交换 BV_∞ 代数、其态射及霍奇结构的 $\frac{\infty}{2}$ -变分

HAO WEN

Abstract. 我们研究交换 BV_∞ 代数之间的态射，并证明在满足适当的附加假设时，交换 BV_∞ 代数的拟同构会导出带极化的 $\frac{\infty}{2}$ -霍奇结构变分之间的一个识别，从而也导出弗罗贝尼乌斯流形之间的识别。我们给出一个源自奇点理论的具体例子来说明这一结果。

arXiv:2603.02953v1 [math.AG] 3 Mar 2026

1. Introduction

背景。 微分 Gerstenhaber–Batalin–Vilkovisky（简称 dGBV）代数在镜像对称的 B 模型中发挥着重要作用。在 [BK、LLS、LW、M], 中，研究者从光滑多尔博向量场的 dGBV 代数出发，利用它们在 Calai-Yau 几何和 Landau-Ginzburg 模型的变形模空间上构造弗罗贝尼乌斯流形结构。这些弗罗贝尼乌斯流形结构编码了相应模型的零亏格信息。另一方面，镜像对称中有著名的 LG/CY 对应猜想。在零亏格情形下，该猜想预言，由一对密切相关的 Calabi–Yau 流形和 Landau–Ginzburg 模型应当诱导出同构的弗罗贝尼乌斯流形。由于这两种情形中的弗罗贝尼乌斯流形结构都源自 dGBV 代数，因此自然会期待这种同构由相应 dGBV 代数之间的某种态射所诱导。 [CZ] 证明，若两个 dGBV 代数之间存在保持所有结构的严格拟同构，则它确实会诱导出弗罗贝尼乌斯流形的同构。

本文旨在推广 [CZ] 的工作，并为通过 dGBV 代数的态射研究 LG/CY 对应奠定基础。鉴于 dGBV 代数会诱导出微分分次李代数（简称 dgLAs），且 L_∞ 态射为比较 dgLAs 提供了极大的灵活性——Kontsevich 著名的形式性定理便是一个例证——因此，在 dGBV 框架中考察同伦论结构是很自然的。将视角限定于交换情形，便得到交换 BV_∞ 代数和 BV_∞ 态射。交换 BV_∞ 代数的概念最早由 O. Kravchenko 在 [K]中提出。 [CL] 在对源代数施加额外假设的条件下给出了交换 BV_∞ 代数之间态射的定义，而 [B] 和 [J]则分别独立地给出了一个一般定义。

结果。 本文分析交换 BV_∞ 代数诱导弗罗贝尼乌斯流形的条件，以及 BV_∞ 拟同构诱导弗罗贝尼乌斯流形同构的条件。

对于第一部分，我们使用一个中间对象，即带极化的 $\frac{\infty}{2}$-霍奇结构变分。这一概念由 [Ba] 提出，用于构造与紧致 Calabi–Yau 流形的广义变形相关联的弗罗贝尼乌斯流形。为构造这种结构，我们假设交换 BV_∞ 代数满足霍奇到德拉姆退化条件，并且在一个密切相关的平坦丛上存在平坦配对和良基。对于第二部分，我们分析 BV_∞ 拟同构诱导带极化的 $\frac{\infty}{2}$-霍奇结构变分同构的条件。我们证明，态射与配对相容便已足够。

这两部分都依赖于对由 Maurer–Cartan 元扭曲交换 BV_∞ 代数和 BV_∞态射的深入研究。前者的扭曲已在 [CL]中讨论。后者的扭曲也曾在该文中讨论，但仅限于对态射的源代数附加假设的情形。据作者所知，文献中尚未出现一般情况下 BV_∞态射的扭曲。

BV_∞ 态射的定义相当复杂，因此很难给出具体例子。为了说明我们的结果如何发挥作用，并初步了解其在 LG/CY 对应中的潜在应用，我们在第 6 节中明确推导了与 A_1 奇点相关的 dGBV 代数这一情形。

组织结构。第 2 节回顾交换 BV_∞ 代数和 BV_∞态射的定义。第 3 节讨论交换 BV_∞ 代数与 $L_\infty[1]$ 代数之间的关系，并说明这些结构如何由 Maurer–Cartan 元扭曲。第 4 节回顾 $\frac{\infty}{2}$-霍奇结构变分的定义，并讨论如何从交换 BV_∞ 代数导出此类结构。第 5 节说明 BV_∞ 拟同构如何诱导带极化的$\frac{\infty}{2}$-霍奇结构变分之间的同构。最后，第 6 节给出一个示例来说明这些结果。

致谢。 本研究得到国家自然科学基金委员会青年科学基金（项目编号 12201314）的资助。

2. Commutative BV_∞ algebra and BV_∞ morphism

交换 BV_∞ 代数这一概念最早由 [K] 引入。它是微分 Gerstenhaber–Batalin–Vilkovisky（dGBV）代数的自然推广。尽管它并未涵盖同伦 BV 代数这一完整的拟序概念，但仍为变形量子化和镜像对称中的各种应用提供了自然的代数框架。

设 $\mathbb{K}$ 是一个特征为 0 的域。本文中，所有代数均定义在 $\mathbb{K}$ 上，并假设所有映射都是 $\mathbb{K}$- 线性的。设 A 是一个带单位元的 $\mathbb{Z}$- 分次交换代数；设 m 是一个奇整数，$\hbar$ 是一个次数为 $1-m$ 的形式参数（$1-m$ 为偶整数）；设 $A[[\hbar]]$ 和 $A((\hbar))$ 分别是取值于 A 的形式幂级数代数和形式洛朗级数代数。

定义 2.1. 在 A 上的一个次数 m 交换 BV_∞ 代数结构是一个一次映射

$$\Delta := \sum_{k=0}^{\infty} \Delta_k \hbar^k \in End_{\mathbb{K}[[\hbar]]}(A[[\hbar]])$$

使得

- $\Delta(1_A) = 0$，其中 1_A 是 A 的单位元；
- $\Delta^2 = 0$；
- $ad_{\alpha_k} \cdots ad_{\alpha_1}(\Delta)(1_A) \equiv 0$ (模 $\hbar^{k-1}$) 对所有 $k \geq 2$ 以及 α_1、$\cdots$、$\alpha_k \in A[[\hbar]]$，其中 $ad_\alpha(\Delta) := [\Delta, \alpha]$ 是分次交换子。

元组 （A、Δ）称为次数为 m 的交换 BV_∞ 代数。

定义 2.1 中的第二个条件蕴含 $\Delta_0^2 = 0$。我们可以定义三个密切相关的上同调群

$$H(A, \Delta_0), \quad H(A[[\hbar]], \Delta), \quad \text{and} \quad H(A((\hbar)), \Delta).$$

当 α 是 Δ_0 或 Δ-闭的时，其上同调类记作 $[\alpha]$。最后一个条件（下文将称为 Koszul 条件）等价于要求 Δ_k 是一个阶数至多为 $k+1$ 的微分算子：

$$\mathrm{ad}_{a_{k+2}} \cdots \mathrm{ad}_{a_1}(\Delta_k)(1_A) = 0, \quad \forall a_1, \cdots, a_{k+2} \in A.$$

在 [B], 中，这个条件表述为 Koszul 括号 Δ 模去 $\hbar$ 的幂后为零。事实上，设

$$\mathcal{K}_n(\Delta)(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) := \sum_{i=1}^{n} \sum_{\sigma \in S(i, n-i)} \pm_K (-1)^{n-i} \Delta(\alpha_{\sigma(1)} \cdots \alpha_{\sigma(i)}) \alpha_{\sigma(i+1)} \cdots \alpha_{\sigma(n)}$$

为 Δ 的 Koszul 括号，其中 $S(i,\ n-i)$ 表示 $(i,\ n-i)$-非交错置换的集合，而 $\pm_K$ 表示与 α_1, $\cdots$, α_n 的相应置换相关联的 Koszul 符号，则

$$\mathcal{K}_n(\Delta)(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = \mathrm{ad}_{\alpha_k} \cdots \mathrm{ad}_{\alpha_1}(\Delta)(1_A).$$

我们的次数假设蕴含，对于 $\alpha = a\hbar^k$、$|\alpha| := \deg(\alpha) = \deg(a) + k(1-m)$。此外，$\Delta_k$ 的次数为 $1 + k(m-1)$。另请注意，若当 $k \geq 2$ 时 $\Delta_k = 0$，则定义 2.1 归结为 dGBV 代数的定义。

关于交换 BV_∞ 代数之间态射的定义， [CL] 在假设源代数是自由的情况下给出了该定义。本文采用的定义则由 [B] 和 [J]分别独立提出。在写出该定义之前，我们先介绍累积量的概念；这是概率论、统计学和量子物理中常用的概念。设 $f : A \to B$ 是含幺代数之间的含幺映射，则 f 的 n^{th} 累积量是一个映射$\kappa_n(f) : A^{\otimes n} \to B$，定义为

$$\kappa_n(f)(a_1, \cdots, a_n) := \sum_{\substack{1 \leq k \leq n, I_1, \cdots, I_k \neq \emptyset \\ I_1 \sqcup \cdots \sqcup I_k = \{1, \cdots, n\}}} (-1)^{k-1}(k-1)! \pm_K \prod_{1 \leq j \leq k} f(\prod_{i \in i_j} a_i).$$

这里的求和遍历 C_n^k把 $\{1, \cdots, n\}$ 分成 k 个非空子集之不交并的无序划分 $I_1, \cdots, I_k$，而 $\pm_K$再次表示与所得置换 $a_1, \cdots, a_n$相关联的适当 Koszul 符号。由定义， $\kappa_1(f) = f$。为了后面的使用，我们

给出如下关于累积量的一个有用恒等式。对 $a_1, \cdots, a_n \in A$，设 $J_1, \cdots, J_n$ 为形式参数，且 $|J_i| = -|a_i|$ 使得 $\sum_i J_i \alpha_i$ 的次数为零。由初等组合论证，我们可以写出

$$\kappa_n(f)(a_1, \cdots, a_n) = \frac{\partial^n}{\partial J_1 \cdots \partial J_n}\Big|_{J_1=\cdots=J_n=0} \log f(e^{\sum_{i=1}^n J_i a_i}), \tag{1}$$

其中，$\frac{\partial}{\partial J_i}$ 表示通常的导子，并在 $|J_i|$ 为奇数时通过消去 J_i 起作用。请注意，右侧幂级数展开中只有有限项有贡献，因此不存在收敛性问题。当所有 a_i 的次数都为零时，这就还原了概率论中累积量的原始定义。

定义 2.2. 给定一对次数为 m 的交换 BV_∞ 代数(A, Δ) 和(B, Δ')，它们之间的一个BV_∞ 态射是一个零次映射

$$f := \sum_{k=0}^{\infty} f_k \, \hbar^k \in Hom_{\mathbb{K}[[\hbar]]}(A[[\hbar]], B[[\hbar]])$$

满足

- $f(1_A) = 1_B$,
- $f \circ \Delta = \Delta' \circ f$,
- $\kappa_n(f)(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \equiv 0 \ (mod\ \hbar^{n-1})$ *for all* $n \geq 2$ *and* $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in A[[\hbar]]$.

当 $f = f_0$ 在 $\hbar$中没有高阶项时，我们称 f 是严格的。

次数假设意味着 f_k的次数为 k（$m-1$）。第二个条件可以写成一列无穷恒等式，其中前两个是

$$f_0 \, \Delta_0 = \Delta_0' \, f_0,$$
$$f_0 \, \Delta_1 + f_1 \, \Delta_0 = \Delta_0' \, f_1 + \Delta_1' \, f_0.$$

这意味着上同调之间存在态射

$$f_0 : H(A, \Delta_0) \to H(B, \Delta_0')$$

and

$$f : H(A[[\hbar]], \Delta) \to H(B[[\hbar]], \Delta').$$

如果 f_0 是拟同构，我们就称 f 是一个 BV_∞ 拟同构。稍后将称为累积量条件的最后一个条件更为复杂。它描述了 f_k与 A 和 B的代数（即乘法）结构之间的相容性。它可以写成一列无穷的恒等式，其中前两个为

$$\begin{aligned} f_0(ab) &= f_0(a) f_0(b), \\ f_1(abc) &= f_1(ab) f_0(c) + (-1)^{|b||c|} f_1(ac) f_0(b) + (-1)^{|a|(|b|+|c|)} f_1(bc) f_0(a) \\ &\quad - f_1(a) f_0(b) f_0(c) - (-1)^{|a||b|} f_1(b) f_0(a) f_0(c) - (-1)^{|c|(|a|+|b|)} f_1(c) f_0(a) f_0(b). \end{aligned}$$

特别是， f_0 保持乘积结构。然而，第二个恒等式——连同后续所有恒等式——使得很难确定给定映射 f 是否为一个BV_∞-态射。

3. Maurer-Cartan elements and twisting procedure

设 (A,Δ) 是一个次数为 m 的交换 BV_∞ 代数。由于满足 Koszul 条件，对于每个 $n\geq 1$, 算子

$$\mu_n(\alpha_1,\cdots,\alpha_n):=\frac{1}{\hbar^{n-1}}\mathcal{K}_n(\Delta)(\alpha_1,\cdots,\alpha_n),$$

定义了一个次数为 $1+(n-1)(m-1)$ 的映射 $\mu_n\colon A[[\hbar]]^{\otimes n}\to A[[\hbar]]$。此外，我们可以定义$l_n$: $A^{\otimes n}\to A$，它是 μ_n 的经典极限，定义如下:

$$l_n(a_1,\cdots,a_n):=\mu_n(a_1,\cdots,a_n)|_{\hbar=0}.$$

根据 [B] 的注 2.3 和 [BL], 的命题 3.15，$A[[\hbar]][1-m],\{\mu_i\}$ 和 $(A[1-m],\{l_i\})$ 都是 $L_\infty[1]$ 代数。这里我们用记号 $(V[1-m])^i=V^{i+1-m}$ 表示分次向量空间 V。根据 [B], 的公式 (13)，对于次数为 $1-m$ 的元素 $\boldsymbol{\gamma}\in A[[\hbar]]$，有

$$\hbar\Delta e^{\boldsymbol{\gamma}/\hbar}=\left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i!}\mu_i(\boldsymbol{\gamma},\cdots,\boldsymbol{\gamma})\right)e^{\boldsymbol{\gamma}/\hbar}.$$

若满足下列条件，则称 $\boldsymbol{\gamma}$ 为 Maurer-Cartan（简称 MC）元素

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i!}\mu_i(\boldsymbol{\gamma},\cdots,\boldsymbol{\gamma})=0 \tag{2}$$

或等价地

$$\Delta e^{\boldsymbol{\gamma}/\hbar}=0. \tag{3}$$

公式 (3) 对本文余下部分具有根本重要性。

根据 [B], a BV_∞ 态射 $f:(A,\Delta)\to(B,\Delta')$ 的命题 2.10，它诱导出一个 $L_\infty[1]$ 代数的态射 $\mathcal{F}$，其 n^{th} 分量 $\mathcal{F}_n:A[[\hbar]]^{\otimes n}\to B[[\hbar]]$ 由下式给出

$$\mathcal{F}_n(\alpha_1,\cdots,\alpha_n):=\frac{1}{\hbar^{n-1}}\kappa_n(f)(\alpha_1,\cdots,\alpha_k). \tag{4}$$

注意，根据累积量条件，(4) 右端确实属于 $B[[\hbar]]$。$\mathcal{F}_n$ 的次数为 $(n-1)(m-1)$。设 $\boldsymbol{\gamma}^A$ 是 $A[[\hbar]]$ 中的一个 MC 元素，定义

$$\boldsymbol{\gamma}^B:=\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n!}\mathcal{F}_n(\boldsymbol{\gamma}^A,\cdots,\boldsymbol{\gamma}^A),$$

那么，根据关于态射的众所周知的结论，$\boldsymbol{\gamma}^B$ 是 $B[[\hbar]]$ 中的一个 MC 元素。在我们的 BV_∞ 情形中，其中 $\mathcal{F}$ 由态射 f BV_∞ 诱导，我们有

$$\boldsymbol{\gamma}^B=\hbar\log f(e^{\boldsymbol{\gamma}^A/\hbar}). \tag{5}$$

该恒等式由 [B] 的注 1.17 得出。方程 (5) 等价于

$$e^{\boldsymbol{\gamma}^B/\hbar}=f(e^{\boldsymbol{\gamma}^A/\hbar}).$$

根据 BV_∞ 态射的定义和公式 (3),

$$\Delta' e^{\boldsymbol{\gamma}^B/\hbar}=\Delta' f(e^{\boldsymbol{\gamma}^A/\hbar})=f\Delta(e^{\boldsymbol{\gamma}^A/\hbar})=0,$$

正如公式 (3) 所预期的那样。

给定一个 $A[[\hbar]]$ 中的 MC 元素 $\boldsymbol{\gamma}$，我们可以定义一个算子 $\Delta_{\boldsymbol{\gamma}}\colon A[[\hbar]] \to A((\hbar))$，其定义如下:

$$\Delta_{\boldsymbol{\gamma}}(\alpha) := e^{-\boldsymbol{\gamma}/\hbar} \circ \Delta \circ e^{\boldsymbol{\gamma}/\hbar}(\alpha). \tag{6}$$

这里 $e^{\boldsymbol{\gamma}/\hbar}$ 与 $e^{-\boldsymbol{\gamma}/\hbar}$ 的作用由乘法给出。显然我们有

$$\Delta_{\boldsymbol{\gamma}}(1_A) = 0, \qquad \Delta_{\boldsymbol{\gamma}}^2 = 0.$$

在另一 方面，由 Baker–Campbell–Hausdorff 恒等式的伴随形式，我们可以写成

$$\Delta_{\boldsymbol{\gamma}} = \sum_{i\geq 0} \frac{1}{i!\hbar^i} \mathrm{ad}_{\boldsymbol{\gamma}}^i(\Delta).$$

因此对于 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in A[[\hbar]]$,

$$\mathcal{K}_n(\Delta_{\boldsymbol{\gamma}})(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = \sum_{i\geq 0} \frac{1}{i!\hbar^i} \mathrm{ad}_{\alpha_n} \cdots \mathrm{ad}_{\alpha_1} \mathrm{ad}_{\boldsymbol{\gamma}}^i(\Delta)(1_A)$$

由此可知， $\Delta_{\boldsymbol{\gamma}}$ 也满足 Koszul 条件。特别地，当 $n = 1$时，我们看到$\Delta_{\boldsymbol{\gamma}}$ 将 $A[[\hbar]]$ 映到自身。因此 $\Delta_{\boldsymbol{\gamma}}$ 在 A上定义了一个新的次数为 m 的交换 BV_∞ 代数结构。我们将 $\Delta_{\boldsymbol{\gamma}}$ 称为由 MC 元素 $\boldsymbol{\gamma}$扭变的 BV_∞ 算子。

设 $\boldsymbol{\gamma}^A \in A[[\hbar]]$ 是一个 MC 元素，且 $\boldsymbol{\gamma}^B = \hbar \log f(e^{\boldsymbol{\gamma}^A/\hbar})$。令 $\Delta_{\boldsymbol{\gamma}^A}$， $\Delta_{\boldsymbol{\gamma}^B}$ 为相应的扭曲 BV_∞ 算子。定义一个映射

$$f_{\boldsymbol{\gamma}^A} := e^{-\boldsymbol{\gamma}^B/\hbar} \circ f \circ e^{\boldsymbol{\gamma}^A/\hbar} : A[[\hbar]] \to B((\hbar)),$$

那么显然,

$$f_{\boldsymbol{\gamma}^A}(1_A) = 1_B, \quad f_{\boldsymbol{\gamma}^A} \circ \Delta_{\boldsymbol{\gamma}^A} = \Delta_{\boldsymbol{\gamma}^B} \circ f_{\boldsymbol{\gamma}^A}. \tag{7}$$

对于 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in A[[\hbar]]$，记 $\alpha := \sum_{i=1}^n J_i\alpha_i$，并将 $\frac{\partial^n}{\partial J_1 \cdots \partial J_n}\Big|_{J_1=\cdots=J_n=0}$ 记为 $\mathrm{d}\,\mathrm{d}J\big|_{J=0}$，则

$$\begin{aligned}
&\kappa_n(f_{\boldsymbol{\gamma}^A})(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}J}\Big|_{J=0} \log\left[e^{-\boldsymbol{\gamma}^B/\hbar} f(e^{\boldsymbol{\gamma}^A/\hbar} e^{\alpha})\right] \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}J}\Big|_{J=0} \log\left[e^{-\boldsymbol{\gamma}^B/\hbar} f(e^{\boldsymbol{\gamma}^A/\hbar+\alpha})\right] \text{ (since } \boldsymbol{\gamma}^A/\hbar \text{ has degree 0)} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}J}\Big|_{J=0} \log\left[e^{-\boldsymbol{\gamma}^B/\hbar+\sum_{i=1}^\infty \frac{1}{i!}\kappa_k(f)(\boldsymbol{\gamma}^A/\hbar+\alpha,\cdots,\boldsymbol{\gamma}^A/\hbar+\alpha)}\right] \text{ (by Remark 1.17 of [B])} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}J}\Big|_{J=0} \left[-\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{i!}\kappa_i(f)(\boldsymbol{\gamma}^B/\hbar, \cdots, \boldsymbol{\gamma}^B/\hbar) + \sum_{i=1}^\infty \frac{1}{i!}\kappa_i(f)(\boldsymbol{\gamma}^A/\hbar+\alpha, \cdots, \boldsymbol{\gamma}^A/\hbar+\alpha)\right] \\
&= \sum_{i=0}^\infty \frac{1}{i!\hbar^i}\kappa_{i+n}(f)(\boldsymbol{\gamma}^A, \cdots, \boldsymbol{\gamma}^A, \alpha_1, \cdots, \alpha_n).
\end{aligned}$$

由此可知，当 $n=1$, f_γ 将 $A[[\hbar]]$ 映射到自身时。此外， f_{γ^A} 也满足累积量条件，并且

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\gamma^A}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n) :=& \frac{1}{\hbar^{n-1}}\kappa_n(f_{\gamma^A})(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\\ =&\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i!\hbar^{i+n-1}}\kappa_{i+n}(f)(\boldsymbol{\gamma}^A,\cdots,\boldsymbol{\gamma}^A,\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\\ =&\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i!}\mathcal{F}_{i+n}(\boldsymbol{\gamma}^A,\cdots,\boldsymbol{\gamma}^A,\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\end{aligned}$$

定义了一个从 $A[[\hbar]][1-m]$ 到 $B[[\hbar]][1-m]$的 $L_\infty[1]$ 态射。它与由 $\boldsymbol{\gamma}^A$对 $\mathcal{F}$ 作扭曲得到的$L_\infty[1]$ 态射一致。我们称 f_{γ^A} 为由 $\boldsymbol{\gamma}^A$对 f 作扭曲得到的 BV_∞ 态射。

4. $\frac{\infty}{2}$-variation of Hodge structure

本节回顾霍奇结构的 $\frac{\infty}{2}$ -变分的定义，并讨论此类结构由交换 BV_∞-代数导出的条件。众所周知（参见 [Ba]），此类结构可用于构造弗罗贝尼乌斯流形。以下定义取自 [L]。

定义 4.1。一个 $\frac{\infty}{2}$ -霍奇结构变分 （$\frac{\infty}{2}$ -变分霍奇结构）由一个带结构层 $\mathcal{O}_\mathcal{M}$的参数空间 $\mathcal{M}$ 、一个有限秩的 $\mathcal{O}_\mathcal{M}[[\hbar]]$-模 $\mathcal{E}$ 以及一个平坦联络组成

$$\nabla : \mathcal{E} \to \Omega_\mathcal{M}\otimes\hbar^{-1}\mathcal{E},$$

以及一个配对

$$(-,-)_\mathcal{E} : \mathcal{E}\times\mathcal{E}\to\mathcal{O}_\mathcal{M}[[\hbar]]$$

满足以下条件：

- $(\alpha_1,\alpha_2)_\mathcal{E}(\hbar) = (-1)^{|\alpha_1||\alpha_2|}(\alpha_1,\alpha_2)_\mathcal{E}(-\hbar)$;
- $(g(\hbar)\alpha_1,\alpha_2)_\mathcal{E}(\hbar) = (\alpha_1,g(-\hbar)\alpha_2)_\mathcal{E}(\hbar) = g(\hbar)(\alpha_1,\alpha_2)_\mathcal{E}(\hbar), \forall g(\hbar)\in\mathbb{K}((\hbar))$, *here* $(-,-)_\mathcal{E}$ *denotes also its* $\mathbb{K}((\hbar))$*-linear extension by abuse of notation;*
- $(-,-)_\mathcal{E}$ *is* ∇*-flat;*
- *The induced paring on*

$$\mathcal{E}/\hbar\mathcal{E}\times\mathcal{E}/\hbar\mathcal{E}\to\mathcal{O}_\mathcal{M}$$

是非退化的。

若存在 $\mathcal{E}$ 的一个截面 s 使得，则称该 $\frac{\infty}{2}$ -变分霍奇结构是极小泛的

$$\hbar\nabla s : T\mathcal{M}\to\mathcal{E}/\hbar\mathcal{E},\qquad X\mapsto\nabla_X s$$

是一个同构。

现在我们转而探讨：在什么条件下，可以由一个交换 BV_∞-代数构造极小泛的 $\frac{\infty}{2}$ -霍奇结构变分。

第一个关键要素是一个参数空间 $\mathcal{M}$，我们预期它是光滑的。在我们的设定中， $\mathcal{M}$的光滑性等价于 Maurer–Cartan 方程 (2) 的可解性，并且可以由某个谱序列的退化推出，具体如下。设 $C^{p,\,q} := A^{mp+q}$ 和 $\partial_k := \Delta_k : C^{p,\,q}\to C^{p+k,\,q+1-k}$，则 $C^\bullet$，其中 $C^n := \prod_{p+q=n} C^{p,\,q}$

配备微分 $\partial := \sum_{k\geq 0}\partial_k$。关于 Δ_k 次数的假设确保 ∂ 的次数为一次。由 $F^pC^\bullet := \sum C^{k\geq p,\bullet}$ 定义的列过滤 $F^\bullet$ 给 $(C^\bullet, \partial)$ 定义了一个递减过滤，因此得到谱序列 $E^\bullet(A)$。

假设 1. 我们假设交换 BV_∞ 代数 (A, Δ) 满足霍奇到德拉姆退化条件，即 $E^\bullet(A)$ 在第一页退化。

霍奇到德拉姆退化条件有若干等价刻画，详见[DSV]。作为直接推论，存在一个映射

$$S : H(A, \Delta_0) \to H(A[[\hbar]], \Delta)$$

使得

$$T \circ S = \mathrm{id}_{H(A,\Delta_0)}.$$

这里 $T:\ A[[\hbar]] \to A$ 是将 $\hbar$ 映为零所给出的映射，它定义了一个映射

$$T : H(A[[\hbar]], \Delta) \to H(A, \Delta_0).$$

由此可知，$H(A[[\hbar]], \Delta)$ 是秩为 $\mu := \dim_{\mathbb{K}} H(A, \Delta_0)$ 的自由 $\mathbb{K}[[\mathbf{u}]]$-模。由公式 (3)，与 [T] 中定理 2 相同的证明表明，MC 方程 (2) 存在如下形式的普适规范化解

$$\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}, \hbar) = \sum_i \gamma_i u^i + \sum_{i,j} \gamma_{ij}(\hbar) u^i u^j + \sum_{i,j,k} \gamma_{ijk}(\hbar) u^i u^j u^k + \cdots, \tag{8}$$

其中，$\{\gamma_i\}_{1\leq i\leq \mu}$ 是 $H(A[[\hbar]], \Delta)$的任意 $\mathbb{K}[[\hbar]]$-基，$\mathbf{u} = (u^1, \cdots, u^\mu)$是相对于基 $T\gamma_1, \cdots, T\gamma_\mu$而言的$H(A, \Delta_0)$上的坐标。这特别意味着，$A$ 上的 $L_\infty[1]$代数结构的变形不存在阻碍。记 $\mathcal{M}$ 为$H(A, \Delta_0)$中零点的形式邻域，则有 $\mathcal{M} = \mathrm{Spec}\ \mathbb{K}[[\mathbf{u}]]$。

第二个要素是一个平坦丛（$\mathcal{E} \to \mathcal{M}, \nabla$）。令 $\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}, \hbar)$为如上所述的万有正规化MC元，则上同调群 $\mathcal{V} := H(A((\hbar)), \Delta_{\boldsymbol{\gamma}})$是一个 $\mathbb{K}[[\mathbf{u}]]$-模。从几何上看，它可以视为 $\mathcal{M}$ 上的一个（无限维）向量丛，其在$\mathbf{u}$处的纤维为 $\mathcal{V}_{\mathbf{u}} := H(A((\hbar)), \Delta_{\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u},\hbar)})$。对于 $[\alpha] \in H(A((\hbar)), \Delta)$，由（6）可知，$[e^{-\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u},\hbar)/\hbar}\alpha]$ 是 $H(A((\hbar)), \Delta_{\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u},\hbar)})$中的一个良定义上同调类，因此定义了 $\mathcal{V}$ 的一个截面。我们可以将它们视为 $\mathcal{V}$ 上的平坦联络 ∇ 的平坦截面，其

$$\nabla = \nabla^{\boldsymbol{\gamma}} := \sum_{i=1}^{\mu} \left(\frac{\partial}{\partial u^i} + \frac{1}{\hbar}\frac{\partial \boldsymbol{\gamma}}{\partial u^i}\right) \mathrm{d}u^i.$$

考虑 $\mathcal{V}$ 的子丛 $\mathcal{E}$，其中 $\mathcal{E}_{\mathbf{u}} = H(A[[\hbar]], \Delta_{\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u},\hbar)}) \subset \mathcal{V}_{\mathbf{u}}$，将 ∇ 限制到 $\mathcal{E}$ 后满足

$$\nabla : \mathcal{E} \to \Omega_{\mathcal{M}} \otimes \hbar^{-1}\mathcal{E}.$$

注 4.2。一种等价的表述方式——事实上，这是在 [Ba], 中对丛 $(\mathcal{E} \to \mathcal{M}, \nabla)$ 进行表述的原始形式——是取

$$\mathcal{E}_{\boldsymbol{u}} := e^{\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{u},\hbar)/\hbar} H(A[[\hbar]], \Delta_{\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{u},\hbar)}) \subset H(A((\hbar)), \Delta)$$

以及 *ta* 使 ∇ 成为平凡丛的平凡平坦联络在 $\mathcal{E}$ 上的限制 *le*

$$\mathcal{M} \times H(A((\hbar)), \Delta) \to \mathcal{M}.$$

我们需要的最后一个要素是一个配对。由于无法直接从 BV_∞ 代数的定义中得到配对，因此我们需要进一步假设它存在。

假设 2. 给定任意万有正规化*MC*元 $\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{u}\ \hbar)$，令 $(\mathcal{E} \to \mathcal{M}, \nabla)$ 为如上所定义的平坦丛。我们假设存在一个配对 $(-,-)_{\mathcal{E}}$，其形式如定义 *4.1* 所述，使得$(\mathcal{E}, \mathcal{M}, \nabla, (-,-)_{\mathcal{E}})$ 定义一个 $\frac{\infty}{2}$-变分霍奇结构。

—

注记 4.3. 我们认为，一旦对某个固定的万有正规化 *MC* 元素存在配对，那么对其他任意选择也同样存在配对。要完整论证这一说法，需要详细处理规范群对交换 BV_∞ 代数的 *MC* 元素的作用。我们将这部分工作留待今后完成。

例 4.4. 设(A, Δ, Tr) 为一个循环交换 BV_∞，如 [W]，中所述，并假设其满足霍奇到德拉姆退化条件，则假设 *2* 自动成立。更具体地说，迹映射 $Tr\colon A[[\hbar]] \to \mathbb{K}[[\hbar]]$ 在 $A[[\hbar]]$ 上定义了如下配对：

$$(\alpha, \beta) = Tr\left(\alpha\overline{\beta}\right),$$

其中 $\overline{\beta(\hbar)} := \beta(-\hbar)$。循环性质表明，此配对可下降为$H(A((\hbar))\ \Delta)$上的配对：

$$([\alpha], [\beta]) = Tr\left(\alpha\overline{\beta}\right).$$

令 $\boldsymbol{\gamma}$ 为任意万有正规化*MC*元，∇ 为相应的平坦联络；我们通过平行移动到 $\mathcal{E}_0 \otimes \mathbb{K}((\hbar)) = H(A((\hbar))\ \Delta)$，来定义 $\mathcal{E}_{\boldsymbol{u}}$ 上的配对：对于α、$\beta \in \mathcal{E}_{\boldsymbol{u}}$，定义

$$(\alpha, \beta)_{\mathcal{E}_{\boldsymbol{u}}} := Tr\left(e^{\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{u},\hbar)/\hbar}\alpha \cdot \overline{e^{\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{u},\hbar)/\hbar}\beta}\right) = Tr\left(e^{(\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{u},\hbar)-\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{u},-\hbar))/\hbar}\alpha(\hbar)\beta(-\hbar)\right).$$

由于$(\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{u}\ \hbar)\ -\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{u}\ -\hbar))/\hbar$和 $\alpha(\hbar)\beta(-\hbar)$ 都属于 $A[[\hbar]]$，$(\alpha, \beta)_{\mathcal{E}_{\boldsymbol{u}}} \in \mathbb{K}[[\hbar]]$。容易验证$(-,-)_{\mathcal{E}}$ 满足其他条件。

如例 4.4所示，交换 BV_∞ 代数的例子包括：紧卡拉比-丘流形 X^-上的光滑多尔博向量场所构成的 dGBV 代数(PV(X) ∂, ∂, Tr)，其迹映射由在 X上的积分给出（见 [BK]）；Landau-Ginzburg模型 (X, W)的紧支撑光滑多尔博向量场所构成的 dGBV 代数 (PV$_c$(X) ∂_W, ∂, Tr)，其迹映射由积分给出（见 [LLS, LW]）。更多例子见 [W]。

此外，也存在一些交换 BV_∞ 代数，它们具有配对，但该配对并非由例 4.4 中那种迹映射诱导。

例 4.5. 设 W 是 $\mathbb{C}^n$ 上的一个全纯多项式，且只有一个孤立临界点。考虑 $\Theta^\bullet(\mathbb{C}^n)$，即 $\mathbb{C}^n$ 上的全局全纯多向量场集合，它带有两个算子$\{W, -\}$和 ∂。三元组 $(\Theta^\bullet(\mathbb{C}^n)\ \{W, -\}, \partial)$ 是一个满足霍奇到德拉姆退化条件的 *dGBV* 代数。在此情形下，斋藤恭司的高阶留数配对满足定义 *4.1* 中的条件，但它并非由迹映射 [1]给出。详情请参见 [LLS]。

我们的目标是在 $\mathcal{M}$ 上构造形式弗罗贝尼乌斯流形结构，而以下假设对于实现这一目标至关重要。

[1]它可以用迹映射来定义，但该迹并非取自 $\Theta^\bullet(\mathbb{C}^n)$。

假设3。 $\mathcal{E}_0 = H(A[[\hbar]], \Delta)$上的配对存在一个良基，即 $H(A[[\hbar]], \Delta)$ 的一个 $\mathbb{K}[[\hbar]]$-基$\gamma_1, \cdots, \gamma_\mu$，使得

$$(\gamma_i, \gamma_j)_{\mathcal{E}_0} = \mathbb{K}, \quad \forall 1 \leq i, j \leq \mu.$$

在 $H(A((\hbar)), \Delta)$ 上定义一个辛配对为

$$\omega(\beta_1, \beta_2) := \mathrm{Res}_{\hbar=0}(\beta_1, \beta_2)_{\mathcal{E}} \mathrm{d}\hbar, \quad \forall \beta_1, \beta_2 \in H(A((\hbar)), \Delta),$$

则 $\mathcal{E}_0$ i 是 $H(A((\hbar)), \Delta)$ 的一个拉格朗日子空间。设 $\gamma_1, \cdots, \gamma_\mu$ 是一个良基，则

$$\mathcal{L} := \hbar^{-1}\mathrm{Span}_{\mathbb{K}[\hbar^{-1}]}\langle \gamma_1, \cdots, \gamma_\mu \rangle$$

是满足 $H(A((\hbar)), \Delta) = \mathcal{E}_0 \oplus \mathcal{L}$ 的另一个拉格朗日子空间。我们称 $\mathcal{L}$ 为 $(\mathcal{E}, \mathcal{M}, \nabla, (-, -)_{\mathcal{E}})$ 的一个极化。

MC 元素 γ 的普适性意味着 $\overset{\infty}{2}$ 变分霍奇结构是极小泛的。一个经典事实（例如参见 [Ba, L]）是，一个极小泛 $\overset{\infty}{2}$ -变分霍奇结构与一个极化一起可以导出一个弗罗贝尼乌斯流形。因此，我们陈述如下命题。

命题4.6. 设(A, Δ) 是一个满足假设*1*、*2*和*3*的交换 BV_∞ 代数，则在$H(A, \Delta_0)$中零点的形式邻域 $\mathcal{M}$ 上存在一个弗罗贝尼乌斯流形结构。

5. BV_∞ QUASI-ISOMORPHISM

设 $f\colon (A, \Delta) \to (B, \Delta')$是一个次数为 m的交换 BV_∞代数拟同构，则 $f_0 : H(A, \Delta_0) \to H(B, \Delta'_0)$ 将 $\mathcal{M}_A$ 与 $\mathcal{M}_B$相对应。设 A 和 B均满足假设1。给定 $A[[\hbar]]$中的一个万有正规化MC元 $\boldsymbol{\gamma}^A(\mathbf{u}\ \hbar)$，则

$$\boldsymbol{\gamma}^B(\mathbf{u}, \hbar) := \hbar \log f\left(e^{\boldsymbol{\gamma}^A(\mathbf{u}, \hbar)/\hbar}\right)$$

是 $B[[\hbar]]$中的一个万有正规化MC元。由(7)， $f_{\boldsymbol{\gamma}^A}$ 将 $\mathcal{V}^A$ 与 $\mathcal{V}^B$相对应，并将 $\mathcal{E}^A_{\mathbf{u}}$与 $\mathcal{E}^B_{\mathbf{u}}$相对应。设$(\mathcal{E}^A \to \mathcal{M}^A, \nabla^A)$和$(\mathcal{E}^B \to \mathcal{M}^B, \nabla^B)$分别是由 $\boldsymbol{\gamma}^A$和 $\boldsymbol{\gamma}^B$ 构造的平坦丛。根据 $f_{\boldsymbol{\gamma}^A}$的定义，它的作用方式为

$$f_{\boldsymbol{\gamma}^A} : [e^{-\boldsymbol{\gamma}^A(\mathbf{u}, \hbar)/\hbar}\alpha] \mapsto [e^{-\boldsymbol{\gamma}^B(\mathbf{u}, \hbar)/\hbar}\alpha].$$

因此， $f_{\boldsymbol{\gamma}^A}$ 将 $\mathcal{V}^A$ 的平坦截面空间与 $\mathcal{V}^B$的平坦截面空间等同起来，从而将平坦联络 ∇^A 与 ∇^B等同起来。这样一来，丛 $(\mathcal{E}^A \to \mathcal{M}^A, \nabla^A)$ 与 $(\mathcal{E}^B \to \mathcal{M}^B, \nabla^B)$ 被等同起来。设假设 2 对 A， B成立，从而两者

$$(\mathcal{E}^A, \mathcal{M}^A, \nabla^A, (-, -)_{\mathcal{E}^A}), \quad (\mathcal{E}^B, \mathcal{M}^B, \nabla^B, (-, -)_{\mathcal{E}^B})$$

构成极小泛$\overset{\infty}{2}$ -变分霍奇结构。

Assu假设 4. 态射 f与 $\mathcal{E}_0^A$和 $\mathcal{E}_0^B$上的配对相容，即 ,

$$(f(\alpha), f(\beta))_{\mathcal{E}_0^B} = (\alpha, \beta)_{\mathcal{E}_0^A}, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathcal{E}_0^A.$$

假设 4 等价于关于 f_{γ^A}的看似更强的相容性假设。事实上，由于配对的平坦性，

$$\begin{aligned}(f_{\gamma^A}(\alpha), f_{\gamma^A}(\beta))_{\mathcal{E}^B_{\mathbf{u}}} =&(f(e^{\gamma(\mathbf{u},\hbar)/\hbar}\alpha), f(e^{\gamma(\mathbf{u},\hbar)/\hbar}\beta))_{\mathcal{E}^B_0}\\ =&(e^{\gamma(\mathbf{u},\hbar)/\hbar}\alpha, e^{\gamma(\mathbf{u},\hbar)/\hbar}\beta)_{\mathcal{E}^A_0}\\ =&(\alpha,\beta)_{\mathcal{E}^A_{\mathbf{u}}} \qquad \forall \alpha,\beta\in\mathcal{E}^A_{\mathbf{u}}.\end{aligned}$$

定理 5.1. 设(A,Δ) 和(B,Δ') 是满足假设 *1*、*2* 和 *3* 的次数为 m 的交换 BV_∞ 代数；设 $f:(A,\Delta)\to(B,\Delta')$ 是满足假设 *4* 的 BV_∞ 拟同构。那么，由 A 和 B 构造的带极化的 $\frac{\infty}{2}$ -变分霍奇结构彼此同构。特别地， $\mathcal{M}^A$ 和 $\mathcal{M}^B$ 上的弗罗贝尼乌斯流形结构彼此同构。

证明. 根据上述讨论，当 f 是一个 BV_∞ 拟同构时，它诱导出平坦向量丛的一个同构

$$(\mathcal{E}^A\to\mathcal{M}^A,\nabla^A) \quad \text{and} \quad (\mathcal{E}^B\to\mathcal{M}^B,\nabla^B).$$

When 假设 4 也成立， f 进一步诱导出 $\frac{\infty}{2}$ -变分霍奇结构的一个同构 —

$$(\mathcal{E}^A,\mathcal{M}^A,\nabla^A,(-,-)_{\mathcal{E}^A}) \quad \text{and} \quad (\mathcal{E}^B,\mathcal{M}^B,\nabla^B,(-,-)_{\mathcal{E}^B})$$

连同极化 $\mathcal{L}^A$ 和 $\mathcal{L}^B$的一个同构。由于弗罗贝尼乌斯流形结构由这些数据唯一确定，结论得证。
□

注 5.2. 将 [CZ] 的定理 *3.2* 与定理 *5.1* 进行比较颇有启发。主要的推广如下：

dGBV 代数推广为交换的 BV_∞-代数； $ddbar$ 条件（ [CZ] 中的引理 *1.1*）由较弱的霍奇到德拉姆退化假设取代；*dGBV* 代数的严格态射由同伦论意义下的（BV_∞-）态射取代；“良好积分”推广为霍奇结构变分 $\frac{\infty}{2}$ 上的配对。

这些推广需要付出额外假设的代价：良基的存在，以及同伦态射与配对的相容性。在 [CZ], 中，这些假设的类似条件可直接由 $ddbar$ 条件以及严格态射保持积分映射这一要求推出。

注 5.3. 在定理 *5.1* 中，只需假设 A 和 B 中至少一个满足假设 *1*：由于 f 是拟同构，另一个也满足假设 *1*。同样的论证也适用于假设 *2* 和 *3*。这一观察在应用中很方便，尤其是在难以验证 A 和 B 中某一个是否满足这些假设时。

6. An example: A_1 singularity

本节介绍一个自然源自奇点理论的示例。设 $X:=\text{Spec }\mathbb{C}[t]$ and $W:=\frac{1}{2}t^2$，使得二元组 (X,W) 定义了与 A_1-奇点相对应的 Landau-Ginzburg模型。令

$$A:=\mathbb{C}[t]\oplus\mathbb{C}[t]\,\partial_t$$

为 X 上的多项式多向量场空间。我们为 A 配备一个由 $\deg\ t=0$ 和 $\deg\ \partial_t=-1$ 确定的分次。定义 $\Delta_0:=\{W,-\}$，其在 A 上的作用由下式给出：

$$\{W,g(t)\}=0,\quad \text{and}\quad \{W,g(t)\partial_t\}=tg(t).$$

定义 $\Delta_1:=\partial$ 为

$$\partial(g(t))=0,\quad \text{and}\quad \partial(g(t)\partial_t)=g'(t).$$

令 $\Delta_k=0$ 对所有 $k\geq 2$成立，则 (A,Δ) 构成一个一次交换 BV_∞ 代数。

容易证明 $H(A,\Delta_0)\cong\mathbb{C}\cdot[1]$ 是一维的，且 $H(A[[\hbar]],\Delta)\cong\mathbb{C}[[\hbar]]\cdot[1]$。$(A,\Delta)$ 的变形无阻碍，且 $\boldsymbol{\gamma}^A(u,\hbar)=u\cdot 1$ 是一个万有正规化MC元。在这个例子中，配对（即斋藤恭司的高阶留数配对）与参数 u无关。我们不推导配对公式，而只指出（见 [HLSR]），$1\in A[[\hbar]]$ 定义了一个良基，且 $(1,1)_{\mathcal{E}_0}=1$。直接计算可得

$$t^{2k+1}\in\mathrm{Im}(\Delta)\quad\text{and}\quad t^{2k}\in(-1)^k(2k-1)!!\hbar^k+\mathrm{Im}(\Delta),$$

因此

$$(t^{2k},t^{2l})_{\mathcal{E}^A}=(-1)^{k+l}\hbar^k(-\hbar)^l(2k-1)!!(2l-1)!!=(-1)^k\hbar^{k+l}(2k-1)!!(2l-1)!!.$$

所有配对 另一类型的项均为零。注意，这个配对并非由迹映射给出 .

另一方面，存在一个一维的 BV_∞ 代数 $(B,\ \Delta')$，其中 $B:=\mathbb{C}$ 且$\Delta':=0$。有 $H(B,\Delta_0')\cong\mathbb{C}\cdot 1$ 以及 $H(B[[\hbar]],\ \Delta')\cong\mathbb{C}[[\hbar]]\cdot 1$。万有正规化MC元仍由 $\boldsymbol{\gamma}^B=u\cdot 1$ 给出。B 上的配对由迹映射 $\mathrm{Tr}_B(a)=a,\ \forall a\in B$ 给出。具体而言，$\mathcal{E}^B$ 上的配对为

$$(f(\hbar)a,g(\hbar)b)_{\mathcal{E}^B}=f(\hbar)g(-\hbar)ab,\quad\forall a,b\in B$$

这也与参数无关。

我们的目标是构造一个满足假设 4 的 BV_∞ 拟同构 $f\colon A[[\hbar]]\to B[[\hbar]]$。第一步是找到一个满足以下条件的链映射 $f=f_0+\hbar f_1+\hbar^2f_2+\cdots$

$$(f_0+\hbar f_1+\hbar^2f_2+\cdots)\circ(W,-+\hbar\partial)=0.$$

将 $\hbar$ 的首项作用于形如 $g(t)\partial_t$ 的元素上，可得 $f_0(tg(t))=0$。这启发我们作如下定义

$$f_0(g(t))=g(0),\quad f_0(g(t)\partial_t)=0.$$

$\hbar^1$ 在左边的系数给出关系 $f_0\partial+f_1\{W,-\}=0$。将其应用于 $t\partial_t$，得到 $f_1(t^2)=-f_0(1)=-1$。因此我们令

$$f_1(t^k)=-\delta_{k,2},\quad f_1(g(t)\partial_t)=0.$$

对 $\hbar$ 的幂次进行归纳，可为每个 $i\geq 0$ 定义：

$$f_i(t^k)=(-1)^i\delta_{k,2i}(2i-1)!!,\quad f_i(g(t)\partial_t)=0.$$

命题 6.1. 给定如上所述的 f_i，则 $f:=\sum_i\hbar^if_i$ 是一个 BV_∞ 拟同构。此外，f 满足假设 *4*。

证明。容易验证，如此定义的 f 是一个链映射，并满足 $f(1)=1$。此外，映射 $f_0:(A,\ \Delta_0)\to(\mathbb{C},\ 0)$是一个拟同构，因此只需验证累积量

条件。由于 f 的定义纯粹是代数性的，我们不妨假设是在实数上工作，且 $\hbar < 0$。通过显式计算高斯积分或使用威克定理，我们得到

$$\frac{1}{\sqrt{-2\pi\hbar}}\int_{\mathbb{R}} t^{2k}\, e^{\frac{t^2}{2\hbar}}\mathrm{d}t = (2k-1)!!(-\hbar)^k, \tag{9}$$

and

$$\frac{1}{\sqrt{-2\pi\hbar}}\int_{\mathbb{R}} t^{2k+1}\, e^{\frac{t^2}{2\hbar}}\mathrm{d}t = 0.$$

(9) 的右侧恰好是 $f_k(t^{2k})\hbar^k$，因此映射 f 也可等价地定义为

$$f(g(t))\partial_t) = 0,$$
$$f(g(t)) = \frac{1}{\sqrt{-2\pi\hbar}}\int_{\mathbb{R}} g(t)e^{t^2/(2\hbar)}\mathrm{d}t.$$

作用于 $\mathbb{C}[t]$ 时，累积量 $\kappa_n(f)$ 可写为

$$\begin{aligned}&\kappa_n(f)(a_1,\cdots,a_n)\\ =&\frac{\partial^n}{\partial J_1\cdots\partial J_n}\log[\frac{1}{\sqrt{-2\pi\hbar}}\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{t^2}{2\hbar}+J_1a_1+J_2a_2+\cdots+J_na_n}\mathrm{d}t]\Big|_{J_1=\cdots=J_n=0}.\end{aligned} \tag{10}$$

现在，关于费曼图的一个定理（例如参见 [Z] 的第 1.2 节）使我们能够将 (10) 中的项 log $[\cdots]$ 改写为对带有n 个顶点的连通 费曼图的加权求和。每个这样的图至少有 $n-1$ 条内部边，且每条边对权重贡献一个 $-\hbar$ 因子，因此求和中的每一项都带有一个总体因子 $\hbar^{n-1}$。由此可得

$$\kappa_n(f)(a_1,\cdots,a_n) \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ \hbar^{n-1})$$

对所有 $n \geq 2$ 和 a_1，$\cdots$，$a_n \in A$，累积量条件成立。

最后一个结论由 f 的 $\mathbb{C}[[\hbar]]$-线性以及上文给出的显式配对得出，唯一非平凡的恒等式是

$$\begin{aligned}(f(t^{2k}), f(t^{2l}))_{\mathcal{E}^B} =&(f_k(t^{2k})\hbar^k, f_l(t^{2l})\hbar^l)_{\mathcal{E}^B}\\ =&((2k-1)!!(-\hbar)^k, (2l-1)!!(-\hbar)^l)_{\mathcal{E}^B}\\ =&(-1)^k\hbar^{k+l}(2k-1)!!(2l-1)!!\\ =&(t^{2k}, t^{2l})_{\mathcal{E}^A}.\end{aligned}$$

□

容易证明，$\mathcal{M}^B$ 上的弗罗贝尼乌斯流形结构是平凡的，因此根据定理 5.1，我们重新得到一个众所周知的事实：由 A_1 奇点的万有形变得到的弗罗贝尼乌斯流形是平凡的。一般情形，即 W 是一个临界集为紧卡拉比-丘流形的 Morse-Bott函数，将在另一篇论文中讨论。

References

[B] R.Bandiera.交换累积量、*Koszul* 括号及交换 BV_∞ 与IBL_∞ 代数的同调扰动理论.arXiv:2012.14812.

[Ba] S. Barannikov. 量子周期 I：半无限霍奇结构变分。《国际数学研究通知》23 (2001), 1243–1264.[BK] S. Barannikov and M. Kontsevich. 弗罗贝尼乌斯流形与多向量场李代数的形式性。《国际数学研究通知》1998.4 (1997): 201-215.[BL] C. Braun and A. Lazarev. 泊松几何中的同伦 BV 代数。《莫斯科数学会会刊》74 (2013): 217-227.[CL] K. Cieliebak and L. Janko Latschev. 弦拓扑在辛场论中的作用。辛场论的新视角与挑战 49 (2007): 113-146.[CZ] H.-D. Cao and J. Zhou. 关于准同构 dGBV 代数。《数学年刊》326, 459–478 (2003).[DSV] V. Dotsenko, S. Shadrin and B. Vallette. 德拉姆上同调与同伦弗罗贝尼乌斯流形。《欧洲数学会杂志》17.3 (2015): 535-547.[HLSR] W. He, S. Li, Y. Shen and R. Webb. 朗道–金兹堡镜像对称猜想。《欧洲数学会杂志》24(8), 2915-2978 (2021).[J] J.S. Park. 《量子场论中的同伦计算》。arXiv:1810.09100 [math.QA].[K] O. Kravchenko. 巴塔利–维尔科维斯基代数的变形。《巴拿赫中心出版物》51.1 (2000): 131-139.[L] S. Li. 霍奇结构变分、弗罗贝尼乌斯流形与规范理论。arXiv:1303.2782 [math.QA].[LLS] C.-Z. Li, S. Li and K. Saito. 通过多向量场构造原始形式，arXiv:1311.1659[math.AG].[LW] S. Li and H. Wen. 关于 Landau-Ginzburg 模型的 L^2-霍奇理论。《数学进展》396 (2022): 108165.[M] Y. Manin. 弗罗贝尼乌斯流形、量子上同调与模空间。《美国数学会讨论会出版物》47，AMS，罗德岛州普罗维登斯，1999.[T] J. Terilla. 微分 BV 代数的光滑性定理。《拓扑学杂志》1.3 (2008): 693-702.[W] H. Wen. 循环 BV_∞ 代数与弗罗贝尼乌斯流形。arXiv:2412.18325v2.[Z] J. Zinn-Justin. 量子场论与临界现象。第171卷。牛津大学出版社, 2021。

HaoWen, School of Mathematical Sciences and the Key Laboratory of Pure Mathematics and Combinatorics, Nankai University, Tianjin 300071, China电子邮箱地址 wenhao@nankai.edu.cn