¨Hölder 空间的弱Banach-Saks性质

PREZEMYS-LAW G ´ORKA 和 MAURO SANCHIZ*

Abstract. 我们研究度量空间上的 H¨older 空间中的弱Banach-Saks性质。我们证明，对于每个无限度量空间 $(M,\ d)$ 以及每个 $\alpha \in (0,1]$, H¨older 空间 $C^\alpha(M)$ 都不具有弱Banach-Saks性质。

arXiv:2603.02977v1 [math.FA] 3 Mar 2026

1. Introduction

如果 Banach 空间 X 满足：每个弱收敛序列 $x_n \to x$ 在 X 中都包含一个子序列 (x_{n_k}), 其 Ces`aro 均值在范数下收敛到 x，则称该空间具有 弱 ***Banach–Saks*** 性质 ，也就是说,

$$\Big\| \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} x_{n_k} - x \Big\|_X \longrightarrow 0 \quad \text{as } N \to \infty.$$

在他们具有开创性的论文 [2], 中，Banach 和 Saks 证明了空间 $L_p[0,1]$（当 $1 < p < \infty$ 时）和 ℓ_p 具有弱 Banach–Saks 性质。他们还提出了一个错误的论证，声称 $L_1[0,1]$ 不具有这一性质。后来 Szlenk [9], 修正了这一论证，并证明 $L_1[0,1]$ 实际上具有弱 Banach–Saks 性质。此外，Schreier [7] 证明 $C[0,1]$ 不具有弱 Banach–Saks 性质。最后，Farnum [6] 证明，对于紧致度量空间 M，空间 $C(M)$ 具有弱 Banach–Saks 性质，当且仅当

$$M^{(\omega)} = \emptyset, \quad \text{where } M^{(\omega)} = \bigcap_{n=1}^{\infty} M^{(n)},$$

并且 $M_{(n)}$ 表示 M 的第 n 阶导集。

此后，关于弱 Banach–Saks 性质的研究偶尔出现在 Banach 空间的不同背景中。近来, 文献 [4, 8] 研究了 Banach–Saks 性质的量化。

本文的主要目标是证明，对于每个无限度量空间 M，H¨older 空间 $C^\alpha(M)$ 不具有弱 Banach–Saks 性质。该结果补充了现有的连续函数空间刻画，并将先前的研究自然地推广到 H¨older 情形。

本文结构如下。在第 2 节中，我们回顾若干定义与辅助结果。我们给出一个直接证明，说明 ℓ_∞ 不具有弱 Banach–Saks 性质。作为推论，我们得到测度空间 (X, Σ, μ) 与度量空间 (M, d) 的刻画，使得 $L_\infty(X, \Sigma, \mu)$ 与 $C_b(M)$ 分别具有弱 Banach–Saks 性质。第 3 节包含如下证明: $C^\alpha(M)$ 具有弱 Banach–Saks 性质当且仅当度量空间 (M, d) 是有限的。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 46B26, 46E30, 46E15.

Key words and phrases. H¨older 空间；Banach-Saks 性质。

* 本研究由 NAWA 的 Ulam 博士后项目 2024/1/00064 资助，并部分得到 UNED 研究项目 2025/00145/001“算子、格与 Banach 空间结构”的资助。

2. Preliminaries

设 (M,d) 为一个度量空间，并设 $C_b(M)$ 表示 M 上所有有界连续函数构成的空间。我们在 $C_b(M)$ 上配备上确界范数

$$\|f\|_{C(M)} := \sup_{x\in M} |f(x)|.$$

Fix $0<\alpha\le 1$. 函数 $f\in C_b(M)$ 称为$H^{\cdot\cdot}$阶 *Hölder* 连续函数 α i f

$$\rho_{\alpha,M}(f) := \sup_{\substack{x,y\in M\\ x\neq y}} \frac{|f(x)-f(y)|}{d(x,y)^\alpha} < \infty.$$

我们定义

$$C^\alpha(M) := \{f\in C_b(M) : \rho_{\alpha,M}(f)<\infty\},$$

并赋予其范数

$$\|f\|_{C^\alpha(M)} := \|f\|_{C(M)} + \rho_{\alpha,M}(f).$$

空间 $C_b(M)$ 和 $C^\alpha(M)$ 是巴拿赫空间。

根据度量空间完备化的定义，我们得到如下结论。

命题 2.1. 设 (M,d) 是一个度量空间，且 (M,d) 是它的完备化。固定 $\alpha\in(0,1]$. 则有如下 $C^\alpha(M)\cong C^\alpha(M)$ 等距同构。

证明. 设 (M,d) 表示 (M,d) 的完备化，并设 $i\colon M\to M$ 是一个具有稠密像的等距嵌入。定义算子

$$I : C^\alpha(\widehat{M}) \to C^\alpha(M)$$

by

$$I(f)(x) = f(i(x)), \qquad \text{for all } f\in C^\alpha(\widehat{M}),\ x\in M.$$

显然，I 是线性且单射的。此外，对每个 $f\in C^\alpha(M$),

$$\|I(f)\|_{C^\alpha(M)} \le \|f\|_{C^\alpha(\widehat{M})}.$$

现在 证明 I 是满射。取定 $g\in C^\alpha(M)$，并定义 $f\colon i(M)\to \mathbb{R}$ 为

$$\widetilde{f}(\hat{x}) = g(i^{-1}(\hat{x})).$$

对于任意 $\hat{x}、\hat{y}\in i(M)$，我们得到

$$|\widetilde{f}(\hat{x})-\widetilde{f}(\hat{y})| = |g(i^{-1}(\hat{x}))-g(i^{-1}(\hat{y}))| \le \rho_{\alpha,M}(g)\, d^\alpha(i^{-1}(\hat{x}),i^{-1}(\hat{y})) = \rho_{\alpha,M}(g)\,\widehat{d}^\alpha(\hat{x},\hat{y}),$$

and

$$|\widetilde{f}(\hat{x})| \le \|g\|_{C(M)}.$$

因此，f 在稠密子集 $i(M)$ 上是 H¨older 连续的，$\subset M$ 其 H¨older 半范数 和上确界界与 g 相同。由于 $i(M)$ 在 M 中稠密，函数 f 存在唯一的连续 延拓 $f\colon M\to\mathbb{R}$。此外，该延拓满足

$$\rho_{\alpha,\widehat{M}}(f) \le \rho_{\alpha,M}(g), \qquad \|f\|_{C(\widehat{M})} \le \|g\|_{C(M)}.$$

因此 $f\in C^\alpha(M)$，并且根据构造，$I(f)=g$。于是，

$$\|f\|_{C^\alpha(\widehat{M})} \le \|I(f)\|_{C^\alpha(M)}.$$

证明至此完成。 □

设 X 和 Y 是 Banach 空间，其范数分别为 $\|\cdot\|_X$ 和 $\|\cdot\|_Y$。若存在一个线性映射 $T\colon Y\to X$ 以及一个常数 $C>0$，使得 Y 嵌入 X，记作 $Y\hookrightarrow X$，则称 Y 嵌入 X。

$$C^{-1}\|y\|_Y \le \|Ty\|_X \le C\|y\|_Y \quad \text{for all } y\in Y.$$

命题 2.2. 设 X 和 Y 是 *Banach* 空间。若 X 是弱 *Banach–Saks* 的，且 $Y \hookrightarrow X$，则 Y 也具有弱 *Banach–Saks* 性质。

证明。 设 $T : Y \to X$ 为一个线性算子。假设存在常数 $C > 0$ 使得

$$C^{-1}\|y\|_Y \le \|Ty\|_X \le C\|y\|_Y \quad \text{for all } y \in Y. \tag{1}$$

设 $(y_n) \subset Y$为弱收敛于 $y \in Y$ 的序列。由 T 的线性性与连续性可知， $T(y_n) \to T(y)$ 在 X 中弱收敛。由于 X 具有弱 Banach–Saks 性质，存在子序列 (y_{n_k}) 使得

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} T(y_{n_k}) - T(y) \longrightarrow 0 \quad \text{in } X.$$

利用 (1) 中的第一个不等式，我们推出

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} y_{n_k} - y \longrightarrow 0 \quad \text{in } Y.$$

证明完毕。

□

定理 2.3。 ℓ_∞ 不是弱 *Banach–Saks* 的。

证明。尽管可以借助高级结果推导出该定理，但为使论述清晰，我们采用一种更直接的方法。事实上，由于 $C[0,1]$ 是可分的， [1] 中的定理 2.5.7给出了一个嵌入 $C[0,1] \hookrightarrow \ell_\infty$，并且根据施赖尔定理 [7],，空间 $C[0,1]$ 不是弱 Banach–Saks。因此，命题 2.2表明 ℓ_∞ 不是弱 Banach–Saks。虽然这一论证有效，但它依赖于相对复杂的工具；为了给出自成一体且更清晰的论述，我们将按照 Schreier 和 Farnum 的思路给出以下直接证明。

设 $\mathcal{A} \subset 2^{\mathbb{N}} \setminus \{\emptyset\}$ 为极大施赖尔集 [3], 构成的族，定义如下:

$$\mathcal{A} = \{A \subset \mathbb{N} : |A| = \min(A)\} \setminus \{\emptyset\}.$$

显然， $\mathcal{A}$ 是一个可数集。取 $T : \mathbb{N} \to \mathcal{A}$ 为 $\mathcal{A}$的一个枚举，并在 ℓ_∞ 中定义序列 (u_k)如下:

$$u_k(i) := \begin{cases} 1 \text{ if } k \in T(i) \\ 0 \text{ otherwise.} \end{cases}$$

引理 2.4. 序列 (u_k) 在 ℓ_∞ 中弱收敛于0。

证明。 我们需要以下关于在 ℓ_∞ 中弱收敛的判据。

命题 2.5 ([10], 推论 8.11，改写版。 设(u_k) 是 ℓ_∞ 中的一个序列，且对每个 $i \in$ 自然数集， $u_k(i) \to 0$为 $k \to \infty$ 。若对每个 $\alpha > 0$ 以及所有严格递增的自然数序列(k_j)、(i_n) 和(J_n)，都存在 $n \in$自然数集 和 $j \in \{1, 2, ..., J_n\}$，使得 $|u_{k_j}(i_n)| \le \alpha$，那么 $u_k \to 0$在 ℓ_∞中弱收敛。

应用上述命题时，我们固定 $\alpha > 0$，以及严格递增的自然数序列 (k_j)、(i_n) 和 (J_n)。取 $n > k_1$。若 $k_1 \notin T(i_n)$，则 $u_{k_1}(i_n) = 0 < \alpha$ ，证明即告完成，因此不妨设 $k_1 \in T(i_n)$。这迫使 $|T(i_n)| = \min(T(i_n)) \le k_1$。现在，由于 $k_1 < n \le J_n$ 和 $k_1 < k_2 < ... < k_{J_n}$，必定至少存在某个 $j \in \{1, ..., J_n\}$ 使得 $k_j \notin T(i_n)$。因此， $|u_{k_j}(i_n)| = 0 < \alpha$。由此可知， $u_k \to 0$ 在 ℓ_∞ 中弱收敛。□

引理 2.6. 序列 (u_k) 不存在其 *C`esaro* 均值在 ℓ_∞ 中收敛至 0 的子序列。

证明。 任取一个严格递增的自然数序列 (k_j)，注意到 $k_{N+1} > N$。令

$$A_N := \{k_{N+1}, ..., k_{N+N}, k_{N+N+1}, ..., k_{N+k_{N+1}}\}.$$

于是集合 $\{k_{N+1}, k_{N+2}, ..., k_{N+N}\}$包含于 A_N。由于 $A_N \in \mathcal{A}$，存在 i_0使得$T(i_0) = A$，因此对每个 $j \in \{N+1, ..., N+N\}$，都有 $u_{k_j}(i_0) = 1$。由此得到

$$\left\| \frac{1}{2N} \sum_{j=1}^{2N} u_{k_j} \right\|_{\ell_\infty} \geq \frac{1}{2N} \sum_{j=1}^{2N} u_{k_j}(i_0) \geq \frac{1}{2N} \sum_{j=N+1}^{2N} u_{k_j}(i_0) = \frac{1}{2}.$$

综上所述，由于对任意 N我们有 $\| \frac{1}{2N} \sum_{j=1}^{2N} u_{k_j} \|_{\ell_\infty} \geq \frac{1}{2}$，子序列 (u_{k_j}) 不是 C`esaro 零序列。□

现在，由引理 2.4 和引理 2.6 即可得出该定理的证明。 □

作为推论，我们得到以下两个结果。

定理2.7. 设(X, Σ, μ) 为测度空间，则 $L_\infty(X, \Sigma, \mu)$ 不是弱 *Banach–Saks* 的，当且仅当存在一列(A_n) 具有正测度的互不相交可测集。

证明。 ($\Longrightarrow$) 由命题 2.2 和定理 2.3，只需证明 $\ell_\infty \hookrightarrow L_\infty(X, \Sigma, \mu)$。设（$A_n$）为一列两两互不相交且具有正测度的可测集。定义算子 $T\colon\ \ell_\infty \to L_\infty(X, \Sigma, \mu)$ 为

$$T(a) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) \chi_{A_n}, \qquad a \in \ell_\infty.$$

那么 T是一个线性等距映射。因此， ℓ_∞ 等距嵌入到 $L_\infty(X, \Sigma, \mu)$ 中，结论得证。($\Longleftarrow$) 反设该命题不成立。那么存在一个自然数 $N \in \mathbb{N}$，以及正测度的两两不交可测集 $A_1, \ldots, A_N$，使得 $\mu\left(X \setminus \bigcup_{i=1}^{N} A_i\right) = 0$；此外，对于每个 $i \in \{1, \ldots, N\}$ 以及每个可测子集 $A \subset A_i$，都有 $\mu(A)$ $\mu(A_i \setminus A) = 0$. 那么，任意 $f \in L_\infty(X, \Sigma, \mu)$ 在每个 A_i 上都几乎处处为常数，其中 $i \in \{1, \ldots, N\}$。事实上，若某个 $f \in L_\infty(X, \Sigma, \mu)$ 在某个 A_i上不是常数，其中 i，则 $\operatorname{ess\,sup}_{A_i} f > \operatorname{ess\,inf}_{A_i} f$，这会导出 A_i 中的两个互不相交的正测度可测子集——矛盾。因此，每个 f在每个 A_i上都是常数。由此，$L_\infty(X, \Sigma, \mu)$ 是有限维的，因而具有弱 Banach–Saks 性质。□

定理2.8。 设(M, d) 是一个度量空间。则以下陈述成立：

(1) 如果(M, d) 是紧致的，则空间 $C_b(M)$ 是弱 *Banach–Saks* 的，当且仅当 $M^{(\omega)} = \emptyset$。

(2) 如果(M, d) 不是紧致的，则空间 $C_b(M)$ 不是弱 *Banach–Saks* 的。

证明。 由于(1)正是 Farnum [6] 的主要结果，我们将证明(2)。由于(M, d)不是紧致的，存在一个序列$(x_n, \varepsilon_n) \subset X \times (0, \infty)$，使得序列$(x_n)$没有收敛子列， $\varepsilon_n \to 0$，并且

$$B(x_i, \varepsilon_i) \cap B(x_j, \varepsilon_j) = \emptyset \quad \text{for all } i \neq j.$$

对于每个 $n \in$自然数集，令 $\varphi_n\colon\ M \to [0, 1]$ 是满足以下条件的连续函数[1]

$$\varphi_n(x_n) = 1 \quad \text{and} \quad \varphi_n \equiv 0 \text{ on } M \setminus B(x_n, \varepsilon_n).$$

定义线性算子 $T\colon\ \ell_\infty \to C_b(M)$如下：

$$T(a) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) \varphi_n, \qquad a \in \ell_\infty.$$

由序列 $(x_n,\ \varepsilon_n)$ 的性质可知，对于每个 $a \in \ell_\infty$，映射 $x \mapsto T(a)(x)$ 都是连续的。由于 T 是线性等距映射，由定理 2.3 和命题 2.2 可知， $C_b(M)$ 不具有弱 Banach–Saks 性质。

□

[1]For example, one may define $\varphi_n(x) = \max\left\{1 - \frac{d(x, x_n)}{\varepsilon_n},\ 0\right\}$.

3. Main result

定理 3.1。 设 (M, d) 是一个度量空间，且 $\alpha \in (0,1],$，则 $C^\alpha(M)$ 具有弱 *Banach–Saks* 性质，当且仅当 M 是有限的。

证明。 首先，我们回顾 [5][2]中的以下引理。

引理 3.2。 设(M, d) 是一个无限的完备度量空间。则存在一个常数 $K > 0$以及一个点对序列$(x_n, y_n) \subset M$，使得：

(i) $x_n \neq y_n$ 对所有 $n \in$自然数集均成立；*(ii)* $x_m \notin B(y_n, K\, d(x_n, y_n))$ 对所有 $n, m \in$ 自然数集 均成立（特别地，这意味着 $K \leq 1$）；*(iii)* $B(y_n, K\, d(x_n, y_n)) \cap B(y_m, K\, d(x_m, y_m)) = \emptyset$ 对所有 $n \neq m$均成立。

显然，若 M 是有限的，则 $C^\alpha(M)$ 是有限维的，因此它具有弱 Banach–Saks 性质。设 (M， d) 是一个无限度量空间。根据命题 2.1，空间 $C^\alpha(M)$ 与 $C^\alpha(M)$ 等距同构，其中 (M， d) 表示度量空间 (M， d) 的完备化。因此，鉴于命题 2.2，我们不妨假设 (M， d) 是完备的。

由命题 2.2 和定理 2.3，只需证明 $\ell_\infty \hookrightarrow C^\alpha(M)$。设 $K > 0$，并设 (x_n, y_n) 是引理 3.2 中 M 内的点对序列。我们如下定义函数序列 $f_n\colon M \to$R

$$f_n(x) := \max\left\{\min\left\{1, d^\alpha(x_n, y_n) - \frac{d^\alpha(x, y_n)}{K^\alpha}\right\}, 0\right\},\ x \in M$$

显然有

$$\|f_n\|_{C(M)} \leq 1.$$

此外，我们有

$$\rho_{\alpha,M}(f_n) \leq \frac{1}{K^\alpha}. \tag{2}$$

In实上，由于映射 $\xi \mapsto \max\{\xi, 0\}$ 与 $\xi \mapsto \min\{1, \xi\}$ 是 1-Lipschitz 的，我们有e

$$\begin{aligned}
\rho_{\alpha,M}(f_n) =& \sup_{x\neq y} \frac{|f_n(x) - f_n(y)|}{d^\alpha(x, y)} \\
\leq& \sup_{x\neq y} \frac{\left|d^\alpha(x_n, y_n) - \frac{d^\alpha(x,y_n)}{K^\alpha} - \left(d^\alpha(x_n, y_n) - \frac{d^\alpha(y,y_n)}{K^\alpha}\right)\right|}{d^\alpha(x, y)} \\
=& \sup_{x\neq y} \frac{\left|\frac{d^\alpha(x,y_n)}{K^\alpha} - \frac{d^\alpha(y,y_n)}{K^\alpha}\right|}{d^\alpha(x, y)}.
\end{aligned}$$

接下来，我们利用 不等式 $|a^\alpha - b^\alpha| \leq |a - b|^\alpha$，对每个 $0 < \alpha \leq 1$ 和 $a, b > 0$，来计算 e

$$\begin{aligned}
\rho_{\alpha,M}(f_n) \leq& \sup_{x\neq y} \frac{|d(x, y_n) - d(y, y_n)|^\alpha}{K^\alpha \cdot d^\alpha(x, y)} \\
\leq& \sup_{x\neq y} \frac{|d(x, y)|^\alpha}{K^\alpha \cdot d^\alpha(x, y)} = \frac{1}{K^\alpha},
\end{aligned}$$

这就完成了 (2) 的证明。

对每个 $n \in$ 自然数集，记 $B_n := B(y_n,\ K \cdot d(x_n,\ y_n))$。根据定义，我们有 $supp(f_n) := \{x \in M\colon f_n(x) \neq 0\} = B_n$。注意，由性质（$iii$），我们有$supp(f_n) \cap supp(f_m) = \emptyset$，对 $n \neq m$均成立。因此，对每个 $x \in M$，至多存在一个 $n \in$ 自然数集，使得 $f_n(x) \neq 0$。将唯一满足 $f_n(x) \neq 0$ 的 n 记为 $n(x)$（如果不存在这样的对象，则记为 $n(x) = 1$

[2]尽管该文并未像我们这样明确表述，但其定理 3.2 的证明中已经证明了这一点。该证明主要表明，存在一列点 $(x_n,\ y_n)$，满足其引理 3.1 的假设，而这些性质正是我们所采用的。

）。现在我们可以证明 $\ell_\infty \hookrightarrow C^\alpha(M)$了。为此，我们按如下方式定义算子$T\colon \ell_\infty \to C^\alpha(M)$

$$T(a)(x) := a(n(x)) \cdot f_{n(x)}(x),\ a \in \ell_\infty, x \in M.$$

显然它是线性的，我们将证明

$$\|a\|_{\ell_\infty} \le \|T(a)\|_{C^\alpha(M)} \le \left(\frac{2}{K^\alpha} + 1\right) \|a\|_{\ell_\infty},\ \text{for } a \in \ell_\infty. \tag{3}$$

令我们 固定 $a \in \ell_{\infty\circ}$ 一方面，固定 $x,\ y \in M$。若 $n(x) = n(y)$，则由 (2) 可得 e

$$\begin{aligned}|T(a)(x) - T(a)(y)| =& |a(n(x))(f_{n(x)}(x) - f_{n(x)}(y))| \\ \le& \|a\|_{\ell_\infty} \cdot \rho_{\alpha,M}(f_{n(x)}) d^\alpha(x,y) \le \|a\|_{\ell_\infty} \cdot \frac{d^\alpha(x,y)}{K^\alpha}.\end{aligned}$$

因此，假设 $n(x) \neq n(y)$。于是有 $f_{n(x)}(y) = f_{n(y)}(x) = 0$，从而由 (2) 得到

$$\begin{aligned}|T(a)(x) - T(a)(y)| &= |a(n(x)) \cdot f_{n(x)}(x) - a(n(y)) \cdot f_{n(y)}(y)| \\ &= |a(n(x)) \cdot (f_{n(x)}(x) - f_{n(x)}(y)) - a(n(y)) \cdot (f_{n(y)}(y) - f_{n(y)}(x))| \\ &\le |a(n(x))||f_{n(x)}(x) - f_{n(x)}(y)| + |a(n(y))||f_{n(y)}(y) - f_{n(y)}(x)| \\ &\le |a(n(x))|\rho_{\alpha,M}(f_{n(x)}) d^\alpha(x,y) + |a(n(y))|\rho_{\alpha,M}(f_{n(x)}) d^\alpha(x,y) \\ &\le \|a\|_{\ell_\infty} \cdot \frac{2d^\alpha(x,y)}{K^\alpha}.\end{aligned}$$

因此，

$$\rho_{\alpha,M}(T(a)) \le \frac{2}{K^\alpha} \|a\|_{\ell_\infty},$$

显然

$$\|T(a)\|_{C(M)} \le \|a\|_{\ell_\infty} \cdot \sup_n \|f_n\|_{C(M)} \le \|a\|_{\ell_\infty}.$$

另一方面，对于每个 $k \in$ 自然数集，$n(y_k) = k$ 以及 $x_k \notin \bigcup_{l=1}^\infty B_l$。因此，对于每个 $l \in$ 自然数集，我们有 $f_l(x_k) = 0$ 以及

$$\begin{aligned}|T(a)(x_k) - T(a)(y_k)| &= |T(a)(y_k)| = |a(n(y_k)) \cdot f_{n(y_k)}(y_k)| \\ &= |a(k) \cdot f_k(y_k)| = |a(k)| \cdot \min\{1, d^\alpha(x_k, y_k)\}.\end{aligned}$$

这表明 要么 $|a(k)| \le \|T(a)\|_{C(M)}$，要么 $|a(k)| \le \rho_{\alpha,\ M}(T(a))$。由于 k是任意的，我们得到

$$\|a\|_{\ell_\infty} \le \rho_{\alpha,M}(T(a)) + \|T(a)\|_{C(M)} = \|T(a)\|_{C^\alpha(M)},$$

这就完成了对（3）的证明，整个证明也随之完成。 □

References

[1] F. Albiac 和 N. Kalton。*Banach* 空间理论专题。第 233 卷。2006 年。[2] S. Banach 和 S. Saks。“关于场中的强收敛 L^p”。法语。载于：《数学研究》2 (1930)，第 51–57 页。[3] K Beanland、D. Gorovoy、J. Hodor 和 D. Homza。“Schreier集并集的计数”。载于：澳大利亚数学会公报110.1 (2024)，第 19–31 页。[4] H. Bendov´a、O. F. K. Kalenda 和 J. Spurn´y。“Banach–Saks 性质的量化”。载于：泛函分析杂志268.7 (2015)，第 1733–1754 页。[5] M. C´uth、M. Doucha 和 P. Wojtaszczyk。“关于Lipschitz自由空间的结构”。英语。载于：美国数学会会刊144.9 (2016)，第 3833–3846 页。[6] N. R. Farnum。“($C(S)$)中的 Banach-Saks 定理”。英语。载于：加拿大数学杂志 26.1 (1974)，第 91–97 页。[7] J. Schreier。“弱收敛理论的一个反例”。德语。载于：《数学研究》2.1 (1930)，第 58–62 页。

[8] Z. Silber。“高阶 Banach–Saks 性质的量化”。载于：《数学分析与应用杂志》517.1 (2023)，第 126590 页。[9] W. Szlenk。“关于空间中弱收敛序列 L”。英语。载于：《数学研究》25 (1965)，第 337–341 页。[10] J. Toland。的对偶 $L_\infty(X,\ L,\ \lambda)$、有限可加测度与弱收敛：入门。施普林格国际出版，2020 年。

Faculty of Mathematics and Information Sciences, Warsaw University of Technology, Pl. Po-litechniki 1, 00-661 Warsaw, Poland*Email address*: przemyslaw.gorka@pw.edu.pl
Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain*Email address*: msanchiz@ucm.es