $|W|$ 已降至至多 nb^{-s}，则令 $Y_i = 0$ 。如果加入第 i 个顶点，那么此时 $|W| \leq nb^{-s+1}$ 且 $|A| \leq \lfloor \alpha n \rfloor$，因此由 (7)（在给定截至目前全部历史的条件下）

$$Y_i \leq_s 1 + X(r(n-\lfloor \alpha n \rfloor), r, r|W|) \leq_s Z$$

其中 $Z \sim 1 + X(r(n-\lfloor \alpha n \rfloor)\ r,\ rnb^{-s+1})$。此外，设 Z_1、.....、 Z_k 是 Z 的相互独立副本：那么 $(Y_1$，.....， $Y_k)$ $\leq_s (Z_1$，.....， $Z_k)$，因此 $\sum_{i=1}^k Y_i \leq_s \sum_{i=1}^k Z_i$。回想一下， $1 \leq Z \leq r+1$ 和 $\mathbb{E}[Z] = 1 + \frac{rnb^{-s+1}}{n-\lfloor \alpha n \rfloor} \leq 1 + \beta rb^{-s+1}$，其中 $\beta = (1-\alpha)^{-1}$。但 $rb^{-s+1} \geq \frac{br}{r+1} \geq 1$，所以 $\mathbb{E}[Z] \leq (1+\beta)rb^{-s+1}$。

设 $\gamma < (\beta+1)^{-1}$ 和 $k = \frac{\gamma n}{(b-1)\ br}$，并注意到 $(k+1)\,\mathbb{E}[Z] \leq (\beta+1)\gamma n(b^{-s+1} - b^{-s}) + (1+\beta)rb^{-s+1}$。因此，根据标准不等式（例如参见 [25, 第 10.1] 节），以高概率有 $\sum_{i=1}^{\lceil k \rceil} Z_i \leq n(b^{-s+1} - b^{-s}) - (r+1)$。因此，在这一阶段，以高概率，我们要么向 A 中添加至少 $\lceil k \rceil$ 个顶点，要么到阶段结束时已有 $|A| \geq \alpha n$。这对每个阶段 $s = 1$、.....、$\log_b(r+1)$ 都成立。因此，经过这些阶段后，以高概率，要么 $|A| \geq \log_b(r+1)k = \frac{\gamma}{(b-1)n}\log_b(r+1)\ br$，要么 $|A| \geq \alpha n$。

最后令 $b = 2$、 $\alpha = \frac{1}{5}$ （从而 $\beta = \frac{5}{4}$），以及 $\gamma = \frac{2}{5}$。于是

$$\min\{\frac{\gamma(b-1)\log_b(r+1)}{br}, \alpha\} = \min\{\frac{\log(r+1)}{5r}, \frac{1}{5}\} = \frac{\log(r+1)}{5r}.$$

因此，在上述阶段之后，我们有 $|A| \geq \frac{\log(r+1)\ 5r}{n}$ 以高概率，并且已按要求证明了 (3)。或者，若将 $b = 1 + r^{-1}$ 与 α, γ 分别取得任意接近于 0 和 1 2，并假设 r 足够大，则

$$\min\{\frac{\gamma(b-1)\log_b(r+1)}{br}, \alpha\} = \frac{\gamma(b-1)\log_b(r+1)}{br} \geq (\frac{1}{2} - \varepsilon)\frac{\ln(r+1)}{r}$$

对于任意给定的 $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$。 □

我们知道，对于每个 r-正则简单有向图 D，$\vec{\chi}(D) \leq r+1$，因此 $\vec{\alpha}(D) \geq n/(r+1)$（见引理 2.5 和引理 2.6）。这里关于$\vec{\alpha}(D)$的下界优于定理 4.5 中针对较小 r的下界。

最后，请注意，若 D 是从所有 r-正则 n-顶点简单有向图（即允许二元有向圈）中均匀随机选取的，则定理 4.3 和定理 4.5 同样成立。事实上，我们可以使用本质上相同的证明：在定理 4.3 的证明的第一段中，我们只需将“定向图”替换为“简单有向图”，并且在（3）之后的段落中也可以这样做。

致谢。 第一作者和第三作者得到法国国家研究署项目 21-CE48-0012 DAGDigDec（有向无环图与有向图分解）的支持。第三作者还部分得到西班牙科学与创新部项目 PID2022-137283NB-C22 ACoGe（代数组合学及其与几何的联系）的支持。本工作的一部分是在第一届亚美尼亚图、组合学、概率及其在机器学习中的应用研讨会（2019）期间完成的，作者感谢组织者。作者也感谢审稿人提出的有益意见。

参考文献

[1] R. Aharoni, E. Berger 和 O. Kfir, 《无环代表系与有向图的无环着色》, 《图论杂志》59(3): 177–189 (2008).[2] M. Ajtai, J. Koml´os 和 E. Szemer´edi, 《关于拉姆齐数的一则注记》, 《组合理论杂志*B*辑》29(3): 354–360 (1980).[3] N. Alon, J. Pach 和 J. Solymosi, 《带有禁止子图的Ramsey型定理》, 《组合学》21(2): 155–170 (2001).[4] J. Bang-Jensen, T. Bellitto, T. Schweser 和 M. Stiebitz, 《有向图的Haj´os与Ore构造》, 《电子组合学杂志》27(1), 2020.[5] J. Bensmail, A. Harutyunyan 和 N. K. Le, 《有向图的列表着色》, 《图论杂志》87(4): 492–508 (2018).[6] S. Bessy 和 S. Thomass´e, 《通过 α 回路生成强有向图：Gallai猜想的证明》, 《组合学》27(6): 659–667 (2007).

[7] D. Bokal, G. Fijavˇz, M. Juvan, P. M. Kayll 和 B. Mohar, 《有向图的圆色数》, 《图论杂志》46 (2004), 227–240.[8] B. Bollob´as, 《随机图》, 剑桥大学出版社, 2001.[9] J. A. Bondy, 《不连通定向与Las Vergnas猜想》, *J. London Math. Soc.* s2-14(2): 277–282 (1976).[10]P. Camion, 《完全图的哈密顿路与回路》, *C. R. Acad. Sci. Paris* 249: 2151–2152 (1959).[11] Z. Chen, J. Ma 和 W. Zang, 《具有禁止圈的有向图着色》, 《组合理论杂志*B*辑》115: 210–223 (2015).[12] N. Chen 和 M. Olvera-Cravioto, 《具有给定度分布的有向随机图》, *Stoch. Syst.* 3(1): 147–186 (2013).[13] N. Cordero-Michel 和 H. Galeana-S´anchez, 《有向图二色数的新界》, *Discrete Math. Theor. Comput. Sci.* 21(1) #7 (2019).[14] P. Creed, 《欧拉图上的计数与抽样问题》, 博士论文, 爱丁堡大学, 2010.[15] P. Erd˝os, 《数论与图论中的问题和结果》, 第九届曼尼托巴数值数学与计算会议论文集, 3–21, 1979。https://www.renyi.hu/~p_erdos/1980-30. pdf[16] P. Erd˝os 和 A. Hajnal, 《Ramsey型定理》, 离散应用数学25: 37–52 (1989).[17] P. Erd˝os 和 L. Moser, 《关于将有向图表示为序的并》, 匈牙利科学院数学研究所出版物, *A*辑9: 125– 132 (1964).[18] P. Flajolet 和 R. Sedgewick, 《解析组合学》, 剑桥大学出版社, 2009.[19] A. Harutyunyan 和 B. Mohar, 《关于有向图色数的两个结果》, 离散数学10(312), 2011.[20] A. Harutyunyan 和 B. Mohar, 《有向图列表着色的Gallai定理》, *SIAM*离散数学杂志25(1): 170–180 (2011).

[21] S. Janson、T. Łuczak 和 A. Ruciński，《随机图》，John Wiley & Sons，2011。[22] A. Johansson，无三角形图的渐近选择数，《*DIMACS* 技术报告》91-5（1996）。[23] J. H. Kim，拉姆齐数 $R(3,t)$ 的数量级为 $t^2/\log t$，《随机结构与算法》7(3)：173–207（1995）。[24] M. Molloy，小团数图的列表色数，《《组合理论杂志*B*辑》》134：264–284（2019）。[25] M. Molloy 和 B. Reed，《图着色与概率方法》，Springer，2002。[26] V. Neumann-Lara，有向图的有向色数，《《组合理论杂志*B*辑》》33(3)：265–270（1982）。[27] A. Sanchez-Flores，不含大型传递子竞赛图的竞赛图，《图与组合》14：181–200（1998）。[28] J. B. Shearer，关于无三角形图独立数的注记，《离散数学》46(1)：83–87（1983）。[29] J. Spencer 和 C. R. Subramanian，随机有向图中诱导无环子图的大小，《离散数学、理论与计算机科学》10(2)：47–54（2008）。