arXiv:2603.03009v1 [math.PR] 3 Mar 2026

临界感染率下演化图上的易感-感染流行病

WENZE CHEN、HAOJIE HOU、RUIBO MA 和 Dong Yao

Abstract. 考虑图 G 上的 SI过程，其中每条 S–I 连边以速率 λ转变为 I–I。这里，S 和 I 分别代表“易感”和“感染”。evoSI模型是 SI模型的一种变体，其中 S–I 边以速率 ρ 断开，且“S”会与一个随机选择的顶点相连。Durrett和Yao 在 [2022, 《电子概率学报》]中证明，对于配置模型上的超临界evoSI过程，存在一个依赖于度分布前三阶矩的量Δ ，其符号Δ 决定了最终流行规模在临界感染率 λ_c附近的相变是否连续。

本文考虑配置模型上的临界evoSI模型，即 $\lambda = \lambda_c$。我们证明，若 $\Delta > 0$，则从单个感染者开始发生大规模暴发的概率为 $Cn^{-1/3}(1 + o(1))$，其中 $C > 0$ 是某个明确的常数，n 是图的大小。相反，若 $\Delta < 0$，则该概率为 $o(n^{-1/3})$。 $\Delta < 0$这种情形令人联想到临界 Erd˝os-R´enyi 随机图：最大连通分量的大小达到 n 量级的概率会随 n 呈指数衰减。

1. Introduction

易感-感染（SI）模型和易感-感染-康复（SIR）模型是理解社交网络中信息扩散和疾病传播等过程的重要工具。从数学角度看，它们对应于图上的相互作用粒子系统，其中顶点集合表示个体，边集合反映个体之间的联系。在SI模型中，每条S–I边以速率 λ转变为I–I边，也就是说，经过参数为 λ 的独立指数分布时间后发生转变。一旦顶点进入感染状态 I，便会一直处于感染状态。在SIR模型中，感染者以 γ 的速率转变为康复状态R，之后永久保持康复状态。过去二十年间，随机图上流行病模型的严格分析取得了重大进展。综述请参见 [7] 。

近年来，研究演化图上的流行病模型受到了越来越多的关注。例如，参见 [4, 9, 11, 16, 24]及其中的参考文献。 [19], 提出的一种演化机制如下。除流行病动力学外，图结构本身也可以按以下方式演化：S–I 边以速率 ρ 断开，受断边影响的易感个体会与图中均匀随机选取的个体建立新的连接。这种演化图上的 SI 和 SIR 模型分别称为$evoSI$ 和 $evoSIR$。

流行病数学分析中一个备受关注的量是最终流行规模（记作 Λ_n ，若底层图 G_n 的规模为 n），指最终被感染的顶点数量（对于 SI 流行病）或康复的顶点数量（对于 SIR 流行病）。由于现实世界网络通常规模庞大，我们主要关注 Λ_n的大 n 行为。由此引出大规模暴发的概念，指 $\Lambda_n/n > \varepsilon$ 对于某个$\varepsilon > 0$ （与 n无关）。临界感染率 λ_c 定义为使得大规模暴发以正概率发生的最小 λ

发生大规模暴发的概率为正，

$$\lambda_c := \inf\left\{\lambda > 0 : \lim_{\varepsilon\to 0}\limsup_{n\to\infty}\mathbb{P}_1(\Lambda_n/n > \varepsilon) > 0\right\},$$

其中， $\mathbb{P}_1$ 中的下标 1 表示最初有一个均匀随机选取的顶点被感染。

演化图上的流行病模型的一个有趣特征是，它们可能在最终流行规模的比例 Λ_n 中表现出不连续相变；也就是说，当 $\lambda \searrow \lambda_c$ 时，在以大规模暴发为条件的情况下， Λ_n/n 不会依概率收敛于 0。对于 Erd˝os-R´enyi 随机图 $G(n, \mu/n)$（一种任意一对顶点以概率 μ/n 相连的随机图）上的 evoSIR模型，Jiang等人 [19] 证明了其临界值等于 $(\gamma+\rho)/(\mu-1)$。此外， [19] 中通过模拟猜想，当 $\mu = 5$ 且 $\rho = 4$ 时， Λ_n 存在不连续相变。随后，Ball和Britton [2], 证明了这一猜想，并为 Erd˝os-R´enyi 图上略加推广的 evoSIR 提供了不连续相变的充分条件。后来，Hou 和本文第一、第四作者在 [5] 的工作中证明， [2] 中的条件也是必要的。

Durrett和Yao [9] 转而研究了 SI 动力学的情形，并分析了配置模型的 Newman–Strogatz–Watts（NSW）版本 $\mathbb{CM}(n, \mathbf{D}_n)$ 上的 evoSI 模型（其定义见第 1.2 节）。他们证明，存在一个显式量，其符号决定了 Λ_n 相变的连续性。

本文研究临界感染率为 $\lambda = \lambda_c$时配置模型中的 evoSI 模型。下面的主要结果定理 1.1 表明，对于式 (1.8) 中给出的量 Δ，当 $\Delta > 0$ 时，配置模型上 evoSI 模型发生大规模暴发的概率为 $n^{-1/3}$ 阶；而当 $\Delta < 0$ 时，暴发概率为 $o(n^{-1/3})$。定理 1.1 的证明表明，evoSI 模型的临界行为可由三个阶段刻画：近临界随机游走阶段、扩散阶段和确定性增长阶段。我们预计，本文的分析有助于研究随机图上的其他随机过程，尤其是在能够将过程与图结构耦合起来的情形下。

记号约定：在全文中，若存在常数$C > 0$，使得. $|a_n| \le C\,|b_n|$ 对所有充分大的 n成立，则记 $a_n = O(b_n)$；若$\lim_{n\to\infty}|a_n/b_n| = 0$，则记 $a_n = o(b_n)$。若 $a_n = O(b_n)$且 $b_n = O(a_n)$，则称$a_n = \Theta(b_n)$。

1.1. 主要结果的陈述。 本文考虑配置模型中的evoSI过程。给定一个非负整数 n 以及一个（确定性）度序列$d_{1,\,n}$，……， $d_{n,\,n}$，我们分别将$d_{1,\,n}$，……， $d_{n,\,n}$条半边连接到标记为 1，2，……， n的 n个顶点，然后将这些半边均匀随机配对。两条配对的半边在 G_n中构成一条边。令$\mathbf{d}_n$ 表示度序列，我们将所生成的图称为具有给定度序列$\mathbf{d}_n$ 、含 n 个顶点的配置模型，并记为$\mathbb{CM}(n, \mathbf{d}_n)$。该模型也称为Molloy–Reed 配置图。关于配置模型的更多细节，请读者参阅 [13, 第 7]章。

我们将在$\mathbf{d}_n$上施加以下正则性条件。定义

$$p_{k,n} := n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{1}[d_{i,n} = k], \quad k \in \mathbb{N} := \{0, 1, 2, \ldots\}.$$

我们的标准假设(**H**) 如下：

(H1)（有限指数矩）存在两个正常数 $\eta_{1.1}$ 和 $C_{1.1}$，使得对于所有充分大的 n,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e^{\eta_{1.1} d_{i,n}} \leq C_{1.1}. \tag{1.1}$$

（H2）（度序列的收敛性）存在一个概率分布 $\{p_k^*, k \in \mathbb{N}\}$使得

$$\lim_{n\to\infty} p_{k,n} = p_k^*, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

（H3）（度序列的集中性）存在一个常数 $C_{1.2} \in$ （0，2/3），使得对于所有充分大的 n,

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} (k+1)^4 \left| np_{k,n} - np_k^* \right| \leq n^{C_{1.2}}. \tag{1.2}$$

注 1（尾部和最大度的界）。假设 **（H1）**意味着，对于充分大的 n,

$$p_{k,n} \leq C_{1.1} \exp(-\eta_{1.1} k), \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{1.3}$$

将其与**（H2）**结合，我们看到

$$p_k^* \leq C_{1.1} \exp(-\eta_{1.1} k), \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{1.4}$$

此外，由**(H1)**可知，最大度$D_{n,\max} := \max_{1\leq i\leq n} d_{i,n}$ 必须满足

$$D_{n,\max} \leq \frac{\log(nC_{1.1})}{\eta_{1.1}}. \tag{1.5}$$

注 2（关于**(H3)**的验证）。 假设**(H1)** 和**(H2)** 成立。则由**(1.3)**和**(1.4)**可知，对于所有充分大的 n,

$$\begin{aligned} n \sum_{k>\log n/\eta_{1.1}} (k+1)^4 \left| p_{k,n} - p_k^* \right| \leq & n \sum_{k>\log n/\eta_{1.1}} (k+1)^4 \max\{p_{k,n}, p_k^*\} \\ \leq & C_{1.1} n \sum_{k>\log n/\eta_{1.1}} (k+1)^4 \exp(-\eta_{1.1} k) = \frac{C_{1.1}}{\eta_{1.1}^4} O\left(\log^4 n\right), \end{aligned}$$

其中 $O(\log^4 n)$中的隐含常数是普适的。因此，给定**(H1)** 和**(H2)**，我们可以找到一个常数 $C_{1.6} = C_{1.6}(\eta_{1.1}) > 0$，使得**(H3)** 的一个充分条件为

$$\left| np_{k,n} - np_k^* \right| \leq C_{1.6} n^{C_{1.2}} / \log^5 n \quad \text{for all } 0 \leq k \leq \log n/\eta_{1.1}. \tag{1.6}$$

对于 $r \geq 1$，令 $m_r := \sum_{k\in\mathbb{N}} k^r p_k^*$ 为分布 p^*的 r阶矩。采用**(H1)** 和**(H2)**条件下 [9], 中的相同方法，配置模型上的evoSI模型 $\mathbb{CM}(n,\mathbf{d}_n)$的临界感染率为

$$\lambda_c := \frac{\rho m_1}{m_2 - 2m_1}. \tag{1.7}$$

我们的主要结果由以下定理给出。

T定理 1.1. 设 $\{\mathbf{d}_n, n \geq 1\}$ 为满足 **(H)** 的度序列。定义

$$\Delta := -\frac{m_3 - 3m_2 + 2m_1}{m_1} + 3(m_2 - 2m_1). \tag{1.8}$$

考虑随机图 $\mathbb{CM}(n,\mathbf{d}_n)$ 上的 *evoSI*，其中 $\lambda = \lambda_c$。

(1) 若 $\Delta > 0$, 那么存在两个常数 $C_{1.9}$、$\varepsilon_0 > 0$，使得对于任意固定的 $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$，

$$\lim_{n\to\infty} n^{1/3}\mathbb{P}_1(\Lambda_n/n > \varepsilon) = C_{1.9}. \tag{1.9}$$

(2) 若 $\Delta < 0$，则对于任意 $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} n^{1/3}\mathbb{P}_1(\Lambda_n/n > \varepsilon) = 0. \tag{1.10}$$

注 3。常数 $C_{1.9}$ 由 (6.8) 给出。在 $\mathbb{P}_1$ 下，初始感染被赋予图 $\mathbb{CM}(n,\mathbf{d}_n)$ 中随机选取的一个顶点——关键的是，$\mathbb{P}_1$ 明确包含两个随机性来源：图 $\mathbb{CM}(n,\mathbf{d}_n)$ 本身固有的随机性，以及初始选定感染顶点的随机性。

1.2. 随机度序列随机图的结果。 我们注意到，定理 1.1 中的收敛速率实际上关于度序列一致。换言之，给定 $\{p_k^*\}$ (其中 $\Delta > 0$)，对于任意 $\delta > 0$，都存在 N (它仅依赖于 $\{p_k^*\}$、常数 $C_{1.1}, C_{1.2}$ 以及误差参数 δ)，使得对于所有满足(**H**)的 $n \geq N$ 和 $\mathbf{d}_n$，我们有

$$\left|n^{1/3}\mathbb{P}_1(\Lambda_n/n > \varepsilon) - C_{1.9}\right| \leq \delta.$$

同样，如果 $\Delta < 0$，则有

$$n^{1/3}\mathbb{P}_1(\Lambda_n/n > \varepsilon) \leq \delta.$$

本节给出两个随机图的例子，它们具有随机度序列，且以高概率满足 (**H**)。利用刚才提到的定理 1.1 的一致版本，可知极限 (1.9) 和 (1.10) 对它们同样适用。

例 1：NSW 随机图。设 D 是一个满足 $\mathbb{E}[\exp(cD)] < \infty$ 的非负整数值随机变量，其中某个常数为 $c > 0$。令 $\mathbf{D}_n := \{D_{1,n}, \ldots, D_{n,n}\}$ 独立同分布地取自 D 的分布。若总和 $\sum_{i=1}^n D_{i,n}$ 为奇数，则将 $D_{1,n}$ 加 1。随后，NSW 模型构造为配置模型 $\mathbb{CM}(n, \mathbf{D}_n)$，其随机度序列为 $\mathbf{D}_n$。现在，对每个 k，(随机)经验度分布$p_{k,n}$ 收敛到 $p_k^* := \mathbb{P}(D = k)$。令 $\eta_{1.1} := c/2$ 且 $C_{1.1} := 2(\mathbb{E}[\exp(cD)])^{1/2}$，则根据切比雪夫不等式，假设 (H1) 以至少 $1 - 1/n$ 的概率成立。此外，结合引理 A.2 和并集界，对任意固定的 $C_{1.2} > 1/2$,

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left(\exists\, 0 \leq k \leq \frac{\log n}{\eta_{1.1}}, \text{ such that } |np_{k,n} - np_k^*| > \frac{C_{1.6}n^{C_{1.2}}}{\log^5 n}\right)\\ \leq& 2\left(\frac{\log n}{\eta_{1.1}} + 1\right)\exp\left(-\frac{C_{1.6}^2 n^{2C_{1.2}-1}}{10\log^{10} n}\right) = o(n^{-1}),\end{aligned}$$

其中常数 $C_{1.6}$ 在注 2 的 (1.6) 式中给出。因此，根据注 2，(**H**) 以概率 $\geq 1 - 2/n$ 对$\mathbf{d}_n$ 成立。因此，该事件的补集的概率为 $o(n^{-1/3})$，定理 1.1 适用于 $\mathbb{CM}(n, \mathbf{D}_n)$。

例 *2*：*Erd˝os-R´enyi* 图 $G(n, \mu/n)$[1]。在 Erd˝os-R´enyi 图 $G(n, \mu/n)$ 中，每一对顶点都以概率 μ/n 独立连接，其中 $\mu > 1$ 为某个固定值。现在

[1]我们可以如下构造 Erd˝os-R´enyi 图 $G(n, \mu/n)$。首先，使用均值为 μ/n 的 $n(n-1)/2$ 个独立同分布伯努利随机变量，对其度序列 $\mathbf{d}_n = \{d_{i,n}, 1 \leq i \leq n\}$ 进行抽样。然后我们构造配置模型 $\mathbb{CM}(n, \mathbf{d}_n)$，并以其为条件要求该图为简单图。所得图与 $G(n, \mu/n)$ 具有相同的分布。通过调整 [18, 定理 2.7]，中的论证可知，以简单图为条件不会改变定理 1.1 的结论。

经验度分布收敛于 Poisson(μ)，即对所有 $k \geq 0$， $p_k^* = e^{-\mu} \cdot \mu^k/(k!)$。存在两个常数 $C_{1.11\mathrm{a}}$ 和 $C_{1.11\mathrm{b}}$，使得

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\exp(d_{i,n})\right) \leq C_{1.11\mathrm{a}} \text{ and } \mathrm{Var}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\exp(d_{i,n})\right) \leq \frac{C_{1.11\mathrm{b}}}{n}. \tag{1.11}$$

与前一个例子中的理由相同，**(H1)** 以至少 $(1-1/n)$ 的概率成立，其中 $\eta_{1.1} = \frac{1}{2}$ 且 $C_{1.1}$ 是某个较大的常数。令 $\widetilde{p}_{\cdot,n}$ 表示$B(n-1,\mu/n)$ 的概率质量函数。利用二项分布收敛到泊松分布的速率（见 [21, 定理 2]），存在一个常数 $C_{1.12}$ 使得

$$\sum_{k=0}^{\infty}|\widetilde{p}_{k,n} - p_k^*| \leq \frac{C_{1.12}}{n} \tag{1.12}$$

对所有 $n > 0$ 均成立。将 $np_{k,n}$ 写成若干指示变量之和，可得存在一个常数 $C_{1.13} > 0$ 使得

$$\mathbb{E}[(np_{k,n} - n\widetilde{p}_{k,n})^4] \leq C_{1.13}n^2 \tag{1.13}$$

对所有 n 和 k 均成立。因此，对某个常数 $C_{1.14} > 0$，有

$$\mathbb{P}(|np_{k,n} - n\widetilde{p}_{k,n}| \geq C_{1.6}n^{0.6}/\log^5 n) \leq C_{1.13}n^{-0.39} \tag{1.14}$$

当 n 足够大时成立。结合 **(1.12)**、**(1.14)** 和注 2 可知，取 $C_{1.2} = 0.6$ 时，**(H)** 对足够大的 n 以至少 $(1-n^{-0.38})$ 的概率成立。直接计算可得$\Delta := 2\mu^2 - 3\mu$。由定理 **1.1**，若 $\mu > 3/2$，则 **(1.9)** 成立；若 $\mu < 3/2$，则 **(1.10)** 成立。

1.3. **相关工作**。

1.3.1. 临界窗口内 *Erd˝os-R´enyi* 图的连通分支大小。 考虑 Erd˝os-R´enyi 图 $G_n = G(n, n^{-1}(1+un^{-1/3}))$，其中 u 是实参数。设 B_t 为标准布朗运动，并定义过程

$$W(s;u) := B_s + us - \frac{s^2}{2},\ s \geq 0.$$

Aldous 在 [1] 中证明，经过适当的空间和时间缩放后， G_n上的探索过程（即广度优先游走）收敛于 $W(s;u)$。设 $W^R(s;u)$ 是 $W(s;u)$ 在 0 处的反射，即，

$$W^R(s;u) := W(s;u) - \min_{0\leq s'\leq s} W(s';u),$$

并设 $\mathcal{C}_j$ 为 G_n中第 j 大连通分支的大小。Aldous 还证明，序列 $\{n^{-2/3}\mathcal{C}_j\}_{j=1}^{\infty}$ 在分布上收敛于空间[2] $l^2_{\searrow}$中 $W^R(\cdot,u)$ 的有序游程（称为乘性凝聚）。下文备注 4 中对比了 [1] 的结果与我们的结果。

[2]空间 $l^2_{\searrow}$ 是集合

$$\{(x_1,x_2,\ldots) : x_1 \geq x_2 \geq \cdots, \text{ all } x_n \geq 0, \sum x_i^2 < \infty\}$$

赋予度量 $d((x_1, x_2, \ldots\ldots), (y_1, y_2, \ldots\ldots)) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(x_i - y_i)^2}$。

1.3.2. 超临界区间中的 *evoSI* 模型。令 D 为取非负整数值的随机变量，并考虑从 D抽取的 NSW 随机图 $\mathbb{CM}(n,\ \mathbf{D}_n)$，如第 1.2 节第二个例子中所述。Durrett和Yao [9] 分析了超临界区间中的 evoSI模型。他们确定了式 (1.7) 中的临界速率 λ_c。回顾式 (1.8) 中 Δ 的定义，其中 $p_k^* = \mathbb{P}(D = k)$。随后 [9] 证明，若 $\Delta > 0$，则 Λ_n存在不连续相变。对于某些 $\varepsilon_0 > 0$ 和某些 $\delta_0 > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_1(\Lambda_n/n > \varepsilon_0 \mid \text{发生大规模暴发}) = 1 \text{ 对所有 } \lambda_c < \lambda < \lambda_c + \delta_0.$$

另一方面，若 $\Delta < 0$，则相变始终是连续的。对于任意 $\varepsilon > 0$，

$$\lim_{\lambda\searrow\lambda_c} \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}_1(\Lambda_n/n > \varepsilon) = 0.$$

1.3.3. *SI-*ρ 和 *SIR-*ρ 模型。 Ball和Britton [2]研究了evoSI模型的一个推广版本，称为 SI-ρ 模型，其中增加了一个参数 $\alpha \in [0, 1]$。在该模型中，易感顶点以速率 ρ断开与其感染邻居的连接。随后，以概率 α，一个易感顶点将旧边重新连接到随机选取的顶点；以概率 $(1 - \alpha)$，则直接从图中删除该边。他们证明，在Erd˝os-R´enyi图 $G(n,\ \mu/n)$ 上，SI-ρ 模型的相变是非连续的，当且仅当 $\alpha > 1/3$ 且 $\mu > 3\alpha/(3\alpha - 1)$。事实上， [2] 证明了 Λ_n 收敛于某个显式方程的解。对于 $\alpha = 1$ （此时模型简化为evoSI模型），上述条件为 $\mu > 3/2$，这与 [9] 一致（其中 D 服从泊松分布(μ)）。

如果我们也允许感染顶点以速率 γ 在 evoSI 或 SI-ρ 模型中康复，就得到所谓的 *evoSIR* 或*SIR-*ρ 模型。研究发现， $G(n,\ \mu/n)$上的 evoSIR 模型可能会发生不连续相变，作者还确定了其临界值为 $(\rho + \gamma)/(\mu - 1)$。随后， [2] 证明了条件

$$\rho(2\alpha - 1) > \gamma \quad \text{and} \quad \mu > \frac{2\rho\alpha}{\rho(2\alpha - 1) - \gamma}, \tag{1.15}$$

足以使 Λ_n发生不连续相变。Chen、Hou和Yao在 [5]中证明，(1.15)实际上也是发生不连续相变的必要条件。

我们猜想，与定理 1.1类似，当(1.15)成立时，在临界感染率下，Erd˝os-R´enyi图上的 SIR-ρ 模型发生大规模暴发的概率为 $Cn^{-1/3}(1 + o(1))$；否则为 $o(n^{-1/3})$。我们将这一问题留待未来研究。

1.4. **定理 1.1 的证明：概要**。本节将阐述定理 1.1 证明中的主要思路和关键步骤。

1.4.1. 用 *avoSI* 和 *AB-avoSI* 模型对 *evoSI* 进行界定。受 [9], 方法的启发，我们用另外两个模型——avoSI 模型和 AB-avoSI 模型——对 evoSI 中感染顶点的数量进行界定。这两个模型都是马尔可夫过程，可通过将图探索过程与流行病耦合来定义。对于 $1 \le i \le n$，顶点 i 有$d_{i,\ n}$ 条半边，且在时间 0 时它们均未配对。这与配置模型的构造类似。不过，这些半边会一直保持未配对状态，直到之后的某个随机时刻。若一条半边连接着一个感染顶点，我们就称它为感染半边。在 avoSI 模型中，可能发生以下两类随机事件。

- 以速率 λ，每条感染半边都会与另一条随机选取的半边配对。如果与另一条半边相连的顶点 y 是易感的，那么它就会被感染。配对的两条半边构成一条边。注意，如果顶点 y 从状态 S 转变为 I，那么与 y 相连的所有半边都会成为感染半边。
- 每条感染半边都会以速率 ρ 从其顶点移除，并立即连接到一个随机选取的顶点。请注意，该半边的状态会变为新连接顶点的状态。

与 AB-avoSI 模型一样，我们需要为每条半边 h定义两个指标：感染指标$A(h,\ t)$ 和重连指标 $B(h,\ t)$。

- 如果 h 在时间 t之前尚未被感染，则感染指标 $A(h,\ t)=0$。如果 h 首次在时间 s被感染，则我们令 $A(h,\ t)=s$，其中 $t\geq s$。
- 如果半边 h 在时间 t之前尚未重连，则重连指标 $B(h,\ t)=0$。如果 h在时间 s 连接到一个随机顶点，我们就将 $B(h,\ t)$ 更新为 s。如果 $\tau_m(h)$ 表示 h 第 m 次重新连接的时间，并且 $\tau_0(h)=0$，那么 $B(h,\ t)=\sup\{\tau_m(h)\ |\tau_m(h)\leq t\}$。

AB-avoSI 的演化规则与 avoSI 不同。具体而言，若感染的半边 h 在时间 t 与另一条半边 h' 配对，只有当 $B(h',t)<A(h,t)$ 时，h 才能感染 h'。否则，h' 及其顶点 x 会保持配对前的状态。关于 avoSI 和 AB-avoSI 的定义及其与 evoSI 的比较，详见 [9, 第 3.1 节和第 4.1] 节。

[9] 中的引理 3.2 和 4.1 表明，avoSI 的最终流行规模随机支配 evoSI 的最终流行规模，而 evoSI 的最终流行规模又随机支配 AB-avoSI 的最终流行规模。此外，[9] 中的引理 1.2 表明，[3] 这三个过程具有相同的临界感染率 λ_c。因此，只需证明以下两个定理即可确立定理 1.1。回顾一下，Δ 定义见式 (1.8)。

定理 1.2。考虑图 $\mathbb{CM}(n,\mathbf{d}_n)$上的 *avoSI* 模型，其中 $\lambda=\lambda_c$。假设 $\widehat{\ }_n$ 满足 **(H)**。令 Λ_n 为 *avoSI* 模型中的最终流行规模。

(1) 若 $\Delta>0$，则存在一个 $\varepsilon_0>0$，使得对于 $0<\varepsilon<\varepsilon_0$，

$$\lim_{n\to\infty} n^{1/3}\mathbb{P}_1(\widehat{\Lambda}_n/n>\varepsilon)=C_{1.9}, \tag{1.16}$$

其中 $C_{1.9}$ 与 (1.9) 中的常数相同。

(2) 若 $\Delta<0$，则对于任意 $\varepsilon>0$，

$$\lim_{n\to\infty} n^{1/3}\mathbb{P}_1(\widehat{\Lambda}_n/n>\varepsilon)=0.$$

定理 1.3。定理 *1.2* 对临界速率 λ_c 下的 *AB-avoSI* 模型同样成立。

1.4.2. *avoSI* 模型的三阶段分析。我们将聚焦于 avoSI 模型，并给出定理 1.2 的详细证明。AB-avoSI 模型的分析与此类似，将在第 7 节中略作介绍。令 X_t 表示模型在时间 t的半边数量，并令$X_{I,t}$ 表示时间 t的感染半边数量。与 [9] 和 [18], 中一样，我们通过将所有转移率乘以 $(X_t-1)/(\lambda X_{I,t})$来进行时间变换。这种时间变换$\widehat{\ }$简化了分析，同时保持最终流行规模 Λ_n 不变。

[3]论文 [9] 研究了配置模型的 NSW 版本，但其中的引理 1.2、3.2 和 4.1 经过相应调整后也适用于本文的 $\mathbb{CM}(n,\ \mathbf{d}_n)$ 模型*mutatis mutandis*。

从现在起，我们聚焦于经过时间变换后的 avoSI 模型。我们稍微滥用一下记号，对时间变换前后的 avoSI过程使用相同的符号。由于 avoSI过程在没有感染半边时停止，即 $X_{I,t}=0$，因此研究$X_{I,t}$的演化是很自然的。特别地，考虑时间

$$\gamma_n := \inf\{t \geq 0 \mid X_{I,t}=0\}.$$

令 I_t 和 S_t 分别表示时刻 t的感染顶点数和易感顶点数。定义$X_{S,\,t}$ 和 $S_{t,\,k}$ 分别表示时刻 t具有 k 条半边的易感半边数和易感顶点数。注意， n（图 $\mathbb{CM}(n,\ \mathbf{d}_n)$ 的规模）在这些表达式中省略了。

我们将在 (3.5) 中看到，$X_{I,\,t}$ 的演化由下式给出

$$\mathrm{d}X_{I,t} = \left(-2(X_t-1)+\sum_{k=0}^{\infty}k^2S_{t,k}-\frac{\rho}{\lambda}\cdot\frac{X_t-1}{n}S_t\right)\mathrm{d}t+\mathrm{d}M_{I,t}, \tag{1.17}$$

其中 $M_{I,\,t}$ 是一个鞅。我们的分析将表明，(1.17) 右侧大括号中的项（称为漂移项）大约为 $\underline{m_1\Delta n}\mathrm{d}t$，而 $\mathrm{d}M_{I,\,t}$的阶为 $\sqrt{Cn}\mathrm{d}t$ ，其中 $C>0$为某个常数。因此，我们选择分以下三个阶段分析该模型。

(i) 时间 $0\leq t\leq qn^{-1/3}$ ，其中 $q>0$为某个较小的常数。在此阶段，鞅项在 (1.17) 右侧占主导地位。(ii) 时间 $qn^{-1/3}\leq t\leq Qn^{-1/3}$ ，其中 Q为某个较大的常数。在此阶段，漂移项和鞅项对 $n\to\infty$的影响处于同一阶。(iii) 时间 $Qn^{-1/3}\leq t\leq c$ ，其中 $c>0$为另一个较小的常数。在此阶段，漂移项在右侧占主导地位。

定义

$$\sigma^2 := \frac{\sum_{k\geq 0}k(k-2)^2p_k^*}{(1+\rho/\lambda)m_1}+\frac{\rho}{\rho+\lambda_c}. \tag{1.18}$$

在第一阶段，我们研究 $\mathbb{P}_1(\gamma_n>qn^{-1/3})$ 的尾概率，陈述如下。

定理 1.4. 固定任意 $0<q<1$。存在两个正常数 $c_{q,Y}$,$c_{q,Z}$ 使得

$$c_{q,Z}\leq\liminf_{n\to\infty}n^{1/3}\mathbb{P}_1(\gamma_n>qn^{-1/3})\leq\limsup_{n\to\infty}n^{1/3}\mathbb{P}_1(\gamma_n>qn^{-1/3})\leq c_{q,Y} \tag{1.19}$$

并且

$$\lim_{q\to0}c_{q,Y}q^{1/2}=\lim_{q\to0}c_{q,Z}q^{1/2}=\left(\frac{\pi\sigma^2}{2m_1}\left(1+\frac{\rho}{\lambda_c}\right)\right)^{-1/2}.$$

设 B_1^+为时间 1 处密度函数为 $x\exp(-x^2/2)1_{[0,\infty)}(x)$ 的布朗游走。定义

$$N_q := \left(1+\frac{\rho}{\lambda}\right)m_1qn^{2/3}. \tag{1.20}$$

令 $\xrightarrow{\mathcal{D}}$ 表示“依分布收敛”。定理 1.4 导出如下推论。

推论 1.1. 存在两个随机变量 χ_q 和 ζ_q，使得当 $q \to 0$ 时 χ_q、$\zeta_q \xrightarrow{\mathcal{D}} B_1^+$，并且对任意有界、连续且单调递增的函数 $f\colon \mathbb{R} \to [0,\infty)$，

$$\begin{aligned}\frac{c_{q,Z}}{c_{q,Y}}\mathbb{E}(f(\zeta_q)) &\le \liminf_{n\to\infty}\mathbb{E}_1\left(f\left(\frac{X_{I,qn^{-1/3}}}{\sigma\sqrt{N_q}}\right)|\gamma_n > qn^{-1/3}\right)\\ &\le \limsup_{n\to\infty}\mathbb{E}_1\left(f\left(\frac{X_{I,qn^{-1/3}}}{\sigma\sqrt{N_q}}\right)|\gamma_n > qn^{-1/3}\right) \le \frac{c_{q,Y}}{c_{q,Z}}\mathbb{E}(f(\chi_q)).\end{aligned} \tag{1.21}$$

布朗游走的出现并不令人意外，因为它是零均值随机游走在较大的时间区间内条件于保持正值时的极限（例如参见[3]和 [15]）。

对于第二阶段，我们证明$X_{I,\ t}/n^{1/3}$ 的行为可以用一个扩散过程来近似。定义函数

$$F_1(x,q) := \mathbb{P}\left(\sigma x\sqrt{(1+\rho/\lambda)m_1 q} + \frac{m_1\Delta}{2}(s^2-q^2) + C_{1.22}B_{s-q} > 0, \forall s \ge q\right), \tag{1.22}$$

其中

$$C_{1.22} := \sqrt{m_3 - 4m_2 + 4m_1 + \rho m_1/\lambda_c} = \sqrt{m_3 - 3m_2 + 2m_1},$$

且 $\{B_s, s \ge 0\}$ 是标准布朗运动。注意，若 $\Delta < 0$，则 $F_1(x,\ q) \equiv 0$。

定理 1.5。 对于任意 $0 < q < 1$，我们有

$$\begin{aligned}\frac{c_{q,Z}}{c_{q,Y}}\mathbb{E}(F_1(\zeta_q,q)) &\le \liminf_{Q\to\infty}\liminf_{n\to\infty}\mathbb{P}_1\left(X_{I,Qn^{-1/3}} \ge m_1\Delta Q^2 n^{1/3}/4 \middle| \gamma_n > qn^{-1/3}\right)\\ &\le \limsup_{Q\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\mathbb{P}_1(X_{I,Qn^{-1/3}} \ge m_1\Delta Q^2 n^{1/3}/4 | \gamma_n > qn^{-1/3})\\ &\le \frac{c_{q,Y}}{c_{q,Z}}\mathbb{E}(F_1(\chi_q,q)).\end{aligned}$$

特别地，对于 $\Delta < 0$ 的情形，我们有 $F_1(x,\ q) \equiv 0$，因此

$$\lim_{Q\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\mathbb{P}_1(X_{I,Qn^{-1/3}} \ge m_1\Delta Q^2 n^{1/3}/4 \mid \gamma_n > qn^{-1/3}) = 0. \tag{1.23}$$

一旦过程进入第三阶段 $\gamma_n > Qn^{-1/3}$，而当且仅当 $\Delta > 0$ 时，该阶段才有可能渐近地（当$Q \to \infty$时）出现，我们证明将以高概率发生大规模暴发。

定理 1.6。 考虑 $\Delta > 0$ 的情形。则存在一个常数 $C_{1.24} > 0$，使得

$$\lim_{Q\to\infty}\liminf_{n\to\infty}\mathbb{P}_1\left(\gamma_n > C_{1.24} \mid X_{I,Qn^{-1/3}} > \frac{m_1\Delta Q^2 n^{1/3}}{4}\right) = 1. \tag{1.24}$$

定理 1.2 可通过结合定理 1.4、推论 1.1、定理 1.5 和定理 1.6 得出，详见第 6 节。定理 1.3 可用同样的方法证明。于是，定理 1.1 由定理 1.2 和定理 1.3 得出。

注 4。 正如我们在第1.3.1节中所讨论的，我们可以将 [1] 关于临界Erd˝os-R´enyi图的结果与临界evoSI模型中的结果进行比较。那里的广度优先游走过程被$X_{I,\ t}$所取代，而下文定理 1.5和引理4.1的断言类似于Erd˝os-R´enyi情形中收敛到 $W^R(s;\ u)$。在某种意义上，临界Erd˝os-R´enyi图的行为与情形 $\Delta < 0$相似。事实上，临界Erd˝os-R´enyi图的巨连通分支大小为 $O(n^{2/3})$阶，这使人联想到这样一个事实：

如果 $\Delta < 0$，临界 evoSI 过程无法进入第三阶段。此外，对于临界Erd˝os-R´enyi图，存在一个大小为 $\Theta(n)$的连通分支的概率关于 n呈指数衰减（见 [13, 定理 5.4]）——这一衰减速率显然为 $o(n^{-1/3})$。

1.4.3. 组织结构。 本文其余部分安排如下。第 2 节证明定理 1.4 和推论 1.1。第 3 节建立一些$X_{I,\,t}$ 上界和下界，供后文使用。随后，我们将在第 4 节和第 5 节分别证明定理 1.5 和定理 1.6。第 6 节证明 avoSI 模型的定理 1.2。第 7 节讨论 AB-avoSI 情形，而一些技术引理的证明则放在附录 A 中。

2. Proof of Theorem 1.4 and Corollary 1.1

本节构造两个辅助随机过程 $(Y_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ 和 $(Z_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$。在证明定理 1.4 和推论 1.1 时，我们将重点关注它们。

为简化后续证明中的记号，我们将省略下标 1（用于 $\mathbb{P}_1$），改写为 $\mathbb{P}$，但含义不变：下文所有概率陈述均对应于由初始条件（一个均匀随机选取的感染顶点）所定义的概率空间。相应地，本节及本文其余部分中使用的期望符号 $\mathbb{E}$，均指在这一特定概率空间下的期望。此外，下文中我们始终用 λ 表示临界速率 $\lambda_c = \rho m_1/(m_2 - 2m_1)$。

2.1. **在 $[0, qn^{-1/3}]$ 中的跳跃次数。** 回想一下，我们关注的是 $X_{I,\,t}$ 的行为。当 avoSI 模型中定义的两类随机事件（重连和感染）发生时，其值可能会改变。每当发生随机事件时，我们就称发生了一次“跳跃”。本节中，我们将对时间区间 $[0, qn^{-1/3}]$ 内的跳跃次数进行界定。总跳跃率为

$$(\lambda X_{I,t} + \rho X_{I,t})\,\frac{X_t - 1}{\lambda X_{I,t}} = \left(1 + \frac{\rho}{\lambda}\right)(X_t - 1),$$

其中因子 $(X_t - 1)/(\lambda X_{I,\,t})$ 是 avoSI 模型分析中的时间变换所致。因此，当 t 较小时，跳跃速率近似为 $(1 + \rho/\lambda)m_1 n$，根据大数定律，在 $[0, qn^{-1/3}]$ 中的跳跃次数约为 $(1 + \rho/\lambda)$ $m_1 q n^{2/3} = N_q$（定义见 (1.20)）。定义两个事件

$$\begin{aligned} \widehat{\Omega}_{2.1} &:= \{\text{The number of jumps in } [0, qn^{-1/3}] \text{ is in } [N_q - n^{0.6}, N_q + n^{0.6}]\}, \\ \Omega_{2.1} &:= \{\ [0, qn^{-1/3}] \text{ 中的跳跃次数小于或等于 } N_q + n^{0.6}\}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

下面的引理说明了跳跃次数的集中性。

引理 2.1. *存在常数 $C_1, C_2 > 0$，使得当 n充分大时，*

$$\mathbb{P}(\Omega_{2.1}^c) + \mathbb{P}(\{\gamma_n \geq qn^{-1/3}\} \cap \widehat{\Omega}_{2.1}^c) \leq C_1 \exp(-C_2 n^{8/15}).$$

证明。 注意，每次跳跃后，未配对半边的总数 X_t 要么保持不变，要么减少 2。根据度序列集中性假设 **(H3)**，可知初始时未配对半边的数量 $X_0 = \sum_{k\geq 0} k p_{k,\,n} \in [m_1 n - n^{C_{1.2}}, m_1 n + n^{C_{1.2}}]$。

令 δ_i 表示第 $(i-1)$ 次跳跃与第 i 次跳跃之间的时间间隔（第 0 次跳跃设定在时间 0，不计入）。此外，如果第 (δ_i) 次跳跃后没有剩余感染半边，则将 ∞ 设为

。对于所有 $1 \le i \le N_q + n^{0.6} + 1$，时刻 t_i 的半边数量将落在区间内

$$[X_0 - 2i, X_0] \subset [m_1 n - C_{2.2} n^{2/3}, m_1 n + n^{C_{1.2}}], \tag{2.2}$$

其中 $C_{2.2}$ 是某个正常数。基于这一观察，我们构造两个独立同分布序列 $\{y_1, y_2, \ldots\}$ 和 $\{z_1, z_2, \ldots\}$，其中 $y_i \sim$ 服从 Exp((1 + ρ/λ)(m1n + n^{C1.2}))， $z_i \sim$服从 Exp((1 + ρ/λ)(m1n − C2.2n^{2/3}))。于是我们可以进行耦合，使得对于 $i \le N_q + n^{0.6} + 1$，有 $y_i \le \delta_i \le z_i$（第二个不等式还要求存在感染边）。

现在，我们利用这种耦合来界定跳跃次数过高（通过与 y_i $1 \le i \le N_q + n^{0.6} + 1$ z_i $\omega_i \sim$ $1 +$ 比较）或 $\rho/\lambda\, m_1$ 过低（通过与 比较）的概率。设 Exp(( )) 对所有 均为独立同分布，它们是 和 y_i z_i 的标准化版本。根据伯恩斯坦不等式（引理 A.1），存在常数 $C_{2.3a}$、 $C_{2.3b} > 0$，使得跳跃次数过高的概率满足

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\Omega_{2.1}^c) &\le \mathbb{P}\Big(\sum_{1\le i\le N_q+n^{0.6}+1} y_i \le qn^{-1/3}\Big)\\ &\le \mathbb{P}\Big(\Big|\sum_{1\le i\le N_q+n^{0.6}+1}\Big(\omega_i - \frac{\lambda}{m_1(\lambda+\rho)}\Big)\Big| > C_{2.3a}n^{0.6}\Big) \le 2\exp(-C_{2.3b}n^{8/15}).\end{aligned} \tag{2.3}$$

By 根据相同的论证，存在一些常数 $C_{2.4a}$， $C_{2.4b} > 0$ 使得

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{\gamma_n > qn^{-1/3}\} \cap \widehat{\Omega}_{2.1}^c) &\le \mathbb{P}\Big(\sum_{1\le i\le N_q-n^{0.6}+1} z_i > qn^{-1/3}\Big) + \mathbb{P}(\Omega_{2.1}^c)\\ &\le \mathbb{P}\Big(\Big|\sum_{1\le i\le N_q-n^{0.6}+1}\Big(\omega_i - \frac{\lambda}{m_1(\lambda+\rho)}\Big)\Big| > C_{2.4a}n^{0.6}\Big) + \mathbb{P}(\Omega_{2.1}^c)\\ &\le 2\exp(-C_{2.4b}n^{8/15}) + 2\exp(-C_{2.3b}n^{8/15}),\end{aligned} \tag{2.4}$$

结合 (2.3)，即可完成该引理的证明。 □

2.2. 比较随机游走的构造。令 t(ℓ) 为第 ℓ次跳跃的时刻（与之前一样，零次跳跃发生在时刻 0），并令 $U_\ell := X_{I,\ t(\ell)}$。回想一下，在 $\mathbb{P}$ 下，初始时只有一个顶点被感染。根据构造，每个顶点 i 的度固定为$d_{i,\ n}$。初始感染的顶点 u 是从 $\{1, \ldots, n\}$中均匀随机选出的，因此，初始感染半边的数量为 $U_0 := X_{I,\ 0} = d_{u,\ n}$。本节将用两个随机游走来界定 $(U_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$。

回想一下，$S_{t,\ k}$ 表示时刻 t具有 k 条半边的易感顶点数，而 I_t和 S_t 分别表示时刻 t的感染顶点数和易感顶点数。对于 $\ell \ge 1$，给定截至时刻 t(ℓ − 1) 的所有信息后，$(U_\ell - U_{\ell-1})$ 的分布如下。

（1）对于所有 $k \ge 3$，$(U_\ell - U_{\ell-1})$ 等于 $(k - 2)$ 的概率

$$\frac{\lambda k S_{t,k}}{(\lambda+\rho)(X_t - 1)}.$$

(2) $U_\ell - U_{\ell-1} = 0$ 以概率

$$\frac{2\lambda S_{t,2}}{(\lambda+\rho)(X_t - 1)} + \frac{\rho}{\rho+\lambda}\cdot\frac{I_t}{n}.$$

(3) $U_\ell - U_{\ell-1} = -1$ 以概率

$$\frac{\lambda S_{t,1}}{(\lambda+\rho)(X_t-1)} + \frac{\rho}{\rho+\lambda}\cdot\frac{S_t}{n}.$$

(4) $U_\ell - U_{\ell-1} = -2$ 以概率

$$\frac{\lambda(X_{I,t}-1)}{(\lambda+\rho)(X_t-1)}.$$

现在我们说明得出转移概率的计算过程。回想一下，$X_{I,\,t}$表示时刻 t感染顶点所连接的半边数量。第 $(\ell-1)$ 次跳跃之后，总跳跃率为

$$(\lambda+\rho)X_{I,t}\frac{X_t-1}{\lambda X_{I,t}} = \frac{(\lambda+\rho)(X_t-1)}{\lambda}.$$

该速率由几类事件的速率组成。感染半边与连接到总共有 k 条半边的顶点上的易感半边配对的速率为

$$\lambda X_{I,t}\cdot\frac{kS_{t,k}}{X_t-1}\cdot\frac{X_t-1}{\lambda X_{I,t}} = kS_{t,k}.$$

我们可以看到，配对后感染半边的数量增加 $(k-2)$（如果$k=1$，实际上会减少 1）。因此，第 (1) 点中的概率由指数分布的无记忆性和事件的独立性得出。其余三个 $(U_\ell - U_{\ell-1})$ 的概率可用类似方法计算。以下引理 2.2 对于建立 (U_ℓ) 的上界和下界至关重要。

引理 2.2。 存在一个常数 $C_{2.5}>0$，使得事件

$$\begin{aligned}\Omega_{2.5} := &\{X_{I,t}\le C_{2.5}N_q, |X_t-1-m_1n|\le 3N_q, I_t\le 2N_q, \forall\, t\le qn^{-1/3}\}\\ &\cap\{np_{k,n}-q_{k,n}/(k+1)\le S_{t,k}\le np_{k,n}+q_{k,n}/(k+1), \forall\, 0\le k\le v_n, \forall\, t\le qn^{-1/3}\}\\ &\cap\{S_{t,k}=0, \forall\, k>v_n, \forall\, t\le qn^{-1/3}\}\\ &\cap\Big((\Omega_{2.1}\cap\{\gamma_n<qn^{-1/3}\})\cup(\widehat{\Omega}_{2.1}\cap\{\gamma_n\ge qn^{-1/3}\})\Big)\end{aligned} \tag{2.5}$$

以至少 $(1-n^{-0.4})$ 的概率发生，对所有充分大的 n，其中

$$q_{k,n} := C_{2.5}qn^{2/3}\exp(-\eta_{1.1}k/2) \quad and \quad v_n := 4+\log(nC_{1.1})/\eta_{1.1}. \tag{2.6}$$

引理 2.2 的证明推迟到 A.2 节。现在，我们用两个经过精心构造的随机游走 $(Y_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ 和 $(Z_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$，将 $(U_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ 夹在它们之间。

上界的构造 (Y_ℓ)。 令 $Y_0 = d_{u,\,n} = U_0$，对于 $\ell\ge 1$，令增量 $(Y_\ell - Y_{\ell-1})$ 相互独立且同分布如下。这里我们强调，$(Y_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ 的分布独立于模型的动力学。回顾式 (1.20) 中 N_q 的定义。

- 对于所有 $3\le k\le v_n$, $Y_\ell - Y_{\ell-1} = k-2$，概率为

$$\frac{knp_{k,n}+q_{k,n}}{(1+\rho/\lambda)(m_1n-3N_q)}.$$

- $Y_\ell - Y_{\ell-1} = 0$ 概率为

$$\frac{2np_{2,n} + q_2}{(1+\rho/\lambda)(m_1 n - 3N_q)} + \frac{2N_q}{(1+\lambda/\rho)n}.$$

- $Y_\ell - Y_{\ell-1} = -1$ 以剩余概率。

在以 $\Omega_{2.5}$为条件时，对于所有 $\ell \geq 1$（假设 $\mathfrak{t}(\ell) \leq qn^{-1/3}$），$(Y_\ell - Y_{\ell-1})$ 在随机意义下支配 $(U_\ell - U_{\ell-1})$。因此，我们可以在共同概率空间上耦合 (Y_ℓ) 的增量与 (U_ℓ) 的增量，使得在 $\Omega_{2.5}$ 上 $Y_\ell - Y_{\ell-1} \geq U_\ell - U_{\ell-1}$。

下界的构造 (Z_ℓ)。与 (Y_ℓ) 的构造类似，令$Z_0 = d_{u,n}$，对于 $\ell \geq 1$，令 $(Z_\ell - Z_{\ell-1})$ 相互独立，且服从以下分布：

- 对于 $2 \leq k \leq \log(nC_{1.1})/\eta_{1.1}$, $Z_\ell - Z_{\ell-1} = k-2$，以概率

$$\frac{knp_{k,n} - \min\{nkp_{k,n}, 2q_{k,n}\}}{(1+\rho/\lambda)(m_1 n + 3N_q)}.$$

- $Z_\ell - Z_{\ell-1} = -2$ 以概率

$$\frac{C_{2.5}N_q}{(1+\rho/\lambda)(m_1 n - 3N_q)}.$$

- $Z_\ell - Z_{\ell-1} = -1$ 以剩余概率。

在 $\Omega_{2.5}$ 下，对于所有 $\ell \geq 1$，$(U_\ell - U_{\ell-1})$ 在随机序意义上支配 $(Z_\ell - Z_{\ell-1})$。由于 $Z_0 = U_0 = Y_0$，我们可以在一个共同概率空间上耦合这三个过程 (Z_ℓ)、(U_ℓ) 和 (Y_ℓ)，使得在 $\Omega_{2.5}$ 上，

$$Z_\ell \leq U_\ell \leq Y_\ell \tag{2.7}$$

对所有 ℓ，直到时间 $qn^{-1/3}$，上述关系均成立。回顾一下，本节的目标——定理 1.4——涉及过程 (Y_ℓ) 和 (Z_ℓ)。下面的引理刻画了它们各自增量的期望值。

引理 2.3 . 存在两个正常数 $C_{2.8}$、$C_{2.9}$（与 q 无关），使得 t

$$\lim_{n\to\infty} n^{1/3}\mathbb{E}[Y_\ell - Y_{\ell-1}] = C_{2.8}q, \tag{2.8}$$

$$\lim_{n\to\infty} n^{1/3}\mathbb{E}[Z_\ell - Z_{\ell-1}] = -C_{2.9}q. \tag{2.9}$$

此外，我们有

$$\limsup_{n\to\infty} n^{1/3}\left|\mathbb{E}[(Y_\ell - Y_{\ell-1})^2] - \sigma^2\right| + \limsup_{n\to\infty} n^{1/3}\left|\mathbb{E}[(Z_\ell - Z_{\ell-1})^2] - \sigma^2\right| < \infty, \tag{2.10}$$

其中 σ^2 在(1.18)中定义。

引理 2.3 的证明见 A.3 节。定义

$$J_Y := \{Y_\ell > 0 \text{ for all } 0 \leq \ell \leq N_q - n^{0.6}\}, \quad J_Z := \{Z_\ell > 0 \text{ for all } 0 \leq \ell \leq N_q + n^{0.6}\}.$$

根据 (2.7)，在 $\Omega_{2.5}$ 上有

$$\mathbb{1}[J_Z] \leq \mathbb{1}[\gamma_n > qn^{-1/3}] \leq \mathbb{1}[J_Y]. \tag{2.11}$$

由于 $\Omega_{2.5}$ 以至少 $(1-n^{-0.4})$ 的概率成立，我们推得

$$\mathbb{P}(J_Z) - n^{-0.4} \leq \mathbb{P}(\gamma_n > qn^{-1/3}) \leq \mathbb{P}(J_Y) + n^{-0.4}. \tag{2.12}$$

2.3. 上界分析 (Y_ℓ)。 在第 2.3 节和第 2.4 节中，我们分别研究随机过程 (Y_ℓ) 和 (Z_ℓ)。回顾 $\Omega_{2.1}$ 的定义。在此事件上，区间 $[0, qn^{-1/3}]$ 内的跳跃次数介于 $\lfloor N_q - n^{0.6} \rfloor$ 和 $\lfloor N_q + n^{0.6} \rfloor$ 之间。这里我们引入一个过程 $(Y(t))_{0\le t\le 1}$。对于整数 $0 \le k \le N_q - n^{0.6}$，定义

$$\overline{Y}\left(\frac{k}{N_q - n^{0.6}}\right) := \frac{Y_k}{\sigma\sqrt{N_q - n^{0.6}}} = \frac{Y_k - \mathbb{E}(Y_k)}{\sigma\sqrt{N_q - n^{0.6}}} + \frac{\mathbb{E}(Y_k)}{\sigma\sqrt{N_q - n^{0.6}}}. \tag{2.13}$$

此外，我们对（2.13）中各点之间的 $Y(t)$ 值作线性插值。对于 $\frac{\lfloor N_q - n^{0.6} \rfloor}{N_q - n^{0.6}} \le t \le 1$，我们设 $\overline{Y}(t) := Y\left(\frac{\lfloor N_q - n^{0.6} \rfloor}{N_q - n^{0.6}}\right)$，其中 $\lfloor x \rfloor$ 表示 x 的下取整函数（整数部分）。根据引理 2.3，

$$\mathbb{E}(Y_k) = \mathbb{E}(Y_0) + kC_{2.8}qn^{-1/3} + o(n^{-1/3}) \quad \text{as } n \to \infty.$$

因此，根据 Donsker 定理，$(Y(t))$ 依分布收敛到

$$B_{t,q} := B_t + C_{2.14}(q)t, \tag{2.14}$$

其中 (B_t) 是标准布朗运动，且 $C_{2.14}(q) := C_{2.8}\sigma^{-1}\sqrt{(1+\rho/\lambda)m_1 q^{3/2}}$。此外，我们有以下引理，其证明推迟到附录 A.4 节。

引理 2.4. 在事件条件下

$$\{Y_\ell > 0 \text{ for all } 0 \le \ell \le N_q - n^{0.6}\} = \{\overline{Y}(t) > 0 \text{ for all } 0 \le t \le 1\},$$

我们有如下依分布收敛，

$$\overline{Y}(1) = \frac{Y_{[N_q - n^{0.6}]}}{\sigma\sqrt{N_q - n^{0.6}}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \chi_q := B_{1+T_q,q} - B_{T_q,q} = B_{1+T_q} - B_{T_q} + C_{2.14}(q), \tag{2.15}$$

其中 $T_q :=$ 下确界$\{t \ge 0 : B_{u,q} \ge B_{t,q}$ 对所有 $t \le u \le t+1\}$ 均成立，且 $T_q < \infty$ 几乎必然。

注意，当 $Y_0 = 1$ 时，引理 2.4 可通过与 [3]，中相同的论证得到，因为对于独立同分布序列，[3] 的 (3.1) 式成立，而 [3] 中定理 3.2 的论证仅依赖于 Donsker 定理。事实上，一个更强的结论成立：过程 $(Y(t))_{0\le t\le 1}$ 的条件分布收敛到

$$B_{t+T_q,q} - B_{T_q,q} = B_{t+T_q} - B_{T_q} + C_{2.14}(q)t.$$

然而，由于我们的初始值 $Y_0 = O(\log n)$ 依赖于 n，我们需要谨慎处理弱收敛问题——这正是引理 2.4 所证明的内容。

下面的引理给出了 T_q 的尾概率上界。

引理 2.5。 存在两个常数 $c_{2.16}, C_{2.16} > 0$，使得对所有 $r > 1$，

$$\sup_{q\in(0,1)} \mathbb{P}(T_q > r) \le C_{2.16}e^{-c_{2.16}r}. \tag{2.16}$$

证明。 对于任意 $N > 0$，定义一个新的测度 $\mathbb{P}_{q,N}$ 如下

$$\frac{\mathrm{d}\mathbb{P}_{q,N}}{\mathrm{d}\mathbb{P}} := \exp\{-C_{2.14}(q)B_{N+1} - C_{2.14}(q)^2(N+1)/2\}. \tag{2.17}$$

根据吉尔萨诺夫定理，过程 $(B_{t,q})_{0\le t\le N+1}$ 在时刻$N+1$ 之前是标准布朗运动，在 $\mathbb{P}_{q,N}$下成立。这意味着，$T_q \wedge N$（如引理 2.4 中所定义）在 $\mathbb{P}_{q,N}$ 下的分布与 q无关。因此，$a := \mathbb{P}_{q,1}(T_q < 1)$是一个与 q无关的常数。

注意， $\{T_q < 1\}$ 关于由 $(B_{t,q})_{0\le t\le 2}$生成的 σ-域可测。根据 [3], 的引理 2.2，我们有 $a > 0$。应用 H¨older 不等式,

$$0 < a = \mathbb{P}_{q,1}(T_q < 1) = \mathbb{E}\left[\frac{\mathrm{d}\mathbb{P}_{q,1}}{\mathrm{d}\mathbb{P}} 1_{\{T_q<1\}}\right] \le \sqrt{\mathbb{P}(T_q < 1)} \cdot \sqrt{\mathbb{E}\left(\frac{\mathrm{d}\mathbb{P}_{q,1}}{\mathrm{d}\mathbb{P}}\right)^2}. \tag{2.18}$$

由于 B_2 服从均值为0、方差为2的正态分布，将(2.17)代入期望可得,

$$\mathbb{E}\left(\frac{\mathrm{d}\mathbb{P}_{q,1}}{\mathrm{d}\mathbb{P}}\right)^2 = \mathbb{E}[\exp(-2C_{2.14}(q)B_2 - 2C_{2.14}(q)^2)] = \exp(2C_{2.14}(q)^2). \tag{2.19}$$

结合(2.18)、(2.19)以及 $C_{2.14}(q)$的定义，对所有 $0 < q < 1$ ，

$$\mathbb{P}(T_q < 1) \ge a^2 \exp(-2C_{2.14}(q)^2) \ge a^2 \exp(-2C_{2.14}(1)^2) =: C_{2.20}. \tag{2.20}$$

由于$(B_{t,q})_{0\le t\le 2}$ 在 $\mathbb{P}$下具有平稳且独立增量，对于 $r > 2$,

$$\mathbb{P}(T_q > r) = \mathbb{P}\left(\inf_{t\le u\le t+1} B_{u,q} < B_{t,q} \text{ for all } 0 \le t \le r\right) \le \mathbb{P}(T_q \ge 1)^{\lfloor r/2\rfloor} \le (1 - C_{2.20})^{\lfloor r/2\rfloor}.$$

所求结果立即得到。 □

如引理 2.4 所示， χ_q 的分布非常重要，其在 $q \to 0$ 时的收敛性由下面的引理描述。

引理 2.6. 对于任意在∞处至多以多项式速率增长的连续函数 g ，我们有

$$\lim_{q\to 0} \mathbb{E}[g(\chi_q)] = \mathbb{E}[g(B_1^+)],$$

其中， B_1^+是时刻1的布朗游走。

证明. 证明分为两个步骤。

步骤 *1.* 我们先证明，当 $q \to 0$时， $\chi_q \xrightarrow{\mathcal{D}} B_1^+$。令

$$T_0 := \inf\{t \ge 0 : B_u \ge B_t \text{ for all } t < u < t + 1\}.$$

那么，B_1^+与 $(B_{1+T_0} - B_{T_0})$ 同分布。令 f 为一个有界连续函数，并固定一个常数 $N > 0$。我们将 $\mathbb{E}[f(B_1^+)]$ 分解如下:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[f(B_1^+)] &= \mathbb{E}[f(B_{1+T_0} - B_{T_0})] \\ &= \mathbb{E}[f(B_{1+T_0} - B_{T_0})\mathbb{1}[T_0 \le N]] + \mathbb{E}[f(B_1^+)\mathbb{1}[T_0 > N]].\end{aligned} \tag{2.21}$$

同理,

$$\mathbb{E}[f(\chi_q)] = \mathbb{E}[f(\chi_q)\mathbb{1}[T_q \le N]] + \mathbb{E}[f(\chi_q)\mathbb{1}[T_q > N]]. \tag{2.22}$$

由于 $T_0 < \infty$ 几乎必然成立，且 f 有界，由引理 2.5 可得

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}[f(B_1^+)\mathbb{1}[T_0 > N]] = \lim_{N\to\infty} \sup_{0<q<1} \mathbb{E}[f(\chi_q)\mathbb{1}[T_q > N]] = 0. \tag{2.23}$$

根据 $\mathbb{P}_{q,N}$ 的定义（参见 (2.17)），我们得到

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}[f(\chi_q)\mathbb{1}[T_q \le N]] \\ =&\mathbb{E}_{q,N}[f(B_{1+T_q,q} - B_{T_q,q})\mathbb{1}[T_q \le N]\exp(C_{2.14}(q)B_{N+1} + C_{2.14}(q)^2(N+1)/2)] \\ =&\mathbb{E}_{q,N}[f(B_{1+T_q,q} - B_{T_q,q})\mathbb{1}[T_q \le N]\exp(C_{2.14}(q)B_{N+1,q} - C_{2.14}(q)^2(N+1)/2)] \\ =&\exp(-C_{2.14}(q)^2(N+1)/2)\mathbb{E}[f(B_{T_0+1} - B_{T_0})\mathbb{1}[T_0 \le N]\exp[C_{2.14}(q)B_{N+1}]],\end{aligned} \tag{2.24}$$

其中，$\mathbb{E}_{q,N}$ 表示关于概率测度 $\mathbb{P}_{q,N}$ 的期望。为了在 (2.24) 中取 $q \to 0$ 极限，我们注意到

$$\left| f(B_{1+T_0} - B_{T_0}) \mathbb{1}[T_0 \le N] \exp\left[C_{2.14}(q) B_{N+1} \right] \right| \le \left(\sup_{x \ge 0} |f(x)| \right) \exp\left[C_{2.14}(1) |B_{N+1}| \right].$$

根据支配 收敛定理以及 $C_{2.14}(q) \to 0$ 趋于 $q \to 0$这一事实，我们得到 t

$$\mathbb{E}\Big[f(\chi_q) \mathbb{1}[T_q \le N] \Big] \to \mathbb{E}\Big[f(B_{T_0+1} - B_{T_0}) \mathbb{1}[T_0 \le N] \Big], \quad \text{as } q \to 0. \tag{2.25}$$

结合 (2.21)、(2.22)、(2.23) 和 (2.25)，我们得到

$$\mathbb{E}[f(\chi_q)] \to \mathbb{E}[f(B_1^+)], \quad \text{as } q \to 0, \tag{2.26}$$

这意味着当 $q \to 0$ 时， $\chi_q \xrightarrow{\mathcal{D}} B_1^+$，正如所需。

步骤 *2.* 接下来我们证明，对于任何满足引理 2.6 假设的函数 g ， $g(\chi_q)$ 在 $q \in (0,1)$ 上一致可积。根据 g 的多项式增长条件，存在某个 $C, r > 0$

$$g(x)^2 \le C(|x|^r + 1), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

不失一般性，我们可以假设 $r \ge 1$。利用适用于 $a,\ b \ge 0$ 的不等式 $(a+b)^r \le 2^{r-1}(a^r + b^r)$，我们得到

$$\begin{aligned}
\sup_{0<q<1} \mathbb{E}[g(\chi_q)^2] \le & C \sup_{0<q<1} \mathbb{E}[(|\chi_q|^r + 1)] \\
\le & C + C \sup_{0<q<1} \mathbb{E}\left[\left(2 \sup_{0 \le s \le 1+T_q} |B_s| + C_{2.14}(1) \right)^r \right] \\
\le & C' + C' \sup_{0<q<1} \mathbb{E}\left[\sup_{0 \le s \le 1+T_q} |B_s|^r \right],
\end{aligned}$$

其中 C' 是另一个（较大的）常数。因此，要证明 $\sup_{0<q<1} \mathbb{E}[g(\chi_q)^2] < \infty$，只需控制

$$\sup_{0<q<1} \mathbb{E}\left[\sup_{0 \le s \le 1+T_q} |B_s|^r \right],$$

它可以由以下表达式界定

$$\begin{aligned}
& \sup_{0<q<1} \left[\sum_{N=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[\left(\sup_{0 \le s \le N+1} |B_s|^r \right) \mathbb{1}[T_q \in [N-1, N)] \right] \right] \\
\le & \sum_{N=1}^{\infty} \left(\mathbb{E}\left[\sup_{0 \le s \le N+1} |B_s|^{2r} \right] \right)^{1/2} \sup_{0<q<1} \left(\mathbb{P}(T_q > N-1) \right)^{1/2} \\
\le & C'' \sum_{N=1}^{\infty} (N+1)^{r/2} \exp(-c_{2.16}(N-1)/2) < \infty.
\end{aligned}$$

因此， $\{g(\chi_q)\ q \in (0,\ 1)\}$ 是一致可积的，结合步骤 *1* 即可完成引理 2.6 的证明。□

回顾一下，

$$J_Y = \{Y_\ell > 0 \text{ for all } 0 \le \ell \le N_q - n^{0.6}\}.$$

现在我们研究 $\mathbb{P}(J_Y)$ 的渐近行为。

命题 2.1。极限

$$c_{q,Y} = \lim_{n\to\infty} n^{1/3}\mathbb{P}(J_Y) \tag{2.27}$$

存在，且满足

$$\lim_{q\to 0} q^{1/2} c_{q,Y} = \sigma^{-1}\sqrt{\frac{2m_1}{\pi\left(1+\frac{\rho}{\lambda}\right)}}. \tag{2.28}$$

证明。 我们首先证明 $q^{1/2}c_{q,Y}$ 的极限存在。设 $\phi_n(\theta)$ 为 $-n^{-1/3}(Y_\ell - Y_{\ell-1})$ 的矩生成函数，即，

$$\phi_n(\theta) = \mathbb{E}[\exp(-\theta n^{-1/3}(Y_\ell - Y_{\ell-1}))].$$

结合引理 2.3 和事实 $|Y_\ell - Y_{\ell-1}| = O(\log n)$，对于任意 $|\theta| = O(1)$，我们有

$$\phi_n(\theta) = 1 - \theta C_{2.8}\cdot q n^{-2/3} + \frac{\theta^2\cdot n^{-2/3}}{2}\sigma^2 + o(n^{-2/3}). \tag{2.29}$$

特别地，(2.29) 意味着存在两个常数 $0 < \theta_* < \theta^*$，使得

$$\phi_n(\theta_*) < 0, \quad \text{and} \quad \phi_n(\theta^*) > 0, \tag{2.30}$$

对所有充分大的 n 均成立。结合 (2.30) 与 $\phi_m(\theta)$ 关于 θ 的凸性，我们推得下列方程存在唯一的正解 θ_n

$$\mathbb{E}[\exp(-\theta n^{-1/3}(Y_\ell - Y_{\ell-1}))] = 1.$$

由 (2.29)，当 $n\to\infty$ 时，我们有

$$\theta_n = 2C_{2.8}q/\sigma^2 + o(1). \tag{2.31}$$

根据 θ_n 的定义，过程 $\{\exp(-\theta_n n^{-1/3}Y_\ell)\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ 是一个鞅。定义

$$\Gamma := \inf\{\ell \ge 0 : Y_\ell = 0\} \wedge \lfloor N_q - n^{0.6}\rfloor.$$

于是，由可选停止定理，

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\exp(-\theta_n n^{-1/3}Y_0)] &= \mathbb{E}[\exp(-\theta_n n^{-1/3}Y_\Gamma)]\\ &= 1 - \mathbb{P}(J_Y) + \mathbb{E}\left[\exp(-\theta_n n^{-1/3}Y_{\lfloor N_q - n^{0.6}\rfloor})\middle| J_Y\right]\mathbb{P}(J_Y).\end{aligned}$$

求解上述方程可得

$$\mathbb{P}(J_Y) = \frac{\mathbb{E}(1-\exp(-\theta_n n^{-1/3}Y_0))}{1 - \mathbb{E}\left[\exp(-\theta_n n^{-1/3}Y_{\lfloor N_q - n^{0.6}\rfloor})\middle| J_Y\right]}. \tag{2.32}$$

注意，根据 (1.5)，$Y_0 = d_{u,\ n} \le \log(nC_{1.1})/\eta_{1.1}$。结合 (**H3**) 和 (2.31)，我们得到

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[1-\exp\left(-\theta_n n^{-1/3}Y_0\right)\right] =& \theta_n n^{-1/3}\mathbb{E}[Y_0] + O(n^{-2/3}\log^2 n)\\ =& \theta_n n^{-1/3}\sum_{k=0}^{\infty} k p_k^* + o(n^{-1/3})\\ =& 2C_{2.8}q m_1 n^{-1/3}/\sigma^2 + o(n^{-1/3}).\end{aligned} \tag{2.33}$$

由引理 2.4，当 $n \to \infty$ 时，

$$\mathbb{E}\left[\exp(-\theta_n n^{-1/3} Y_{[N_q - n^{0.6}]}) \middle| J_Y\right] \to \mathbb{E}[\exp(-2C_{2.14}(q)\chi_q)]. \tag{2.34}$$

结合 (2.32)、(2.33) 和 (2.34)，我们得出

$$\lim_{n\to\infty} n^{1/3}\mathbb{P}(J_Y) = \frac{2C_{2.8} q m_1/\sigma^2}{1 - \mathbb{E}[\exp(-2C_{2.14}(q)\chi_q)]} =: c_{q,Y}, \tag{2.35}$$

这意味着 (2.27)。

接下来，我们证明 (2.28)。回顾一下，B_1^+（时间 1 的布朗游走）具有密度函数 x 指数分布$(-x^2/2)$ $\mathbb{1}[0, +\infty)$。例如，参见 [8, 方程 (1.1)]。因此 $\mathbb{E}(B_1^+) = \sqrt{\pi/2}$ 和$\mathbb{E}[(B_1^+)^2] < \infty$。根据引理 2.6（其中测试函数 $g(x)$ 取为 x 或 x^2），

$$\lim_{q\to 0} \mathbb{E}[\chi_q] = \mathbb{E}[B_1^+] = \sqrt{\pi/2}, \quad \text{and} \quad \lim_{q\to 0} \mathbb{E}[\chi_q^2] = \mathbb{E}[(B_1^+)^2] < \infty. \tag{2.36}$$

Co结合 $C_{2.14}(q)$ 的定义、(2.36) 以及基本不等式 y

$$|\exp(-x) - (1-x)| \le x^2, \quad \forall\, x \ge 0,$$

我们有，当 $q \to 0$ 时，

$$\begin{aligned} 1 - \mathbb{E}[\exp(-2C_{2.14}(q)\chi_q)] &= 2C_{2.14}(q)\mathbb{E}[\chi_q] + O(q^3) \\ &= C_{2.8}\sigma^{-1} q^{3/2} \sqrt{2\pi\left(1 + \frac{\rho}{\lambda}\right) m_1} + O(q^3), \end{aligned} \tag{2.37}$$

根据 (2.35) 中 $c_{q,Y}$ 的定义证明 (2.28)。 □

2.4. **下界分析** (Z_ℓ)。与上一节关于上界 (Y_ℓ) 和 $(Y(t))$ 的分析类似，我们引入如下随机过程 $(Z(t))_{0\le t\le 1}$。对于整数 $0 \le k \le N_q + n^{0.6}$，令

$$\overline{Z}\left(\frac{k}{N_q + n^{0.6}}\right) := \frac{Z_k}{\sigma\sqrt{N_q + n^{0.6}}} = \frac{Z_k - \mathbb{E}Z_k}{\sigma\sqrt{N_q + n^{0.6}}} + \frac{\mathbb{E}Z_k}{\sigma\sqrt{N_q + n^{0.6}}}, \tag{2.38}$$

并且，(2.38) 中各点之间的 $Z(t)$ 值采用线性插值。

命题 2.2。存在一个常数 $c_{q,Z} > 0$，使得

$$c_{q,Z} \le \liminf_{n\to+\infty} n^{1/3}\mathbb{P}(J_Z) \le \limsup_{n\to+\infty} n^{1/3}\mathbb{P}(J_Z) \le c_{q,Y}$$

并且

$$\lim_{q\to 0} q^{1/2} c_{q,Z} = \lim_{q\to 0} q^{1/2} c_{q,Y}. \tag{2.39}$$

证明。根据 (2.12) 和 (2.27)，必有

$$\liminf_{n\to+\infty} n^{1/3}\mathbb{P}(J_Z) \le \limsup_{n\to+\infty} n^{1/3}\mathbb{P}(J_Z) \le c_{q,Y}. \tag{2.40}$$

接下来需要为 (2.40) 的左端找到一个合适的下界。结合引理 2.3 和事实 $Z_\ell - Z_{\ell-1} = O(\log n)$，可得

$$\mathbb{E}[\exp(\theta n^{-1/3}(Z_\ell - Z_{\ell-1}))] = 1 - \theta C_{2.9} q n^{-2/3} + \frac{\theta^2 \cdot n^{-2/3}}{2}\sigma^2 + o(n^{-2/3}), \quad \text{as } n \to \infty.$$

~与命题 2.1 的证明类似，方程存在唯一的正解 $\theta = \theta_n$

$$\mathbb{E}[\exp(\theta n^{-1/3}(Z_\ell - Z_{\ell-1}))] = 1,$$

对所有充分大的 $n > 0$，其满足

$$\widetilde{\theta}_n = 2C_{2.9}q/\sigma^2 + o(1), \quad \text{as } n \to \infty. \tag{2.41}$$

~因此，我们可以定义一个新的概率 $\mathbb{P}$，定义为

$$\frac{\mathrm{d}\widetilde{\mathbb{P}}}{\mathrm{d}\mathbb{P}} := \exp\left[\widetilde{\theta}_n n^{-1/3}(Z_\ell - Z_0)\right]. \tag{2.42}$$

显然，Z_0 具有第 ~在 $\mathbb{P}$ 下与 $\mathbb{P}$ 具有相同的分布。结合引理 2.3 和 $|Z_\ell - Z_{\ell-1}| = O(\log\ n)$,

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\mathbb{E}}(Z_\ell - Z_{\ell-1}) = \mathbb{E}\left((Z_\ell - Z_{\ell-1})\exp(\widetilde{\theta}_n n^{-1/3}(Z_\ell - Z_{\ell-1}))\right)\\
=&\mathbb{E}(Z_\ell - Z_{\ell-1}) + \widetilde{\theta}_n n^{-1/3}\mathbb{E}(Z_\ell - Z_{\ell-1})^2 + O(n^{-2/3}\log^3 n)\\
=&-C_{2.9}qn^{-1/3} + 2C_{2.9}qn^{-1/3} + o(n^{-1/3}) = C_{2.9}qn^{-1/3} + o(n^{-1/3}).
\end{aligned}$$

~与 (2.14) 类似，在测度 $\mathbb{P}$ 下，$(Z(\overline{t}))$ 依分布收敛到过程

$$\widetilde{B}_{t,q} := B_t + \frac{C_{2.9}}{\sigma}\sqrt{(1+\rho/\lambda)m_1}q^{3/2}t =: B_t + C_{2.43}(q)t, \tag{2.43}$$

Repe ~沿用引理 2.4 的证明，我们可以证明，在 $\mathbb{P}(\cdot|J_Z)$ 的分布下 ,

$$\widetilde{Z}(1) \xrightarrow{\mathcal{D}} \widetilde{\chi}_q := \widetilde{B}_{1+\widetilde{T}_q,q} - \widetilde{B}_{\widetilde{T}_q,q} = B_{1+\widetilde{T}_q} - B_{\widetilde{T}_q} + C_{2.43}(q), \tag{2.44}$$

其中

$$\widetilde{T}_q := \inf\{t \geq 0 : \widetilde{B}_{u,q} \geq \widetilde{B}_{t,q}, \text{ for all } u \in [t, t+1]\} < \infty, \text{ a.s.}$$

由引理 2.5 可知。为便于后文引用，我们指出，引理 2.6 对 $\widetilde{\chi}_q$ 也成立。特别地,

$$\widetilde{\chi}_q \xrightarrow{\mathcal{D}} B_1^+ \quad \text{as } q \to 0. \tag{2.45}$$

定义一个停时

$$\widetilde{\Gamma} := \inf\{\ell \geq 0 : Z_\ell \leq 0\} \wedge \lfloor N_q + n^{0.6}\rfloor.$$

由于约束 $Z_\ell - Z_{\ell-1} \geq -2$，我们得到

$$Z_{\widetilde{\Gamma}} = 0 \text{ or } -1, \quad \text{on } J_Z^c.$$

因此，由可选停止定理（将其应用于 $\mathbb{P}$ 下的鞅[4] $\{\exp[-\widetilde{\theta}_n n^{-1/3}Z_\ell]\}_{\ell\in\mathbb{N}}$~ ~，以及停时 Γ），

$$\begin{aligned}
&1 - \widetilde{\mathbb{P}}(J_Z) + \widetilde{\mathbb{E}}\left(\exp\left(-\widetilde{\theta}_n\frac{Z_{\lfloor N_q+n^{0.6}\rfloor}}{n^{1/3}}\right)|J_Z\right)\widetilde{\mathbb{P}}(J_Z)\\
\leq&\widetilde{\mathbb{E}}(\exp\left(-\widetilde{\theta}_n n^{-1/3}Z_{\widetilde{\Gamma}}\right)) + \widetilde{\mathbb{E}}\left(\exp\left(-\widetilde{\theta}_n\frac{Z_{\lfloor N_q+n^{0.6}\rfloor}}{n^{1/3}}\right)|J_Z\right)\widetilde{\mathbb{P}}(J_Z)\\
=&\widetilde{\mathbb{E}}\left(\exp\left(-\widetilde{\theta}_n n^{-1/3}Z_0\right)\right) = \mathbb{E}\left(\exp\left(-\widetilde{\theta}_n n^{-1/3}Z_0\right)\right),
\end{aligned}$$

[4]确实，~指数分布 $\left(-\widetilde{\theta}_n(Z_\ell - Z_{\ell-1})\right) =$ ℙ指数分布 $\left(\widetilde{\theta}_n n^{-1/3}(Z_\ell - Z_{\ell-1}) - \widetilde{\theta}_n n^{-1/3}(Z_\ell - Z_{\ell-1})\right) = 1$。

这又等价于

$$\left(1-\mathbb{E}\left(\exp\left(-\widetilde{\theta}_n n^{-1/3}Z_0\right)\right)\right)\left(1-\widetilde{\mathbb{E}}\left(\exp\left(-\widetilde{\theta}_n\frac{Z_{\lfloor N_q+n^{0.6}\rfloor}}{n^{1/3}}\right)|J_Z\right)\right)^{-1}\leq\widetilde{\mathbb{P}}(J_Z). \quad (2.46)$$

~采用与(2.33)中类似的论证，将 θ_n 替换为 θ_n,

$$\begin{aligned}1-\mathbb{E}\left(\exp\left(-\widetilde{\theta}_n n^{-1/3}Z_0\right)\right)&=\widetilde{\theta}_n n^{-1/3}\mathbb{E}(Z_0)+o(n^{-1/3})\\&=2C_{2.9}qm_1n^{-1/3}/\sigma^2+o(n^{-1/3}).\end{aligned} \quad (2.47)$$

由(2.41)和(2.44)，我们还得到

$$\lim_{n\to\infty}\widetilde{\mathbb{E}}\left(\exp\left(-\widetilde{\theta}_n\frac{Z_{\lfloor N_q+n^{0.6}\rfloor}}{n^{1/3}}\right)|J_Z\right)=\mathbb{E}\left(\exp\left(-2C_{2.43}(q)\widetilde{\chi}_q\right)\right). \quad (2.48)$$

将(2.47)和(2.48)代回(2.46)，可得

$$\liminf_{n\to+\infty}n^{1/3}\widetilde{\mathbb{P}}(J_Z)\geq\left(1-\mathbb{E}\left(\exp\left(-2C_{2.43}(q)\widetilde{\chi}_q\right)\right)\right)^{-1}\frac{2C_{2.9}qm_1}{\sigma^2}=:C_{2.49}(q). \quad (2.49)$$

现在由测度变换规则(2.42)以及 $Z_0=O(\log n)$这一事实，我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(J_Z)&=\widetilde{\mathbb{E}}\left(\exp\left(-\widetilde{\theta}_n\frac{Z_{N_q+n^{0.6}}-Z_0}{n^{1/3}}\right)\mathbb{1}[J_Z]\right)\\&=e^{O(n^{-1/3}\log n)}\widetilde{\mathbb{P}}(J_Z)\widetilde{\mathbb{E}}\left(\exp\left(-\widetilde{\theta}_n\frac{Z_{N_q+n^{0.6}}}{n^{1/3}}\right)|J_Z\right).\end{aligned}$$

结合(2.49)，我们得出

$$\liminf_{n\to+\infty}n^{1/3}\mathbb{P}(J_Z)\geq C_{2.49}(q)\mathbb{E}\left(\exp\left(-2C_{2.43}(q)\widetilde{\chi}_q\right)\right)=:c_{q,Z}. \quad (2.50)$$

在（2.37）中重复相同的论证，将 χ_q 替换为 $\widetilde{\chi}_q$，即可得到（2.39）。 □

定理 *1.4* 的证明。 定理 1.4 的结论直接由（2.12）以及命题 2.1 和命题 2.2 得出。□

2.5. **推论 1.1 的证明**。 定义

$$V_n(Y):=\frac{1}{\sigma\sqrt{N_q}}\max_{\lfloor N_q-n^{0.6}\rfloor\leq i\leq\lfloor N_q+n^{0.6}\rfloor}(Y_i-Y_{N_q-n^{0.6}})$$

and

$$V_n(Z):=\frac{1}{\sigma\sqrt{N_q}}\max_{\lfloor N_q-n^{0.6}\rfloor\leq i\leq\rfloor N_q+n^{0.6}\rfloor}(Z_i-Z_{\lfloor N_q+n^{0.6}\rfloor}).$$

令 f 为任意有界正连续递增函数。与 (2.11) 类似，以下不等式在 $\Omega_{2.5}$ 上成立,

$$\begin{aligned}f\left(\frac{Z_{\lfloor N_q+n^{0.6}\rfloor}}{\sigma\sqrt{N_q}}-V_n(Z)\right)\mathbb{1}[J_Z]&\leq f\left(\frac{X_{I,qn^{-1/3}}}{\sigma\sqrt{N_q}}\right)\mathbb{1}[\gamma_n\geq qn^{-1/3}]\\&\leq f\left(\frac{Y_{\lfloor N_q-n^{0.6}\rfloor}}{\sigma\sqrt{N_q}}+V_n(Y)\right)\mathbb{1}[J_Z].\end{aligned} \quad (2.51)$$

在 $\Omega_{2.5}$ 上对 (2.51) 积分，并令 $\|f\|_\infty := \sup_{z\in\mathbb{R}} |f(z)|$，即可得到

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(f\left(\frac{Z_{\lfloor N_q+n^{0.6}\rfloor}}{\sigma\sqrt{N_q}} - V_n(Z)\right)\mathbb{1}[J_Z]\right) - \|f\|_\infty \mathbb{P}(\Omega_{2.5}^c)\\
\le&\mathbb{E}\left(f\left(\frac{X_{I,qn^{-1/3}}}{\sigma\sqrt{N_q}}\right)\mathbb{1}[\gamma_n > qn^{-1/3}]\right)\\
\le&\mathbb{E}\left(f\left(\frac{Y_{\lfloor N_q-n^{0.6}\rfloor}}{\sigma\sqrt{N_q}} + V_n(Y)\right)\mathbb{1}[J_Y]\right) + \|f\|_\infty \mathbb{P}(\Omega_{2.5}^c).
\end{aligned} \tag{2.52}$$

将每一 h项除以上述方程中的 $\mathbb{P}(\gamma_n > qn^{-1/3})$，并利用(2.12)，我们得到

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(f\left(\frac{Z_{N_q}}{\sigma\sqrt{\lfloor N_q+n^{0.6}\rfloor}} - V_n(Z)\right)|J_Z\right)\frac{\mathbb{P}(J_Z)}{\mathbb{P}(J_Y)+n^{-0.4}} - \|f\|_\infty \frac{\mathbb{P}(\Omega_{2.5}^c)}{\mathbb{P}(J_Z)-n^{-0.4}}\\
\le&\mathbb{E}\left(f\left(\frac{X_{I,qn^{-1/3}}}{\sigma\sqrt{N_q}}\right)|\gamma_n > qn^{-1/3}\right)\\
\le&\mathbb{E}\left(f\left(\frac{Y_{\lfloor N_q-n^{0.6}\rfloor}}{\sigma\sqrt{N_q}} + V_n(Y)\right)|J_Y\right)\frac{\mathbb{P}(J_Y)}{\mathbb{P}(J_Z)-n^{-0.4}} + \|f\|_\infty \frac{\mathbb{P}(\Omega_{2.5}^c)}{\mathbb{P}(J_Z)-n^{-0.4}}.
\end{aligned} \tag{2.53}$$

下面的命题 2.3 表明，即使在以 J_Y 和 J_Z为条件之后，项 $V_n(Y)$和 $V_n(Z)$仍可忽略。

命题 2.3. 对任意固定的 $\varepsilon > 0$， $\mathbb{P}(|V_Y(n)| > \varepsilon)$ 与 $\mathbb{P}(|V_Z(n)| > \varepsilon)$的衰减率快于 n的任意多项式。

暂且假定命题 2.3 成立，我们现在证明推论 1.1。

推论 *1.1* 的证明。(1.21) 的最后一个不等式（上界部分）由定理 1.4 和 (2.53) 立即得出，因此只需证明第一个不等式（下界部分）。~ ~我们沿用命题 2.2 的证明中 $\mathbb{E}$、 $\mathbb{P}$ 和 $\widetilde{\chi}_q$ 的记号。注意到

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(f\left(\frac{Z_{N_q+n^{0.6}}}{\sigma\sqrt{N_q+n^{0.6}}}\right)|J_Z\right)\mathbb{P}(J_Z)\\
=&\widetilde{\mathbb{E}}\left(\exp\left(-\widetilde{\theta}_n\frac{Z_{N_q+n^{0.6}}-Z_0}{n^{1/3}}\right)f\left(\frac{Z_{N_q+n^{0.6}}}{\sigma\sqrt{N_q+n^{0.6}}}\right)|J_Z\right)\widetilde{\mathbb{P}}(J_Z).
\end{aligned}$$

由 (2.48) 和 (2.49)，在上述不等式中取极限 $n\to\infty$，我们得到

$$\begin{aligned}
&\liminf_{n\to+\infty} n^{1/3}\mathbb{E}\left(f\left(\frac{Z_{N_q+n^{0.6}}}{\sigma\sqrt{N_q+n^{0.6}}}\right)|J_Z\right)\mathbb{P}(J_Z)\\
\ge&C_{2.49}(q)\mathbb{E}\left(e^{-2C_{2.43}(q)\widetilde{\chi}_q}f(\widetilde{\chi}_q)\right) = \frac{c_{q,Z}}{\mathbb{E}\left(\exp\left(-2C_{2.43}(q)\widetilde{\chi}_q\right)\right)}\mathbb{E}\left(e^{-2C_{2.43}(q)\widetilde{\chi}_q}f(\widetilde{\chi}_q)\right),
\end{aligned} \tag{2.54}$$

其中，最后一步用到了 (2.50) 中 $c_{q,Z}$ 的定义。现在我们定义另一个随机变量 ζ_q，如下:

$$\mathbb{P}(\zeta_q\in\cdot) := \frac{1}{\mathbb{E}\left(\exp\left(-2C_{2.43}(q)\widetilde{\chi}_q\right)\right)}\mathbb{E}\left(e^{-2C_{2.43}(q)\widetilde{\chi}_q}\mathbb{1}[\widetilde{\chi}_q\in\cdot]\right).$$

回想一下，$\widetilde{\chi}_q \xrightarrow{\mathcal{D}} B_1^+$ 和 $C_{2.43}(q) \to 0$ 满足 $q \to 0$ （见 (2.45) 和 (2.43)）。因此我们得出，$\zeta_q \xrightarrow{\mathcal{D}} B_1^+$ 满足 $q \to 0$。结合 (2.27)、(2.53) 和 (2.54)，我们推导出 (1.21) 的第一个不等式，这也证明了推论 1.1。□

接下来只需完成命题 2.3 的证明。

命题 *2.3* 的证明。 我们首先考虑 $\mathbb{P}(|V_Y(n)| > \varepsilon)$。由引理 2.3，我们可以取$n$充分大，使得

$$\frac{2n^{0.6}}{\sigma\sqrt{N_q}}\,|\mathbb{E}(Y_1 - Y_0)| < \varepsilon/2,$$

这与 Doob 极大不等式一起，意味着对任意整数 $k \geq 2$ ，

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|V_Y(n)| > \varepsilon) &\leq \mathbb{P}\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{N_q}} \max_{i \leq 2n^{0.6}} |Y_i - Y_0 - \mathbb{E}(Y_i - Y_0)| + \frac{2n^{0.6}}{\sigma\sqrt{N_q}}\,|\mathbb{E}(Y_1 - Y_0)| > \varepsilon\right) \\ &\leq \mathbb{P}\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{N_q}} \max_{i \leq 2n^{0.6}} |Y_i - Y_0 - \mathbb{E}(Y_i - Y_0)| > \varepsilon/2\right) \\ &\leq \frac{2^k (k/(k-1))^k}{\varepsilon^k \sigma^k \sqrt{N_q^k}} \mathbb{E}\left(|Y_{2n^{0.6}} - Y_0 - \mathbb{E}(Y_{2n^{0.6}} - Y_0)|^k\right).\end{aligned}$$

对于偶数 k，根据 [20, p. 60，补充材料 16],存在某个常数 $C(k)$，使得

$$\mathbb{E}\left(|Y_{2n^{0.6}} - Y_0 - \mathbb{E}(Y_{2n^{0.6}} - Y_0)|^k\right) \leq C(k)(n^{0.6})^{k/2}\mathbb{E}[((Y_1 - Y_0) - \mathbb{E}(Y_1 - Y_0))^k]. \quad (2.55)$$

利用 (1.3) 以及引理 2.2 下方所述的 $(Y_1 - Y_0)$ 的分布，可进一步将 (2.55) 的右端界定为 $\widetilde{C}(k)n^{0.3k}$，其中 $\widetilde{C}(k)$ 是另一个正常数。结合这些估计，任取正偶数 k,

$$\mathbb{P}(|V_Y(n)| > \varepsilon) = O(n^{-(\frac{1}{2} - 0.3)k}),$$

如所需。概率 probability $\mathbb{P}(|V_Z(n)| > \varepsilon)$ 可用类似方法处理，细节从略 . □

3. Upper and lower bounds for $X_{I,\,t}$

本节的目标是推导关于 $X_{I,t}$ （时刻 t 的感染半边数）的一些估计，这些估计将作为证明定理 1.5 和定理 1.6 的主要组成部分。我们将通过推导并分析 $X_{I,t}$ 演化方程中漂移项的一阶近似来实现这一目标。回顾第 1.4.2 节开头对量 X_t,$S_{t,k}$,$X_{S,t}$ 的定义。

3.1. 的演化方程. $_t$。

我们从 X_t的演化过程开始，该过程由下式给出（见 [18, 方程（3.14）]和 [9, 方程（4.3.10）]）

$$\mathrm{d}X_t = -2(X_t - 1)\mathrm{d}t + \mathrm{d}M_{0,t}, \quad (3.1)$$

其中 $(M_{0,t})$ 是一个鞅。对于 $S_{t,k}$, [9, 方程 (3.2.3)]为

$$\mathrm{d}S_{t,k} = -kS_{t,k}\mathrm{d}t + \mathbb{1}[k \geq 1]\frac{\rho}{\lambda}\frac{S_{t,k-1}}{n}(X_t - 1)\mathrm{d}t - \frac{\rho}{\lambda}\frac{S_{t,k}}{n}(X_t - 1)\mathrm{d}t + \mathrm{d}M_{k,t}, \quad (3.2)$$

其中，对于每个 k，$(M_{k,t})$ 都是一个鞅。将 (3.2) 对 k 从 0 到 ∞ 求和，并注意到第二项和第三项相互抵消，可得

$$\mathrm{d}S_t = -X_{S,t}\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}M_{1,t} \tag{3.3}$$

对于某个鞅项（$M_{1,\,t}$）。将 (3.2) 两边乘以 k 并对 k 求和，

$$\mathrm{d}X_{S,t} = -\sum_{k=0}^{\infty} k^2 S_{t,k}\mathrm{d}t + \frac{\rho}{\lambda}\cdot\frac{S_t}{n}(X_t-1)\mathrm{d}t + \mathrm{d}M_{2,t} \tag{3.4}$$

对于某个鞅项（$M_{2,\,t}$）。

令 $M_{I,\,t} = M_{0,\,t} - M_{2,\,t}$。结合 (3.1) 和 (3.4)，并利用 $X_{I,\,t} = X_t - X_{S,\,t}$，可得

$$\mathrm{d}X_{I,t} = \left(-2(X_t-1) + \sum_{k=0}^{\infty} k^2 S_{t,k} - \frac{\rho}{\lambda}\cdot\frac{S_t}{n}(X_t-1)\right)\mathrm{d}t + \mathrm{d}M_{I,t}. \tag{3.5}$$

此外，若将 (3.2) 两边分别乘以 k^2 和 k^3，则可得

$$\mathrm{d}\left(\sum_{k=0}^{\infty} k^2 S_{t,k}\right) = \left(-\sum_{k=0}^{\infty} k^3 S_{t,k} + 2\frac{\rho}{\lambda}\cdot\frac{X_{S,t}}{n}(X_t-1) + \frac{\rho}{\lambda}\cdot\frac{S_t}{n}(X_t-1)\right)\mathrm{d}t + \mathrm{d}M_{3,t} \tag{3.6}$$

and

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\left(\sum_{k=0}^{\infty} k^3 S_{t,k}\right) = \Bigg(&-\sum_{k=0}^{\infty} k^4 S_{t,k} + 3\frac{\rho}{\lambda}\cdot\frac{\sum_{k=0}^{\infty} k^2 S_{t,k}}{n}(X_t-1) + 3\frac{\rho}{\lambda}\cdot\frac{X_{S,t}}{n}(X_t-1) \\ &+ \frac{\rho}{\lambda}\cdot\frac{S_t}{n}(X_t-1)\Bigg)\mathrm{d}t + \mathrm{d}M_{4,t}\end{aligned} \tag{3.7}$$

对于某些鞅 $(M_{3,\,t})$ 和 $(M_{4,\,t})$。（这里列出方程 (3.6) 和 (3.7) 的原因是，它们将在下文引理 3.2 的证明中用到。）

3.2. 的漂移部分近似。$X_{I,\,t}$。理解 $X_{I,\,t}$ 演化的第一步是控制相关的鞅项。

引理 3.1。存在正常数 $C_{3.9}$，使得对于充分大的 n，以至少$(1-n^{-10})$的概率，有

$$\sum_{j=0}^{4}\left(\sup_{0\le t\le\gamma_n\wedge 1}|M_{j,t}|\right) + \sup_{0\le t\le\gamma_n\wedge 1}|M_{I,t}| \le n^{0.6} \tag{3.8}$$

and

$$\sup_{0\le t\le\gamma_n\wedge 1}\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)^4 S_{t,k} \le C_{3.9}n. \tag{3.9}$$

证明。引理 3.1 的证明沿用引理 [9, 4.3] 中的相同论证。 □

令 $\Omega_{3.8}$ 和 $\Omega_{3.9}$ 分别表示由 (3.8) 和 (3.9) 给出的事件。设

$$\Omega_{3.10} := \Omega_{3.8}\cap\Omega_{3.9}. \tag{3.10}$$

在事件 $\Omega_{3.10}$ 上，下面的引理 3.2 给出了 $X_{I,t}$ 在 (3.5) 中漂移部分的一阶近似。回顾一下 Δ 在 (1.8) 中的定义。为简化表述，

[5]方程 (3.6) 和 (3.7) 表明，$\sum_k k^2 S_{t,\,k}$ 的一阶近似必然涉及 $\sum_k k^3 S_{t,\,k}$ 的零阶近似。

不失一般性，我们假设 $C_{1.2} > 0.6$，即 $C_{1.2} \in (0.6, 2/3)$。（否则，我们总可以将 $C_{1.2}$ 替换为 $\max\{C_{1.2}, 0.6+\varepsilon\}$，其中某个常数 $\varepsilon > 0$ 足够小。）

引理 3.2. 在$\Omega_{3.10}$上，存在一个正常数 $C_{3.11}$，使得对所有 $0 \le t \le \gamma_n \wedge 1$,

$$\left| \left(-2(X_t - 1) + \sum_{k=0}^{\infty} k^2 S_{t,k} - \frac{\rho}{\lambda} \frac{S_t}{n} (X_t - 1) \right) - m_1 n \Delta t \right| \le C_{3.11}(nt^2 + n^{C_{1.2}}). \tag{3.11}$$

证明. 证明分为四个步骤。在前三个步骤中，我们分别给出 (3.5) 中出现的 X_t, S_t 和 $\sum_{k=0}^{\infty} k^2 S_{t,k}$ 的线性近似。然后将它们结合起来，得到 (3.11)。

步骤 *1.* 我们首先考虑 X_t。结合 (3.1) 以及对所有 $s \ge 0$ 均成立的事实 $X_s \le X_0$，可知在 $\Omega_{3.10}$ 上,

$$|X_t - X_0| \le \int_0^t 2X_0 \mathrm{d}s + |M_{0,t}| \le 2X_0 t + n^{0.6}. \tag{3.12}$$

再次利用 (3.1)，由上述不等式可推出

$$|X_t - (1-2t)\, X_0| \le 2t + 2\int_0^t |X_s - X_0|\, \mathrm{d}s + |M_{0,t}| \le 2t + 2\int_0^t (2X_0 s + n^{0.6}) \mathrm{d}s + n^{0.6},$$

其对于 $t \le 1$ 可由 $(2X_0 t^2 + 4n^{0.6})$ 控制。在假设**(H3)**下，我们有 $|X_0 - m_1 n| \le n^{C_{1.2}}$。因此， X_t 可近似为

$$\begin{aligned} |X_t - (1-2t)m_1 n| &\le |X_t - (1-2t)X_0| + |X_0 - m_1 n| \\ &\le 2(m_1 n + n^{C_{1.2}})t^2 + 4n^{0.6} + n^{C_{1.2}} \\ &\le C\left(n^{C_{1.2}} + m_1 n t^2\right). \end{aligned} \tag{3.13}$$

步骤 *2.* 我们现在用类似的自举论证来分析 S_t。在事件$\Omega_{3.10}$上，(3.4)中$X_{S,t}$ 的漂移部分有上界

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^2 S_{t,k} + \frac{\rho}{\lambda} X_0 \le \sup_{0 \le t \le \gamma_n \wedge 1} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^4 S_{t,k} + \frac{\rho}{\lambda}(m_1 n + n^{C_{1.2}}) \le C_{3.14} n \tag{3.14}$$

对某个正常数 $C_{3.14}$。由于在事件$\Omega_{3.10}$上有$|M_{2,t}| \le n^{0.6}$，我们看到

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} k S_{t,k} - X_{S,0} \right| = |X_{S,t} - X_{S,0}| \le C_{3.14} nt + n^{0.6}. \tag{3.15}$$

因此，在事件$\Omega_{3.10}$上，由(3.3)，我们有如下界

$$|S_t - (S_0 - X_{S,0}t)| \le \int_0^t |X_{S,u} - X_{S,0}|\, \mathrm{d}u + |M_{1,t}| \le C_{3.14} nt^2 + 2n^{0.6}.$$

利用 $S_0 = n - 1$ 和$X_{S,0} = X_0 - X_{I,0}$ （其中由(1.5)有$X_{I,0} \le \log(nC_{1.1})/\eta_{1.1}$），我们看到

$$|S_t - (1 - m_1 t)n| \le 3n^{0.6} + C_{3.14} nt^2 + n^{C_{1.2}} t \le C_{3.14} nt^2 + 4n^{C_{1.2}}. \tag{3.16}$$

步骤 *3*。现在我们转向 $\sum_{k=0}^{\infty} k^2 S_{t,\ k}$。结合 (3.9)、(3.13)、(3.14) 和 (3.15)，我们发现，(3.7) 的漂移项由 Cn 控制，其中某个常数为 C；而鞅部分由 $n^{0.6} \le n^{C_{1.2}}$ 控制。因此，在 $\Omega_{3.\ 10}$ 上,

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} k^3 S_{t,k} - n m_3 \right| \le C_{3.17}\left(n^{C_{1.2}} + nt\right) \tag{3.17}$$

其中某个常数为 $C_{3.17} > 0$。这里我们还利用假设 **(H3)** 将 $\sum_{k=0}^{\infty} k^3 S_{0,\ k}$ 替换为 nm_3。因此，根据 (3.6)、(3.13)、(3.15)、(3.16) 和 (3.17)，存在某个常数 $C_{3.18} > 0$ ，使得在 $\Omega_{3.10}$ 上，

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} k^2 S_{t,k} - \left(m_2 n + \left(-m_3 + 2\frac{\rho}{\lambda} m_1^2 + \frac{\rho}{\lambda} m_1 \right) nt \right) \right| \leq C_{3.18} \left(n^{C_{1.2}} + nt^2 \right). \tag{3.18}$$

步骤 *4.* 结合 (3.13)、(3.16) 和 (3.18)，我们可以近似得到

$$-2(X_t - 1) + \sum_{k=0}^{\infty} k^2 S_{t,k} - \frac{\rho}{\lambda} \frac{S_t}{n} (X_t - 1)$$

by

$$-2(1-2t)m_1 n + \left(m_2 + \left(-m_3 + 2\frac{\rho}{\lambda} m_1^2 + \frac{\rho}{\lambda} m_1 \right) t \right) n - \frac{\rho}{\lambda} (1 - m_1 t)(1-2t) m_1 n. \tag{3.19}$$

More此外，该近似引入的误差有界（对于 $t \leq 1$）

$$C(nt^2 + n^{C_{1.2}}) \tag{3.20}$$

对于某个常数 $C > 0$。根据 [9, 引理 4.4], 的证明中的计算，我们看到，(3.19) 中的表达式等于

$$n(m_1 \Delta t - 2m_1^2 \rho t^2 / \lambda). \tag{3.21}$$

由 (3.19)、(3.20) 和 (3.21) 可得引理 3.2。 □

作为引理 3.2 的应用，我们有如下推论。

推论 3.1。对于 $qn^{-1/3} \leq s \leq t \leq \gamma_n \wedge 1$，在 $\Omega_{3.10}$，

$$\left| X_{I,t} - X_{I,s} - \frac{1}{2} m_1 \Delta (t^2 - s^2) n - (M_{I,t} - M_{I,s}) \right| \leq C_{3.11} \left(n(t^3 - s^3) + n^{C_{1.2}} (t - s) \right).$$

证明。 结合 (3.5) 和引理 3.2，在 $\Omega_{3.10}$，

$$\begin{aligned}
&\left| X_{I,t} - X_{I,s} - \int_s^t m_1 n \Delta r \mathrm{d}r - (M_{I,t} - M_{I,s}) \right| \\
\leq &\int_s^t \left| \left(-2(X_r - 1) + \sum_{k=0}^{\infty} k^2 S_{r,k} - \frac{\rho}{\lambda} \frac{S_r}{n} (X_r - 1) \right) - m_1 n \Delta r \right| \mathrm{d}r \\
\leq &\int_s^t C_{3.11} \left(nr^2 + n^{C_{1.2}} \right) \mathrm{d}r \leq C_{3.11} \left(n(t^3 - s^3) + n^{C_{1.2}} (t - s) \right),
\end{aligned}$$

即得所需结论。 □

4. Proof of Theorem 1.5

本节中我们考虑 $t \in [qn^{-1/3}, Qn^{-1/3}]$ 并证明定理 1.5。令 $t = sn^{-1/3}$ ，使得 s 的取值范围为 $[q, Q]$。定义 $X_{I,t}$ 的重缩放版本，其中 $q \leq s \leq n^{1/3}\gamma_n$ ，如下：

$$\widehat{X}_{I,s} := n^{-1/3} (X_{I,sn^{-1/3}} - X_{I,qn^{-1/3}}).$$

为便于本节及下一节 5 中的证明，我们令$M_{I,\ t}$ 在时间 γ_n之后按适当缩放的布朗运动演化，即

$$M_{I,t} = M_{I,\gamma_n} + n^{1/3} C_{1.22} B_{t-\gamma_n},$$

并令$\widehat{X}_{I,\ s}$ 在时间 $n^{1/3}\gamma_n$ 之后按带有二次漂移的布朗运动演化，

$$\widehat{X}_{I,s} = \widehat{X}_{I,n^{1/3}\gamma_n} + \frac{m_1\Delta}{2}(s^2 - (n^{1/3}\gamma_n)^2) + C_{1.22}B_{s-n^{1/3}\gamma_n},$$

其中 $\{B_u, u \geq 0\}$ 是一个与 evoSI 过程相互独立的标准布朗运动。

引理4.1。对于任意固定的 $0 < q < Q$，在给定 $\{\gamma_n > qn^{-1/3}\}$ 的条件下，$\{\widehat{X}_{I,s}, q \leq s \leq Q\}$ 依分布收敛于

$$A(s) = \frac{m_1\Delta}{2}(s^2 - q^2) + C_{1.22}B_{s-q}, \quad q \leq s \leq Q,$$

其中 $\{B_u, u \geq 0\}$ 是一个标准布朗运动。此外，$\{X_{I,s}, q \leq s \leq Q\}$ 与 $X_{I,\ qn^{-1/3}}$ 渐近独立。

证明。根据推论 3.1，$X_{I,\ s}$ 的漂移部分可以很好地近似为 $A(s$的漂移部分，因此只需控制其鞅部分 $\widetilde{M}_{I,\ s}$ ：$= n^{-1/3}(M_{I,\ sn^{-1/3}} - M_{I,\ qn^{-1/3}})$。

.....的二次变差 $\widetilde{M}_{I,\ s}$ 由三部分组成：

- 一个具有 $k \geq 1$ 条半边的易感顶点被感染，使 $X_{I,\ s}$ 增加 $(k-2)n^{-1/3}$。这对 $\langle\widetilde{M}_{I,\ s},\ \widetilde{M}_{I,\ s}\rangle$的贡献为 $n^{-2/3}(k-2)^2$ 。
- 两条感染半边彼此配对，使 $\widehat{X}_{I,\ t}$ 减少 $2n^{-2/3}$。这带来的贡献为 $4n^{-2/3}$。
- 一条感染半边被重新连接到一个易感顶点。这使 $\widehat{X}_{I,\ s}$ 减少 $n^{-1/3}$，并使 $\langle\widetilde{M}_{I,\ s},\ \widetilde{M}_{I,\ s}\rangle$ 增加 $n^{-2/3}$。

设 $U_n(s)$ 为 $\langle\widetilde{M}_{I,\ s},\ \widetilde{M}_{I,\ s}\rangle$的补偿过程。那么对于 $s \leq n^{1/3}\gamma_n$，

$$U_n(s) = n^{-2/3}\int_{qn^{-1/3}}^{sn^{-1/3}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} k(k-2)^2 S_{r,k} + 4(X_{I,r} - 1) + \frac{X_r}{\lambda}\cdot\frac{\rho S_r}{n}\right) \mathrm{d}r. \tag{4.1}$$

对于 $s \geq n^{1/3}\gamma_n$，我们只需

$$U_n(s) = U_n(n^{1/3}\gamma_n) + C_{1.22}(s - n^{1/3}\gamma_n).$$

现在我们来控制 (4.1) 中被积函数的三个项。

- 结合 (3.15)、(3.17) 和 (3.18)，存在 $C_{4.2} > 0$ ，使得在 $\Omega_{3.10}$ 上，

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} k(k-2)^2 S_{t,k} - n(m_3 - 4m_2 + 4m_1)\right| \leq C_{4.2}n^{2/3}, \forall\, t \leq Qn^{-1/3}. \tag{4.2}$$

- 结合推论 3.1 以及 $X_{I,0} \leq \log(nC_{1.1})/\eta_{1.1}$ 这一事实，我们得到

$$X_{I,t} \leq X_{r,0} + C_{3.11}\left(nt^3 + n^{C_{1.2}}t\right) \leq n^{C_{1.2}} + C_{3.11}\left(nt^3 + n^{C_{1.2}}t\right) \leq 2n^{C_{1.2}},\ .\forall\, t \leq Qn^{-1/3} \tag{4.3}$$

- 同样，利用（3.13）和（3.16），可得

$$\left|X_t\frac{S_t}{n} - m_1 n\right| \leq C_{4.4}n^{2/3},\ \forall\, t \leq Qn^{-1/3}. \tag{4.4}$$

结合 (4.2)-(4.4) 以及 $U_n(s)$ 的定义，我们可以看到，在 $\Omega_{3.10}$ 上，对所有 $q \le s \le Q$,

$$\begin{aligned}&\left|U_n(s) - n^{-2/3}\int_{qn^{-1/3}}^{sn^{-1/3}} n(m_3 - 4m_2 + 4m_1 + \rho m_1/\lambda))\mathrm{d}r\right| \\ \le& Cn^{-2/3}(Q-q)n^{-1/3}\cdot n^{2/3},\end{aligned}$$

当 $n \to \infty$ 时，它收敛于 0。由于根据定理 1.4 和引理 3.1，$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(\Omega_{3.10}|\gamma_n > qn^{-1/3}) = 1$，我们得出

$$\sup_{q\le s\le Q}|U_n(s) - (s-q)(m_3 - 4m_2 + 4m_1 + \rho m_1/\lambda)| \to 0, \quad \text{in probability.} \tag{4.5}$$

$\widehat{}$引理4.1 现可由第 7] 章中的 [10, 定理 4.1 以及以下事实得出：$X_{I,\ q} \equiv 0\widehat{}$（这意味着 $X_{I,\ s}$ 与 $X_{I,\ qn^{-1/3}}$ 渐近独立）。□

定理 *1.5* 的证明。我们仅详细证明定理 1.5 中的第一个不等式（下界部分），因为上界可由类似的论证得出[6]。对于任意 $\varepsilon > 0$，定义

$$\Omega_{4.6}(\varepsilon, q, Q) := \{\widehat{X}_{I.s} + n^{-1/3}X_{I,qn^{-1/3}} > \varepsilon, \forall qn^{-1/3} \le t \le Qn^{-1/3}\}. \tag{4.6}$$

在 $\Omega_{4.6}(\varepsilon)$ 上，$X_{I,\ t}$ 保持为正，并满足平凡界

$$X_{I,Qn^{-1/3}} \ge n^{1/3}\widehat{X}_{I,Q}.$$

因此，我们有如下关系

$$\{X_{I,Qn^{-1/3}} \ge m_1\Delta Q^2 n^{1/3}/4\} \subset \Omega_{4.6}(\varepsilon, q, Q) \cap \{\widehat{X}_{I,Q} \ge m_1\Delta Q^2/4\}. \tag{4.7}$$

定义两个事件

$$\Omega_{4.8}(\varepsilon, q, Q) := \{\sqrt{\sigma^2(1+\rho/\lambda)m_1 q}\zeta_q + A(s) \ge \varepsilon, \forall q \le s \le Q\}, \tag{4.8}$$

and

$$\Omega_{4.9}(\varepsilon, q) := \{\sqrt{\sigma^2(1+\rho/\lambda)m_1 q}\zeta_q + A(s) \ge \varepsilon, \forall s \ge q\}, \tag{4.9}$$

根据布朗运动的迭代对数律，我们得到

$$\lim_{Q\to\infty}\mathbb{P}(\Omega_{4.8}(\varepsilon, q, Q)) = \mathbb{P}(\Omega_{4.9}(\varepsilon, q)). \tag{4.10}$$

结合推论 1.1、定理 1.4、引理4.1和方程 (4.7),

$$\begin{aligned}&\liminf_{n\to\infty}\mathbb{P}(X_{I,Qn^{-1/3}} \ge m_1\Delta Q^2 n^{1/3}/4|\gamma_n > qn^{-1/3}) \\ \ge& (c_{q,Z}/c_{q,Y})\mathbb{P}(\Omega_{4.8}(\varepsilon, q, Q) \cap \{A(Q) > m_1\Delta Q^2/4\}).\end{aligned} \tag{4.11}$$

根据引理4.1中 $A(Q)$ 的定义,

$$\lim_{Q\to\infty}\mathbb{P}(A(Q) > m_1\Delta Q^2/4) \ge \lim_{Q\to\infty}\mathbb{P}(B_{Q-q} \ge -(Q-q)) \ge 1 - \lim_{Q\to\infty}(Q-q)^{-1} = 1. \tag{4.12}$$

其中第二个不等式使用了切比雪夫不等式。结合 (4.10)、(4.11) 和 (4.12)，我们推出

$$\liminf_{Q\to\infty}\liminf_{n\to\infty}\mathbb{P}(X_{I,Qn^{-1/3}} \ge m_1\Delta Q^2 n^{1/3}/4|\gamma_n > qn^{-1/3}) \ge (c_{q,Z}/c_{q,Y})\mathbb{P}(\Omega_{4.9}(\varepsilon, q)). \tag{4.13}$$

[6]上界需要用到这样一个事实：对于任意 $x < 0$，以概率 1，以下情形都会发生：令 τ 为 $A(s)$ 首次击中 x 的时刻；若 $\tau < \infty$，则存在一个时间序列 $\tau_k \searrow \tau$，使得$A(\tau_k) < 0$ 对每个 $k \ge 1$ 都成立（这一点可由迭代对数律看出——布朗运动在局部具有超平方根波动）。这一事实保证了 $n^{1/3}\gamma_n$ 接近 $A(s)$ 的首次击中时刻。

由于左端与 ε 无关，我们可以在 (4.13) 的右端取极限 $\varepsilon \to 0$ ，从而得到

$$\liminf_{Q\to\infty}\liminf_{n\to\infty}\mathbb{P}(X_{I,Qn^{-1/3}} \geq m_1\Delta Q^2 n^{1/3}/4|\gamma_n > qn^{-1/3}) \geq \frac{c_{q,Z}}{c_{q,Y}}\mathbb{P}(\Omega_{4.9}(0,q)) = \frac{c_{q,Z}}{c_{q,Y}}\mathbb{E}F_2(\zeta_q,q),$$

其中在最后一个等式中，我们使用了 (1.22) 中 $F_1(x,\ q)$ 的定义。定理 1.5 的证明至此完成。□

5. 定理 1.6 的证明

本节证明定理 1.6。根据定理 1.4，我们可以选取两个较小的正常数 $q_0 < 1$ 和 c，使得对所有充分大的 n,

$$\mathbb{P}(\gamma_n > q_0 n^{-1/3}) > cn^{-1/3}.$$

根据定理 1.5，存在一个常数 $C_{5.1} > 0$ ，使得对所有充分大的 Q,

$$\liminf_{n\to\infty} n^{1/3}\mathbb{P}(X_{I,Qn^{-1/3}} \geq m_1\Delta Q^2 n^{1/3}/4) \geq C_{5.1}. \tag{5.1}$$

定义一个新的概率测度 $\mathbb{P}$，使得对于任意事件 Ω,

$$\overline{\mathbb{P}}(\Omega) := \mathbb{P}\left(\Omega \mid \{X_{I,Qn^{-1/3}} > m_1\Delta Q^2 n^{1/3}/4\}\right) = \frac{\mathbb{P}\left(\Omega \cap \{X_{I,Qn^{-1/3}} > m_1\Delta Q^2 n^{1/3}/4\}\right)}{\mathbb{P}\left(X_{I,Qn^{-1/3}} > m_1\Delta Q^2 n^{1/3}/4\right)}$$

并令 $\mathbb{E}$ 为相应的期望算子。前几节中出现的所有鞅，例如（$M_{I,t}$），在仅考虑$t \geq Qn^{-1/3}$ 时，仍是关于$\mathbb{P}$ 的鞅。固定任意满足以下条件的正常数 t_*

$$t_* \leq \frac{m_1\Delta}{4C_{3.11}}. \tag{5.2}$$

为了证明 定理 1.6，我们将时间区间 $[Qn^{-1/3}, t_*]$ 分成（$N_{5.3}+1$）段，

$$[Qn^{-1/3}, 2Qn^{-1/3}], [2Qn^{-1/3}, 4Qn^{-1/3}], \ldots, [2^{N_{5.3}-1}Qn^{-1/3}, 2^{N_{5.3}}Qn^{-1/3}], [2^{N_{5.3}}Qn^{-1/3}, t_*],$$

其中

$$N_{5.3} = N_{5.3}(Q) := \sup\{\ell \in \mathbb{Z} : 2^\ell Qn^{-1/3} < t_*\}. \tag{5.3}$$

定义

$$\Omega_{5.4} := \bigcap_{0\leq\ell\leq N_{5.3}} \left\{ \sup_{2^\ell Qn^{-1/3}\leq u\leq t_*\wedge 2^{\ell+1}Qn^{-1/3}} \left|M_{I,u} - M_{I,2^\ell Qn^{-1/3}}\right| \leq 2^\ell Qn^{1/3} \right\}. \tag{5.4}$$

引理5.1。 有

$$\lim_{Q\to\infty}\liminf_{n\to\infty}\overline{\mathbb{P}}(\Omega_{5.4}) = 1.$$

证明。结合 引理 3.1、(5.1) 和 $\mathbb{P}$ 的定义，当 n 足够大时，

$$\overline{\mathbb{P}}(\Omega_{3.10}^c) \leq \frac{\mathbb{P}\left(\Omega_{3.10}^c\right)}{\mathbb{P}\left(X_{I,Qn^{-1/3}} > m_1\Delta Q^2 n^{1/3}/4\right)} \leq 2n^{-10+1/3}/C_{5.1}. \tag{5.5}$$

用 $\psi_n(t)$ 表示式 (4.1) 中的被积函数，即对于 $t \leq \gamma_n$,

$$\psi_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-2)^2 S_{t,k} + 4(X_{I,t}-1) + \frac{X_t}{\lambda}\frac{\rho S_t}{n}.$$

对于 $t \geq \gamma_n$, $\psi_n(t)$ 等于 $C_{1.22}n$。由于 $(M_{I,\ t})$ 在 $\mathbb{E}$ 下仍是一个鞅，我们有

$$\overline{\mathbb{E}}\left((M_{I,t_*\wedge 2^{\ell+1}Qn^{-1/3}} - M_{I,2^\ell Qn^{-1/3}})^2\right) = \overline{\mathbb{E}}\left(\int_{2^\ell Qn^{-1/3}}^{t_*\wedge 2^{\ell+1}Qn^{-1/2}} \psi_n(t)\mathrm{d}t\right). \tag{5.6}$$

由 (3.9)，存在一个常数 $C_{5.7} > 0$ ，使得

$$\psi_n(t) \leq C_{5.7}n \text{ on } \Omega_{3.10}. \tag{5.7}$$

注意到 $S_{t,\ k} = 0$ 对于 $k > X_0$ 和 $X_0 \leq 2m_1 n$ 成立，我们看到，对于某个常数 $C_{5.8} > 0$,

$$\psi_n(t) \leq \max\{nX_0^3 + 4X_0 + \frac{\rho}{\lambda}X_0, C_{1.22}n\} \leq C_{5.8}n^4 \quad \text{ on } \Omega_{3.10}^c, \tag{5.8}$$

因此，结合 (5.5)-(5.8)，当 n 足够大时，我们有

$$\begin{aligned}
&\overline{\mathbb{E}}\left((M_{I,t_*\wedge 2^{\ell+1}Qn^{-1/3}} - M_{I,2^\ell Qn^{-1/3}})^2\right)\\
=&\overline{\mathbb{E}}\left(\int_{2^\ell Qn^{-1/3}}^{t_*\wedge 2^{\ell+1}Qn^{-1/3}} \psi_n(t)\mathbb{1}[\Omega_{3.10}]\mathrm{d}t\right) + \overline{\mathbb{E}}\left(\int_{2^\ell Qn^{-1/3}}^{t_*\wedge 2^{\ell+1}Qn^{-1/3}} \psi_n(t)\mathbb{1}[\Omega_{3.10}^c]\mathrm{d}t\right) \qquad (5.9)\\
\leq& 2^\ell Qn^{-1/3}C_{5.7}n + 2^{\ell+1}Qn^{-1/3}C_{5.8}n^4 n^{-10+1/3}/C_{5.1} \leq C_{5.9}2^\ell Qn^{2/3}
\end{aligned}$$

对于某个常数 $C_{5.9} > 0$。利用 L^2 最大不等式，对于任意 $0 \leq \ell \leq N_{5.3}$,

$$\begin{aligned}
&\overline{\mathbb{P}}\left(\sup_{2^\ell Qn^{-1/3}\leq u\leq t_*\wedge 2^{\ell+1}Qn^{-1/3}} \left|M_{I,u} - M_{I,2^\ell Qn^{-1/3}}\right| > 2^\ell Qn^{1/3}\right)\\
\leq&\frac{4}{(2^\ell Qn^{1/3})^2}\overline{\mathbb{E}}\left((M_{I,t_*\wedge 2^{\ell+1}Qn^{-1/3}} - M_{I,2^\ell Qn^{-1/3}})^2\right)\\
\leq&\frac{4C_{5.9}2^\ell Qn^{2/3}}{2^{2\ell}Q^2n^{2/3}} = 4C_{5.9}2^{-\ell}Q^{-1}.
\end{aligned}$$

最后，由并集界,

$$\overline{\mathbb{P}}(\Omega_{5.4}) \geq 1 - \sum_{\ell=0}^{N_{5.3}} 4C_{5.9}2^{-\ell}Q^{-1} \geq 1 - 8C_{5.9}Q^{-1},$$

通过依次发送 $n \to \infty$ 和 $Q \to \infty$，即可证明引理5.1。 □

引理 5.2。 取充分大的 $Q > 0$ ，并以 $\{X_{I,Qn^{-1/3}} \geq m_1\Delta Q^2 n^{1/3}/4\}$ 为条件。在事件 $\Omega_{5.4}$ 上，我们有

$$X_{I,2^\ell Qn^{-1/3}} \geq m_1\Delta n(2^\ell Qn^{-1/3})^2/16 \tag{5.10}$$

对所有 $0 \leq \ell \leq N_{5.3}$ 均成立。此外,

$$X_{I,t_*} \geq m_1\Delta n t_*^2/128 > 0. \tag{5.11}$$

特别地，我们在 $\Omega_{5.4}$ 上有 $\gamma_n > t_*$ 。

证明。 我们对 ℓ 使用归纳法证明 (5.10)。首先考虑 $\ell = 0$ 的基础情形。由于我们已经以事件 $\{X_{I,Qn^{-1/3}} \geq m_1\Delta Q^2 n^{1/3}/4\}$ 为条件，因此 (5.10) 显然成立。假设 (5.10) 对某个 $\ell \geq 0$ 成立。下面证明 (5.10) 对 $\ell + 1$ 也成立。这就完成了归纳步骤。

结合推论 3.1 和 $\Omega_{5.4}$ 的定义，对于 $s := 2^\ell Q n^{-1/3} \le t \le 2^{\ell+1} Q n^{-1/3}$,

$$\begin{aligned} X_{I,t} &\ge X_{I,s} + \frac{1}{2} m_1 \Delta (t^2 - s^2) n + (M_{I,t} - M_{I,s}) - C_{3.11} \left(n(t^3 - s^3) + n^{C_{1.2}} (t - s) \right) \\ &\ge X_{I,2^\ell Q n^{-1/3}} + \frac{1}{2} m_1 \Delta (t^2 - s^2) n - C_{3.11} n (t^3 - s^3) - C_{3.11} n^{C_{1.2} - 1/3} 2^{\ell+1} Q - 2^\ell Q n^{1/3}. \end{aligned} \tag{5.12}$$

根据条件 (5.2)，我们可知

$$t + s \le 2t \le 2t_* \le \frac{m_1 \Delta}{2 C_{3.11}},$$

因此

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} m_1 \Delta (t^2 - s^2) n - C_{3.11} n (t^3 - s^3) \\ =& n(t - s) \left[t \left(\frac{m_1 \Delta}{2} - C_{3.11} t \right) + s \left(\frac{m_1 \Delta}{2} - C_{3.11} (t + s) \right) \right] \\ \ge& n t (t - s) \left(\frac{m_1 \Delta}{2} - C_{3.11} t \right) \ge \frac{m_1 \Delta n t (t - s)}{4}. \end{aligned}$$

因此，根据 (5.12) 和假设 $C_{1.2} < 2/3$，我们得出

$$X_{I,t} \ge X_{I,2^\ell Q n^{-1/3}} + \frac{m_1 \Delta n t}{4} (t - 2^\ell Q n^{-1/3}) - 2^\ell Q n^{1/3} (1 + 2 C_{3.11}). \tag{5.13}$$

根据归纳假设，即 ℓ 对应的 (5.10)，第一项 $X_{I,\ 2^\ell Q n^{-1/3}}$ 的下界为 $m_1 \Delta n (2^\ell Q n^{-1/3})^2 / 16$。对于第三项，如果 Q 足够大，则对所有 $\ell \ge 0$,

$$2^\ell Q n^{1/3} (1 + 2 C_{3.11}) = n (2^\ell Q n^{-1/3})^2 \frac{1 + 2 C_{3.11}}{2^\ell Q} \le \frac{1}{100} m_1 \Delta n (2^\ell Q n^{-1/3})^2. \tag{5.14}$$

因此，结合 (5.13)、(5.14) 和归纳假设,

$$X_{I,t} \ge \frac{m_1 \Delta n (2^\ell Q n^{-1/3})^2}{16} + \frac{m_1 \Delta n t (t - 2^\ell Q n^{-1/3})}{4} - \frac{m_1 \Delta n (2^\ell Q n^{-1/3})^2}{100} > 0 \tag{5.15}$$

对所有 $2^\ell Q n^{-1/3} \le t \le 2^{\ell+1} Q n^{-1/3}$ 均成立。这意味着 $\gamma_n \ge 2^{\ell+1} Q n^{-1/3}$。再次利用 $t = 2^{\ell+1} Q n^{-1/3}$ 的 (5.15)，我们推得

$$X_{I,2^{\ell+1} Q n^{-1/3}} \ge \frac{m_1 \Delta n (2^\ell Q n^{-1/3})^2}{2} \ge \frac{m_1 \Delta n (2^{\ell+1} Q n^{-1/3})^2}{16},$$

这证明了 $(\ell + 1)$ 情形下的 (5.10)，并完成了 (5.10) 的证明。现在将 $\ell = N_{5.3}$ 代入 (5.10) 和 (5.15)，我们得出

$$\begin{aligned} X_{I,t_*} &\ge m_1 \Delta n (2^{N_{5.3}} Q n^{-1/3})^2 / 16 - m_1 \Delta n (2^{N_{5.3}} Q n^{-1/3})^2 / 100 \\ &\ge n m_1 \Delta (2^{N_{5.3}} Q n^{-1/3})^2 / 32 \ge m_1 \Delta t_*^2 / 128. \end{aligned}$$

这证明了 (5.11)，并完成了引理 5.2 的证明。 □

定理 *1.6* 的证明。取 $C_{1.24} := t_*$，其中 t_* 是满足 (5.2) 的任意固定正常数。由引理 5.2 可知，对所有充分大的 $Q > 0$，有 $\mathbb{P}(\gamma_n > C_{1.24}) \ge \mathbb{P}(\Omega_{5.4})$。结合

引理5.1，我们得到

$$\begin{aligned}&\lim_{Q\to\infty}\liminf_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(\gamma_n > C_{1.24}\middle| X_{I,Qn^{-1/3}} > m_1Q^2n^{1/3}/4\right)\\ =&\lim_{Q\to\infty}\liminf_{n\to\infty}\overline{\mathbb{P}}(\gamma_n > C_{1.24}) \geq \lim_{Q\to\infty}\liminf_{n\to\infty}\overline{\mathbb{P}}(\Omega_{5.4}) = 1,\end{aligned}$$

这意味着 (1.24) 成立，并完成了定理 1.6 的证明。 □

6. Proof of Theorem 1.2

为了证明定理 1.2，我们还需要一个要素。回顾推论 1.1 中的随机变量 ζ_q 和χ_q，以及 (1.22) 中 $F_1(x,\ q)$ 的定义。定义两个常数

$$C_{6.1} := \frac{m_1\Delta}{2C_{1.22}},\quad C'_{6.1} := \frac{(4C_{6.1})^{1/3}\sigma}{C_{1.22}}\sqrt{\left(1+\frac{\rho}{\lambda}\right)m_1} \tag{6.1}$$

以及一个函数

$$F_2(x,q) := (2C_{6.1}^2)^{1/3}\int_0^\infty \exp\left(xt(2C_{6.1}^2)^{1/3} - \frac{2}{3}C_{6.1}^2t^3 - 2C_{6.1}^2qt^2 - 2C_{6.1}^2q^2t\right)\mathrm{d}t.$$

引理 6.1。 考虑 $\Delta > 0$ 的情形。我们有如下收敛

$$\begin{aligned}\lim_{q\to0}\frac{\mathbb{E}(F_1(\chi_q,q))}{\sqrt{q}} &= \lim_{q\to0}\frac{\mathbb{E}(F_1(\zeta_q,q))}{\sqrt{q}}\\ &= -C'_{6.1}\left(\frac{Ai'(0)}{Ai(0)} + \sum_{k=1}^\infty (F_2(z_k,0)+z_k^{-1})\right)\sqrt{\frac{\pi}{2}} =: C_{6.2}.\end{aligned} \tag{6.2}$$

此外，常数 $C_{6.2}$ 严格为正。

证明。 我们将应用 [17, 23] 中布朗运动击中抛物线的命中概率公式。根据 [23, 命题 3.10] 和 [17,定理 2.2],

$$\begin{aligned}F_1(x,q) = 1-&\exp\left(-\frac{2C_{6.1}\sigma q^{3/2}x}{C_{1.22}}\sqrt{\left(1+\frac{\rho}{\lambda}\right)m_1}\right)\\ &\times\left(\frac{\mathrm{Ai}(C'_{6.1}\sqrt{q}x)}{\mathrm{Ai}(0)} + \sum_{k=1}^\infty (F_2(z_k,q)+z_k^{-1})\frac{\mathrm{Ai}(z_k+C'_{6.1}\sqrt{q}x)}{\mathrm{Ai}'(z_k)}\right)\end{aligned} \tag{6.3}$$

其中，Ai 为艾里函数，而 z_k是 Ai 的实负零点。回顾 Ai 和 Ai′ 的渐近式[7]，见 [23, 公式（A.4）和（A.5）]；以及 z_k 和 Ai'(z_k) 的精确界[8]，见 [23, 公式（A.30）和（A.31）]。我们发现，(6.3) 中的级数[9] 关于$\sqrt{q}$ 连续可微，因此可以逐项求导。于是，函数$F_3(x,q) := F_1(x,q)/\sqrt{q}$ 满足：对任意紧集中的 x，均一致成立 $[0,\infty)$，

$$\lim_{q\to0}F_3(x,q) = -C'_{6.1}x\left(\frac{\mathrm{Ai}'(0)}{\mathrm{Ai}(0)} + \sum_{k=1}^\infty (F_2(z_k,0)+z_k^{-1})\right). \tag{6.4}$$

[7]艾里函数 Ai 在实数轴上有界，而其导数 Ai' 满足 $|\mathrm{Ai}'(x)| \leq C(|x|^{1/4}+1)$，其中 $x\leq0$，且在 $x\geq0$ 上保持有界。[8]我们有 $z_k = \Theta(k^{2/3})$ 和 $\mathrm{Ai}'(z_k) = \Theta(k^{1/6})$。[9]我们有 $|F_2(x,\ q)+x^{-1}| + |\partial_{\sqrt{q}}F_2(x,\ q)| \leq C(|x|+1)^{-2}$，其中 $x<-1$。因此，(6.3) 中的级数及其导数（关于 $\sqrt{q}$）均绝对收敛。

此外，对于某个 $C_{6.5}>0$,

$$F_3(x,q)\le C_{6.5}x \quad \text{for all } x\ge 0 \text{ and } q\le 1. \tag{6.5}$$

因此，根据引理 2.6，随机变量 $F_3(\chi_q,\ q)$ 和 $F_3(\zeta_q,\ q)$ 在 $0<q<1$ 中一致可积。方程 (6.2) 由 (6.4)、ξ_q 和 ζ_q 的弱收敛（如推论 1.1 所述），以及事实 $\mathbb{E}(B_1^+)=\sqrt{\pi/2}$ 得出,

为了证明 $C_{6.2}$ 的正性，根据 (1.22) 中 F_1 的概率定义，F_1 是 x 的递增函数。此外，对于某个 $c>0$，$F_1(1,\ q)$ 可以由下式给出下界

$$\mathbb{P}\left(\min_{0\le t\le 1} B_t\ge -\sigma\sqrt{(1+\rho/\lambda)m_1 q}/2\right)\times\mathbb{P}\left(\frac{m_1\Delta}{2}((q+s)^2-q^2)+B_s>0,\forall s\ge 1\right)\ge c\sqrt{q},$$

这里我们对 $\min_{0\le t} B_t$ 使用了反射原理。因此，(6.2) 中的极限严格为正，我们也就完成了引理 6.1 的证明。□

接下来我们证明定理 1.2。

定理 *1.2* 的证明。我们首先分两步证明情形 $\Delta>0$。

步骤 *1*。我们分析 γ_n 的渐近行为。固定任意 $0<q<Q$，我们有

$$\begin{aligned} n^{1/3}\mathbb{P}(\gamma_n\ge C_{1.24})\ge& n^{1/3}\mathbb{P}(\gamma_n>qn^{-1/3})\times\mathbb{P}(X_{I,Qn^{-1/3}}>m_1\Delta Q^2n^{1/3}/4|\gamma_n>qn^{-1/3})\\ &\times\mathbb{P}(\gamma_n\ge C_{1.24}|X_{I,Qn^{-1/3}}>m_1\Delta Q^2n^{1/3}/4). \end{aligned}\tag{6.6}$$

在 (6.6) 中先令 $n\to\infty$，再令 $Q\to\infty$，并由定理 1.4-1.6，我们推出

$$\liminf_{n\to\infty} n^{1/3}\mathbb{P}(\gamma_n\ge C_{1.24})\ge c_{q,Z}\frac{c_{q,Z}}{c_{q,Y}}\mathbb{E}(F_1(\zeta_q,q)).\tag{6.7}$$

在 (6.7) 中令 $q\to 0$，由定理 1.4 和方程 (6.2)，我们有

$$\liminf_{n\to\infty} n^{1/3}\mathbb{P}(\gamma_n\ge C_{1.24})\ge\left(\frac{\pi\sigma^2}{2m_1}\left(1+\frac{\rho}{\lambda}\right)\right)^{-1/2}C_{6.2}=:C_{1.9}>0.\tag{6.8}$$

注意，我们在最后一个等式中使用了事实 $C_{6.2}>0$。

对于另一个方向，任取 $\delta>0$，当 n 足够大时，我们有

$$n^{1/3}\mathbb{P}(\gamma_n\ge\delta)\le n^{1/3}\mathbb{P}(\gamma_n>qn^{-1/3})\times\mathbb{P}(\gamma_n>Qn^{-1/3}|\gamma_n>qn^{-1/3}).$$

先令 $n\to\infty$，再令 $Q\to\infty$，可得

$$\limsup_{n\to\infty} n^{1/3}\mathbb{P}(\gamma_n\ge\delta)\le c_{q,Y}\frac{c_{q,Y}}{c_{q,Z}}\mathbb{E}(F_1(\zeta_q,q)).\tag{6.9}$$

类似于（6.8），令 $q\to 0$，我们看到

$$\limsup_{n\to\infty} n^{1/3}\mathbb{P}(\gamma_n\ge\delta)\le C_{1.9}.\tag{6.10}$$

现在由（6.8）和（6.10）可知，对于任意 $\delta<C_{1.24}$,

$$\lim_{n\to\infty} n^{1/3}\mathbb{P}(\gamma_n\ge\delta)=C_{1.9}.\tag{6.11}$$

步骤 *2*。我们将 $\mathbb{P}(\gamma_n>\delta)$ 的渐近行为转化为大规模暴发的概率。回顾方程 (3.16)，在事件 $\Omega_{3.10}$ 上（其发生概率至少为 $(1-n^{-10})$），我们有

$$\left|\frac{I_t}{n}-m_1t\right|=\left|\frac{S_t}{n}-(1-m_1t)\right|\le C_{3.14}t^2+4n^{C_{1.2}-1},\quad\forall 0\le t\le\gamma_n\wedge 1.\tag{6.12}$$

^因此，在 $\Omega_{3.10}$ 上，最终流行规模 Λ_n 满足

$$\frac{\widehat{\Lambda}_n}{n} \geq \frac{I_t}{n} \geq m_1 t - C_{3.14} t^2 - 4n^{C_{1.2}-1}, \quad \forall 0 \leq t \leq \gamma_n \wedge 1. \tag{6.13}$$

固定一个 $\delta_0 < \min\{C_{1.24}, 1\}$，使得 $\varepsilon_0 := m_1\delta_0 - 2C_{3.14}\delta_0^2 > 0$。由(6.11)和(6.13)，对所有$\varepsilon < \varepsilon_0$,

$$\liminf_{n\to\infty} n^{1/3}\mathbb{P}(\widehat{\Lambda}_n > \varepsilon n) \geq C_{1.9}. \tag{6.14}$$

另一方面，对任意 $\varepsilon > 0$，选取充分小的 $\delta < \min\{C_{1.24}, 1\}$ 使得$2C_{3.14}\delta^2 + m_1\delta < \varepsilon$，我们断言

$$\Omega_{3.10} \cap \{\gamma_n < \delta\} \subset \{\widehat{\Lambda}_n \leq \varepsilon n\}. \tag{6.15}$$

这可由(6.12)（应用于 $t = \gamma_n$）看出，从而得到

$$\frac{\widehat{\Lambda}_n}{n} = \frac{I_{\gamma_n}}{n} \leq m_1\gamma_n + C_{3.14}\gamma_n^2 + 4n^{C_{1.2}-1} \leq m_1\delta + 2C_{3.14}\delta^2 < \varepsilon.$$

由(6.11)和(6.15)，我们得出

$$\limsup_{n\to\infty} n^{1/3}\mathbb{P}(\widehat{\Lambda}_n > \varepsilon n) \leq \limsup_{n\to\infty} n^{1/3}\mathbb{P}(\gamma_n \geq \delta) = C_{1.9}. \tag{6.16}$$

由 (6.14) 和 (6.16) 可知，情形 $\Delta > 0$ 的证明得证。情形 $\Delta < 0$ 也可由 (6.9) 和 (6.16) 推出，因为当 $\Delta < 0$ 时，$F_1(x, q) \equiv 0$。□

7. Analysis of the AB-avoSI process

回顾第 1.4.1 节，AB-avoSI 过程被确立为 evoSI 过程的一个下界。本节概述证明 AB-avoSI 过程的定理 1.3 所需的关键修改。为避免符号歧义，我们用上划线表示与 avoSI 过程对应的 AB-avoSI 过程中的各种量。我们的分析从 $X_{I,t}$ 的演化方程开始（参见. [9, 公式（4.3.12）]），

$$\mathrm{d}\overline{X}_{I,t} = \left(-2(\overline{X}_t - 1) + \sum_{k=0}^{\infty} k^2\overline{S}_{t,k} - \frac{\rho}{\lambda}\frac{\overline{S}_t}{n}(\overline{X}_t - 1)\right)\mathrm{d}t - E_t\mathrm{d}t + \mathrm{d}\overline{M}_{I,t}, \tag{7.1}$$

其中 $(\overline{M}_{I,t})$ 是一个鞅。该方程中的附加误差项[10] 为

$$E_t = \frac{1}{\overline{X}_{I,t}}\left(\sum_{i,j=1}^{\overline{X}_0}(D(j,t) - 1)\cdot\mathbb{1}[G_{i,j}(t)\cap\{\overline{S}(j,t) = 1\}]\right), \tag{7.2}$$

其中 $G_{i,j}(t) = \{I(i,t) = 1, \quad A(i,t) \leq B(j,t)\}$。

与 avoSI过程一样，我们根据漂移项和鞅项的相对大小，将分析分为三个阶段，其中误差项 E_t 被证明可以忽略。

阶段 *1* ($0 \leq t \leq qn^{-1/3}$)。这一阶段再次依赖随机游走比较论证。令 U_ℓ 表示 AB-avoSI 在第 ℓ 次跳跃后的感染半边数量。

[10]这里，如果半边 i 在时间 t处于感染状态，则 $I(i,t) = 1$；如果半边 j在时间 t处于易感状态，则 $S(j,t) = 1$。$D(j,t)$ 表示半边 j 在时间 t所连接的顶点的度（半边数量）。在下方的方程（7.3）中，如果 $S(j,t) = 1$ 且 $D(j,t) = k$，则 $S(j,k,t) = 1$。更多详情请参见 [9, 第 4 节2]。

(U_ℓ) 的转移规则与 (U_ℓ) 的类似，但需要稍作修改，例如，对于 $k \geq 3$，增量 $U_{\ell+1} - U_\ell = k-2$ 发生的概率为

$$\frac{\lambda}{(\lambda+\rho)\overline{X}_{I,t}(\overline{X}_t - 1)} N_{t,k}, \tag{7.3}$$

其中

$$N_{t,k} := \sum_{i,j=1}^{\overline{X}_0} \mathbb{1}[\overline{I}(i,t) = 1, A(i,t) > B(j,t), S(j,k,t) = 1)].$$

可以证明，引理 2.1 和 2.2 在此处仍然成立[11]。因此，先前定义的随机游走（Y_ℓ）和（Z_ℓ）（方差 σ^2相同）仍然是（U_ℓ）的上界和下界。因此，定理 1.4 和推论 1.1 对 AB-avoSI 过程也成立。在这种情况下，新的常数 $c_{q,\ Y}$ 和$c_{q,\ Z}$ 可能取不同的值。不过，（1.19）中的极限不受影响（这对我们的目的已足够）。

阶段 *2*（$qn^{-1/3} \leq t \leq Qn^{-1/3}$）和阶段 *3*（$t \geq Qn^{-1/3}$）。对这两个阶段的分析基于对（7.1）中各项的估计。引理 3.1 和 3.2 仍然成立。对于推论 3.1，（$X_{I,\ t} - X_{I,\ s}$）的上界仍然成立，但我们需要通过以下方式修改下界

$$\overline{X}_{I,t} - \overline{X}_{I,s} \geq m_1 \Delta(t^2 - s^2)n/2 - C(nt^2(t-s) + n^{C_{1.2}}t) + (\overline{M}_{I,t} - \overline{M}_{I,s}) - \int_s^t E_u \mathrm{d}u.$$

为处理误差项 E_t，我们通过定义函数 $b(t)$，将 [9] 中的方法[12] 加以推广，具体如下：

$$b(t) := \begin{cases} 1 - n^{-0.06} & \text{if } 0 \leq t \leq n^{-0.2}, \\ 1 - b_0 & \text{if } t \geq n^{-0.2}, \end{cases}$$

其中，b_0 是某个较小的正常数。然后我们定义

$$L(t) := \sum_{j=1}^{\overline{X}_0} D(j,t)\mathbb{1}[\overline{S}(j,t) = 1, B(j,t) > 0],$$

$$X(I,b,t) := \sum_{i=1}^{\overline{X}_0} \mathbb{1}[A(i,t) \leq b(t)t, \overline{I}(i,t) = 1] \leq \overline{X}_{I,t},$$

$$L(b,t) := \sum_{j=1}^{\overline{X}_0} D(j,t)\mathbb{1}[\overline{S}(j,t) = 1, B(j,t) > b(t)t] \leq L(t).$$

利用这些量，误差项 E_t 的上界为

$$E_t \leq \frac{X(I,b,t)}{\overline{X}_{I,t}} L(t) + L(b,t).$$

接着，我们使用以下引理来控制 E_t。其证明与 [9, 引理 4.5 和 4.6] 类似，故略去。

[11]跳跃次数 N_q 保持不变，而常数 $C_{2.5}$ 的取值可能不同。此外，我们需要将（2.5）第二行中的 $S_{t,k}$ 替换为 $N_{t,k}/X_{I,t}$。[12]在 [9]中，b 被取作一个与 t无关的固定常数。这里，我们将其修改为一个分段函数 $b(t)$，其中 t 较小时采用该函数，以使论证适用于扩散区间。

引理 7.1. 存在一个常数 $C_{7.4}>0$，使得对于任意 $b_0\in(0,1)$ 和任意 $\varepsilon>0$，以至少 $(1-n^{-0.4})$ 的概率，对所有 $qn^{-1/3}\le t\le \gamma_n\wedge 1$，

$$L(t)\le C_{7.4}(nt+n^{-0.4}),\quad and\quad L(b,t)\le C_{7.4}(1-b(t))^{1/2}tn. \tag{7.4}$$

此外，存在两个正常数 $C_{7.5}$ 和 $c_{7.5}$，使得以至少（$1-n^{-0.4}$）的概率，对于所有 $qn^{-1/3}\le t\le \gamma_n\wedge 1$, X（I,b,t），均有界于

$$C_{7.5}n\left(t^3+t^2\left(\exp\left\{-\frac{c_{7.5}(1-b(t))t}{t^2+n^{-0.4}}\right\}+(1-b(t))\right)+tn^{-0.4}+n^{0.02}\sqrt{(1-b(t))t/n}\right). \tag{7.5}$$

在引理 7.1 的界已确立后，我们可以采用定理 1.5 和定理 1.6 的相同证明——并结合 [9, 第 4 节步骤 2 中的反证论证。5]——来证明这两个结果对 AB-avoSI 过程同样成立。

按照上述方法完成阶段 1–3 的分析后，我们通过沿用第 6 节中的相同证明，推得定理 1.3。随后，主要结果定理 1.1 即可由定理 1.2 和定理 1.3 如期得出。

Acknowledgement

我们感谢 Rick Durrett 教授提出这一问题，并审阅本文的早期版本。我们还感谢 Hui Xiao 教授就引理 2.4 进行的有益讨论。Haojie Hou 和 Dong Yao 谨向 Zipeng Wang 教授和 Xinxin Chen 教授致谢，感谢他们精心组织了在重庆大学数学与统计学院举办的概率研讨会，并给予我们热情款待。Wenze Chen 得到中央高校基本科研业务费专项资金（No. CUSF-DH-T-2025035）的资助。Haojie Hou 得到中国博士后科学基金（No. 2024M764112）的资助。Dong Yao 得到国家重点研发计划（No. 2023YFA1010101）和国家自然科学基金项目（No. 12571161）的资助。

Appendix A. Proof of some technical lemmas

A.1. 概率中的两个集中不等式。 我们先回顾次指数随机变量的伯恩斯坦不等式。当且仅当存在某些常数 $C_1,C_2>0$，使得对所有$r>0$，X $\mathbb{P}(|X|>r)\le C_1\exp(-C_2r)$ 时，随机变量 X 称为次指数的。于是，X 的次指数范数定义为

$$\|X\|_{\mathrm{subexp}}:=\inf\{r>0:\mathbb{E}(\exp(|X|/r))\le 2\}.$$

独立同分布随机变量的伯恩斯坦不等式（参见. [25, 定理 2.8.1]）表述如下。

引理 A.1. 设 $\{X_i,1\le i\le n\}$ 为独立同分布的均值为零的次指数随机变量。那么存在一个绝对常数 $c>0$，使得对所有 $m>0$,

$$\mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^n X_i\right|\ge m\right)\le 2\exp\left(-c\min\left\{\frac{m^2}{n\|X_1\|_{\mathrm{subexp}}^2},\frac{m}{\|X_1\|_{\mathrm{subexp}}}\right\}\right).$$

因此，如果 $m=n^a$ 对于某个 $a\in(1/2,1)$，那么

$$\mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^n X_i\right|>n^a\right)\le 2\exp\left(-c'n^{2a-1}\right),$$

对于某个仅取决于 $\|X_1\|_{\mathrm{subexp}}$的常数 $c'>0$ 。

本文使用的另一个工具是以下关于伯努利随机变量的集中性不等式，可见于 [6,定理 2.5]。

引理 A.2. 设 $\{Y_i, 1 \le i \le n\}$ 为相互独立的伯努利随机变量，并令$\mu := \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(Y_i)$。那么对于任意 $u > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} Y_i - \mu\right| \ge u\right) \le \exp\left(-\frac{u^2}{2\mu}\right) + \exp\left(-\frac{u^2}{2(\mu + u/3)}\right) \le 2\exp\left(-\min\left\{\frac{u^2}{3\mu}, \frac{u}{3}\right\}\right).$$

A.2. **引理 2.2 的证明**。

引理 *2.2* 的证明。 为简化记号，我们用 $\Omega_{A.1}$ 表示 $\Omega_{2.5}$定义中的最后一个事件，即,

$$\Omega_{A.1} := \left(\Omega_{2.1} \cap \{\gamma_n < qn^{-1/3}\}\right) \cup \left(\widehat{\Omega}_{2.1} \cap \{\gamma_n \ge qn^{-1/3}\}\right). \tag{A.1}$$

我们还定义

$$\Omega_{A.2} := \left\{\text{每个顶点截至时间 } qn^{-1/3}\right\} \text{.接收的重连半边不超过 4 条} \tag{A.2}$$

注意， $\mathbb{P}(\Omega_{A.2}^c \cap \Omega_{A.1})$ 有如下上界

$$\mathbb{E}\left[\left(\text{在 } qn^{-1/3}\right) \mathbb{1}[\Omega_{2.1}]\right] \text{. 时刻接收至少 5 条重连半边的顶点数}$$

这个量又有如下上界

$$\binom{\lfloor N_q + n^{0.6} \rfloor}{5} n^{-5} n = O(n^{-2/3}).$$

这里我们将其与 $\lfloor N_q + n^{0.6} \rfloor$ 次相互独立的伯努利试验进行比较，每次试验的成功概率为 $1/n$。定义事件

$$\Omega_{A.3} := \Omega_{A.1} \cap \Omega_{A.2}. \tag{A.3}$$

由引理 2.1，存在一个常数 $C_{A.4} > 0$ ，使得

$$\mathbb{P}(\Omega_{A.3}) \ge 1 - \mathbb{P}(\Omega_{A.2}^c \cap \Omega_{A.1}) - \mathbb{P}(\Omega_{2.1}^c) - \mathbb{P}(\{\gamma_n \ge qn^{-1/3}\} \cap \widehat{\Omega}_{2.1}^c) \ge 1 - C_{A.4} n^{-2/3}. \tag{A.4}$$

回顾一下，在每个跳跃时刻， X_t 要么保持不变，要么被 $(X_t - 2)$ 替换。在 $\Omega_{A.3}$ 上，对所有 $t \le qn^{-/3}$，顶点 i 在时刻 t 的半边数至多为 $(d_i + 4)$，并且

$$X_t \ge X_0 - 2(N_q + n^{0.6}) \ge m_1 n - n^{C_{1.2}} - 2(N_q + n^{0.6}) \ge m_1 n - 3N_q \ge m_1 n/2. \tag{A.5}$$

回忆一下，$S_{t,k}$ 表示时刻 t具有 k 条半边的易感顶点数量。在 $\Omega_{A.3}$ 上，利用 (1.5) 中的最大度数界，我们有

$$S_{t,k} = 0, \quad \forall k \ge v_n \text{ and } t \le qn^{-1/3}. \tag{A.6}$$

令 $C_{A.7}$ 为一个待定的（较大）常数，并定义事件

$$\Omega_{A.7} := \left\{|S_{t,k} - np_{k,n}| \le \frac{C_{A.7}}{k+1} qn^{2/3} \exp(-\eta_{1.1} k/2), \quad \forall 0 \le k \le v_n\right\}. \tag{A.7}$$

引理 A.3. 固定一个足够大的 $C_{A.7} > 0$，我们有

$$\mathbb{P}\left(\Omega_{A.3} \cap \Omega_{A.7}^c\right) \le 2\exp(-\Theta(n^{2/3-0.66})). \tag{A.8}$$

我们暂时假设引理 A.3 成立，并固定其中所指定的常数 $C_{A.7}$。我们声称

$$\Omega_{A.7} \cap \Omega_{A.3} \subset \Omega_{2.5}, \tag{A.9}$$

只要常数 $C_{2.5} \geq C_{A.7}$（如 $\Omega_{2.5}$ 的定义中所述）足够大，该结论就成立。结合引理 A.3 和断言 (A.9)，即可得到引理 2.2。□

断言的证明 (A.9)。结合 (A.5) 与 $\Omega_{A.3}$ 的定义，对于所有 $t \leq qn^{-1/3}$，我们有

$$X_t - 1 \geq m_1 n - n^{C_{1.2}} - 2(N_q + n^{0.6}) - 1 \geq m_1 n - 3N_q, \tag{A.10}$$

第二个不等式成立是因为 $C_{1.2} < 2/3$。类似地，我们得到以下上界

$$X_t - 1 \leq X_0 \leq m_1 n + n^{C_{1.2}} \leq m_1 n + 3N_q. \tag{A.11}$$

由于 I_t 在发生跳跃时最多增加 1，因此它在 $\Omega_{A.3}$ 上有以下界：

$$I_t \leq 1 + N_q + n^{0.6} \leq 2N_q. \tag{A.12}$$

根据 $\Omega_{A.7}$ 和 $q_{k,\,n}$（见 (2.6)）的定义，以及条件 $C_{A.7} \leq C_{2.5}$，可得

$$|S_{t,k} - np_{k,n}| \leq \frac{C_{2.5}}{k+1} qn^{2/3} \exp(-\eta_{1.1} k/2), \quad \forall k \leq v_n \text{ and } t \leq qn^{-1/3}. \tag{A.13}$$

最后，对于 $X_{S,\,t}$（时刻 t 的易感半边数），在 $\Omega_{A.7} \cap \Omega_{A.3}$ 上，

$$\begin{aligned} X_{I,t} = X_t - X_{S,t} &\leq X_0 - X_{S,t} = \sum_{k=0}^{\infty} (knp_{k,n} - kS_{t,k}) \\ &\leq \sum_{k \geq v_n} nkp_{k,n} + \sum_{0 \leq k \leq v_n} |knp_{k,n} - kS_{t,k}| \\ &\leq C_{1.1} \sum_{k \geq v_n} nk \exp(-\eta_{1.1} k) + \sum_{0 \leq k \leq v_n} C_{A.7} qn^{2/3} \exp(-\eta_{1.1} k/2) \\ &\leq C_{2.5} N_q, \end{aligned} \tag{A.14}$$

其中第三行用到了注释 1，而最后一个不等式对所有充分大的 $C_{2.5}$ 都成立。断言 (A.9) 由 (A.6) 和 (A.10)–(A.14) 得出。

□

引理 *A.3* 的证明。在事件 $\Omega_{A.3}$ 上，对于 $t \leq qn^{-1/3}$，

$$S_{t,k} \leq \sum_{j=0}^{4} S_{0,k+j} = n \sum_{j=0}^{4} p_{k+j,n}. \tag{A.15}$$

$S_{t,\,k}$ 的变化源于三个不同因素，详情如下：

- 一个具有 k 条半边的易感顶点接收到一条重连半边，这使$S_{t,k}$ 减少 1，并且每次跳变中发生的概率至多为 $\left(\sum_{j=0}^{4} p_{k+j,n}\right)$。事实上，由于每次重连都是在所有顶点中均匀进行的，一条感染半边重连到一个具有 k 条半边的易感顶点的概率为 $S_{t,k}/n$，由 (A.15) 可得所需的上界。

• 一个具有 $(k-1)$ 条半边的易感顶点接收到一条重连半边，这使 $S_{t,k}$ 增加 1，并且每次跳变中发生的概率至多为 $\left(\sum_{j=0}^{4} p_{k-1+j,n}\right)$。分析与前一种情况完全相同，只需将 $S_{t,k}$ 替换为 $S_{t,k-1}$。

•一个具有 k 条半边的易感顶点因一次配对而失去一条半边，从而使$S_{t,k}$ 减少1，且其发生概率至多为

$$\frac{kS_{t,k}}{X_t-1} \le \frac{kS_{t,k}}{m_1 n/2} \le \frac{2k}{m_1}\sum_{j=0}^{4} p_{k+j,n}$$

在每次跳跃中。这里，分母（X_t-1）的下界 $m_1 n/2$ 由(A.5)得到，并且我们还用到每次配对在所有半边上是均匀的这一事实。

综合这四个因素，我们看到，对于某个较大的常数 $C_{A.16}$，$S_{t,k}$ 在每次跳跃中变化1的概率被一致地界于

$$C_{A.16}(k+1)\sum_{j=-1}^{4} p_{k+j,n}. \tag{A.16}$$

对于一个固定的整数 k，令 $(W_{i,k})_{1\le i\le N_q+n^{0.6}}$ 为独立同分布. 伯努利随机变量，其均值为

$$b_k := \min\left\{C_{A.16}(k+1)\sum_{j=-1}^{4} p_{k+j,n} + n^{-0.66}, 1\right\}. \tag{A.17}$$

我们可以在一个共同概率空间上耦合 $S_{t,k}$ 和序列 $(W_{i,k})$

$$|S_{t,k}-S_{0,k}| = |S_{t,k}-np_{k,n}| \le \sum_{i=1}^{N_q+n^{0.6}} W_{i,k}, \quad \forall t \le qn^{-1/3}, \quad \text{on } \Omega_{A.3}. \tag{A.18}$$

由于当 n 足够大时 $(N_q+n^{0.6})b_k \ge Cn^{2/3-0.66}$，且某个 $C>0$，我们应用引理 A.2，得到

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{N_q+n^{0.6}} W_{i,k} \ge 2(N_q+n^{0.6})b_k\right) \le 2\exp(-\Theta(n^{2/3-0.66})). \tag{A.19}$$

利用 $p_{k,n}$ 的界 (1.3)，存在一个常数 $C_{A.7}>0$，使得对所有 $0\le k\le v_n$，

$$\begin{aligned} 2(k+1)(N_q+n^{0.6})b_k \le& Cqn^{2/3}((k+1)^2\exp(-\eta_{1.1}k)+(k+1)n^{-0.66}) \\ \le& C(qn^{2/3}\exp(-\eta_{1.1}k/2)+n^{0.01}) \\ \le& C_{A.7}qn^{2/3}\exp(-\eta_{1.1}k/2). \end{aligned} \tag{A.20}$$

引理 A.3 现在由 (A.18)–(A.20) 和并集界推出。 □

A.3. 引理 2.3 的证明。

引理 L 的证明 引理 *2.3.* 我们将分两步证明均值和方差的渐近行为 s.

步骤 *1.* 对于均值的收敛式 (2.8) 和 (2.9)，我们只详细证明 (2.9)，因为 (2.8) 的证明类似。定义

$$\widehat{q}_{k,n} := \min\{nkp_{k,n}, 2q_{k,n}\}. \tag{A.21}$$

随机游走 (Z_ℓ) 的定义意味着

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(Z_\ell - Z_{\ell-1}) \\
&= \sum_{k=2}^{\log(nC_{1.1})/\eta_{1.1}} (k-2)\frac{knp_{k,n} - \widehat{q}_{k,n}}{(1+\rho/\lambda)(m_1 n + 3N_q)} - \frac{2C_{2.5}N_q}{(1+\rho/\lambda)(m_1 n - 3N_q)} \\
&\quad - \left(1 - \sum_{k=2}^{\log(nC_{1.1})/\eta_{1.1}} \frac{knp_{k,n} - \widehat{q}_{k,n}}{(1+\rho/\lambda)(m_1 n + 3N_q)} - \frac{C_{2.5}N_q}{(1+\rho/\lambda)(m_1 n - 3N_q)}\right) \\
&= \sum_{k=2}^{\log(nC_{1.1})/\eta_{1.1}} \frac{k(k-1)p_{k,n}n}{(1+\rho/\lambda)(m_1 n + 3N_q)} - 1 - \frac{C_{2.5}N_q}{(1+\rho/\lambda)(m_1 n - 3N_q)} \\
&\quad - \sum_{k=2}^{\log(nC_{1.1})/\eta_{1.1}} \frac{(k-1)\widehat{q}_{k,n}}{(1+\rho/\lambda)(m_1 n + 3N_q)}.
\end{aligned} \tag{A.22}$$

由于我们处于临界感染率，因此有

$$\frac{\rho}{\lambda} = \frac{m_2 - 2m_1}{m_1},$$

这意味着

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)p_k^* = m_2 - m_1 = (1+\rho/\lambda)m_1. \tag{A.23}$$

由 (1.4)，我们得到如下界

$$\sum_{k \geq \log(nC_{1.1})/\eta_{1.1}} k(k-1)p_k^* \leq C_{1.1} \sum_{k \geq \log(nC_{1.1})/\eta_{1.1}} k(k-1)\exp(-\eta_{1.1}k) = O\left(\frac{\log^2 n}{n}\right). \tag{A.24}$$

因此，利用假设 (H3) 和 (A.23)，我们得到

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=2}^{\log(nC_{1.1})/\eta_{1.1}} \frac{k(k-1)p_{k,n}n}{(1+\rho/\lambda)(m_1 n + 3N_q)} - 1 \\
=&\sum_{k=2}^{\log(nC_{1.1})/\eta_{1.1}} \frac{k(k-1)p_k^* n}{(1+\rho/\lambda)(m_1 n + 3N_q)} + O(n^{C_{1.2}-1}) - 1 \\
=&\frac{m_1 n}{m_1 n + 3N_q} - 1 + o(n^{-1/3}) = -\frac{3N_q}{m_1 n} + o(n^{-1/3}),
\end{aligned} \tag{A.25}$$

其中，在最后一步中我们还使用了以下展开式，

$$\begin{aligned}
(m_1 n - 3N_q)^{-1} &= (m_1 n)^{-1}(1 + 3(1+\rho/\lambda)qn^{-1/3} + O(n^{-2/3})), \\
(m_1 n + 3N_q)^{-1} &= (m_1 n)^{-1}(1 - 3(1+\rho/\lambda)qn^{-1/3} + O(n^{-2/3})).
\end{aligned} \tag{A.26}$$

现在我们考虑 (A.22) 中最后一项乘以 $n^{1/3}$，即，

$$\sum_{k=2}^{\log(nC_{1.1})/\eta_{1.1}} n^{1/3}\frac{(k-1)\widehat{q}_{k,n}}{(1+\rho/\lambda)(m_1 n + 3N_q)}.$$

根据 (2.6) 和 (A.21) 中 $q_{k,\ n}$ 和 $\widehat{q}_{k,\ n}$ 的定义，存在某个常数 $C_{A.27}>0$，使得对于任意固定的 $k\geq 2$,

$$\lim_{n\to\infty} n^{1/3}\frac{(k-1)\widehat{q}_{k,n}}{(1+\rho/\lambda)(m_1 n+3N_q)}=\mathbb{1}[p_k^*>0]C_{A.27}q(k-1)\exp(-\eta_{1.1}k/2). \tag{A.27}$$

我们还可以给出该和的尾部上界,

$$\begin{aligned}&\lim_{N\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\sum_{k=N}^{\log(nC_{1.1})/\eta_{1.1}} n^{1/3}\frac{(k-1)\widehat{q}_{k,n}}{(1+\rho/\lambda)(m_1 n+3N_q)}\\ \leq&\lim_{N\to\infty}\limsup_{n\to\infty} 2C_{2.5}q\sum_{k\geq N}\frac{n(k-1)\exp(-\eta_{1.1}k/2)}{m_1 n}\ =0.\end{aligned} \tag{A.28}$$

结合 (A.27) 和 (A.28)，我们得出

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty} n^{1/3}\sum_{k=2}^{\log(nC_{1.1})/\eta_{1.1}}\frac{(k-1)\widehat{q}_{k,n}}{(1+\rho/\lambda)(m_1 n+3N_q)}\\ =&C_{A.27}\sum_{k\geq 2}\mathbb{1}[p_k^*>0]q(k-1)\exp(-\eta_{1.1}k/2).\end{aligned} \tag{A.29}$$

方程 (2.9) 随即由 (A.22)、(A.25) 和 (A.29) 得出。

步骤 *2.* 现在我们考虑方差部分 (2.10)。这里我们只证明 (Z_ℓ) 的情形。注意，由假设**(H3)**,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}((Z_\ell-Z_{\ell-1})^2)=&\sum_{k=2}^{\log(nC_{1.1})/\eta_{1.1}}(k-2)^2\frac{knp_{k,n}-\widehat{q}_{k,n}}{(1+\rho/\lambda)(m_1 n+3N_q)}+\frac{4C_{2.5}N_q}{(1+\rho/\lambda)(m_1 n-3N_q)}\\ &+\left(1-\sum_{k=2}^{\log(nC_{1.1})/\eta_{1.1}}\frac{knp_{k,n}-\widehat{q}_{k,n}}{(1+\rho/\lambda)(m_1 n+3N_q)}-\frac{C_{2.5}N_q}{(1+\rho/\lambda)(m_1 n-3N_q)}\right)\\ =&\sum_{k=1}^{\log(nC_{1.1})/\eta_{1.1}}[(k-2)^2-1]\frac{knp_k^*}{(1+\rho/\lambda)(m_1 n+3N_q)}+1+O(n^{-1/3}),\end{aligned}$$

其中，在最后一个等式中我们使用了以下估计,

$$\sum_{k=1}^{\infty}k^2\frac{\widehat{q}_{k,n}}{(1+\rho/\lambda)(m_1 n+3N_q)}\leq\frac{2C_{2.5}qn^{-1/3}}{(1+\rho/\lambda)m_1}\sum_{k=1}^{\infty}k^2\exp(-\eta_{1.1}k/2)=O(n^{-1/3}).$$

再次利用 (1.4)，类似于 (A.24)，我们得到

$$\sum_{k\geq\log(nC_{1.1})/\eta_{1.1}}k(k-2)^2p_k^*\leq C_{1.1}\sum_{k\geq\log(nC_{1.1})/\eta_{1.1}}k(k-2)^2\exp(-\eta_{1.1}k)=O\left(\frac{\log^3 n}{n}\right).$$

回顾该过程的 σ^2 定义（参见 (1.18)），可知 $\mathbb{E}(Z_\ell - Z_{\ell-1})^2$ 等于

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{\infty}(k-2)^2\frac{knp_k^*}{(1+\rho/\lambda)m_1 n}+1-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{knp_k^*}{(1+\rho/\lambda)m_1 n}+O(n^{-1/3})\\=&\left(\sigma^2-\frac{\rho}{\rho+\lambda}\right)+1-\frac{m_1}{(1+\rho/\lambda)m_1}+O(n^{-1/3})\\=&\sigma^2+O(n^{-1/3}).\end{aligned}$$

至此，(2.10) 的证明以及引理 2.3 的证明均已完成。

□

A.4. **引理 2.4 的证明**。 为证明引理 2.4，我们先处理中心化情形（下文的引理 A.4），然后使用测度变换论证。

引理 A.4。 设 $\{X_{i,n}, 1\le i\le n\}_{n\ge 1}$ 是取值于 $\mathbb{Z}$ 的独立同分布零均值随机变量，且满足

$$\mathbb{P}(X_{1,n}\ge -2)=1,\quad \limsup_{n\to\infty}\sqrt{n}(\mathbb{E}(X_{1,n}^2)-\eta^2)<\infty,\quad and\quad \sup_n \mathbb{E}(|X_{1,n}|^3)<\infty.$$

对于任意 $y\ge 0$，定义从某个整数 y 开始的随机游走为 $V_{0,n}(y):=y$ 且 $V_{i,n}(y):=y+\sum_{j=1}^{i}X_{j,n}$ 其中 $1\le i\le n$。那么，对于任意序列 $a_n=O(\log n)$，

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{K\in(0,\infty]}\sup_{0<y<a_n}\left|\mathbb{P}\left(V_{n,n}(y)\le \eta\sqrt{n}K \mid \min_{j\le n}V_{j,n}(y)>0\right)-\int_0^K ze^{-z^2/2}\mathrm{d}z\right|=0.$$

证明。 这里给出的证明基于 [12, 定理 2.9]；完整细节见 arXiv 版本的第 7.2 节[13] 的 [12]。另见 [14, 第 4 节1]。

作为第一步，注意 [12, 引理 3.6] 中的耦合论证在我们的情形中仍然成立（事实上，我们的情形已被 [22, 定理 A]涵盖）。随后我们由 [12, 引理 3.6] （其中 $\delta=1$ 和 σ 被替换为 $\sqrt{\mathbb{E}(X_{1,n}^2)}=\eta+O(n^{-1/2})$）得出[14]：对任意 $\varepsilon\in(0,1/6)$，存在某个常数 $c_\varepsilon>0$ （与 n无关），使得

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0\le t\le 1}\left|V_{[nt],n}(0)-\eta B_{nt}\right|>n^{1/2-\varepsilon}\right)\le\frac{c_\varepsilon}{n^{1/2-3\varepsilon}},\quad \forall n\ge 1. \tag{A.30}$$

因此， [12, 定理 2.9] 对于我们的情形也成立。设 $R_n(y)$ 定义为 $y-\mathbb{E}\left(V_{\tau_{0,n},n}(y)\right)$ 其中 $\tau_{0,n}:=$ 下确界 $\{k: V_{k,n}(y)\le 0\}$，则在假设 $\mathbb{P}(X_{1,n}\ge -2)=1$ 成立的条件下， $R_n(y)\in[y,y+1]$。接着由 [12, 定理 2.9], ，对所有 $K\in$

[13] 可于 https://arxiv.org/abs/2110.05123 获取。[14] [12, 引理 3.6] 实际上蕴含 $\mathbb{P}\left(\sup_{0\le t\le 1}\left|V_{[nt],n}(0)-(\eta+O(n^{-1/2}))B_{nt}\right|>n^{1/2-\varepsilon}\right)\le c_\varepsilon/n^{1/2-3\varepsilon}$。由于 $n^{-1/2}\sup_{0\le t\le 1}|B_{nt}|$ 与 $\sup_{0\le t\le 1}|B_t|$具有相同的分布，而后者具有指数衰减尾部，因此可以去掉 $O(n^{-1/2})$项。

$(0,\ \infty]$, $n\geq 1$ 以及 $y\in(0,\ a_n)$，我们有

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left(V_{n,n}(y)\leq\eta\sqrt{n}K,\ \min_{j\leq n}V_{j,n}>0\right)\\ \leq&c_\varepsilon\frac{1+y}{n^{1/2+\varepsilon}}+\left(\mathbb{P}\left(\min_{j\leq n}V_{j,n}(y)>0\right)+c_\varepsilon\frac{1+y}{n^{1/2+\varepsilon}}\right)\cdot\int_0^K ze^{-z^2/2}\mathrm{d}z \qquad (A.31)\\ \leq&2c_\varepsilon\frac{1+y}{n^{1/2+\varepsilon}}+\mathbb{P}\left(\min_{j\leq n}V_{j,n}(y)>0\right)\cdot\int_0^K ze^{-z^2/2}\mathrm{d}z,\end{aligned}$$

此外，

$$\mathbb{P}\left(\min_{j\leq n}V_{j,n}(y)>0\right)\geq\frac{2y}{\sigma\sqrt{2\pi n}}-c_\varepsilon\frac{1+y}{n^{1/2+\varepsilon}}\geq\frac{y+1}{\sigma\sqrt{2\pi n}}.$$

我们得出结论，对于所有 $K\in(0,\infty],n\geq 1,y\in(0,a_n)$，结论均一致成立，

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left(V_{n,n}(y)\leq\eta\sqrt{n}K\mid\min_{j\leq n}V_{j,n}(y)>0\right)\\ \leq&2c_\varepsilon\frac{1+y}{n^{1/2+\varepsilon}\mathbb{P}\left(\min_{j\leq n}V_{j,n}(y)>0\right)}+\int_0^K ze^{-z^2/2}\mathrm{d}z\leq 2c_\varepsilon\frac{\sigma\sqrt{2\pi}}{n^\varepsilon}+\int_0^K ze^{-z^2/2}\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

对下界重复相同的论证即可推出引理 A.4。 □

现在我们可以证明引理 2.4 了。

引理 *2.4* 的证明。为便于表述，令 $N:=\lfloor N_q-n^{0.6}\rfloor$。回想一下，我们在引理 2.4 下方已经论证了

$$\lim_{N\to\infty}\left|\mathbb{P}\left(Y_N\leq\sigma\sqrt{N}K\mid\min_{j\leq N}Y_j>0,Y_0=1\right)-\mathbb{P}(\chi_q\leq K)\right|=0,$$

其中，χ_q 是式 (2.15) 中定义的随机变量。因此，只需证明：对于任意$K>0$和 $a_N=O(\log\ N)$，存在某个共同常数 G_K（它必定等于 $\mathbb{P}(\chi_q\leq K)$），使得

$$\lim_{N\to\infty}\sup_{0<y<a_N}\left|\mathbb{P}\left(Y_N\leq\sigma\sqrt{N}K\mid\min_{j\leq N}Y_j>0,Y_0=y\right)-G_K\right|=0. \qquad (A.32)$$

令 Υ_N 为满足下式的唯一正数

$$\mathbb{E}\left((Y_\ell-Y_{\ell-1})\exp\left(-\Upsilon_N N^{-1/2}(Y_\ell-Y_{\ell-1})\right)\right)=0.$$

结合引理 2.3、泰勒展开以及 $Y_\ell-Y_{\ell-1}=O(\log\ N)$ 这一事实，可得

$$0=C_{2.8}qn^{-1/3}-\sigma^2\Upsilon_N N^{-1/2}+o(n^{-1/3}).$$

解上述方程可得

$$\Upsilon_N=\frac{C_{2.8}q}{\sigma^2}\sqrt{(1+\rho/\lambda)m_1q}+o(1)=\frac{C_{2.14}(q)}{\sigma}+o(1).$$

定义一个新的概率测度 $\mathbb{P}^*$ 以及相应的期望 $\mathbb{E}^*$，使得

$$\frac{\mathrm{d}\mathbb{P}^*}{\mathrm{d}\mathbb{P}}=\frac{\exp\left\{-\Upsilon_N N^{-1/2}(Y_\ell-Y_0)\right\}}{\mathbb{E}\left(\exp\left\{-\Upsilon_N N^{-1/2}(Y_\ell-Y_0)\right\}\right)},$$

根据 Υ_N 的定义， $\mathbb{E}^*(Y_\ell - Y_{\ell-1}) = 0$。由引理 A.4 可知，对于任意 $K \in (0, \infty)$,

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{0<y<a_N} \left| \mathbb{E}^* \left(\exp\left(\Upsilon_N N^{-1/2} Y_N\right) \mathbb{1}[Y_N \le \sigma\sqrt{N}K] \mid \min_{j\le N} Y_j > 0, Y_0 = y \right) - \int_0^K z e^{C_{2.14}(q)z - z^2/2} \mathrm{d}z \right| = 0.$$

根据 $\mathbb{P}^*$的定义，上述极限等价于

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{0<y<a_N} \left| \frac{\mathbb{P}\left(Y_N \le \sigma\sqrt{N}K \mid \min_{j\le N} Y_j > 0, Y_0 = y\right)}{\mathbb{E}\left(e^{\Upsilon_N N^{-1/2} Y_N} \mid \min_{j\le N} Y_j > 0, Y_0 = y\right)} - \int_0^K z e^{C_{2.14}(q)z - z^2/2} \mathrm{d}z \right| = 0. \tag{A.33}$$

将 $K = 1$ 代入 (A.33)，可知存在某个 $N_* > 0$，当 $N > N_*$时，

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_0^1 z e^{C_{2.14}(q)z - z^2/2} \mathrm{d}z &\le \inf_{0<y<a_N} \frac{\mathbb{P}\left(Y_N \le \sigma\sqrt{N} \mid \min_{j\le N} Y_j > 0, Y_0 = y\right)}{\mathbb{E}\left(e^{\Upsilon_N N^{-1/2} Y_N} \mid \min_{j\le N} Y_j > 0, Y_0 = y\right)} \\ &\le \frac{1}{\sup_{0<y<a_N} \mathbb{E}\left(e^{\Upsilon_N N^{-1/2} Y_N} \mid \min_{j\le N} Y_j > 0, Y_0 = y\right)}. \end{aligned}$$

因此，由马尔可夫不等式可得

$$\lim_{K\to\infty} \sup_{N>N_*} \sup_{0<y<a_N} \mathbb{P}\left(Y_N > \sigma\sqrt{N}K \mid \min_{j\le N} Y_j > 0, Y_0 = y\right) = 0. \tag{A.34}$$

现在，对于任意固定的 K_1, $K_2 \in (0, \infty)$，由 (A.33) 可得,

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{0<y<a_N} \left| \frac{\mathbb{P}\left(Y_N \le \sigma\sqrt{N}K_1 \mid \min_{j\le N} Y_j > 0, Y_0 = y\right)}{\mathbb{P}\left(Y_N \le \sigma\sqrt{N}K_2 \mid \min_{j\le N} Y_j > 0, Y_0 = y\right)} - \frac{\int_0^{K_1} z e^{C_{2.14}(q)z - z^2/2} \mathrm{d}z}{\int_0^{K_2} z e^{C_{2.14}(q)z - z^2/2} \mathrm{d}z} \right| = 0. \tag{A.35}$$

对于任意 $\varepsilon > 0$，令 $K_2 = K_2(\varepsilon)$ 为常数，使得 (A.34) 中的概率不超过 ε，即

$$\sup_{N>N_*} \sup_{0<y<a_N} \mathbb{P}\left(Y_N > \sigma\sqrt{N}K \mid \min_{j\le N} Y_j > 0, Y_0 = y\right) \le \varepsilon,$$

以及

$$\int_{K_2}^{\infty} z e^{C_{2.14}(q)z - z^2/2} \mathrm{d}z < \varepsilon.$$

当 N 足够大时，根据 (A.35),

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(Y_N \le \sigma\sqrt{N}K_1 \mid \min_{j\le N} Y_j > 0, Y_0 = y\right) \\
\le&\frac{\mathbb{P}\left(Y_N \le \sigma\sqrt{N}K_1 \mid \min_{j\le N} Y_j > 0, Y_0 = y\right)}{\mathbb{P}\left(Y_N \le \sigma\sqrt{N}K_2 \mid \min_{j\le N} Y_j > 0, Y_0 = y\right)} \\
\le&\varepsilon + \frac{\int_0^{K_1} ze^{C_{2.14}(q)z-z^2/2}\mathrm{d}z}{\int_0^{K_2} ze^{C_{2.14}(q)z-z^2/2}\mathrm{d}z} \le \varepsilon + \frac{\int_0^{K_1} ze^{C_{2.14}(q)z-z^2/2}\mathrm{d}z}{\int_0^{\infty} ze^{C_{2.14}(q)z-z^2/2}\mathrm{d}z - \varepsilon},
\end{aligned}$$

由此可得（先发送 $N \to \infty$，然后发送 $\varepsilon \to 0$），

$$\limsup_{N\to\infty} \sup_{0<y<a_N} \mathbb{P}\left(Y_N \le \sigma\sqrt{N}K_1 \mid \min_{j\le N} Y_j > 0, Y_0 = y\right) \le \frac{\int_0^{K_1} ze^{C_{2.14}(q)z-z^2/2}\mathrm{d}z}{\int_0^{\infty} ze^{C_{2.14}(q)z-z^2/2}\mathrm{d}z}.$$

我们还可以得到类似的下界，并得出

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{0<y<a_N} \left|\mathbb{P}\left(Y_N \le \sigma\sqrt{N}K_1 \mid \min_{j\le N} Y_j > 0, Y_0 = y\right) - \frac{\int_0^{K_1} ze^{C_{2.14}(q)z-z^2/2}\mathrm{d}z}{\int_0^{\infty} ze^{C_{2.14}(q)z-z^2/2}\mathrm{d}z}\right| = 0,$$

这意味着（A.32）成立，从而完成了该引理的证明。 □

References

[1] D. Aldous. 布朗运动 excursions、临界随机图与乘性凝聚。《概率年刊》，25(2):812–854, 1997。[2] Frank Ball 和 Tom Britton。具有预防性重连的网络流行病。《随机结构与算法》，61(2):250–297，2022。[3] Erwin Bolthausen。关于以保持正值为条件的随机游走的函数型中心极限定理。《概率年刊》，4(3):480 – 485，1976。[4] S. Chatterjee、D. Sivakoff 和 M. Wascher。避免已知感染邻居对反复感染过程持续性的影响。《电子概率学报》，27:1–40，2022。[5] Wenze Chen、Yuewen Hou 和 Dong Yao。演化 Erdős–Rényi 图上的 SIR流行病。$ALEA$，22:245–282，2025。[6] F.R.K. Chung 和 L. Lu。《复杂图与网络》。数学科学会议委员会区域会议数学系列。美国数学会，2006。[7] R. Durrett。《随机图动力学》。剑桥大学出版社，2010。[8] Richard T Durrett、Donald L Iglehart 和 Douglas R Miller。弱收敛至布朗游走和布朗运动 excursion。《概率年刊》，5(1):117–129，1977。[9] Rick Durrett 和 Dong Yao。演化图上的易感-感染（SI）流行病。《电子概率学报》，27:1–66，2022。[10] Stewart N Ethier 和 Thomas G Kurtz。马尔可夫过程：刻画与收敛。John Wiley & Sons, Inc.，2009。[11] John Fernley、Peter M¨orters 和 Marcel Ortgiese。适应感染的图上的接触过程。《随机过程及其应用》，183:104596，2025。[12] Ion Grama 和 Hui Xiao。实数轴上随机游走的条件局部极限定理。《亨利·庞加莱研究所年刊》´概率与统计，61(1):403 – 456，2025。[13] Remco van der Hofstad。《随机图与复杂网络：第一卷》。剑桥统计与概率数学丛书。剑桥大学出版社，2016。

[14] H. Hou、Y.X. Ren 和 R. Song。临界分枝 Lévy 过程的灭绝时间尾部与最大位移。Potential Anal.，63(4):1811–1867，2025。[15] Donald L Iglehart。以保持正值为条件的随机游走的泛函中心极限定理。《概率年刊》，2(4):608–619，1974。[16] Emmanuel Jacob、Amitai Linker 和 Peter M¨orters。动态无标度网络上的接触过程。《亨利·庞加莱研究所年刊》 ′概率与统计，61(2):1279–1318，2025。[17] Svante Janson、Guy Louchard 和 Anders Martin-L¨of。具有抛物线漂移的布朗运动的最大值。《电子概率学报》，15:1893 – 1929，2010。[18] Svante Janson、Malwina Luczak 和 Peter Windridge。具有给定度的随机图上 SIR流行病的大数定律。《随机结构与算法》，45(4):726–763，2014。[19] Yufeng Jiang、Remy Kassem、Grayson York、Matthew Junge 和 Rick Durrett。演化图上的 SIR流行病。arXiv 预印本 arXiv:1901.06568，2019。[20] Valentin V. Petrov。《独立随机变量之和》。施普林格出版社，纽约-海德堡，1975。[21] Yurii Vasil'evich Prokhorov。二项分布的渐近行为。Uspekhi Matematicheskikh Nauk，8(3):135–142，1953。[22] A. I. Sakhanenko。以截断幂矩表示的不变性原理估计。Sibirsk. Mat. Zh.，47(6):1113–1127，2006。[23] Paavo Salminen。布朗运动到达移动边界或离开移动边界的首次击中时刻与末次离开时刻。《应用概率进展》，20(2):411–426，1988。[24] Bruno Schapira 和 Daniel Valesin。动态正则图上的接触过程：次临界阶段与单调性。《概率年刊》，53(2):753–796，2025。[25] Roman Vershynin。《高维概率：及其在数据科学中的应用导论》。剑桥统计与概率数学丛书。剑桥大学出版社，2018。

School of Mathematics and Statistics, Donghua University, China.电子邮箱：chenwenze@mail.dhu.edu.cn
School of Mathematics and Statistics, Beijing Institute of Technology, China.电子邮箱：houhaojie@bit.edu.cnSchool of Mathematics and Statistics, Beijing Jiaotong University, China.电子邮箱：9908@bjtu.edu.cnSchool of Mathematics and Statistics/RIMS, Jiangsu Normal University, China.电子邮箱：dongyao@jsnu.edu.cn