arXiv:2603.02956v1 [math.CO] 3 Mar 2026

# 最大度图的反幻标号 $\Delta(G) = n - 4$

GrégoireBeaudoire, Cédric Bentz, Christophe Picouleau*CEDRIC*，国立工艺学院，巴黎，法国

**摘要**

图 $G = (V, E)$ 的反幻标记是一个从 $E$ 到 $\{1, 2, \ldots, |E|\}$ 的双射，使得所有顶点和两两不同，其中每个顶点的顶点和是与该顶点关联的边的标号之和。若一个图具有反幻标记，则称其为反幻图。已证明，满足 $\Delta(G) \geq n - 3$ 的图 $G$ 是反幻图，其中 $\Delta(G)$ 是图 $G$ 中顶点的最大度，且 $n = |V|$。在本文中，我们将这一结果推广到满足 $\Delta(G) = n - 4$ 的图，条件是 $|E| \geq 7n$。

关键词：
反幻标号，大最大度，边着色

## 1. 引言与定义

本文仅考虑有限、简单的无向图。设$G = (V, E)$是一个图，其中 $|V| = n$ 且 $|E| = m$。我们用 $d_G(v)$表示顶点 $v \in V$的度。如果上下文已明确图 $G$，我们将简写为 $d(v)$。令 $\Delta(G) = \max_{v \in V} d(v)$。

若 $uv \in E$，则称两个顶点 $u, v \in V$为邻点。我们用$\Gamma(u)$表示 $u$的（开）邻域，即 $\Gamma(u) = \{v | uv \in E\}$。

给定一个图 $G = (V, E)$，令 $f: E \to \{1, 2, \ldots, m\}$ 为图 $G$的边的一个双射标号。对于每个顶点 $u \in V$，我们记 $\sigma(u) = \sum f(uv)$ 与 $u$ 相 incident 的边上的标号之和。如果$v \in V | uv \in E \sigma(u)$ 的所有值两两不同，则 $f$ 称为 $G$ 的反幻标号。如果 $G$ 至少有一个反幻标号，则称 $G$ 为反幻。

反幻标记最初由 Hartsfield 和 Ringel 于1990 [1], 提出，并给出了以下猜想:

**猜想 1.** 除 $K_2$ 外，每个连通图都是反幻的。

该主题是 J. Gallian [2] 每年更新的《图标号动态综述》中的一个 12 页章节的重点。

我们的论文关注最大度较大的图。一个容易证明的初步结果如下：

**定理 1.** *[3]* 图 $G$ 满足 $\Delta(G) = n-1$ 是反幻的。

我们给出该定理的如下证明，因为此处描述的核心思想有助于理解我们稍后给出的构造。

证明。设 $G=(V,E)$ 是一个图，其中有一个顶点 $r$ 满足 $d(r) = \Delta(G) = n-1$，也就是说，$r$ 是 $G$ 中其他每个顶点的邻点。任意地用 $u,v \neq r$ 标记每条边 $uv \in E$，并用尽 $\{1,2,\ldots,m-(n-1)\}$ 中的所有标号。此时，除了 $r$ 以外的每个顶点都恰有一条关联边尚未标记。按照部分和 $\sigma'(v_1) \leq \sigma'(v_2) \leq \ldots \leq \sigma'(v_{n-1})$ 的递增顺序排列 $G$ 中除 $r$ 以外的顶点（$\sigma'(x)$ 表示与该顶点关联且已标记的边上的部分和 $x$）。随后，我们用 $m-(n-1)+i$ 标记边 $rv_i$。由此得到 $\sigma(v_1) < \sigma(v_2) < \ldots < \sigma(v_{n-1})$。此外，$\sigma(v_{n-1}) < \sigma(r)$，因为 $r$ 是 $G$ 中度最大的顶点，且与 $r$ 关联的所有边均标有最大的标号。总之，该标记是反幻的。 □

Alon等人于2004年证明了以下结果 [3]:

**定理 2**。 图 $G$ 满足 $\Delta(G) = n-2$ 且 $n \geq 4$ 是反幻的。

关于最大度较大的图，接下来的结果出自Yilma，于 2013 [4]:

**定理 3**。 满足 $\Delta(G) = n-3$ 且 $n \geq 9$ 的连通图 $G$ 是反幻的。

在同一篇论文中，他们还证明了以下定理：

**定理 4**。 设 $G=(V,E)$ 为一个图，且 $x$ 是一个顶点，使得 $d(x) = \Delta(G) = n-k$，其中 $k \leq \frac{n}{3}$。设 $y$ 是 $x$ 的一个邻点，使得 $\Gamma(x) \cup \Gamma(y) = V$。那么 $G$ 是反幻的。

据我们所知，自2013年以来，对于最大度较大的图，其反幻方性质尚无进展。关于具有特定性质的图已有一些结果（例如，正则图是反幻和图[5][6]），但 Alon 于2004年提出的以下猜想仍未解决：

**猜想 2.** 设 $G = (V, E)$ 是一个连通图，且有一个顶点 $x$ 满足 $d(x) = \Delta(G) = n - k$，其中 $k \geq 4$。那么，如果 $n \geq n_0(k)$ 对某个$n_0(k)$成立，则 $G$ 是反幻的。

本文通过证明以下定理，将已有结果推广到最大度较大的图：

**定理 5.** 设 $G = (V, E)$ 是一个连通图，其中 $\Delta(G) = n - 4$ 且$m \geq 7n$。那么 $G$ 是反幻的。

本文其余部分主要用于证明定理 5。在第2节中，我们介绍给图标号的基本算法，并展示这种标记的一些性质。在第 3 节中，我们说明如何在一般情形下交换一些标号，从而得到反幻标号。在第4节中，我们说明如何处理第2节和第 3 节未涵盖的特定情形。这三节共同构成定理 5 的证明。在第5节中，我们将定理 5 推广到非连通图。最后，我们在结论中提出一些与本文工作相关的开放问题。

## 2. 标记过程

设 $G = (V, E)$ 是一个连通图，且有一个顶点 $r$，使得 $d(r) = \Delta(G) = n - 4$。我们称 $u_1, u_2, u_3$ 为 $V$ 中不与 $r$ 相邻的三个顶点，并称 $H$ 为由 $V \setminus \{r, u_1, u_2, u_3\}$ 诱导的子图。我们用 $n_H$（分别用 $m_H$）表示 $H$ 的顶点数（分别为边数）。我们用 $d'(u_1)$（分别用 $d'(u_2)$ $d'(u_3)$) 表示满足 $v \in H$ 的边 $u_1v$（分别为 $u_2v$, $u_3v$) 的数量。我们假设 $d(u_1) \geq d(u_2) \geq d(u_3)$，并且如果对某个 $i$ 有 $d(u_i) = d(u_{i+1})$，那么 $d'(u_i) \geq d'(u_{i+1})$。

注意到，这一顺序意味着 $d'(u_1) \geq d'(u_2) \geq d'(u_3)$。事实上，如果存在 $i$ 使得 $d'(u_{i+1}) > d'(u_i)$，由于 $d(u_{i+1}) \leq d(u_i)$，且由 $\{u_1, u_2, u_3\}$ 诱导的子图中 $u_i$ 的度与 $u_{i+1}$ 的度之差至多为 1，我们得到 $d(u_{i+1}) = d(u_i)$。然而，这意味着 $d'(u_{i+1}) \leq d'(u_i)$，从而产生矛盾。

注意到， $m \geq 7n$ 为 $n$给出了一个下界。事实上，由于顶点 $r, u_1, u_2, u_3$的度都至多为 $n-4$，我们有 $m_H \geq 7n-4(n-4)$。此外，我们还有 $m_H \leq \frac{1}{2}(n-4)(n-5)$，因为 $H$由 $n-4$个度至多为 $n-5$的顶点组成（因为 $\Delta(G) = n-4$，且 $H$的所有顶点都是 $r$的邻点）。结合这两个不等式，我们得到：

$$\begin{aligned} 7n - 4(n-4) &\leq \frac{1}{2}(n-4)(n-5) \\ 6n + 32 &\leq n^2 - 9n + 20 \\ 0 &\leq n^2 - 15n - 12 \end{aligned}$$

因此 $n \geq 16$。

注意，如果存在一个顶点 $v \in H$，使得 $v$ 是这三个顶点 $u_1$、$u_2$、$u_3$的邻点，那么当 $n \geq 12$ 时（正如我们刚才所证明的，这里确实如此），定理 4 适用，且 $G$ 是反幻的。接下来我们将假设不存在这样的顶点。

在第2节和第3节中，我们始终假设 $d'(u_1) \geq d'(u_2) \geq d'(u_3) \geq 4$，并且由 $\{u_1, u_2, u_3\}$ 诱导的图是一个独立集。我们将在第4节说明，如果这些条件不满足，如何得到一个反幻标号。在对图进行标记的任意阶段，对于每个顶点 $u$，我们将用 $\sigma'(u)$表示与 $u$ 相 incident 的已标号边上的部分和。标记完成后，所有边都已标号，且 $\sigma'(u) = \sigma(u)$。

现在我们描述标记过程的第一阶段。我们将$E = E_1 \cup E_2$划分，使得 $E_1$是与 $r$关联的边集。我们将先标记$E_2$，然后标记 $E_1$，并预留以下标号：

- $E_1$中的边将用 $\{m, m-4, m-8, \ldots, m-4(n-5)\}$标记。
- $d$与 $u_1$ 关联的（$u_3$）条边（请回忆，至少有 4 条）将用 $\{m-1, m-5, m-9, \ldots, m-4(d(u_3)-1)-1\}$标记。
- $d$与 $u_2$关联的（$u_3$）条边将用 $\{m-2, m-6, m-10, \ldots, m-4(d(u_3)-1)-2\}$标记。
- 与 $u_3$ 关联的 $d(u_3)$条边将标上 $\{m-3, m-7, \ldots, m-4(d(u_3)-1)-3\}$。
- $E_2$ 中的其他边将使用未预留的标号。

注意，由于 $m \geq 7n$，总是可以预留这些标号。

此外，我们还希望在完成标记后， $\sigma(r)$ 在 $G$ 中是极大的。为此，首先可以注意到，为 $E_1$ 中的边预留标号 $\{m, m-4, \ldots, m-4(n-5)\}$ 会产生区间 $I_1 = \{m-1, m-2, m-3\}$, $I_2 = \{m-5, m-6, m-7\}, \ldots, I_{n-5} = \{m-4(n-6)-1, m-4(n-6)-2, m-4(n-6)-3\}$。我们将分配相应的标号，使得每个顶点 $v \in V \setminus \{r\}$ 在每个 $I_j$ 中至多有一条标记了标号的关联边。

为此，考虑如下定义的二部图 $G_1 = (V_{G_1}, E_{G_1})$:

- $V_{G_1} = V \setminus \{r\}$,
- $u_3$ 的所有 $d$条（$u_3$）关联边都在 $E_{G_1}$中,
- 我们任意选取与 $u_1$ 关联的 $d$ 条（$u_3$）边，以及与 $u_2$关联的 $d$ 条（$u_3$）边，并将它们放入 $E_{G_1}$。

$G_1$ 定义良好，因为 $d$（$u_1$）$\geq d$（$u_2$）$\geq d$（$u_3$）。我们有 $|E_{G_1}| = 3d$（$u_3$）。此外， $\Delta$（$G_1$）$= d$（$u_3$），因为每个顶点 $v \in H$ 都满足 $d_{G_1}$（$v$）$\leq 3$，且 $d'$（$u_3$）$= d$（$u_3$）$\geq 4$。因此， [7] 中的定理6.1.5（最初由柯尼希证明）表明， $G_1$ 的边存在一种使用$d$（$u_3$）种颜色的正常着色。由于 $d_{G_1}$（$u_1$）$= d_{G_1}$（$u_2$）$= d_{G_1}$（$u_3$）$= d$（$u_3$），该着色由颜色类 $C_1$、$C_2$、.....、$C_{d(u_3}$构成，使得每个 $C_i$ 恰好包含 3 条边。

对于 $1 \leq j \leq d(u_3)$，我们为 $C_j$ 的三条边分别关联区间 $I_j = \{m-4(j-1)-1,\ m-4(j-1)-2,\ m-4(j-1)-3\}$，使得 $m-4(j-1)-1$ 被分配给 $C_j$ 中与 $u_1$ 相 incident 的边， $m-4(j-1)-2$ 被分配给 $C_j$ 中与 $u_2$ 相 incident 的边，而 $m-4(j-1)-3$ 被分配给 $C_j$ 中与 $u_3$ 相 incident 的边。

现在考虑图 $G_2 = (V \setminus \{r, u_3\},\ E_{G_2})$，其中 $E_{G_2} = E_2 \setminus E_{G_1}$ 是边 $e \notin E_{G_1}$ 的集合，且 $e$ 不与 $r$ 相 incident。

由于 $\Delta(G_2) \leq n-5$，根据维津定理（ [7]中的定理 6.1.7），存在一种 $G_2$ 的正常边着色，最多使用 $\Delta(G_2)+1 \leq n-4$种颜色。设 $C'_1, C'_2, \ldots, C'_{n-4}$为该着色的颜色类。由于$m_{G_2} = m - 3d(u_3) - (n-4) \geq 3n$ （因为 $m \geq 7n$），我们可以假设每个颜色类至少有 3 条边。事实上，假设存在一个颜色类 $C'_i$，使得$|C'_i| \leq 2$。那么存在一个颜色类 $C'_j$，使得$|C'_j| > 3$。设 $H_{i,j}$ 为 $H$ 的部分图，该部分图仅取

颜色为 $i$ 和 $j$的边。$H_{i,j}$ 由偶长度交替圈和交替路径组成。由于 $|C'_j| > |C'_i|$, 至少存在一条路径$P_{i,j}$，其首尾边的颜色均为 $j$ （这两条边可能是同一条边）。在 $P_{i,j}$中交换颜色 $i$ 和 $j$ 后， $|C'_i|$ 增加 1；我们可以重复这一过程，直到每个颜色类 $C'_i$都满足 $|C'_i| \geq 3$ 。因此，接下来可以假设每个颜色类至少有 3 条边。最后，我们对各颜色类排序，使得与 $u_1$关联的 $G_2$ 中的 $d(u_1) - d(u_3)$ 条边（回想一下， $d(u_1) \geq d(u_3)$）分别属于颜色类 $C'_1, C'_2, \ldots, C'_{d(u_1)-d(u_3)}$。

对于 $d(u_3) + 1 \leq j \leq d(u_1)$，我们将类 $C'_{j-d(u_3)}$的三条边关联到区间 $I_j$, 使得 $m - 4(j-1) - 1$，即 $I_j$ 中最大的标号，被分配给与 $u_1$关联的边。$I_j$ 中的另外两个标号被任意分配给该类中的另外两条边。

对于 $d(u_1) + 1 \leq j \leq n - 5$，我们将类 $C'_{j-d(u_3)}$的三条边关联到区间 $I_j$。

一旦区间 $I_j$ 中对应于 $1 \leq j \leq n-5$ 的每个标号都已分配给一条边，我们就任意地为$E_{G_2}$ 的剩余边标号（注意，这些边要么两个端点都在 $H$ 中，要么一个端点在 $H$ 中而另一个端点是 $u_2$）。然后，我们按 $\sigma'$ 的递增顺序对 $H$ 的顶点进行排序：$\sigma'(v_1) \leq \sigma'(v_2) \leq \ldots \leq \sigma'(v_{n-4})$，类似于定理 1 的证明。接着，我们按此顺序为这 $rv_i$ 条边标号，同时按递增顺序使用为 $E_1$ 预留的标号。至此完成了 $G$ 标记的第一阶段。

现在我们旨在展示该标记的一些性质。首先，由于对 $G_1$ 的标记以及 $d(u_2) \geq d(u_3) \geq 4$，我们有 $\sigma(u_2) \geq \sigma(u_3) + 4$。此外，由于对 $G_1$ 的标记以及 $G_2$， $\sigma(u_1) \geq \sigma(u_2) + 4$。综上，我们得到：

**性质 2.1**。 $\sigma(u_3) + 4 \leq \sigma(u_2)$ 且 $\sigma(u_2) + 4 \leq \sigma(u_1)$。

此外，每个顶点 $v \in V \setminus \{r\}$ 在每个区间 $I_j$, $1 \leq j \leq n-5$ 中至多有一条被标记的关联边，因为 $I_j$ 的三个标号被分配给同一颜色类中的三条边。此外，回想一下，$v$ 不可能是全部三个 $u_1$、$u_2$、$u_3$ 的邻点；换言之， $d_{G_1}(v) \leq 2$。这意味着，对于任意 $v \in H$:

$$\begin{aligned}\sigma(v) \leq\ & m + (m-1) + (m-6) + (m-17) + (m-21) \\ & + \cdots + (m - 4(n-6) - 1) + (m - 4(n-5) - 1) + (m - 4(n-5) - 2)\end{aligned}$$

$m$ 项是 $rv$标号的上界。$(m-1)$ +$(m-6)$项是标记 $rv$时可分配给边的标号之和的上界

在标记 $G_1$时与 $v$ 相 incident 的边。$G_1$ 至少有 12 条边，因为$d(u_3) \geq 4$，因此在标记 $G_2$ 时，与 $v$ 相 incident 的边可分配的最大标号为 $m-17$ （因为 $d(r) = n-4 \geq 12$）。

我们还有：

$$\begin{aligned}
\sigma(r) &= m + (m-4) + (m-8) + (m-12) + (m-16) + (m-20) \\
&\quad + \cdots + (m-4(n-6)) + (m-4(n-5)) \\
\sigma(u_1) &\leq (m-1) + (m-5) + \cdots + (m-4(n-5)-1) \\
\sigma(u_3) &< \sigma(u_2) < \sigma(u_1)
\end{aligned}$$

由于 $n \geq 16$，我们可得：

**性质 2.2**。 对于每个顶点 $x \in V \setminus \{r\}$, $\sigma(r) \geq \sigma(x) + 4$。

此外，由于我们为 $E_1$ 的边预留了间隔为 4 的标号，并且在标记这些边之前，已按 $\sigma'$ 递增的顺序对 $H$ 中的顶点排序，因此得到以下性质：

**性质 2.3**。 对于每个 $v_i \in H, 1 \leq i \leq n-5$, $\sigma(v_i) + 4 \leq \sigma(v_{i+1})$。

这三个性质将在第 3 节中使用，届时我们会交换一些标号以得到一个反幻标号。注意，得益于性质 2.2，以下我们将忽略对 $\sigma(r)$ 的值所作的所有更改，因为对于任意 $v \neq r$，性质 $\sigma(r) > \sigma(v)$ 之后仍然成立。我们将在第 3 节末尾证明这一假设的合理性。

图 1 展示了对 $G$ 进行标记的示例。对于每个 $i$，我们将 $y_i$ 称为 $u_j$ 的邻点（对于某个 $j$），使得边 $u_j y_i$ 的标号为 $m-i$。请注意，例如，在图 1 中，$y_1$和 $y_6$可以是同一个顶点。此外，对于每个 $i$，我们将 $w_i$ 称为 $r$ 的邻点，使得 $rw_i$ 的标号为 $m-i$。我们将顶点集 $y_i$ 称为 $Y$，将顶点集 $w_i$称为 $W$。我们有 $Y \subseteq W = \{v_1, v_2, \ldots, v_{n-4}\} = V_H$。

这些记号（即使用 $y$，$w$ 或 $v$ 来表示$H$的顶点）使我们能够在下文中简单地辨认哪些标号正在交换，并区分将 $H$ 中的顶点视为“ $u_i$的邻点”还是“ $r$的邻点”。

按照我们的记号，同一顶点 $u_j$ 的两个邻点 $y_i$ 和 $y_{i'}$ 必然不同。同样，两个顶点 $w_i$ 和 $w_{i'}$ 也不同。此外，按照我们的构造，对应于同一区间的三个顶点 $y_i$，即

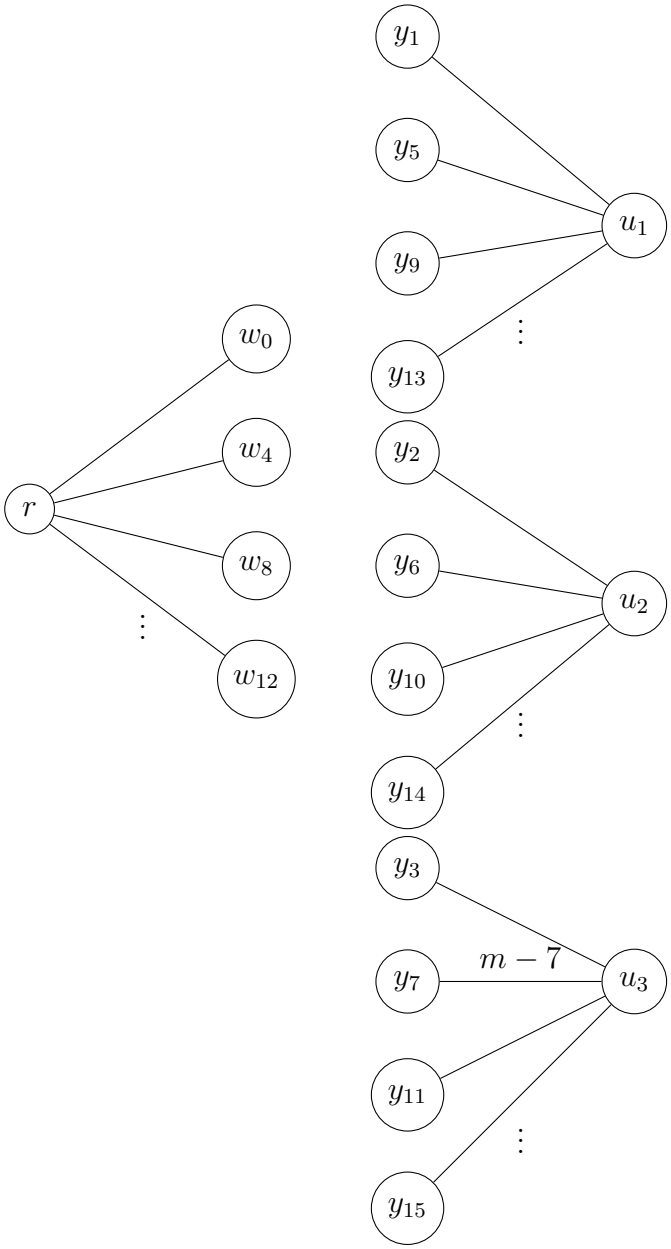


图 1： $G$ 的标记示意图。

$I_j = \{m-4(j-1)-1,\ \ m-4(j-1)-2,\ \ m-4(j-1)-3\}$，彼此都不同（因为我们给同一种颜色的三条边标了号

具有这三个标号的类）。例如， $y_1$、 $y_2$ 和 $y_3$ 是三个不同的顶点。

我们正式定义两个顶点之间的冲突：

**定义 2.1**。 若两个顶点 $u$ 和 $u'$ 处于冲突中，记作 Conflict($u$, $u'$)，则 $\sigma(u) = \sigma(u')$。

当且仅当图中不存在冲突时，标记才是反幻的。请注意，根据我们的标记过程，得益于性质2.1、2.2和2.3，图中可能出现的冲突仅可能发生在一方的 $u_1$、 $u_2$或 $u_3$ 与另一方的某个顶点 $v \in H$ 之间。

## 3. 冲突消解

本节将说明如何在初始标记完成后解决这些潜在冲突，从而得到无冲突标号，也就是反幻标号。

我们将可能的标签交换及其对 $\sigma$ 不同取值的影响总结在表1中。注意，对于任意交换 $\lambda_i$ 或 $\gamma_i$，所涉及的顶点 $y_i$ 与 $y_{i+1}$ 必然互不相同。在下文中，$v_1$ （相应地为 $v_2$、 $v_3$）表示 $H$ 中 $\sigma$ 的取值最接近 $u_1$ 的取值（相应地最接近 $u_2$， $u_3$）的顶点——若出现并列，则任意选取一个顶点。

我们说明如何在每一种情形中得到反幻标号：

- **情形 1：** 冲突($u_1$， $v_1$) **且** 冲突($u_2$， $v_2$) **且** 冲突($u_3$， $v_3$)。

  $\lambda_i$ 交换解决了 $u_1$ 与 $u_2$上的冲突，这意味着此后，借助性质 2.3， $\sigma$（$u_1$）与 $\sigma$（$u_2$）的取值不同于 $\sigma$（$x$） $x \in V$的所有其他取值，除非是 $v_1 = y_i$ 或 $v_2 = y_{i+1}$。至多存在一次使得 $y_i = v_1$ 的 $\lambda_i$ 交换，且至多存在一次使得 $y_{i+1} = v_2$ 的 $\lambda_i$ 交换（因为所有 $y_i$互不相同，它们都是 $u_1$的邻点；且所有 $y_{i+1}$互不相同，它们都是 $u_2$的邻点）。因此，四次 $\lambda_i$ 交换中必然至少有两次使得 $y_i \neq v_1$ 且 $y_{i+1} \neq v_2$，从而保证交换后$u_1$ 与 $u_2$ 无冲突。我们将它们称为 $\lambda_i$ 与$\lambda_{i'}$，并首先考虑已应用 $\lambda_i$ 的情况。

  交换后， $\sigma(u_1)$ 的值减小了 1，而 $\sigma(u_2)$ 的值增加了 1。注意，根据性质 2.1，这两个值不可能彼此相等。

| 记号 | 交换 | $\sigma(u_i)$的演变 | $\sigma(v_i)$的演变 |
|---|---|---|---|
| $\lambda_1$ | $m-1 \leftrightarrow m-2$ | $\sigma(u_1) -1, \sigma(u_2) +1$ | $\sigma(y_1) -1, \sigma(y_2) +1$ |
| $\lambda_5$ | $m-5 \leftrightarrow m-6$ | | $\sigma(y_5) -1, \sigma(y_6) +1$ |
| $\lambda_9$ | $m-9 \leftrightarrow m-10$ | | $\sigma(y_9) -1, \sigma(y_{10}) +1$ |
| $\lambda_{13}$ | $m-13 \leftrightarrow m-14$ | | $\sigma(y_{13}) -1, \sigma(y_{14}) +1$ |
| $\gamma_2$ | $m-2 \leftrightarrow m-3$ | $\sigma(u_2) -1, \sigma(u_3) +1$ | $\sigma(y_2) -1, \sigma(y_3) +1$ |
| $\gamma_6$ | $m-6 \leftrightarrow m-7$ | | $\sigma(y_6) -1, \sigma(y_7) +1$ |
| $\gamma_{10}$ | $m-10 \leftrightarrow m-11$ | | $\sigma(y_{10}) -1, \sigma(y_{11}) +1$ |
| $\gamma_{14}$ | $m-14 \leftrightarrow m-15$ | | $\sigma(y_{14}) -1, \sigma(y_{15}) +1$ |
| $\mu_0$ | $m \leftrightarrow m-1$ | $\sigma(u_1) +1$ | $\sigma(y_1) +1, \sigma(w_0) -1$ |
| $\mu_4$ | $m-4 \leftrightarrow m-5$ | | $\sigma(y_5) +1, \sigma(w_4) -1$ |
| $\mu_8$ | $m-8 \leftrightarrow m-9$ | | $\sigma(y_9) +1, \sigma(w_8) -1$ |
| $\mu_{12}$ | $m-12 \leftrightarrow m-13$ | | $\sigma(y_{13}) +1, \sigma(w_{12}) -1$ |
| $\rho_3$ | $m-3 \leftrightarrow m-4$ | $\sigma(u_3) -1$ | $\sigma(y_3) -1, \sigma(w_4) +1$ |
| $\rho_7$ | $m-7 \leftrightarrow m-8$ | | $\sigma(y_7) -1, \sigma(w_8) +1$ |
| $\rho_{11}$ | $m-11 \leftrightarrow m-12$ | | $\sigma(y_{11}) -1, \sigma(w_{12}) +1$ |
| $\rho_{15}$ | $m-15 \leftrightarrow m-16$ | | $\sigma(y_{15}) -1, \sigma(w_{16}) +1$ |

表1：可能的交换摘要（忽略 $\sigma(r)$值的修改）。

注意，如果 $\sigma(v_3)$ 的值在交换 $\lambda_i$（即 $v_3 = y_i$ 或 $v_3 = y_{i+1}$）期间发生了修改，那么 $u_3$ 不再与 $v_3$ 冲突，因此标记是无冲突的并且是反幻的。

现在，我们将在一条与 $u_3$ 相 incident 的边和另一条与 $r$相 incident 的边上的标号之间进行第二次交换，即 $\rho_k$，以解决 $u_3$处的冲突。同时，我们需要确保不会因此产生涉及 $u_1$ 或 $u_2$ 的新冲突。

$\rho_k$ 交换会得到一个反幻标记，除非：

– 两个不同的 $u_i$之间存在冲突；然而，依据性质 2.1，这是不可能的。– 顶点 $v \in H$ 与 $u_1$ 之间仍然存在冲突。经过两次交换后，$\sigma(u_1)$ 的值减少了 1，而任意 $\sigma(v)$ 的值变化介于 -2 和 $+2$ 之间。根据性质 2.3，$\sigma(v) = \sigma(u_1)$ 意味着 $v = v_1$，并且经过两次交换后，$\sigma(v_1)$ 的值减少了 1。

因此，只有两种可能： $v = v_1 = y_i$ 和 $v = v_1 = y_k$。由于选择 $\lambda_i$ 时满足 $v_1 \neq y_i$，这意味着 $v_1 = y_k$。

– 顶点 $v \in H$ 与 $u_2$之间仍存在冲突。经过两次交换后， $\sigma(u_2)$ 的值增加了 1，而任意 $\sigma(v)$ 的值变化范围为 -2 到 $+2$。根据性质 2.3， $\sigma(v) = \sigma(u_2)$ 意味着 $v = v_2$，并且经过两次交换后， $\sigma(v_2)$ 的值增加了 1。因此，只有两种可能： $v = v_2 = y_{i+1}$ 和 $v = v_2 = w_{k+1}$。由于选择 $\lambda_i$ 时满足 $v_2 \neq y_{i+1}$，这意味着 $v_2 = w_{k+1}$。

– 顶点 $v \in H$ 与 $u_3$之间仍存在冲突。经过两次交换后， $\sigma(u_3)$ 的值减少了 1，而任意 $\sigma(v)$ 的值变化范围为 -2 到 $+2$。根据性质 2.3， $\sigma(v) = \sigma(u_3)$ 意味着 $v = v_3$，并且经过两次交换后， $\sigma(v_3)$ 的值减少了 1。因此，只有两种可能： $v = v_3 = y_i$ 和 $v = v_3 = y_k$。然而， $v_3 \neq y_i$；否则，如前所述，在进行 $\lambda_i$ 交换后，已经证明该图是反幻的。这意味着 $v_3 = y_k$。

– $H$的两个顶点之间存在冲突。由于我们恰好对 $\sigma$ 的值进行两次增加 $+1$ 和两次减少 1 的操作，并且根据性质 2.3，唯一可能产生冲突的情形是以下三个等式同时成立： $y_i = y_k$（这意味着 $\sigma(y_i)$ 的值减少了 2）， $y_{i+1} = w_{k+1}$（这意味着 $\sigma(y_{i+1})$ 的值增加了 2），以及 $\sigma(y_i) = \sigma(y_{i+1}) + 4$。

这意味着，如果没有任何 $\rho_k$ 交换能使我们得到一个反幻标记，那么就存在四个互不相同的指标 $k_1, k_2, k_3, k_4 \in \{3, 7, 11, 15\}$，使得以下等式全部成立：

– $v_1 = y_{k_1}$,– $v_2 = w_{k_2+1}$,– $v_3 = y_{k_3}$,– $y_i = y_{k_4}$ 以及 $y_{i+1} = w_{k_4+1}$ 和 $\sigma(y_i) = \sigma(y_{i+1}) + 4$。

事实上，如果存在某个 $k_h \in \{3, 7, 11, 15\}$，使得上述所有等式均不成立，那么$\rho_{k_h}$ 交换将产生一个无冲突标号，即一个

反幻标号。此外，请注意，由于两个顶点 $w_p$ 和 $w_q$ 彼此不同，且作为同一个 $u_s$ 的邻点的两个顶点 $y_p$ 和 $y_q$ 也彼此不同，因此这些等式中的每一个至多可由一对 $(y_{k_h}, w_{k_h+1})$（其中 $k_h \in \{3, 7, 11, 15\}$）验证。

如果是这种情形，那么我们可以执行交换 $\lambda_{i'}$，而不是 $\lambda_i$。我们得到 $\rho_{k_4}$，使得：

- $v_1 = y_{k_1} \neq y_{k_4}$，
- $v_2 = w_{k_2+1} \neq w_{k_4+1}$，
- $v_3 = y_{k_3} \neq y_{k_4}$，
- $y_{i'} \neq y_i = y_{k_4}$ 以及
- $y_{i'+1} \neq y_{i+1} = w_{k_4+1}$。

然后，我们可以通过执行 $\rho_{k_4}$ 得到一个反幻标号。

- **情形 2：** 冲突$(u_1, v_1)$ **且** 冲突$(u_2, v_2)$。
  我们将执行一次 $\lambda_i$ 交换。请注意，交换完成后，$u_i$ 彼此之间不会发生冲突，这是由性质 2.1 保证的。此外，根据性质 2.3，$H$ 中的两个顶点也不会彼此冲突。

  $\lambda_i$ 交换后即可得到一个反幻标号，除非出现以下情况：$y_i = v_1$，$y_{i+1} = v_2$，$\sigma(u_3) = \sigma(y_i) - 1$ 或 $\sigma(u_3) = \sigma(y_{i+1}) + 1$。
  然而，由于性质 2.3，最后两种可能互斥，这意味着至多存在一个 $\lambda_i$ 交换，使得$\sigma(u_3) = \sigma(y_i) - 1$ 或 $\sigma(u_3) = \sigma(y_{i+1}) + 1$。因此，我们有四种可能的 $\lambda_i$ 交换和三个可能的问题，所以总是存在一种交换可以得到反幻标记。

- **情形 3：** 冲突$(u_2, v_2)$ **且** 冲突$(u_3, v_3)$。
  此情形的证明与前一情形类似，只需考虑 $\gamma$ 交换，而不是 $\lambda$。

- **情形 4：** 冲突$(u_1, v_1)$ **且** 冲突$(u_3, v_3)$。
  与情形 1 不同，我们不能简单地交换与 $u_1$ 和 $u_3$相连的边上的标号，因为这会导致 $\sigma(v)$ $v \in H$的值发生 $+2$ 和 -2 的变化，进而可能引起 $H$ 的顶点之间发生冲突。

首先，假设 $|\sigma(v_2) - \sigma(u_2)| \geq 2$。由于至多存在一种$\lambda_i$ 交换使得 $y_i = v_1$，且至多存在一种 $\lambda_i$ 交换使得$y_i = v_2$，因此至少存在两种可能的交换 $\lambda_i$ 和 $\lambda_{i'}$，使得$v_1 \neq y_i$，$y_{i'}$ 且 $v_2 \neq y_i$，$y_{i'}$，这意味着应用这两种交换中的任意一种后，$u_1$ 和 $u_2$ 都无冲突。我们暂且进行 $\lambda_i$；$\sigma(u_2)$ 的值增加 1。此时可能有 $v_2$ 满足 $\sigma(u_2) + 1 = \sigma(v_2) - 1$。与情形 1 类似，我们假设 $v_3 \neq y_i$（否则，经过 $\lambda_i$ 交换后，$u_3$ 和 $v_3$ 不再冲突），而 $\rho_k$ 交换随后会得到一个反幻标记，除非:

- $v_1 = y_k$,
- $v_2 = y_k$ (in the case $\sigma(u_2) + 1 = \sigma(v_2) - 1$),
- $v_3 = y_k$,
- $y_i = y_k$ and $w_{k+1} = y_{i+1}$ and $\sigma(y_i) = \sigma(y_{i+1}) + 4$.

如果不存在 $\rho_k$ 能产生反幻标记的情况，我们可以像情形 1 中那样，考虑进行 $\lambda_{i'}$ 交换，而不是 $\lambda_i$。这样便能保证 $y_k \neq y_{i'}$和 $w_{k+1} \neq y_{i'+1}$，从而得到一个反幻标记。
现在假设 $|\sigma（v_2）-\sigma（u_2）| = 1$。首先假设 $\sigma（u_2） = \sigma（v_2） + 1$。若存在 $j$ 使得:

- $v_1 = w_{j+1}$,
- $y_j u_3 \in E$ and $y_j \neq v_3$,
- $w_{j+1} \neq y_j$.

然后进行 $\rho_j$ 交换。$\sigma$ 修改后的值如下：$\sigma（u_3） - 1, \sigma（y_j） - 1, \sigma（w_{j+1}） + 1$。
由于 $y_j \neq v_3$，根据性质 2.3，$u_3$ 无冲突。由于 $v_1 = w_{j+1}$和 $w_{j+1} \neq y_j$，$u_1$ 也无冲突。最后，由于 $v_1 = w_{j+1}$，根据性质 2.1，$v_2 \neq w_{j+1}$。这意味着 $u_2$ 也无冲突，因此该标记是反幻的。

如果不存在这样的 $j$，我们就考虑 $\mu_i$ 交换。对于每个$i$，$\mu_i$ 交换都会（严格地）减少冲突数，除非$v_1 = y_{i+1}$ 或 $v_2 = y_{i+1}$。因此，至少存在两个 $\mu$ 交换，使得应用交换后 $u_1$ 和 $u_2$ 无冲突。令$\mu_i$ 为这样一次交换。

如果执行 $\mu_i$ 后 $u_3$ 仍然处于冲突状态（即$\sigma(v_3)$的值没有因 $\mu_i$而改变），我们现在考虑 $\rho$ 交换。
考虑 $\rho_j$。由此可得到一个反幻标记，除非 $v_3 = y_j$或 $v_2 = w_{j+1}$ 或 $(y_{i+1} = w_{j+1}$ 且 $w_i = y_j$ 且 $\sigma(w_i) = \sigma(w_j) + 4)$ 或 $(w_{j+1} = v_1 \neq y_{i+1}$ 且 $w_{j+1} \neq y_j)$（也就是说，在最后这种情形下，执行两次交换后，$\sigma(v_1)$ 的值增加了 1）。

然而，最后这种情形不可能发生，因为我们假设不存在这样的 $j$。因此，至多有三个问题和四种可能的交换（每个问题至多对应一种 $\rho_j$ 交换），故至少有一种 $\rho$交换能够得到反幻标记。

这一推理很容易推广到 $\sigma(u_2) = \sigma(v_2) - 1$ 的情形；此时需要排除的等式是 $v_2 = w_i$，而不是 $v_2 = y_{i+1}$，然后是 $v_2 = y_j$，而不是 $v_2 = w_{j+1}$。

- **情况5：** 冲突$(u_1, v_1)$。
  除非出现以下情况，否则 $\mu_k$ 交换可根据性质 2.1 得到一个反幻标号：

  - $v_1 = y_{k+1}$,- $v_2 = y_{k+1}$（以及 $\sigma(v_2) + 1 = \sigma(u_2)$）或 $v_2 = w_k$（以及 $\sigma(v_2) - 1 = \sigma(u_2)$）；根据性质 2.3，这两种情况互斥，- $v_3 = y_{k+1}$（以及 $\sigma(v_3) + 1 = \sigma(u_3)$）或 $v_3 = w_k$（以及 $\sigma(v_3) - 1 = \sigma(u_3)$）；根据性质 2.3，这两种情况互斥。

  有三种可能的问题和四种可能的 $\mu_k$ 交换（每个问题至多与一种 $\mu_k$ 交换相关联），因此总是存在一种交换可得到反幻标号。

- **情况6：** 冲突$(u_3, v_3)$
  推理与前一种情形类似；进行一次 $\rho_k$ 交换即可得到反幻标记，除非：

  - $v_1 = y_k$ 或 $v_1 = w_{k+1}$，但这两种情形互斥；

– $v_2 = y_k$ 或 $v_2 = w_{k+1}$，但这两种情形互斥；– $v_3 = y_k$。

再次，有三个可能的问题和四种 $\rho_k$ 交换，因此总是存在一种交换可产生反幻标记。

- **情形7：** 冲突$(u_2, v_2)$。

  – **情形7.1：** $|\sigma(v_1) - \sigma(u_1)| \geq 2$
  该 $\lambda_i$ 交换会产生反幻标记，除非出现以下情况之一：$v_2 = y_{i+1}$、$v_1 = y_{i+1}$（以及 $\sigma(v_1) = \sigma(u_1) - 2$）、$\sigma(u_3) = \sigma(y_i) - 1$（以及 $v_3 = y_i$），或 $\sigma(u_3) = \sigma(y_{i+1}) + 1$（以及 $v_3 = y_{i+1}$）。与前一种情形一样，最后两个等式由于性质 2.3 而互斥；总的来说，有三个可能的问题和四种可能的交换，因此存在一种 $\lambda_i$ 可产生反幻标记。

  – **情形7.2：** $\sigma(v_1) = \sigma(u_1) + 1$。
  我们可以采用与情形7.1相同的推理，因为 $\lambda$交换都会使 $\sigma(u_1)$的值减少 1（只需注意，根据性质 2.3，由于 $\sigma(v_1) \neq \sigma(u_1) - 2$，问题少了一个）。

  – **情形7.3：** $|\sigma(v_3) - \sigma(u_3)| \geq 2$。
  推理与情形7.1相同，只是使用 $\gamma$ 交换而非 $\lambda$。当 $v_2 = y_i$、$v_3 = y_i$（以及 $\sigma(v_3) = \sigma(u_3) + 2$）、$\sigma(u_1) = \sigma(y_i) - 1$（以及 $y_i = v_1$），或$\sigma(u_1) = \sigma(y_{i+1}) + 1$（以及 $y_{i+1} = v_1$）时，会出现潜在问题。同样，存在三个潜在问题和四种可能的交换，因此存在一个 $\gamma_i$ 可得到反幻标号。

  – **情形7.4：** $\sigma(v_3) = \sigma(u_3) - 1$。
  同样的推理再次适用（只有两个可能的问题和四种可能的交换），因为所有 $\gamma$ 交换都会使 $\sigma(u_3)$的值增加1。

  – **情形7.5：** $\sigma(v_1) = \sigma(u_1) - 1$ 以及 $\sigma(v_3) = \sigma(u_3) + 1$。
  若存在 $\mu_j$ 使得 $y_{j+1} = v_3$（因此根据性质 2.1，$y_{j+1} \neq v_1$），我们进行如下交换：这会使 $\sigma(u_1)$ 增加 1，而 $\sigma(u_1) + 1 = \sigma(v_1) + 2$。这也会使 $\sigma(v_3)$ 增加 1，而 $\sigma(v_3) + 1 = \sigma(u_3) + 2$。因此，一旦完成 $\mu_j$ 交换，以下各值之间至少相差 2：

$\sigma(u_1)$（分别为 $\sigma(u_3)$）与 $\sigma(v_1)$（分别为 $\sigma(v_3)$）。如果通过这次交换修改了 $\sigma(v_2)$ 的值，根据性质 2.3，图中便不再有冲突；因此我们假设其值保持不变。

接下来考虑这些 $\lambda$交换，排除 $\lambda_{j+1}$； $\lambda_i$ 交换会产生以下变化（进行两次交换后）：$\sigma(u_2) + 1$，$\sigma(v_3) + 1$，$\sigma(w_j) - 1$，$\sigma(y_i) - 1$，$\sigma(y_{i+1}) + 1$。这样我们就得到一个反幻标记，除非 $v_1 = y_{i+1}$ 或 $v_2 = y_{i+1}$（因为我们排除了 $\lambda_{j+1}$、$y_i \neq y_{j+1} = v_3$）。有两个可能的问题和三种可能的交换（每个问题至多对应一种 $\lambda_i$ 交换），因此我们可以得到一个反幻标记。

现在考虑不存在满足 $y_{j+1} = v_3$的 $\mu_j$ 的情况。由于有四种可能的 $\mu_j$，因此至少有两个满足：

* $w_j \neq v_3$，这意味着交换后 $u_3$ 无冲突，
* $y_{j+1} \neq v_1$，这意味着在执行 $\mu_j$ 后，$\sigma(u_1)$与 $\sigma(v_1)$的值之差至少为 2，并且交换后$u_1$ 无冲突。

与前一种情形一样，如果通过$\mu_j$ 交换修改 $\sigma(v_2)$的值，那么该标记无冲突，因此是反幻的；于是我们假设 $\sigma(v_2)$保持不变。

现在考虑 $\lambda$ 交换，但不包括 $\lambda_{j+1}$。 $\lambda_i$交换会产生一个反幻标记，除非：

* $v_2 = y_{i+1}$（因为 $\sigma(v_2)$在 $\mu_j$ 交换后保持不变），
* $v_1 = y_{i+1}$（因为根据 $\mu_j$的选择， $v_1 \neq y_{j+1}$），
* $v_3 = y_i$（因为根据 $\mu_j$的选择， $v_3 \neq w_j$）。

然而，最后这个等式不可能成立，因为否则我们本可以执行 $\mu_{i-1}$ 交换，从而得到 $v_3 = y_i$，但我们先前假设不存在这样的交换。因此，我们有 2个可能的问题和 3个可能的交换（每个问题至多关联一个 $\lambda_i$ 交换），于是可以得到一个反幻标记。

在每种情形下， $\sigma(r)$ 的值至多减少 1。与此同时，给定顶点 $v \neq r$ 的值 $\sigma(v)$ 至多增加 2。根据性质 2.2，在应用交换后，每种情形下我们都得到 $\sigma(r) > \sigma(v)$，

对于任意 $v \neq r$，因此证实了我们可以忽略对 $\sigma(r)$ 的值所作的更改这一事实。

**4. 其他情形的标记过程**

现在考虑第2节开头对图的结构所作的假设不成立的情况。首先，如果 $\{u_1, u_2, u_3\}$ 不诱导一个独立集，我们只需按照逆字典序对边进行排序，并用最小的标号标记两 $u_i$ 之间的边——即在必要时使用1、2和3——。因此，例如，在 $\{u_1, u_2, u_3\}$诱导一个团的情形中， $u_2u_3$ 标记为1， $u_1u_3$ 标记为2，而 $u_1u_2$ 标记为3。然后，我们按照第2节中所述的方式继续进行标记，很容易验证性质2.1、2.2和2.3均未改变，第 3 节也同样如此，从而证明我们可以得到一个反幻标号。

其次，现在假设 $d'(u_3) \leq 3$。回忆一下， $d'(u_1) \geq d'(u_2) \geq d'(u_3)$。令 $i = \min\{j \in \{1,2,3\} | d'(u_j) \leq 3\}$。

我们将用最小的标号标记与 $\{u_j, j \geq i\}$ 相 incident 的边（不包括用于标记连接两个 $u_k$ 的边的标号），以保证对于任意 $v \in H$， $\sigma(u_3) < \ldots < \sigma(u_i) < \sigma(v)$。

根据 $i$ 的取值，我们分为三种情形:

- $i = 1$。

  我们通过将最大的 $n-4$ 个标号留给与 $r$ 相 incident 的边，并用最小的标号标记与 $u_1$， $u_2$ 和 $u_3$ 相 incident 的边，来为该图标号；处理 $u_k$ 时按递减顺序进行（即先标记所有与 $u_3$ 相 incident 的边，再标记与 $u_2$ 相 incident 的边，最后标记与 $u_1$ 相 incident 的边）。图 2 展示了该图标号过程的示例。回忆一下，在标记与 $r$ 相 incident 的边之前，我们按 $\sigma'$ 的递增顺序对 $H$ 的顶点排序。

  容易验证（但耗时且占篇幅，因此此处省略各情形的全部细节）：无论由 $\{u_1, u_2, u_3\}$ 导出的图具有何种结构，也无论 $d'(u_1)$ $d'(u_2)$ $d'(u_3)$ 的取值如何，我们总是得到 $\sigma(u_3) < \sigma(u_2) < \sigma(u_1)$。

  此外， $\sigma(u_1) \leq (2+3) + 10 + 11 + 12$。项（$2+3$）是 $u_1u_2$ 和 $u_1u_3$ 的标号上界（如果这些边存在），而 12 是可分配给与$u_1$关联的边的最大可能标号。综上可得 $\sigma(u_1) \leq 38$。

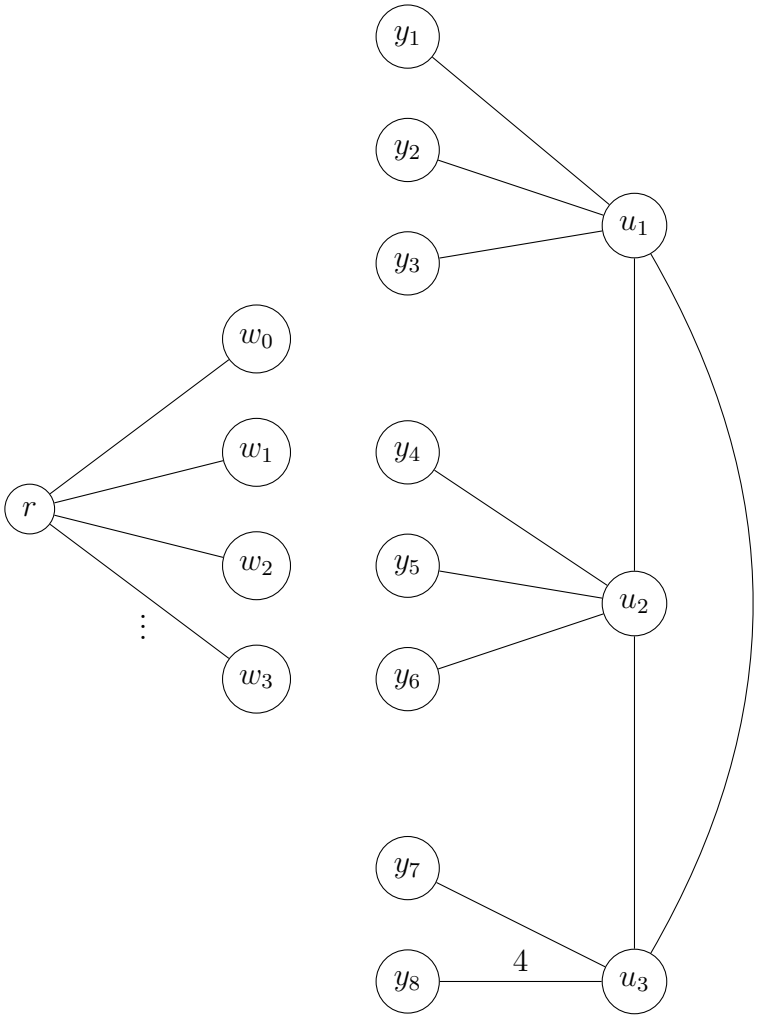


图2：情形 $i = 1$ 中的标记。

由于与 $r$ 关联的边被赋予了最大的 $n-4$ 个标号，因此对于任意 $v \in H$，有： $\sigma(r) > \sigma(v) \geq m - (n-5) \geq 6n+5$（因为 $m \geq 7n$），从而 $\sigma(v) \geq 101$，因为 $n \geq 16$。这意味着$\sigma(v) > \sigma(u_1)$; 又由于在标记与 $r$关联的边之前， $H$ 的顶点已按 $\sigma'$ 递增排序，因此不可能在 $H$的两个顶点之间产生冲突。综上，所得标记是反幻的。

- $i = 2$。

我们按照图3所示对图进行标记：再次使用最小的标号标记与 $u_3$ 和 $u_2$ 相邻的边（先标记与 $u_3$相邻的边，再标记与 $u_2$相邻的边）。我们将标号 $\{m-1, m-3, \ldots, m-2(n-5)+1,\ m-2(n-5)-1\}$ 留给与 $r$相邻的边，并将标号 $\{m, m-2, m-4, \ldots, m-2(d'(u_1)-2)$ $m-2(n-5)-2\}$ 留给与 $u_1$相邻的边。与之前所有的标记一样，在标记与 $r$相邻的边之前，我们按 $\sigma'$ 递增的顺序对 $H$ 中的顶点排序。

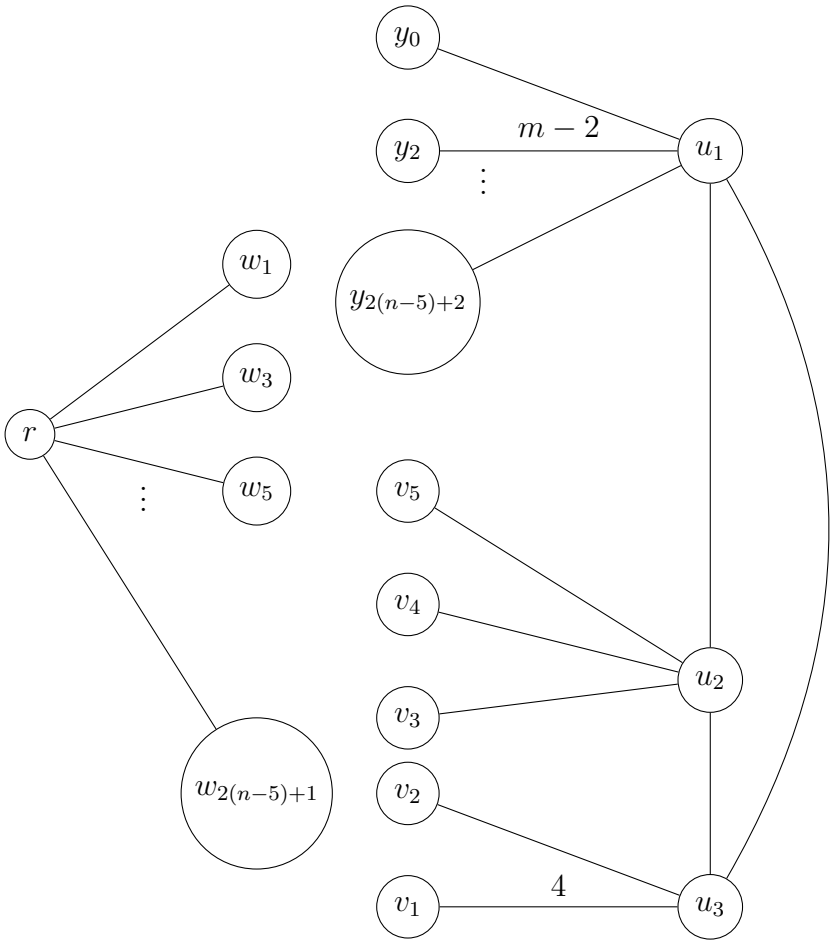


图3： $i=2$情形下的标记。

由于为与 $r$ 相 incident 的边预留的标号间隔为 2，因此我们保证，对于任意两个不同的顶点 $v_1,\ v_2 \in H$, $|\sigma(v_1)-\sigma(v_2)| \geq$

2。此外，对于任意 $v \in H$，我们有 $\sigma(v) \geq m-2(n-5)-1 \geq 5n+9 \geq 89$ 且 $\sigma(u_3) < \sigma(u_2) < 30$。我们还有 $\sigma(u_1) \geq \sigma(u_2)+4$。
现在，让我们比较任意 $v \in H$ 下 $\sigma(r)$ 和 $\sigma(v)$ 的值：

$$\begin{aligned}\sigma(v) \leq\ & m+(m-1)+(m-2(d'(u_1)-1))+(m-2d'(u_1))+\cdots+(m-2(n-5)) \\ & +(m-2(n-5)-3)+(m-2(n-5)-4)+\cdots+(m-2(n-5)-\alpha)\end{aligned}$$

对于某个 $\alpha \geq 3$。由于 $d'(u_1) \geq 4$，我们得到 $\sigma(v) \leq m+(m-1)+(m-6)+(m-8)+\cdots+(m-2(n-5))+(m-2(n-5)-3)$。同时，$\sigma(r)=(m-1)+(m-3)+\cdots+(m-2(n-5)-1)$。逐项比较这两个和，并且由于 $d(r)=n-4 \geq 12$，我们得到 $\sigma(r) \geq \sigma(v)+4$。

因此，图中唯一可能的冲突发生在 $u_1$ 与一个顶点 $v \in H \cup \{r\}$ 之间。在这种情形下，如果 $v \neq y_0$，我们执行 $m \leftrightarrow m-1$ 交换。这会使 $\sigma(u_1)$ 和 $\sigma(y_0)$ 的值减少 1，并使 $\sigma(r)$ 和 $\sigma(w_1)$ 的值增加 1。由于任意两个 $v_1$、$v_2 \in H \cup \{r\}$ 都满足 $|\sigma(v_1)-\sigma(v_2)| \geq 2$，$u_1$ 不可能与另一个顶点 $x \neq r$、$w_1$、$y_0$ 发生冲突（即一个顶点 $x$，其值 $\sigma(x)$ 在交换后保持不变）。如果 $v=r$，则不可能有 $\sigma(w_1)+1=\sigma(u_1)-1$，因为 $\sigma(r) \geq \sigma(w_1)+4$。否则，由于 $w_1$ 满足 $\sigma(w_1)=\max_{y \in H}^{\sigma}(y)$，由于 $u_1$ 与 $v$ 冲突，因此 $\sigma(w_1)+1=\sigma(u_1)-1$ 是不可能的。此外，$v \neq y_0$，因此应用交换后，$u_1$ 无冲突。最后，由于 $w_1$ 同样是 $H$ 中 $\sigma$ 值最大的顶点，因此 $\sigma(w_1)+1=\sigma(y_0)-1$ 是不可能的。总之，所得标号是反幻的。

如果 $v=y_0$，我们则改为执行 $m-2(n-5)-1 \leftrightarrow m-2(n-5)-2$ 交换。这会使 $\sigma(u_1)$ 和 $\sigma(y_{2(n-5)+2})$ 各增加 1，并使 $\sigma(r)$ 和 $\sigma(w_{2(n-5)+1})$ 各减少 1。由于 $v=y_0 \neq y_{2(n-5)+2}$，且 $w_{2(n-5)+1}$ 是 $H$ 中 $\sigma$ 值最小的顶点，我们同样可以得到一个反幻标号。

- $i=3$.

  我们按图4所示为图标号：对图 $\{u_1,u_2,u_3\}$ 所诱导的边使用最小的标号。接着，用当前可用的最小标号为与 $u_3$ 相 incident 的边标号，与

$u_2$ 相 incident 的边使用 $\{m-2, m-5, m-8, \ldots, m-3d'(u_2)-2\}$，与 $u_1$ 相 incident 的边使用 $\{m-1, m-4, m-7, \ldots, m-3d'(u_1)-1\}$。与 $r$ 相 incident 的边标记为 $\{m, m-3, \ldots, m-3(n-5)\}$。图 $V \setminus \{r, u_3\}$ 所诱导的边（若边 $u_1u_2$ 存在，则不包括该边）按照第2节所述的着色过程进行标记。再次按 $\sigma'$ 的递增顺序排列 $H$ 的顶点，然后为与 $r$ 相 incident 的边标号。

由于与 $r$ 相 incident 的边的标号间隔为 3，我们类似于性质 2.3 得到，对于任意两个不同的顶点$v_1$，$v_2 \in H$, $|\sigma(v_1) - \sigma(v_2)| \geq 3$。

我们有：$\sigma(r) = m + (m-3) + \cdots + (m-3(n-5)) \geq \sigma(u_1) + 4$以及 $\sigma(u_1) \geq \sigma(u_2) + 4$。对于任意 $v \in H$, $\sigma(v) \leq m + (m-1) + (m-5) + (m-13) + (m-16) + \cdots + (m-3(n-5)-1)$，我们也有（因为 $d'(u_1) \geq d'(u_2) \geq 4$）；并且由于 $n \geq 16$, $\sigma(r) \geq \sigma(v) + 4$。最后，$\sigma(u_3) \leq 3+4+5+6 \leq 18$，因此 $\sigma(u_3) \leq \sigma(u_2) - 4$，且对于任意 $v \in H, \sigma(u_3) \leq \sigma(v) - 4$。

这些性质表明，唯一可能发生的冲突是 $u_1$与某个顶点 $v_1 \in H$之间的冲突，以及 $u_2$ 与某个顶点 $v_2 \in H$之间的冲突。此外，在我们进行任何交换之后，这一点仍然成立，因为对于任意 $x \in V$，$\sigma(x)$的值只会改变0、1或 $-1$。我们在表2中列出了可能的标签交换，并区分以下三种情形：

– 冲突$(u_1, v_1)$，冲突$(u_2, v_2)$。考虑某个 $j$的 $\lambda_j$ 交换：除非 $v_1 = y_j$ 或 $v_2 = y_{j+1}$，否则这将得到一个反幻标记。这里有两个可能的问题和四种可能的交换（每个问题至多与一种 $\lambda_j$ 交换相关联），因此可以得到一个反幻标记。

– 冲突$(u_1, v_1)$
考虑某个 $j$下的 $\mu_j$ 交换：除非 $v_1 = y_{j+1}$，$v_2 = y_{j+1}$（且 $\sigma(u_2) = \sigma(y_{j+1})+1$），或 $v_2 = w_j$（且 $\sigma(u_2) = \sigma(w_j) - 1$），否则这会产生一个反幻标记。最后这两个等式互斥（因为 $\sigma(v_j)$的取值间隔至少为3），因此可能存在两个问题和四种可能的交换（每个问题至多对应一个 $\mu_j$交换），由此我们可以得到一个反幻标记。

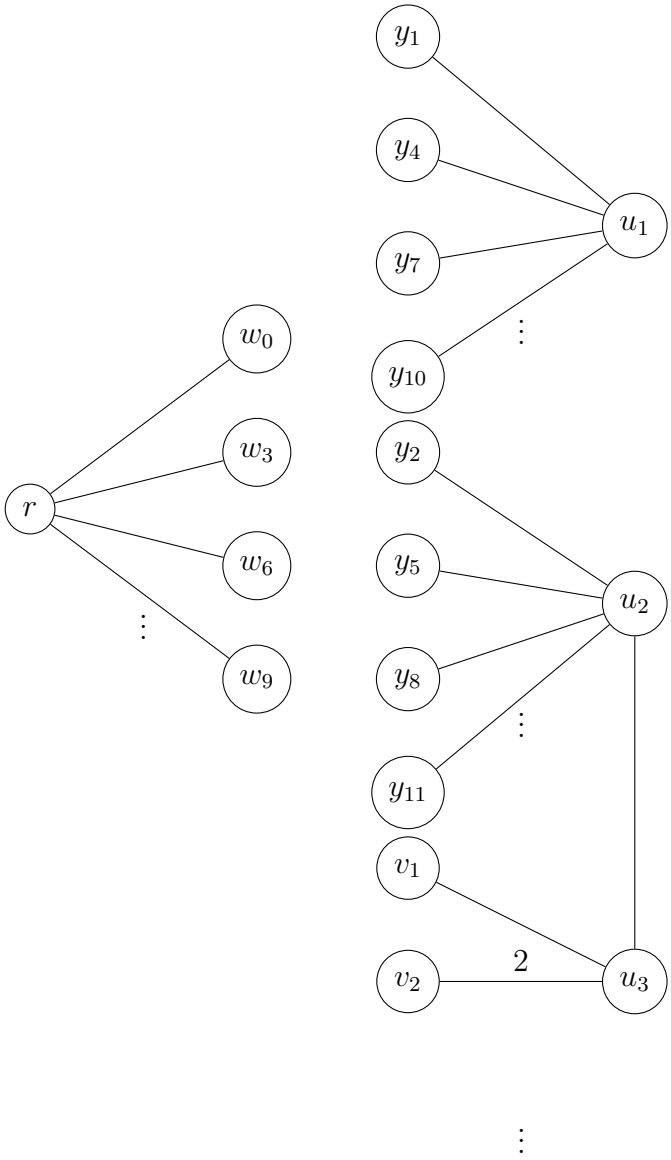


图4：在 $i = 3$情形下的标记。

– 冲突$(u_2,\ v_2)$

考虑 $\rho_j$ 交换：这会得到一个反幻标记，除非出现 $v_2 = y_j$, $v_1 = y_j$（以及 $\sigma(u_1) = \sigma(y_j) - 1$），或 $v_1 = w_{j+1}$（以及 $\sigma(u_1) = \sigma(w_{j+1}) + 1$）。后两个等式彼此

| 记号 | 交换 | 演变 $\sigma(u_i)$ | 演变 $\sigma(v_i)$ |
|---|---|---|---|
| $\lambda_1$ | $m-1 \leftrightarrow m-2$ | $\sigma(u_1) - 1,\ \sigma(u_2) + 1$ | $\sigma(y_1) - 1, \sigma(y_2) + 1$ |
| $\lambda_4$ | $m-4 \leftrightarrow m-5$ | | $\sigma(y_4) - 1,\ \sigma(y_5) + 1$ |
| $\lambda_7$ | $m-7 \leftrightarrow m-8$ | | $\sigma(y_7) - 1,\ \sigma(y_8) + 1$ |
| $\lambda_{10}$ | $m-10 \leftrightarrow m-11$ | | $\sigma(y_{10}) - 1, \sigma(y_{11}) + 1$ |
| $\mu_0$ | $m \leftrightarrow m-1$ | $\sigma(u_1) + 1$ | $\sigma(y_1) + 1,\ \sigma(w_0) - 1$ |
| $\mu_3$ | $m-3 \leftrightarrow m-4$ | | $\sigma(y_4) + 1, \sigma(w_3) - 1$ |
| $\mu_6$ | $m-6 \leftrightarrow m-7$ | | $\sigma(y_7) + 1, \sigma(w_6) - 1$ |
| $\mu_9$ | $m-9 \leftrightarrow m-10$ | | $\sigma(y_{10}) + 1,\ \sigma(w_9) - 1$ |
| $\rho_2$ | $m-2 \leftrightarrow m-3$ | $\sigma(u_2) - 1$ | $\sigma(y_2) - 1, \sigma(w_3) + 1$ |
| $\rho_5$ | $m-5 \leftrightarrow m-6$ | | $\sigma(y_5) - 1, \sigma(w_6) + 1$ |
| $\rho_8$ | $m-8 \leftrightarrow m-9$ | | $\sigma(y_8) - 1, \sigma(w_9) + 1$ |
| $\rho_{11}$ | $m-15 \leftrightarrow m-12$ | | $\sigma(y_{11}) - 1,\ \sigma(w_{12}) + 1$ |

表2： $i = 3$ 情形下的交换（对 $\sigma(r)$值所做的更改不计）。

互斥，因此有两个可能的问题和四种可能的交换（每个问题至多对应一个 $\rho_j$ 交换），而我们可以得到一个反幻标记。

## 5. 非连通情形

在第2、3和4节中，我们只考虑了连通图。首先注意，若给定的图 $G$ 有两个孤立顶点或一条孤立边，则它不可能是反幻的（我们假设若顶点 $x \in V$ 是孤立的，则 $\sigma(x) = 0$）。非连通图 $G$还有另外两个族，使得 $\Delta(G) = n - 4$ 和 $m \geq 7n$:

- $u_3$ 是一个孤立顶点，且 $d'(u_1) > 0$。在这种情形下，第4节中描述的构造保持不变，因此我们可以得到一个反幻标号。

- $\{u_1, u_2, u_3\}$ 构成一个连通分量，它要么是 $K_3$ ，要么是 $P_3$ （$K_3$是由 3 个顶点构成的团，而 $P_3$ 是由 3 个顶点构成的导出路径），因此 $d'(u_1) = d'(u_2) = d'(u_3) = 0$。那么， $H \cup \{r\}$ 是第二个连通分量，其中 $r$ 是全邻接的。由于 $m \geq 7n$， $m_H \geq 6n \geq 2$。我们可以用最小的标号标记由 $\{u_1, u_2, u_3\}$ 导出的分量，并应用证明中所述的构造

定理 1 到另一个分量，从而得到一个反幻标记。

因此我们得到以下结果：

**推论 1.** 设 $G$ 是一个不含孤立边且至多含一个孤立顶点的图。若 $\Delta(G) = n - 4$ 且 $m \geq 7n$，则 $G$ 是反幻的。

## 6. 结论

我们已证明，对于任意满足 $m \geq 7n$ 和 $\Delta(G) = n - 4$ 的图 $G$，$G$ 都是反幻的。第 2、3、4 节中给出的证明展示了一种证明某些图具有反幻和性的新框架；本文将其应用于最大度较大、平均度较小的图。值得注意的是，本文采用的框架通过交换标号进行标记后处理，这与我们在 [8] 中证明含支配团图具有反幻和性时使用的框架颇为相似。很可能可以用同样的思路证明其他图类具有反幻和性。

对于平均度较大的图，Eccles 在 [9] 中证明了以下结果：

**定理 6.** 存在一个绝对常数 $d_0$，使得若图 $G$ 的平均度至少为 $d_0$，且 $G$ 不含孤立边且至多含一个孤立顶点，则 $G$ 是反幻的。

请注意，我们的构造证明表明，对于平均度至少为 14 的图，也有类似结果（因为我们假设了 $m \geq 7n$）。

Eccles 的结果适用于顶点数和平均度都非常大的图；我们很可能可以改进该结果（请注意，[9] 中描述的证明给出的平均度 $d_0$ 的上界为 4182），从而证明一个类似于以下猜想的结果：

**猜想 3.** 设 $k$ 为一个正整数，且 $G$ 是一个满足 $\Delta(G) = n - k$ 的连通图。若对于某个正函数 $f$，有 $m \geq f(k)n$，则 $G$ 是反幻的。

请注意，已知情形 $k = 1$ 和 $k = 2$ 成立，且在这两种情形下均有 $f(k) = 0$；也已知情形 $k = 3$ 成立（见定理 3），其中 $f(k) = 0$ 且 $n \geq 9$。此外，定理 5 证明了情形 $k = 4$ 成立，其中 $f(4) \leq 7$。最后，定理 6 表明，对于满足 $n - k \geq d_0$ 的图 $G$，有 $f(k) \leq \frac{d_0}{2}$。

请注意，我们的构造不要求图中的顶点数满足任何条件（这与猜想 2 相反）；然而， $m \geq f(k)n$ 假设（定理 5 中的 $m \geq 7n$ ）确实会对 $n$ （定理 5 中的 $n \geq 16$ ）诱导一个（常数）下界。

一个自然产生的问题是：对于某种稀疏性的定义，能否研究并证明“稀疏”图具有反幻和性；理想情况下，还能证明具有 $m < 7n$ 的图具有反幻和性，从而证明所有具有$G$ 以及 $\Delta(G) = n-4$ 的图都是反幻和图。另一种思路是构建一个框架，使 $\sigma(u_1)$、 $\sigma(u_2)$ 和 $\sigma(u_3)$ 的取值（即分配给它们的关联边的标号）取决于各自的度，尝试“猜测”这些取值在其他 $\sigma(v)$ $v \in H$ 中自然会处于什么位置；这与 Yilma 在 [4] 中的工作类似。

**参考文献**

[1] N. Hartsfield, G. Ringel, 《图论珍珠：全面导论》，多佛数学丛书，多佛出版社，1990年。[2] J. Gallian，图标号动态综述，《电子组合学杂志》19（2025）。doi:10.37236/27。[3] N. Alon, G. Kaplan, A. Lev, Y. Roditty, R. Yuster，稠密图是反幻和图，《图论杂志》47（2004年）297–309。doi:10.1002/jgt.20027。[4] Z. B. Yilma，大最大度图的反幻和性质，《图论杂志》72 (4)（2013年）367–373。doi:https://doi.org/10.1002/jgt.21664。[5] K. Bérczi, A. Bernáth, M. Vizer，正则图是反幻和图，《电子组合学杂志》22 (3)（2015）3。doi:10.37236/5465。[6] F. Chang, Y.-C. Liang, Z. Pan, X. Zhu，正则图的反幻和标号，《图论杂志》82 (4)（2016年）339–349。doi:10.1002/jgt.21905。[7] D. B. West, 《图论导论》，普伦蒂斯-霍尔，1996年。[8] G. Beaudoire, C. Bentz, C. Picouleau，含支配团图的反幻和性（2025）。arXiv:2512.17693。

[9] T. Eccles，大线性规模图是反魔幻的，《图论杂志》81（2014年9月）。doi:10.1002/jgt.21872。