凝固几何笔记

JUAN ESTEBAN RODRÍGUEZ CAMARGO

摘要。这些笔记扩充自一场研讨会，该研讨会于2024年春季和秋季在哥伦比亚大学举行，主题是 Clausen and Scholze 的解析叠理论，重点关注凝聚数学理论。本研讨会受 Clausen and Scholze 于2023年冬季学期举办的解析层叠讲座系列启发。轻凝聚数学、解析叠以及 Serre 对偶证明的全部理论均应归功于 Clausen and Scholze；任何错误或误解完全由作者负责。这些笔记中唯一原创的内容，是第7节关于固体 Huber 环的光滑、étale 和有限表示态射的讨论。

arXiv:2603.03012v1 [math.AG] 3 Mar 2026

目录

1. 引言.2 1.1. 轻凝聚集.2 1.2. 解析环.3 1.3. 解析叠.4 1.4. 例子.5 1.5. 文档概述.6 致谢.7 2. 轻凝聚数学.7

2.1. 轻投射有限集.7 2.2. 轻凝聚集.9 2.3. 轻凝聚阿贝尔群.12

3. 轻凝固阿贝尔群.14
3.1. 零序列与可求和性.14 3.2. 凝实阿贝尔群构成解析环.16 3.3. solid 阿贝尔群中的测度计算.20 3.4. $\prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}$ 的平坦性与 Solid 范畴的结构.24 3.5. solid 张量积的例子.26

4. 解析环.27
4.1. 基本定义与性质.28 4.2. 解析环的完备化.35 4.3. 弗罗贝尼乌斯.38 4.4. 解析环结构的不变性.39 4.5. 解析环态射.41 4.6. 通过消去代数进行局部化.42

5. 凝聚解析环.44
5.1. smashing 谱.44 5.2. 环 $\mathbb{Z}[T]_{\square}$.49 5.3. 有限型代数的固体环.51 5.4. 概形作为解析堆栈.58 5.5. 离散 Huber 对.64 5.6. 离散 adic 空间.66

6. 解析叠.71 6.1. 六函子形式体系.71

6.2. 核范畴、suave 与 prim 对象.77 6.3. 解析叠与准凝聚6函子形式主义.81 6.4. 代数栈.91 6.5. Betti叠.97 7. 立体几何与 Serre 对偶.98 7.1. 固体 Huber 环.98 7.2. 凝固谱.101 7.3. solid Huber 叠.106 7.4. 解析环的余切复形.107 7.5. 固体有限呈示态射.111 7.6. 固 étale 映射与光滑映射.114 7.7. Serre 对偶.119 参考文献.129

1. 引言

各种几何理论遍布整个数学：微分流形、复解析簇与实解析簇、刚性解析空间、adic 空间、Berkovich 空间、代数簇与概形、形式概形，等等。“解析叠”的目标是提供一个一般性的生态系统，使前述（以及更多！）“解析几何与代数几何的理论”能够共存并相互作用。为了说明这些笔记的内容动机，让我们明确指出数学家多年来在处理解析几何时所面临的障碍，以及凝聚数学与解析叠如何解决了这些问题。

1.1. 轻凝聚集。 在代数簇或概形等理论中，基本构件仅仅是满足某些附加代数性质的交换环。这使得几何可以得到一种完全以代数语言来研究的愉快处理。然而，在微分流形以及复解析簇或刚性解析簇等其他理论中，基本构件则是某种拓扑环，更常见的是巴拿赫环或弗雷歇环。于是，任何具有与代数几何相似形式体系的“解析几何”，都必须建立在“拓扑环”的某种代数理论之上。然而，历史表明，拓扑这一数据并不能与代数结构很好地相容。凝聚数学 [CS19], 为这一问题提供了一个非常简单而巧妙的解决方案，其中“拓扑”被（轻）凝聚集的拓扑斯所取代。因此，我们对拓扑“所偏好的代数结构”（例如环/模/阿贝尔群/幺半群）的第一个替代，将是凝聚“所偏好的代数结构”。

凝聚数学背后的思想遵循 Grothendieck 的哲学，即一个空间 X 必须通过考察从某些“测试对象” Y出发的映射 $Y \to X$ 来加以研究。要使这一方法有用，就必须明智地选择“测试对象”。在我们的情形中，我们希望研究（合理的）拓扑空间，其中当然应当包括紧豪斯多夫空间。事实表明，紧豪斯多夫空间可以由某一类“非常无环”的空间重构出来。具体而言，令 Prof 为拟有限集/全不连通紧豪斯多夫空间的范畴。我们赋予 Prof 一个格罗滕迪克拓扑，其覆盖由有限多个联合满射给出。作为这一选择的依据，回想：紧豪斯多夫空间之间的任意满射都是商映射，并且任意紧豪斯多夫空间 X 都容许来自某个投射有限集的满射。例如，闭区间 $[0,1]$ 容许来自康托尔集 $\prod_{\mathbb{N}}\{0,1\} \to [0,1]$ 的一个满射，其方式是把序列(a_n)映到以二进制小数写出的实数

$$(a_n) \mapsto 0.a_1a_2a_2\cdots.$$

定义 1.1.1. 一个凝聚集合是一个层 $T : \mathrm{Prof}^{\mathrm{op}} \to$ 集合范畴（忽略某些集合论技术细节，即它必须是可及的），我们用 CondSet 表示凝聚

集。对于 X 一个（合理的）拓扑空间（例如豪斯多夫空间）且为紧生成的情形，我们通过取 $S \in \mathbf{Prof}$ 的 S-点来定义其凝聚化 $\underline{X} \in \mathbf{CondSet}$

$$\underline{X}(S) = \mathrm{Map}(S, X)$$

从 S 到 X 的连续映射空间。

我们在拓扑学（例如可数生成 CW 复形）、几何学（例如流形）和分析学（例如巴拿赫空间、弗雷歇空间）中关注的大多数空间，都赋有一种拓扑，使得理解收敛序列往往就足够了。更确切地说，最有趣的[1] 拓扑空间是（局部）可度量化的。因此，轻凝聚集在充分捕捉所有相关拓扑信息与避免不必要的技术细节之间取得了良好平衡：

定义 1.1.2。 轻射有限集是可度量化的投射有限集。记 $\mathbf{Prof}^{\mathrm{light}}$ 为轻射有限集范畴。轻凝聚集合是一个层 $T : \mathbf{Prof}^{\mathrm{light},\,\mathrm{op}} \to$集合范畴；记 $\mathbf{CondSet}^{\mathrm{light}}$ 为轻凝聚集范畴。

最后，对于任意代数结构 $\mathscr{C}$（亦即具有小极限与余极限的范畴），其凝聚化 $\mathbf{Cond}(\mathscr{C})$ 是从轻射有限集到$\mathscr{C}$的层 $T : \mathbf{Prof}^{\mathrm{light},\,\mathrm{op}} \to \mathscr{C}$ 范畴。例如，我们可以讨论（轻）凝聚阿贝尔群、环、幺半群等。轻凝聚“优选代数结构”的概念，是我们用来替代其拓扑类比对象的工具。

1.2. **解析环**。 如前所述，一般解析几何理论的基本构件中，必须包含某种拓扑环（又称凝聚环）。另一方面，在解析几何或代数几何中，空间 X 最根本的不变量都是其（拟）相干层范畴 $\mathbf{QCoh}(X)$。在经典代数几何中，这个范畴是通过“扎里斯基下降”将交换环A的模范畴 $\mathbf{Mod}(A)$粘合而得到的。然而，对于复几何和刚性几何，经典方法所能系统地以代数方式构造的，至多是相干模范畴 $\mathbf{Coh}(X)$，这样便对空间 X上的层施加了有限性条件。特别是，对于刚性空间或复解析空间之间的一般态射 $f : X \to Y$，层 $f_*\mathscr{O}_X$ 并不属于与 X相对应的范畴。另一方面，尽管凝聚环是某种拓扑环，但在解析几何中，我们往往还需要某种“完备张量积”和一个“完备模”范畴。事实证明，若 A 和 B 是两个凝聚环，那么 $A \otimes_{\mathbb{Z}} B$ 的底层环恰好是代数张量积 $A(*) \otimes_{\mathbb{Z}} B(*)$，这表明我们仍需另寻办法。

解析环这一概念是对前述问题的一种解决方案。一个解析环 A 由一个凝聚环 $A^{\triangleright}$ 以及一个稳定的 ∞-范畴 $\mathbf{D}(A)$（其对象为“完备A-模”）组成。在列出 $\mathbf{D}(A)$ 的性质之前，我们先简要绕道说明一下从模的阿贝尔范畴到稳定 ∞-范畴的这一跃迁：在经典代数几何中，拟凝聚层范畴 $\mathbf{QCoh}(X)$ 配备了一个对称张量积 $\otimes_{\mathscr{O}_X}$。借助这个张量积，可以仅通过取由环的张量积表示的（仿射）概形，来构造（仿射）概形的纤维积 $X \times_Y Z$。然而，在处理代数簇的上同调不变量时，自然需要进入导出范畴的世界。在这一领域中，“正确的纤维积” $X \times_Y Z$ 不再使用环的“阿贝尔”张量积来构造，而是使用“导出张量积”。得益于现代高阶范畴论和高阶代数的基础，例如 [Lur09、Lur17、Lur18]，如今我们已经拥有了发展“导出代数几何”理论的范畴工具，例如[Lur04、Lur18]。然而，定理 4.4.1 表明，完备模范畴 $\mathbf{D}(A)$ 仅取决于其心的阿贝尔范畴，因此严格来说，解析环定义中额外的“解析结构”

[1]这项断言需要谨慎看待；这里的有趣 是从分析学的角度而言。谱空间本身相当有趣，例如环的谱就会产生谱空间，但它们并不适合进行分析。

并不要求使用高阶代数。然而，在将解析环粘合成解析叠时，跃迁到高阶范畴论则是不可避免的。

更准确地说，在早期的解析几何理论中，拟凝聚层的经典阿贝尔范畴或三角范畴不足以对更一般的空间进行下降与粘合（其中一个原因是，即使对于某些简单的映射，例如刚性空间或复解析空间的开浸入，也缺乏“完备”的平坦性）。相反，稳定的 ∞-范畴非常适合这些目的。由前面的解释可知，解析环的一般理论依赖于高阶范畴论基础（例如，底层凝聚环 $A^\triangleright$ 应当是一个动画环或凝聚的 $\mathbb{E}_\infty$-环），尽管最基本的例子仍然可以在阿贝尔范畴的框架中得到解释。对于不熟悉高阶范畴论语言的读者，我们建议在初步理解时将 D(A)视为经典导出范畴，并暂且接受 ∞-导出范畴的一些性质，例如 ∞-范畴的任意（小）极限的存在性 [Lur09，第 3.3 节。3], 或伴随函子定理[Lur09，推论 5.5.2。9]。

Going 回到范畴 D(A)，它应满足以下性质：

(1) 它应是凝聚 $A^\triangleright$-模的导出 ∞-范畴 D(A) $\subset$ D($A^\triangleright$) 的一个全子范畴，在所有极限与余极限下稳定，并且应当“张量于凝聚阿贝尔群之上”。这是在 A 上进行同调代数的基本要求；“A-完备”应是一种性质，而不是额外结构。(2) 存在一个“完备化函子” $A \otimes_{A^\triangleright} - : \mathrm{D}(A^\triangleright) \to \mathrm{D}(A)$, 它是自然包含的左伴随（注意，我们在张量中省略了导出标记）。此外，D(A) 可以唯一地提升为一个对称幺半范畴，使得 $A \otimes_{A^\triangleright} -$ 是一个对称幺半函子。与概形的情形类似，我们要求模范畴带有一个“完备张量积”，它将推广经典解析几何理论中的完备张量积。(3) 完备化函子 $A \otimes_{A^\triangleright} -$ 应保连通对象： $A \otimes_{A^\triangleright} - : \mathrm{D}(A^\triangleright)_{\geq 0} \to \mathrm{D}(A^\triangleright)_{\geq 0}$。这将赋予 D($A$) 一个源自凝聚 $A^\triangleright$-模的 t-结构。(4) 我们有 $A^\triangleright \in \mathrm{D}(A)$（我们希望拓扑环是完备的！）。

定义 1.2.1. 一个解析环 A 是一个 Pair ($A^\triangleright$,D(A))，由一个轻凝聚动画环 $A^\triangleright$ 和一个全子范畴 D(A) $\subset$ D($A^\triangleright$) 组成；该子范畴由 “ 完备模 ” 构成，并满足上述性质 (1)–(4)。解析环态射 $f\colon A \to B$ 是凝聚动画环的一个态射 $A^\triangleright \to B^\triangleright$ ，且遗忘函子 $f_* : \mathrm{D}(B^\triangleright) \to \mathrm{D}(A^\triangleright)$ 将 D(B) 映到 D(A)。我们用 AnRing 表示解析环的 ∞-范畴。

事实证明，AnRing a 是一个可呈示 ∞-范畴[2] （关于可呈示性的概念，参见 [Lur09, §5.5] ），因此它存在所有（小）余极限（参见 [CS20, 命题 12.12] 和 [Man22b, 命题 2.3.15]）。解析环是解析叠理论的基本构件。

1.3. **解析叠**。令 Ring 为环的范畴。概形通过在扎里斯基拓扑下粘合，从 Ring 构造而来。特别地，概形可以看作 $\mathrm{Shv}_{\mathrm{Zar}}(\mathrm{Ring}^{\mathrm{op}}$，集合范畴) 中的一个对象，即环的对偶范畴（又称仿射概形）上的扎里斯基拓扑层。类似地，代数空间（分别地，Artin 层叠）通过沿 étale 或光滑映射“粘合仿射概形”得到；它们由此定义了更精细的格罗滕迪克拓扑（例如 étale 或平坦拓扑）上的层。此外，在导出代数几何中定义叠时， [Lur04],指出，必须考虑取值于 anima Ani（又称 ∞-群胚或空间）的函子，而不能只考虑取值于集合的函子。

[2]这是在解析叠课程 [CS24], 中提出的断言；遗憾的是，我不知道这个事实的证明。不过在实践中，我们可以通过一些方法绕过这一点，正如我们将在解析叠范畴的构造中看到的那样。

对于解析叠理论，我们希望在 AnRing 上定义一种合适的格罗滕迪克拓扑 G，使得“解析叠”由（“良好”的超）层给出

$$\mathrm{AnStk} = \mathrm{Shv}_G(\mathrm{AnRing}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ani}).$$

关键问题在于我们应当考虑何种格罗滕迪克拓扑。按定义，解析环**并不仅仅是**其底层凝聚环，而是其模范畴。事实上，一个解析环（本质上）完全由其模范畴决定！因此，无论我们选择何种格罗滕迪克拓扑，函子 $A \mapsto \mathrm{D}(A)$ 都应当满足下降。另一方面，我们希望有一个足够精细的格罗滕迪克拓扑，用以解释经典解析几何中那些自然出现的既有“等同”：

设 $\mathbb{Q}_p$ 为 p-进数域，并考虑射影空间 $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}_p}$。构造 $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}_p}$ 有不同的方式。首先，我们有代数几何的方式，即将环 $\mathbb{Q}_p[T]$ 与 $\mathbb{Q}_p[T^{-1}]$ 的（谱）沿交集 $\mathbb{Q}_p[T^{\pm 1}]$ 粘合。另一方面，我们有刚性几何，可以通过将 Tate 代数 $\mathbb{Q}_p\langle T\rangle$ 与 $\mathbb{Q}_p\langle T^{-1}\rangle$ 的（adic 谱）沿交集 $\mathbb{Q}_p\langle T^{\pm 1}\rangle$ 粘合来构造 $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}_p}$。因此，我们希望解析叠理论能够把 $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}_p}$ 的这两种构造等同为同一个空间，从而得到 GAGA定理的一个几何版本。

在后续章节中，我们将介绍用于定义解析叠的格罗滕迪克拓扑的定义。其定义中的一个关键工具将是六函子形式体系的抽象理论[HM24]。

1.4. 例子。 在介绍轻凝聚集、解析环和解析叠的过程中，我们将更详细地研究一些源自代数几何和 adic 空间理论（凝聚理论）的例子。本导论还将简要提及解析环的阿基米德例子和整体例子的存在（液态与气态理论）。

凝聚阿贝尔群。令 $\mathrm{CondAb}^{\mathrm{light}}$ 表示轻凝聚阿贝尔群范畴。我们将通过施加一个条件来定义（轻）凝实阿贝尔群的子范畴 Solid $\subset \mathrm{CondAb}^{\mathrm{light}}$；该条件源自这样一种想法：“非阿基米德分析中的收敛序列恰好是零序列”。凝实阿贝尔群范畴带有一个张量积，记作 $\otimes_\square$，其单位为 $\mathbb{Z}$，因此它定义了一个解析环 $\mathbb{Z}_\square$，我们称之为凝聚整数。Solid 范畴有一个紧射影生成元 $\prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}$，它关于 $\otimes_\square$是平坦的，并且满足

$$\prod_I \mathbb{Z} \otimes_\square \prod_J \mathbb{Z} = \prod_{I\times J} \mathbb{Z}$$

对于可数集 I，J。这个范畴与阿基米德分析完全无关，即，$\mathbb{R}$ 的 solid 化就是 0。凝实阿贝尔群的例子包括离散群、p-进完备模、$\mathbb{Q}_p$-巴拿赫空间和弗雷歇空间等。此外，非阿基米德分析中出现的大多数完备张量积都与 $\otimes_\square$ 一致（例如，巴拿赫空间的 p-完备张量积、核弗雷歇空间的射影张量积）。凝实阿贝尔群范畴也是包含 $\mathbb{Z}$ 且对极限与余极限稳定的凝聚阿贝尔群的最小全子范畴。

液体向量空间。令 $q \in (0, 1]$。液体实向量空间的解析环构造见 [CS20]。由于涉及非局部凸泛函分析，构造这个解析环需要付出大量努力。例如，若 $\mathbb{R}_{<q}$ 表示（$< q$）-液体实数的解析环，而 S 是一个投射有限集，那么自由液体实向量空间 $\mathbb{R}_{<q}[S]$ 并非人们直觉上所猜测的 S 上的有符号拉东测度，而是某种（$< q$）-凸拉东测度空间。对于核弗雷歇空间及其对偶，液体张量积都与射影张量积一致，参见 [CS22，IV]。

气态环。正如我们稍后将看到的，以轻凝聚集合为基础、用于解析环理论的新基础，其主要优势之一在于，构造解析环要容易得多，只需将某些具体的模映射求逆即可

。由此，难点就转化为计算 $A[S]$ 在 $S \in \mathbf{Prof}^{\mathrm{light}}$中的“测度”函子。固定伪一致化元的初始气态环通过解析环范畴中的某个泛性质来定义。它既特化为 Solid 环，也特化为液态环，其底层环 $\mathbb{Z}[\widehat{q}]^{\mathrm{gas}} \subset \mathbb{Z}[[q]]$ 由至多具有多项式增长的幂级数构成[3]:

$$\mathbb{Z}(\widehat{q})^{\mathrm{gas}}(*) = \{ \sum_{n>>-\infty} a_n q^n : \exists\, m, k > 0 \text{ such that } \lim_{n\to\infty} |a_n|(n+m)^{-k} = 0\}.$$

气态环的构造部分受到 Tate 椭圆曲线 $\mathbb{G}_{m,\ A}^{\mathrm{an}}/q^{\mathbb{Z}}$ 的普适构造的启发，并从概念上解释了为何定义 Tate 曲线的代数方程的系数是具有多项式增长的幂级数。

1.5. **文档概览**。前三节取自 Clausen and Scholze [CS24]的解析叠课程。第 2 节介绍轻凝聚数学的基本设置，并定义轻射有限集、轻凝聚集和轻凝聚阿贝尔群。

第 3 节将 solid 阿贝尔群范畴定义为这样一个凝聚阿贝尔群范畴：其中每个零序列都以适当的强意义可求和。我们详细研究 solid 阿贝尔群范畴，并给出一些 solid 张量积的例子。

第 4 节回顾解析环的一般理论；我们说明如何计算解析环的余极限、解析环结构如何仅取决于其底层阿贝尔范畴、解析环结构关于高阶同伦群或幂零加厚的不变性，以及如何通过对零序列施加可求和条件来构造解析环例子的一般方法。

在第 5 节中，我们开始研究凝聚解析环，遵循讲义 [CS19], Mann 的论文 [Man22b], 以及课程 [CS24]。我们首先讨论对称幺半稳定范畴的 smashing 谱；这一通用形式体系对于理解解析叠六函子形式体系背后的几何直觉非常有用。我们研究有理数域 $\mathbb{Z}$ 上有限型代数的凝聚解析环结构，并确立其完备模范畴的一些基本性质。随后，我们讨论概形的不同层范畴（经典的拟相干层和凝固层），以及离散 adic 空间上的凝固层范畴。

接下来，在第 6 节中，我们遵循 [CS24] 介绍解析叠范畴，并纳入 [ABLB$^+$25] 和 [Sch26a] 中指出的一些修正。我们简要讨论六函子形式体系的抽象理论，以及遵循 [HM24]和 [Sch26b] 的核范畴。我们为解析环构造六函子形式体系，并以此为基础，按照一种相当一般的步骤构造解析叠范畴。这是讲义中技术性最强的一节，其中广泛运用了线性可呈范畴和高阶代数理论。最后，我们给出两个主要的解析叠实例：来自代数几何的解析叠（在本讲义中称为代数栈），以及来自凝聚 anima 的解析叠（称为 Betti叠，并在 [HM24] 中作了详细研究）。

我们在第7节结束全文，并遵循 [CS22] 的策略证明 Serre 对偶。我们引入凝聚 Huber 环范畴，它是经典完备 Huber 对范畴的推广。我们构造 solid Huber 环的凝固谱——一种推广 Tate Huber 环经典赋值谱的谱空间，并定义 solid Huber 叠和 solid 赋值空间。我们讨论解析环余切复形理论的一些基本事实。我们引入 solid Huber 环（以及 solid 赋值空间）之间（局部）固体有限表示态射、固体 étale 态射和固体光滑态射的概念，并证明它们的一些基本稳定性性质。最后，我们陈述并证明 solid 赋值空间之间（局部）固体光滑态射的 Serre 对偶；由此推出概形的经典 Serre 对偶定理，并进一步推出刚性簇的 Serre 对偶。

[3]这是一个非常复杂的计算，据称在 [CS24]中也有相关断言。遗憾的是，我一直无法完全理解这一证明。

致谢。我衷心感谢2024年哥伦比亚大学立体几何研讨班的所有参与者，感谢他们的鼓励，以及对学习凝聚数学和解析几何理论的兴趣。感谢 Johannes Anschütz、Arthur-César Le Bras、Guido Bosco、Yutaro Mikami 和 Semen Slobodianuk 对本文先前版本提出的诸多意见和修正。我尤其感谢 Dustin Clausen 和 Peter Scholze 与我进行的许多讨论，并对他们优美的理论作出解释，也感谢他们允许我在这份笔记中介绍部分相关工作。

2. 轻凝聚数学

本次讲座将探讨轻凝聚数学的基础内容，包括轻射有限集、轻凝聚集和轻凝聚阿贝尔群。

2.1. **轻射有限集**。

凝聚数学提出了一种更好的代数框架，用凝聚集合取代拓扑空间。凝聚集的构建基块是下文回顾的投射有限集：

命题 2.1.1。 以下范畴等价。

(1) 有限集的原范畴 $\mathrm{Pro}(\mathrm{Fin})$，其中映射由下式给出

$$\mathrm{Map}(\varprojlim_i S_i, \varprojlim_j T_j) = \varprojlim_j \varinjlim_i \mathrm{Map}(S_i, T_i).$$

(2) 由连续映射构成的全不连通紧豪斯多夫空间范畴。*(3)* 布尔代数的对偶范畴。我们用 Prof 表示拟有限集范畴，视其为上文 *(1)* 或 *(2)* 中所述的范畴。

证明。 我们只需构造这些等价。从 (1) 到 (2)，取一个射影系统 $\{S_i\}_i$，并将其赋予极限拓扑，得到拓扑空间 $S = \varprojlim_i S_i$。从 (2) 到 (1)，取一个全不连通紧豪斯多夫空间，并考虑 S 的有限商所构成的射影系统 $\{S_i\}_{i\in I}$；等价地，考虑将 S 划分为既开又闭子空间所得到的射影系统。从 (2) 到 (3)，取一个全不连通紧豪斯多夫空间 S，并考虑从 S 到 $\mathbb{F}_2$ 的连续函数所构成的布尔代数 $A = C(S, \mathbb{F}_2)$。从 (3) 到 (2)，取一个布尔代数 A，并将其谱 $\mathrm{Spec}\, A$ 视为拓扑空间。□

处理所有前有限集范畴时，一个微妙的问题是该范畴不是本质小的，即其对象的同构类并不构成一个集合。另一方面，我们在几何、拓扑或分析学中实际关心的所有空间（如流形、CW 复形、巴拿赫空间或弗雷歇空间）都带有度量，并且可以在一个较小的前有限集**集合范畴** 中恢复。

命题 2.1.2。 设 S 为一个投射有限集，以下条件等价：

(1) $C(S, \mathbb{Z})$ 是可数的，*(2)* S 是可度量化的，*(3)* S 是二可数的，*(4)* S 可以写成有限集的序列极限。

证明。 乌雷松度量化定理表明，紧豪斯多夫空间可度量化当且仅当它是二可数的，由此可得 (2) $\Leftrightarrow$ (3)。

(3) $\Leftrightarrow$ (4). 根据命题 2.1.1，从全不连通紧豪斯多夫空间S 到有限集的射影系统的构造，是通过取 S 的既开又闭子空间所成的划分系统来完成的；由于 S 是二可数的，这个射影系统是可数的。反过来，如果 $S = \varprojlim_{\mathbb{N}} S_n$ 是有限集的一个序列极限，那么取映射 $S \to S_n$ 的纤维，就定义了 S拓扑的一个可数基。

(4) $\Rightarrow$(1). 如果 $S=\lim_{\longleftarrow_{\mathbb{N}}} S_n$，那么 $C(S,\ \mathbb{Z})=\lim_{\longrightarrow_n} C(S_n,\ \mathbb{Z})$，它是可数的。

(1) $\Rightarrow$(3)。最后，若 $C(S,\ \mathbb{Z})$ 可数，则 $C(S,\ \mathbb{F}_2)$ 可数，并且 $S=\mathrm{Spec}\ C(S,\ \mathbb{F}_2)$ 至多有可数多个既开又闭子空间，从而证明 S 是二可数的。事实上， S 的既开又闭子空间与 $C(S,\ \mathbb{F}_2)$ 的元素构成双射。□

定义 2.1.3。 若投射有限集满足命题 2.1.2 中的等价条件，则称其为轻型。我们用 $\mathrm{Prof}^{\mathrm{light}}$ 表示轻射有限集的范畴。

轻投射有限集在可数极限下具有基本的稳定性性质。

命题 2.1.4。 轻射有限集的范畴存在可数极限。此外，满射的序列极限仍是满射。

证明。 由命题 2.1.2 以及 2-可数拓扑空间的可数极限仍是 2-可数拓扑空间这一事实，可得其在可数极限下的稳定性。设 $S=\lim_{\longleftarrow_n} S_n$ 是满射的序列极限，则映射 $S\to S_n$ 是满射；也就是说，给定 $x_n\in S_n$，归纳地选取提升 $x_{n+m}\in S_{n+m}$，使得 x_{n+m+1} 映射到 x_m。□

接下来，我们证明 轻型赋形集合范畴的一些优良特性 .

命题 2.1.5. 设 S 是一个轻型赋形集合， $U\subset S$ 是一个开子空间。那么 U 是轻型赋形集合的可数不交并。

证明。 记 $S=$为 $\lim_{\longleftarrow_n} S_n$，并设 $Z=S\backslash U$。那么 $Z=$为 $\lim_{\longleftarrow_n} Z_n$，其中 $Z_n\subset S_n$ 是 Z 在 S_n 中的像。令 $\pi_n\colon S\to S_n$ 和 $\pi_{m,n}\colon S_m\to S_n$ 表示投影映射。我们定义 $Y_0=S_0\backslash Z_0$，并且对于 $n\geq 1$，令 $Y_n=S_n\backslash(Z_n\cup\pi_n^{-1}{}_{,n-1}Y_{n-1}\cup\cdots\cup\pi_n^{-1}{}_{,0}(Y_0))$。于是

$$U=\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}}\pi_n^{-1}(Y_n).$$

□

命题 2.1.6. 设 S 是一个轻型赋形集合。那么 S 是 $\mathrm{Prof}^{\mathrm{light}}$中的一个内射对象。

证明. 设 $f\colon X\to Y$为轻投射有限集的单射，并设 $g\colon X\to S$ 为一个映射。映射f 是一个闭浸入，于是我们可以将其写成有限集的单射的序列极限 $\lim\longleftarrow_n(f_n\colon X_n\to Y_n)$。我们可以将映射 g 写成有限集的序列极限 $\lim\longleftarrow_n(g_n\colon X_{k_n}\to S_n)$，其中 $(k_n)_n$ 为某个递增序列。取子序列后，我们可以假设 $k_n=n$。于是，我们总能找到一个映射 $h_0\colon Y_0\to S_0$，作为 g_0的延拓；并且在已有延拓 $h_n\colon Y_n\to S_n$的前提下，我们总能找到一个映射 $h_{n+1}\colon Y_{n+1}\to S_{n+1}$，作为 g_{n+1} 的延拓，并且在第 n 步约化为 h_n。取极限 $h=\lim_{\longleftarrow_n} h_n$，我们便得到所求的映射 $h\colon Y\to S$，作为 g的延拓。□

命题 2.1.7 ([CS19，定理 5。4]). 设 S 为一个轻射有限集，则连续函数空间 $C(S,\mathbb{Z})$ 是一个自由 $\mathbb{Z}$-模。

证明。 我们将 $S=\lim_{\longleftarrow_n} S_n$ 写成由满射映射构成的序列极限。我们可以找到相容截面

$$S_0\to S_1\to S_2\to\cdots$$

然后归 纳地找到相容截面 $S_0\to S$、 $S_1\to S$、 $\cdots$。那么，我们知道 t

$$C(S,\mathbb{Z})=\varinjlim_n C(S_n,\mathbb{Z}),$$

而且我们刚刚找到了 $C(S_n,\ \mathbb{Z})\to C(S,\ \mathbb{Z})$ 的相容截面。由于模 $C(S_n,\ \mathbb{Z})$ 是自由的，这表明 $C(S,\ \mathbb{Z})$ 也是自由的。□

例 2.1.8。 对我们而言最为相关的两个轻投射有限集示例如下：

(1) $\mathbb{N}$ 的一点紧化，即 $\mathbb{N}\cup\{\infty\}$。它可以写成

$$\mathbb{N}\cup\{\infty\}=\varprojlim_n\{1,2,\dots,n,\infty\}$$

其中，对于 $m\geq n$，映射 $\{1,2,\dots,m,\infty\}\to\{1,2,\dots,n,\infty\}$ 将所有元素 $k\geq n+1$ 都映到 ∞。

(2) 康托尔集 $S=\prod_{\mathbb{N}}\{0,1\}$ 可以通过二进制小数展开，满射到区间 $[0,1]$。

康托尔集的重要性由以下命题说明。

命题 2.1.9. 一个前有限集合是轻型的，当且仅当存在从康托尔集到它的满射。

证明。设 $S=\lim_{\longleftarrow n}S_n$ 是一个轻射有限集，并假设对于所有 n，$S\to S_n$ 都是满射。那么，我们总能找到一个非负整数序列 $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$，以及随 n 变化的相容满射映射

$$\prod_{m=0}^{k_n}\{0,1\}\to S_n.$$

取极限后，我们得到从康托尔集出发的所需满射。反过来，由于 2-可数拓扑空间的商仍是 2-可数的，这一结论也随之成立。□

2.2. **轻凝聚集合**。在完成了关于轻拟有限集的前期准备后，我们终于可以定义轻凝聚集合（参见 [CS19，定义 1.2]）：

定义 2.2.1。一个轻凝聚集合 是轻型赋形集范畴中相对于由有限不交并的联合满射生成的格罗滕迪克拓扑的一个层。更具体地说，凝聚集合是一个函子 $T\colon \mathbf{Prof}^{\mathrm{light,op}}\to$集合范畴，满足

(1) $T(\emptyset)=*$. (2) $T(S_1\sqcup S_2)=T(S_1)\times T(S_2)$. (3) 对所有满射 $S_1\to S_2$，我们有

$$T(S_2)=\mathrm{eq}(T(S_2)\rightrightarrows T(S_2\times_{S_1}S_2)).$$

我们用 $\mathbf{CondSet}^{\mathrm{light}}$ 表示轻凝聚集合范畴。

备注 2.2.2。根据命题 2.1.4，$\mathbf{Prof}^{\mathrm{light}}$ 中覆盖的序列极限仍是覆盖。特别地，凝聚集的拓扑斯在 [BS14, §3], 的意义下是充实的；也就是说，具有满射映射的凝聚集合的序列极限 $T=\lim_{\longleftarrow n}T_n$ 仍是满射。事实上，根据格罗滕迪克拓扑的定义，给定 $S_0\to T_0$ 的一个 S_0-点，就存在一个满射映射 $S_1\to S_0$ 和一个提升 $S_1\to T_1$。重复这一过程，我们得到一个相容的点序列 $S_n\to T_n$，以及一个满射映射 $S_{n+1}\to S_n$。然后，取极限 $S=\lim_{\longleftarrow n}S_n\to T$，即可得到 $S_0\to T_0$ 到 $S\to T$ 的提升；根据命题 2.1.4，该映射 $S\to S_0$ 是格罗滕迪克拓扑中的一个覆盖，因为它是满射。

例 2.2.3. (1) 设 T 是一个轻凝聚集合，那么集合 $T(\mathbb{N}\sqcup\{\infty\})$ 从直观上说是具有固定极限的收敛序列空间；准确地说，当 T 来自某个拓扑空间的凝聚化时，情况正是如此。若 $T=X$ 来自一个豪斯多夫空间，那么收敛序列由其在 $\mathbb{N}$ 上的限制决定，即映射 $T(\mathbb{N}\sqcup\{\infty\})\to T(\mathbb{N})$ 是单射。一般而言，一个收敛序列可能有不同的极限，因此映射 $T(\mathbb{N}\sqcup\{\infty\})\to T(\mathbb{N})$ 不一定是单射。

(2) 令 Top 表示拓扑空间范畴。我们定义凝聚化函子

$$\underline{(-)}:\mathrm{Top}\to\mathrm{CondSet}^{\mathrm{light}}$$

将 a 映射到 拓扑空间 X 到凝聚集合 X：$S\mapsto C(\underline{S},X)$，其中 $S\in\mathbf{Prof}^{\mathrm{light}}$。

(3) 米田嵌入 $\mathbf{Prof}^{\mathrm{light}} \hookrightarrow \mathbf{CondSet}^{\mathrm{light}}$ 将一个前有限集合 S 映射到其凝聚化$\underline{S}$。由于 $\mathbf{Prof}^{\mathrm{light}}$ 是一个小范畴，任意凝聚集合都可以写成轻投射有限集的余极限。更准确地说，我们有

$$T = \varinjlim_{S \to T} \underline{S}$$

作为凝聚集合。从现在起，我们不再进一步区分 S 与 $\underline{S}$ 对于 S轻射有限集。 _

如前例所示，通过取映射空间，可以得到一个从拓扑空间范畴到轻凝聚集的自然函子。以下命题表明，该函子在拓扑空间的一个合理子范畴上是全忠实的（参见 [CS19, 命题 1.7]）

命题 2.2.4。凝聚化函子有一个左伴随，称为"底拓扑空间"，它将一个凝聚集合 T 映射到如下给出的拓扑空间

$$T(*)_{\mathrm{top}} = \varinjlim_{S \to T} S$$

其中余极限是在拓扑空间范畴中取的。更确切地说，$T(*)^{\mathrm{top}}$ 的底集为 $T(*)$，其拓扑由以下映射集确定：

$$\bigsqcup_{S \to T} S \to T(*).$$

特别地，函子 $(-)$ 在可度量化紧生成空间范畴中是全忠实的（例如，可度量化的紧豪斯多夫空间）。

证明。由于 $T = \varinjlim_{S \to T} S$ 作为凝聚集合成立，所述结论归结为以下事实：对于一个投射有限集 S 和一个拓扑空间 X，有

$$\underline{X}(S) = C(S, X).$$

□

备注 2.2.5。我们来更明确地说明，拓扑空间视为凝聚集合时，满态射意味着什么。设 $X \to Y$ 是拓扑空间之间的一个映射，且其凝聚化 $X \to Y$ 是满态射。这意味着，对于任意轻射有限集 S 以及任意映射 $f : S \to Y$，都存在一个从轻射有限集 $S' \to S$ 出发的满射，以及一个提升 S的映射 $S' \to X$。例如，如果 $X \to Y$ 是紧豪斯多夫空间之间的满射，那么其凝聚化也如此。然而，这一性质通常并不成立；例如，考虑映射 $\bigsqcup_n B_n \to \varinjlim_n B_n$，其中 $(B_n)_n$ 是由单射过渡映射构成的巴拿赫空间归纳系统（LB空间）；该映射为满射的充分条件是过渡映射为紧型，否则可以构造反例。换言之，拓扑余极限 $\varinjlim_n B_n$ 的凝聚化不一定是这些巴拿赫空间 B_n 的凝聚化的余极限，除非对过渡映射附加某些假设。

作为一个具体例子，考虑 $B_n = \ell_\infty(\mathbb{N})$：由序列 $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ 构成的、定义在非离散赋范域 K（例如 $\mathbb{Q}_p$ 或 $\mathbb{C}$）上的巴拿赫空间，其中 $a_n \in K$ 取上确界，并赋予上确界范数。考虑过渡映射 $f_n : B_n \to B_{n+1}$，它将序列 $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ 移位为 $\mapsto (a_1, a_2, a_3 \ldots)$。这些过渡映射不是紧型的，而巴拿赫空间的经典余极限 $B := \varinjlim_n B_n$ 则具有病态性质，因为它会产生一个非豪斯多夫空间。另一方面，从同调代数的角度来看，将余极限视为凝聚阿贝尔群时，它是一个性质良好的空间，并且确实捕捉到了 K 的一些拓扑信息；凝聚阿贝尔群 B 的底层集合是 K 中有界序列的尾部空间。

在任意拓扑斯中，都有拟紧和拟分离对象的概念；对于轻凝聚阿贝尔群，这些性质可以用更具体的术语来表述。

定义 2.2.6。凝聚集合 T 是拟紧的，当且仅当存在一个从投射有限集出发的满射 $S \to T$。凝聚集合 T 是拟分离的，当且仅当对任意两个从投射有限集 $S \to T \leftarrow S'$出发的映射，其纤维积 $S \times_T S'$ 都是拟紧的。

备注 2.2.7。根据定义，$\mathrm{Prof}^{\mathrm{light}}$ 的格罗滕迪克拓扑是有限的，这使得投射有限集成为凝聚集拓扑斯中的紧对象。此外，由于轻投射有限集在可数极限下封闭，它们在拉回下也封闭，因此是拟分离的。这使得 CondSet 成为一个相干拓扑斯。另一方面，若 T 是一个凝聚集合，且 S，$S' \to T$ 是从投射有限集到 T的映射，那么 $S \times_T S'$ 是 $S \times S$的子对象，因此 T是拟分离的，当且仅当对于所有 S，S' 如前所述，$S \times_T S'$ 也是投射有限集。

我们可以具体描述 CondSet 中的拟紧拟分离对象。

命题 2.2.8. 令 $\mathrm{CHaus}^{\mathrm{light}}$ 为可度量化紧豪斯多夫空间的范畴。那么，凝聚化函子诱导出一个从 $\mathrm{CHaus}^{\mathrm{light}}$ 到拟紧拟分离轻凝聚集范畴的等价。此外，拟分离轻凝聚集的范畴等价于可度量化紧豪斯多夫空间的、具有单射转移映射的归纳极限范畴$\mathrm{Ind}^{\mathrm{inj}}(\mathrm{CHaus}^{\mathrm{light}})$。

证明。首先，我们断言，轻型赋形集合的拟紧子对象必然是赋形的。为此，设 $f\colon S \to S'$ 是轻型赋形集合的一个映射，我们要证明 f 的像是 S'的闭子空间。令 $\mathrm{Im}(f) \subset S'$ 为其作为拓扑空间的像，它是赋形的，并且我们知道 f 经由 $\mathrm{Im}(f)$ 的凝聚化分解。接下来只需证明：若 f 是轻型赋形集合之间的满射，则它是凝聚集之间的满态射；而根据 $\mathrm{Prof}^{\mathrm{light}}$的格罗滕迪克拓扑的定义，这一点显然成立。

设 T 是 CondSet 中的一个拟紧拟分离对象，则存在一个满射 $S \to T$，其来源于一个轻型赋形集合，并且 $S \times_T S$ 也是前有限的。于是，T 是一个轻型赋形集合对一个轻型赋形等价关系取商所得的对象，使得 $T(*)_{\mathrm{top}}$ 是一个可度量化紧豪斯多夫空间；根据注 2.2.5，伴随给出的自然映射 $T(*)_{\mathrm{top}} \to T$ 是一个等价。

反过来，$\overline{\text{设 } X}$ 是一个可度量化紧豪斯多夫空间，并固定 X 的一个可数基 $\mathfrak{U}$，该基由紧子空间组成。令 I 表示如下范畴：其对象是由有限集 S_i 索引的元组 $(U_s)_{s\in S_i}$，其中 $\{U_s : s \in S_i\}$ 是由 $\mathfrak{U}$ 中的元素构成的 X 的紧覆盖。映射 $F : (U_s)_{s\in S_j} \to (V_s)_{s\in S_i}$ 是有限集之间的映射 $f\colon S_j \to S_i$，以及对所有 $s \in S_j$ 都成立的包含映射 $U_s \subset V_{f(s)}$。范畴 I 是余滤的；也就是说，给定 $\mathfrak{U}$ 中 X 的两个有限覆盖，总能找到一个共同细化；给定两个映射 $F, G : (U_s)_{s\in S_j} \to (V_s)_{s\in S_i}$，总能找到一个细化 $H : (W_s)_{s\in S_k} \to (U_s)_{s\in S_j}$，使得 $F \circ H = G \circ H$。于是，$S = \varprojlim_i S_i$ 是一个轻型赋形集合。我们可以定义映射 $f\colon S \to X$，将紧子集的一个相容系统 $x = \{U_{s_j}\}_{j\in I}$ 映到其交集 $f(x) = \bigcap_j U_{s_j}$，该交集必然是一个点。映射 f 连续，且是从一个轻型赋形集合到 X 的满射。

根据注 2.2.5，凝聚集的映射 $S \to X$ 是满射，而纤维积 $S \times_X S$ 是拓扑纤维积的凝聚化；后者是一个轻型赋形集合，这表明 X 是拟紧拟分离的，符合预期。

最后，设 T 是一个拟分离轻凝聚集合，并设 $S \to T$ 是从一个投射有限集 S出发的映射。那么 S 在 T 中的像 X 是拟紧拟分离的，因为 $S \times_X S = S \times_T S$ 是投射有限集。这表明，T 可以表示为由单射映射组成的拟紧拟分离凝聚集的并集，从而得到 $\mathrm{Ind}^{\mathrm{inj}}(\mathrm{CHaus}^{\mathrm{light}})$ 中的一个对象。此外，由于拟紧拟分离凝聚集是 CondSet 中的紧对象，这个映射是全忠实的。反过来，给定由轻紧豪斯多夫空间及其单射过渡映射组成的余滤图表 $\{X_i\}_i$，其凝聚集的余极限 $T = \varinjlim_i X_i$是拟分离的；也就是说，对于任意两个从投射有限集 S，$S' \to T$出发的映射，都存在某个 i，使得 S，S'通过 X_i分解，且 $S \times_T S' = S \times_{X_i} S'$ 是投射有限集。□

2.3. **轻凝聚阿贝尔群**。 接下来，我们定义轻凝聚阿贝尔群，并证明它的一些最重要的性质。

定义 2.3.1. 轻凝聚阿贝尔群 $\mathrm{CondAb}^{\mathrm{light}}$ 的范畴是 $\mathrm{CondSet}^{\mathrm{light}}$中阿贝尔群对象所构成的范畴。等价地，它是轻射有限集上的阿贝尔层范畴。

例 2.3.2. (1) 遗忘函子

$$\mathrm{CondAb}^{\mathrm{light}} \to \mathrm{CondSet}$$

有一个左伴随 $T \mapsto \mathbb{Z}[T]$ ，由凝聚集合生成的自由阿贝尔群给出。凝聚阿贝尔群 $\mathbb{Z}[T]$ 由函子层化得到，该函子将轻射有限集 S 映射到自由阿贝尔群 $\mathbb{Z}[T(S)]$。

(2) 设 A 是一个拓扑阿贝尔群，则 A 具有轻凝聚阿贝尔群的自然结构。事实上，凝聚化函子保有限极限，而 A 的阿贝尔群结构由一些图表编码，例如 $+\colon A \times A \to A$。

（3）设 $\mathbb{R}$ 为赋有加法和自然拓扑的实数，则 $\mathbb{R}$ 是一个凝聚阿贝尔群。另一方面，若 $\mathbb{R}^\delta$ 赋有离散拓扑，则 $\mathbb{R}^\delta$ 是另一个与 $\mathbb{R}$具有相同底层群的凝聚阿贝尔群。存在一个不是同构的包含映射 $\underline{\mathbb{R}}^\delta \subset \underline{\mathbb{R}}$。事实上，对于轻射有限集 S ，我们有

$$\underline{\mathbb{R}}/\underline{\mathbb{R}}^\delta(S) = C(S,\mathbb{R})/C^{lc}(S,\mathbb{R}),$$

其中 $C^{lc}(S,\ \mathbb{R})$ 是从 S 到 $\mathbb{R}$的局部常值函数空间。

定理 2.3.3. 范畴 $\mathrm{CondAb}^{\mathrm{light}}$ 是一个带有自然对称幺半结构和内部 Hom函子的格罗滕迪克阿贝尔范畴。此外，它具有以下性质

（*1*）可数积是正合的（可数 *AB4**），并满足可数（*AB6*）。（*2*）满射映射的序列极限是满射的。（*3*）对象 $\mathbb{Z}[\mathbb{N} \sqcup \{\infty\}]$ 是内部投射的。

证明。 $\mathrm{CondAb}^{\mathrm{light}}$ 是一个格罗滕迪克阿贝尔范畴，这一事实是关于本质小位点上的阿贝尔群层的一般事实。它还有一个自然的张量积，由预层张量积的层化给出。内部 Hom 就是张量积的右伴随。性质 (1) 和 (2) 由凝聚集合的拓扑斯是充实的这一事实，以及阿贝尔群的类比 AB4* 和 AB6 性质成立这一点得到（非轻型版本的 (1) 见 [CS19, 定理 2.2] ）。

现在证明 (3)。只需证明零序列空间 $P = \mathbb{Z}[\mathbb{N} \cup \{\infty\}]/(\infty)$ 是内部投射的。我们要证明，对于轻凝聚阿贝尔群的满射 $A \to B$ 、轻射有限集 S 以及映射 $g\colon \mathbb{Z}[S] \otimes N \to B$，存在一条虚线箭头，使下图交换

$$\begin{array}{ccc} & & A \\ & \nearrow & \downarrow \\ \mathbb{Z}[S] \otimes P & \xrightarrow{g} & B \end{array}$$

在必要时将 S 替换为一个覆盖。我们有 $\mathbb{Z}[S] \otimes P = \mathbb{Z}[S \times (\mathbb{N} \times \{\infty\})]/(\mathbb{Z}[S \times \{\infty\}])$。那么映射 g 等同于一个映射 $S \times (\mathbb{N} \times \{\infty\}) \to B$，它将 $S \times \{\infty\}$ 映为 0。根据假设，存在一个满射 $f\colon S' \to S \times (\mathbb{N} \cup \{\infty\})$，以及一个提升 g的映射 $S' \to A$。对于 $n \in \mathbb{N}$，令 S'_n 为 $S \times \{n\}$ 上的纤维（它仍然是一个满射）。根据命题 2.1.6，我们可以找到缩回

$r_n : S' \to S'_n \subset S'$，并构造如下局部拟有限集图表

$$\begin{array}{ccc} S' \times \mathbb{N} & \xrightarrow{\bigsqcup_n r_n} & S' \\ & \searrow^{\bigsqcup_n f \circ r_n} & \downarrow f \\ & & S \times (\mathbb{N} \cup \infty). \end{array}$$

我们可以找到 S'' 的轻拟有限紧化 $S' \times \mathbb{N}$，使得 $S \times \mathbb{N} \to S'$ 可延拓到$S'' \to S'$（练习：构造这样一个紧化）。令 D 为 S''的边界，根据命题 2.1.6，我们可以找到另一个缩回 r：$S'' \to D$。令 $h : S'' \to S' \to A$ 为复合映射，则 $h - h \circ r$ 诱导出一个映射

$$\mathbb{Z}[S'']/\mathbb{Z}[D] = \mathbb{Z}[S'] \otimes P \to A$$

它提升了 g，从而证明了我们想要证明的结论。 □

备注 2.3.4。令人惊讶的是，对象 $\mathbb{Z}[\mathbb{N} \cup \{\infty\}]$ 在 $\mathbf{CondAb}^{\mathrm{light}}$ 中是内部投射的。这种情况在拟有限集层面并不会发生，例如映射 $(2\mathbb{N} \cup \{\infty\}) \bigsqcup (2\mathbb{N}+1 \cup \{\infty\}) \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ 并不分裂。这个凝聚阿贝尔群将是构造解析环实例的关键。

下面的引理表明，凝聚阿贝尔群的张量积不过是底层阿贝尔群张量积的凝聚化增强。

引理 2.3.5. 求值映射 $ev(*)\colon \mathrm{CondAb} \to \mathrm{Ab}$ 是对称幺半的。换言之，若 A 和 B 是凝聚阿贝尔群，则自然映射 $A(*) \otimes B(*) \xrightarrow{\sim} (A \otimes B)(*)$ 是一个同构。

证明。 由于点 $*$ 是一个紧射影拟有限集，映射 $ev(*)$ 会将凝聚阿贝尔群的满射映为阿贝尔群的满射，也保持滤过余极限。因此，将凝聚阿贝尔群表示为轻射有限集上的自由凝聚阿贝尔群的滤过余极限的商后，只需证明：若 S_1 和 S_2 是轻射有限集，则自然映射

$$\mathbb{Z}[S_1](*) \otimes \mathbb{Z}[S_2](*) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}[S_1 \times S_2](*) \tag{2.3.1}$$

是一个同构。根据 [CS20, 命题 2.1]，对于 $S = \varprojlim_i S_i$，将轻型赋形集合写成有限集的极限，其作为凝聚集合的表示为

$$\mathbb{Z}[S] = \bigcup \varprojlim_i \mathbb{Z}[S_i]_{\le n}$$

其中 $\mathbb{Z}[S_i]_{\le n} \subset \mathbb{Z}[S_i]$ 是由和 $\sum_{s \in S_i} a_s s$ 构成的有限子集，且满足 $\sum_{s \in S_i} |a_s| \le n$。从这个表示可以直接看出，$\mathbb{Z}[S](*) = \mathbb{Z}[S(*)]$是由 S的底层集合生成的自由阿贝尔群。这便推出了 (2.3.1) 的同构，证明了我们所要的结论。□

我们可以如下定义凝聚上同调：

定义 2.3.6. 设 $T \in \mathbf{CondSet}^{\mathrm{light}}$ 是一个轻凝聚集合，M 是一个离散阿贝尔群，我们定义取值于 M 的 T 凝聚上同调为

$$R\Gamma_{\mathrm{cond}}(T, M) := R\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}[T], M).$$

在良好的情形下，凝聚上同调符合预期。

命题 2.3.7 ([CS19，定理 3。2])。 设 S 为投射有限集，M 为离散阿贝尔群，则

$$R\Gamma_{\mathrm{cond}}(S, M) = C(S, M)$$

是从 S 到 M的连续（即局部常值）函数空间。

证明。 显然， $H^0_{\mathrm{cond}}(S,M)$就是从 S到 M的连续映射空间。要证明高阶上同调群消失，只需证明对于一个覆盖 $S'\to S$，其 Čech 神经为 $(S'^{,\times_S n_1})_{[n]\in\Delta^{\mathrm{op}}}$，Čech 上同调复形

$$0\to C(S',M)\to C(S'\times_S S',M)\to\cdots \tag{2.3.2}$$

在上同调次数 ≥ 1上是无环的。为此，我们可以将满射 $S'\to S$ 表示为有限集及满射映射构成的序列极限 $\varprojlim_n(S'_n\to S_n)$。于是 Čech 复形 (2.3.2) 是满射 $S'_n\to S_n$对应的 Čech 复形的余极限；这些复形在次数 ≥ 1 上是无环的，因为有限集之间的任意满射都分裂。□

命题 2.3.8 ([CS19, 定理 3.2])。 设 X 是一个轻紧豪斯多夫空间， M 是一个离散阿贝尔群，则存在一个自然同构

$$R\Gamma_{\mathrm{cond}}(X,M)=R\Gamma(X,M)$$

介于凝聚上同调与 *Čech* 上同调之间。

证明。 由于 X 是紧豪斯多夫空间，我们可以形式上归约到情形 $M=\mathbb{Z}$。令 $X_{\mathrm{Prof}}:=\mathbf{Prof}^{\mathrm{light}}_{/X}$ 为 X上的轻型赋形集合所构成的位点。则 X 的凝聚上同调与 X_{Prof}中的上同调相同。令 X_{top} 为由 X 的闭子空间构成的位点，其覆盖由闭子空间的有限并给出，且这些有限并允许由开覆盖细化。则 X 的 Čech 上同调与 X_{top}上的上同调相同。我们有一个自然的位点态射

$$\eta: X_{\mathrm{Prof}}\to X_{\mathrm{top}}.$$

只需证明自然映射 $\mathbb{Z}\to R\eta_*\mathbb{Z}$ 是一个同构。这可以在茎上证明，因此设 $x\in X$，那么茎 $R\eta_*\mathbb{Z}|_x$ 与 x上的纤维的推前相同，而这不过是一个点的凝聚上同调，也就是 $\mathbb{Z}$。□

3. 轻凝固阿贝尔群

凝实阿贝尔群理论由 [CS19], 引入；它在非阿基米德解析几何和非阿基米德分析中发挥着基础作用。凝实阿贝尔群构成的 Solid 范畴是 CondAb 的一个全子范畴，对极限、余极限和扩张稳定，并包含$\mathbb{Z}$；实际上，它是满足这些性质的最小范畴。在其“经典构造”[4]中，局部紧阿贝尔群及其作为凝聚阿贝尔群的扩张理论发挥着关键作用。然而，在轻凝聚数学这一新框架中，凝实阿贝尔群理论可以从一个更直观的想法出发形式化地建立起来：非阿基米德分析中的“可求和序列”恰好就是“零序列”。下文将说明，这个非常简单的想法如何自然地引导我们得出 Solid 的正确界定。

3.1. 零序列与可求和性。

设 K 是一个局部域， V 是一个 K 上的巴拿赫空间。回忆一下， V 中的一个零序列 是一个收敛到 0 的序列 $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 。类似地，一个可求和序列 是一个序列 $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ，其部分和 $\sum_{i=0}^n v_i$ 收敛到 v 中的一个元素，我们将其记为 $\sum_n v_n$。分析学课程中最先学到的性质之一是，可求和序列 (v_n) 的尾部 $w_n=\sum_{i\geq n}v_n$ 收敛到 0。换句话说，我们有一个映射

$$\{\text{summable sequences}\}\to\{\text{null sequences}\}:(v_n)\mapsto(w_n).$$

另一方面，给定一个零序列 $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，我们可以构造序列 $x_n:=w_n-w_{n+1}$，结果它在 V 中可求和，即

$$v_n:=\sum_{i=0}^n x_n=w_0-w_{n+1}$$

[4]如果把一种大约在 2018—2019 年才提出的构造称为经典——也就是相对于撰写这些笔记的时间而言，五六年前的构造——

并且 $(v_n)_n$ 在 $n \to \infty$ 时收敛到 w_0。因此，我们得到一个双射

$$\{\text{null sequences}\} \to \{\text{summable sequences }\} : (w_n)_n \mapsto (x_n)_n = (w_n - w_{n+1}).$$

一般而言， V 中的任意可求和序列也是零序列。对于阿基米德域，反之则不成立（例如 $(1/n)_n$）；但对于非阿基米德域，由于超度量不等式，反之成立。

因此，将非阿基米德分析从凝聚阿贝尔群中区分出来的一种方法，是要求任意零序列都可求和，也就是说，映射

$$1 - S : \{\text{null sequences}\} \to \{\text{null sequences}\},$$

其中 S 是移位映射 $(v_n) \mapsto (v_{n+1})$，是一个双射。

为了将这一想法形式化，我们首先需要能够讨论凝聚阿贝尔群的零序列。

定义 3.1.1. 我们令 $P := \mathbb{Z}[\mathbb{N} \cup \{\infty\}]/(\infty)$。给定一个凝聚阿贝尔群 A，其零序列空间定义为 $\mathrm{Null}(A) = \mathrm{Hom}(P, A)$；我们也令 $\mathrm{Null}(A) := \mathrm{Hom}(P, A)$。

例 3.1.2. 我们沿着例 2.2.3 (1) 的思路继续。对于拟分离凝聚阿贝尔群 A，成为零序列是底层序列的一项实际性质，即映射

$$\mathrm{Null}(A) \to \mathrm{Map}(\mathbb{N}, A) = \prod_{\mathbb{N}} A(*)$$

是单射。然而，对于一般的凝聚阿贝尔群，零序列并非序列本身的性质，而是赋予凝聚阿贝尔群的额外结构。例如，令 $\mathbb{R}$ 为带有通常拓扑的实数，令 $\mathbb{R}^\delta$ 为带有离散拓扑的实数。那么 $\mathbb{R}/\mathbb{R}^\delta$ 虽然作为拓扑阿贝尔群可能令人望而生畏，却是一个定义良好的凝聚阿贝尔群；对于任意轻射有限集 S，我们有

$$\mathbb{R}/\mathbb{R}^\delta(S) = C(S, \mathbb{R})/C^{lc}(S, \mathbb{R})$$

它是从 $S \to \mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的连续映射模去从 S 到 $\mathbb{R}$ 的局部常值映射所得的商。将此应用于 $S = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$，得到 $\mathbb{R}/\mathbb{R}^\delta(S)$ 是一个由零序列构成的非零空间，而 $\mathbb{R}/\mathbb{R}^\delta(*) = 0$；这表明，在该非拟分离商中，零序列会保留几乎为零序列的尾部。

P 的另一个特性是，它具有自然的代数结构，使得 $\mathbb{Z}[T] = \mathbb{Z}[\mathbb{N}] \to P$ 成为一个代数态射。

命题 3.1.3。加法映射

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

在 P 上诱导出一个代数结构，我们将此代数记为 $\mathbb{Z}[\widehat{q}]$。

为证明命题 3.1.3，只需证明以下引理

引理 3.1.4。 设有一个轻射有限集之间的满射 $S \to S'$，并设 $U \subset S'$ 为一个开子空间，使得 $S \times_{S'} U \to U$ 是一个同胚。令 D 和 D' 分别为 U 在 S 和 S' 中的补集。那么在CondSet中，我们有一个推出方形

$$\begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & S \\ \downarrow & & \downarrow \\ D' & \longrightarrow & S'. \end{array}$$

证明。 我们有一个凝聚集的满射 $S \to S'$，其切赫纤维由 $S \times_{S'} S = \Delta S \cup (D \times_{D'} D) \subset S \times S$ 给出。由于 $S \to S'$ 是满射，因此有 $S' = S/(S \times_{S'} S) = S/(\Delta S \cup (D \times_{D'} D))$，这恰好就是推出 $S \bigsqcup_D D'$。□

定义 3.1.5。设 U 是一个轻局部投射有限集，即轻型赋形集的可数不交并。我们令 P_U :
$= \mathbb{Z}[U \cup \{\infty\}]/(\infty)$ 为在 U 处消失的测度 ∞ 所成的空间。

命题 3.1.6. 设 U 是一个轻局部拟有限集， S 是 U 在某个轻射有限集中的任意紧化，且 D 是边界，则存在一个凝聚阿贝尔群的自然同构 $P_U = \mathbb{Z}[S]/\mathbb{Z}[D]$。

证明。由引理 3.1.4 可得一个推出图

$$\begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & S \\ \downarrow & & \downarrow \\ * & \longrightarrow & U \cup \{\infty\}, \end{array}$$

应用左伴随 $\mathbb{Z}[-]$ ，我们得到自由阿贝尔群范畴中的一个推出图，由此导出同构

$$\mathbb{Z}[S]/\mathbb{Z}[D] = \mathbb{Z}[U \cup \{\infty\}]/(\infty).$$

□

命题 *3.1.3* 的证明。我们可以通过规定$\infty + a = \infty$，为 $\mathbb{N}\cup\{\infty\}$ 赋予加法幺半群结构。于是， $\mathbb{Z}[\mathbb{N} \cup \{\infty\}]$ 具有自然的代数结构，使得 $\mathbb{Z}[\infty]$ 是一个理想；这赋予了 P 代数结构。更明确地说，考虑加法映射

$$(\mathbb{N} \cup \{\infty\}) \times (\mathbb{N} \cup \{\infty\}) \to \mathbb{N} \cup \{\infty\},$$

它将 $(\mathbb{N}\cup\{\infty\})\times(\mathbb{N}\cup\{\infty\})$ 的边界映到 $\mathbb{N}\cup\{\infty\}$的边界；根据命题 3.1.6，它定义了一个映射

$$P \otimes P \to P,$$

与乘法映射 $\mathbb{Z}[T] \otimes \mathbb{Z}[T] \to \mathbb{Z}[T]$ 相容。容易验证，这为 P 定义了一个代数结构。□

3.2. **Solid 阿贝尔群构成一个解析环**。现在我们定义 solid 阿贝尔群的范畴。为此，注意到参数化零序列的凝聚阿贝尔群 P 有一个自同态 Shift : $P \to P$，它由投射有限集之间的映射 $\mathbb{N}\cup\{\infty\} \to \mathbb{N}\cup\{\infty\}$ 诱导，该映射将 ∞ 映到 ∞，并将 n 映到 $n+1$。我们称 Shift 为移位映射。

定义 3.2.1。考虑映射 $1 - \text{Shift} : P \to P$。若轻凝聚阿贝尔群 A 满足凝实 条件

$$\underline{\mathrm{Hom}}(P, A) \xrightarrow{1-\mathrm{Shift}^*} \underline{\mathrm{Hom}}(P, A)$$

是一个同构。我们用 Solid $\subset$ CondAb $^{\mathrm{ig}}{}_{\mathrm{t}}$ 表示（轻）凝实阿贝尔群构成的全子范畴。

更一般地，给定 $C \in$D(CondAb^{light})，即凝聚阿贝尔群的导出（∞-）范畴中的一个对象，若自然映射满足 C 凝实条件

$$R\underline{\mathrm{Hom}}(P, C) \xrightarrow{1-\mathrm{Shift}^*} R\underline{\mathrm{Hom}}(P, C)$$

是一个等价。我们令 le t D(CondAb)$^{\square}$ $\subset$D(CondAb^{light}) 是凝实对象的全子范畴。

备注 3.2.2。由定理 2.3.3 可知，对象 P 在轻凝聚阿贝尔群范畴中是内部投射的；特别地，导出的 Hom 空间与非导出的 Hom 空间 Hom(P, A) 没有区别。这表明 Solid $\subset$ D(CondAb)$^{\square}$。

备注 3.2.3。令 $\mathbb{Z}[\widehat{q}]$ 为视为凝聚环的对象 P。移位映射对应于乘以 q，并且 $\mathbb{Z}[\widehat{q}]$ 显然是整环。因此，凝聚阿贝尔群 A是 Solid 当且仅当导出内部 Hom 空间 RHom($\mathbb{Z}[\widehat{q}]/(1-q)$ A) $= 0$ 消失。

m 关于 solid 阿贝尔群范畴的主要定理如下 :

定理 3.2.4. 范畴 Solid 是一个格罗滕迪克阿贝尔范畴，在CondAb中对极限、余极限和扩张稳定。此外，以下性质成立：

(1) $\mathbb{Z} \in$Solid。*(2)* 包含映射存在一个左伴随$(-)^{\square} : \mathrm{CondAb} \to$ Solid，我们称之为凝固化函子。*(3)* 存在唯一的对称幺半结构 $\otimes_{\square}$，使Solid 成为对称幺半范畴。*(4)* $\mathbb{R}^{\square} = 0$ *(solid* 阿贝尔群消除了阿基米德理论*)*。

此外，$\mathrm{D}(\mathrm{CondAb})^{\square}$ 是$\mathrm{D}(\mathrm{CondAb})$ 的一个可呈示全子范畴，对极限与余极限稳定，并具有以下性质：

(5) 包含映射 *D(CondAb)*$^{\square} \to$*D(CondAb)* 有一个左伴随 *(–)*$^{L\square}$。*(6)* 对象 $C \in$ *D(CondAb)* 是 *solid*，当且仅当 $H^i(C) \in$ 对所有 $i \in \mathbb{Z}$ 都属于 *Solid*；也就是说，*D(CondAb)* 上的自然t*-*结构诱导出 *D(CondAb)*$^{\square}$上的 t*-*结构。*(7)* 对于 $C \in$ *D(CondAb)*$^{\square}$ 和 $M \in$ *D(CondAb)*，有 R*Hom*函子*(*M, C*)* $\in$ *D(CondAb)*$^{\square}$。*(8)* 范畴 *D(CondAb)*$^{\square}$ 上存在唯一的对称幺半结构 $\otimes^L_{\square}$，使 *(–)*$^{L\square}$成为对称幺半函子。*(9)* 导出范畴之间的自然映射 *D(Solid)* $\to$ *D(CondAb)* 是全忠实的，其本质像为 *D(CondAb)*$^{\square}$。*(10)* 函子 *(–)*$^{L\square}$ 是 *(–)*$^{\square}$的左导出函子。*(11)* 函子 $\otimes^L_{\square}$ 是 $\otimes_{\square}$的左导出函子。*(12)* 对于 $S = \lim_{\longleftarrow n} S_n$ 这一轻射有限集，存在一个自然等价

$$\mathbb{Z}_{\square}[S] := (\mathbb{Z}[S])^{L\square} \xrightarrow{\sim} \varprojlim_n \mathbb{Z}[S_n] \cong \prod_J \mathbb{Z}$$

其中 J 是一个可数集。特别地，$\mathbb{Z}_{\square}[S]$ 是一个紧致投射 *solid* 阿贝尔群；如果 S 是无限的，那么 $\mathbb{Z}_{\square}[S]$ 是 Solid 的一个紧投射生成元。

(13) 对于 I 和 J 可数集，我们有

$$\prod_I \mathbb{Z} \otimes^L_{\square} \prod_J \mathbb{Z} = \prod_{I \times J} \mathbb{Z}.$$

(14) 对象 $\prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}$ 在 Solid 中是平坦的。

在 [CS19] 中，人们为证明定理 3.2.4 付出了大量努力，而唯一显而易见的性质是第 (12) 点，这是因为凝实阿贝尔群是通过首先定义测度函子 $S \mapsto \mathbb{Z}_{\square}[S]$ 构造出来的。此外，性质 (14) 在任意凝实阿贝尔群中并不成立（反例由 Effimov 给出）。事实证明，采用定义 3.2.1 后，定理的大部分内容都可以直接得出。

命题 3.2.5. 范畴 Solid 是一个格罗滕迪克阿贝尔范畴。此外，第 *(1)–(8)* 点成立。而且，性质 *(12)* 蕴含 *(9)* 和 *(10)*，性质 *(13)* 蕴含 *(11)*。

证明。 回忆一下，Solid 范畴定义为满足以下条件的凝聚阿贝尔群的全子范畴A：映射 $1 -$ Shift* 在 Hom(P, A) 上是同构。由于P是内部投射的，这个条件显然在 CondAb 中对极限、余极限和扩张稳定，因此 Solid 是一个阿贝尔范畴。同样的论证表明，D(CondAb)$^{\square}$ 在 D(CondAb) 中对极限与余极限稳定。接下来只需证明 Solid 和 D(CondAb)$^{\square}$ 是可呈示的。为此，考虑$Q =$ cone$(P \to \lim_{\longrightarrow 1-\mathrm{Shift}} P)$；此时，对象 C是 solid 当且仅当RHom$(Q, C) = 0$。根据 [Lur09, Theorem 5.5.3.18]，可呈示性随即成立。（也可以直接援引 [RS22] 的一般反射原理，因为这些范畴在可呈示的凝聚范畴中对极限与余极限稳定。）

(1) 根据命题 2.3.7，对于所有 $S \in$ Prof，我们有 $R\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}[S], \underline{\mathbb{Z}}) = C(S, \mathbb{Z})$ 是局部常值函数构成的空间。这意味着

$$\underline{\mathrm{Hom}}(P, \mathbb{Z}) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}.$$

于是，$1 - \mathrm{Shift}^*$ 将一个序列 $(a_0, a_1, \ldots)$ 映射为 $(a_0 - a_1, a_1 - a_1, \ldots)$，显然其逆映射为

$$(b_0, b_1, b_2, \ldots) \mapsto (\sum_{i \geq 0} b_i, \sum_{i \geq 1} b_i, \ldots).$$

因为这些序列最终均为零。

(2) 和 (5) 左伴随的存在性由伴随函子定理 [Lur09, Corollary 5.5.2.9] 得出。

(3) 和 (8) 只需证明伴随 $(-)^\square$ 和 $(-)^{L\square}$ 的核分别是 Solid 和 D(CondAb) 中的张量理想$^\square$。我们仅解释 $(-)^{L\square}$ 的证明。设 $A \in$ D(CondAb) 满足 $A^{L\square} = 0$，并设 $M \in$ D(CondAb)。要证明 $(M \otimes^L A)^{L\square} = 0$，只需证明对于所有 $B \in$D(CondAb)$^\square$，我们有

$$R\mathrm{Hom}(A \otimes^L M, B) = 0,$$

但我们有

$$R\mathrm{Hom}(A \otimes^L M, B) = R\mathrm{Hom}(A, R\underline{\mathrm{Hom}}(M, B)), \tag{3.2.1}$$

并且，根据下文的 (7)，$R\mathrm{Hom}(M, B)$ 是 Solid。这说明 (3.2.1) 为零。

(4) 由于 $\mathbb{R}$ 是一个代数，且函子 $(-)^{L\square}$ 是对称幺半的，因此只需证明 t

$$\pi_0(\mathbb{R}^{L\square}) = \mathbb{R}^\square = 0.$$

只需证明单位映射 $\mathbb{Z} \to \mathbb{R}^\square$ 为零。为此，考虑 $\mathbb{R}$ 中的零序列

$$(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \cdots)$$

它定义了一个映射 $f\colon P \to \mathbb{R}$。根据 solid 化的定义，存在唯一映射$g : P \to \mathbb{R}^\square$，使下图交换

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ \downarrow{\scriptstyle 1-\mathrm{Shift}} & & \downarrow \\ P & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}^\square. \end{array}$$

令 $[0]\colon \mathbb{Z} \to P$ 为第零个分量中的包含映射，则 $g \circ [0]\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^\square$ 定义了一个元素 x_0（实际上由 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots$ 给出）。我们断言 $x_0 = 1 + x_0$，这将表明 $1 = 0$ 且 $\mathbb{R}^\square = 0$。

考虑映射

$$F : \mathbb{Z}[\mathbb{N}] \to \mathbb{Z}[\mathbb{N}] : [n] \mapsto [2n+1] + [2n+2]$$

$$G : \mathbb{Z}[\mathbb{N}] \to \mathbb{Z}[\mathbb{N}] : [n] \mapsto [2n+1].$$

这些映射自然延拓为 P 的自同态。我们断言，有一个交换图

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{F} & P \\ \downarrow{\scriptstyle 1-\mathrm{Shift}} & & \downarrow{\scriptstyle 1-\mathrm{Shift}} \\ P & \xrightarrow{G} & P, \end{array}$$

也就是说，我们有

$$(1-\text{Shift})\circ F([n]) = (1-\text{Shift})([2n+1]+[2n+2]) = [2n+1]-[2n+2]+[2n+2]-[2n+3] = [2n+1]-[2n+3]$$

and

$$G\circ(1-\mathrm{Shift})([n]) = G([n]-[n+1]) = [2n+1]-[2n+3].$$

另一方面，我们有 $f\circ F = f$，也就是说，它是这个序列

$$((\frac{1}{2}+\frac{1}{2}),(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}),(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}),(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}),(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}),(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}),(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}),\cdots) = (1,\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\cdots).$$

由提升 g 的唯一性可知： $P\to\mathbb{R}^{\square}$，因此必有 $g\circ G = g$。那么，如果 g 表示零序列（x_0， x_1， x_2， x_3， $\cdots$），则对所有 $n\in\mathbb{Z}$ 都有 $x_n = x_{2n+1}$。特别地， $x_0 = x_1$，因此

$$0 = x_0 - x_1 = 1,$$

这就证明了我们想要证明的结论。

(6) 这是由以下事实得出的：对于所有 $C\in$D(CondAb)，我们都有

$$H^i(R\underline{\mathrm{Hom}}(P,C)) = \underline{\mathrm{Hom}}(P,H^i(C)) \text{ for } i\in\mathbb{Z}$$

因为 P 是内部投射的。

(7) 令 $M\in$D (CondAb) 且 $C\in$D(CondAb)$^{\square}$，则该断言由同构

$$R\underline{\mathrm{Hom}}(P,R\underline{\mathrm{Hom}}(M,C)) = R\underline{\mathrm{Hom}}(M,R\underline{\mathrm{Hom}}(P,B)),$$

以及 B 是 Solid 的这一事实得出。

现在假设性质 (11) 和 (12) 成立。

(9) 映射 Solid $\to$ CondAb 诱导出一个导出范畴函子 D(Solid) $\to$ D(CondAb)，根据 [Lur17，命题 1.3.3，7], 并且由于 $P^{\square} = \prod_{\mathbb{N}}\mathbb{Z}$ 是 Solid 的一个紧射影生成元，只需证明对于 $A\in$Solid，我们有

$$R\underline{\mathrm{Hom}}(P^{\square},A) = \underline{\mathrm{Hom}}(P^{\square},A).$$

但我们知道 $P^{\square} = P^{L\square}$，并且由 (2) 和 (5) 的左伴随可得

$$R\underline{\mathrm{Hom}}(P^{\square},A) = R\underline{\mathrm{Hom}}(P^{L\square},A) = R\underline{\mathrm{Hom}}(P,A) = \underline{\mathrm{Hom}}(P,A) = \underline{\mathrm{Hom}}(P^{\square},A).$$

(10) 这由 $\mathbb{Z}[S]^{L\square} = \mathbb{Z}[S]^{\square}$ 位于零次这一事实推出。事实上，由于两个导出范畴都是右完备的，只需证明 $(-)^{L\square}$ 对连通对象 D$^{\geq 0}$(CondAb)（即支撑于非负同调次数的对象）的限制是左导出函子。这个结论归结为以下事实：$(-)^{L\square}$: D$^{\geq 0}$(CondAb) $\to$D$^{\geq 0}$(Solid) 是其在生成元全子范畴 $\mathscr{C}^0 = \{\mathbb{Z}[S]\}_{S\in\mathrm{Prof}^{\mathrm{light}}} \subset$ D$^{\geq 0}$(CondAb) [5]上的限制的左 Kan 延拓。换言之，对于 $C\in$ D$^{\geq 0}$(CondAb)，我们有

$$C^{L\square} = \varinjlim_{\mathbb{Z}[S]\in\mathscr{C}^0/C}\mathbb{Z}[S]^{L\square} = \varinjlim_{\mathbb{Z}[S]\in\mathscr{C}^0/C}\mathbb{Z}[S]^{\square}.$$

(11) 最后，要证明$\otimes^L_{\square}$ 是 $\otimes_{\square}$ 的左导出函子，只需证明存在一族在 solid 张量积下稳定的紧射影生成元 $\mathscr{C}^0\subset$ Solid，使得对于 A， $B\in\mathscr{C}^0$，我们有 $A\otimes^L_{\square}B = A\otimes_{\square}B$。取 $\mathscr{C}^0$ 为由满足 S 为轻型赋形的 $\mathbb{Z}_{\square}[S]$ 所张成的全子范畴，根据性质 (13)，结论成立。

□

推论 3.2.6. 设 C 为实凝聚向量空间。则 $C^{L\square} = 0$。

证明。 凝固化函子 $(-)^{L\square}$ 是对称幺半的，特别是 $\mathbb{R}^{L\square}$ 是一个代数，且$C^{L\square}$ 具有自然的 $\mathbb{R}^{L\square}$-模结构。但 $\mathbb{R}^{L\square} = 0$，这意味着 $C^{L\square} = 0$。 □

[5]注意，全子范畴 $\mathscr{C}^0\subset$ D$^{\geq 0}$(CondAb) 并不是 CondAb 的全子范畴，因为 $\mathscr{C}^0$ 的对象不一定是投射的

我们已经证明了定理 3.2.4 的大部分内容，接下来只需证明第 (12)–(14) 点，涉及自由对象 $\mathbb{Z}_{\square}[S]:=\mathbb{Z}[S]^{L\square}$ 的显式描述、它们的 solid 张量积，以及 $\prod_{\mathbb{N}}\mathbb{Z}$ 在 Solid 中的平坦性；这些性质留待下一节讨论。

3.3. 凝实阿贝尔群中的测度计算。

本节的目标是证明以下定理：

定理 3.3.1。 设 $S=\lim_{\longleftarrow n}S_n$ 是一个轻射有限集。那么凝实阿贝尔复形的自然映射

$$\mathbb{Z}[S]^{L\square}\to\varprojlim_n\mathbb{Z}[S_n]$$

是一个等价。此外，以下结论成立：

(1) $\prod_{\mathbb{N}}\mathbb{Z}$ 是 Solid 的紧投射生成元。*(2)* 自然映射 $\mathrm{D}(\mathsf{Solid})\to\mathrm{D}(\mathrm{CondAb})^{\square}$ 是 ∞-范畴之间的等价。*(3)* 函子 $(-)^{L\square}$ 是 $(-)^{\square}$ 的左导出函子。

由命题 3.2.5，我们只需证明定理的第一个断言，这需要一些引理。回忆一下，$P=\mathbb{Z}[\mathbb{N}\cup\{\infty\}]/(\infty)$ 是参数化零序列的凝实阿贝尔群。

首先，我们注意到，为了计算 S 这一轻射有限集的 solid 化，只需计算 P 的 solid 化，即可计算 $\mathbb{Z}[S]$ 的 solid 化：

引理 3.3.2. 设 S 为轻射有限集，则存在映射 $P\to\mathbb{Z}[S]$，它在 *solid* 化上诱导同构

$$P^{L\square}\xrightarrow{\sim}\mathbb{Z}[S]^{L\square}.$$

证明。 将 $S=$写作有限集的极限 $S=\lim_{\longleftarrow n}S_n$，其过渡映射为满射，投影为 $\pi_n\colon S\to S_n$。我们可以找到一列相容提升 $S_0\to S_1\to S_2\to\cdots\to S$，满足 $\iota_n\colon S_n\to S$。沿着先前的包含映射枚举 $\bigcup_n\iota_n(S_n)\cong\mathbb{N}$，得到一个单射$\mathbb{N}\to S$。那么，对于 $a\in\iota_n(S_n)\backslash\iota_{n-1}(S_{n-1})\subset\mathbb{N}$，考虑元素 $\iota_n(a)-\iota_{n-1}(a)$。序列 $(\iota_n(a)-\iota_{n-1}(a))_{n\in\mathbb{N}}$ 在 $\mathbb{Z}[S]$ 中收敛到零，并定义一个单射映射 $g\colon P\to\mathbb{Z}[S]$。我们断言，$g$ 在 solid 化后诱导同构。

我们断言存在一个交换图

$$\begin{array}{ccc} P\otimes\mathbb{Z}[S] & \xrightarrow{F} & \mathbb{Z}[S] \\ {\scriptstyle(1-\mathrm{Shift})\otimes\mathrm{id}_S}\uparrow & & \uparrow \\ P\otimes\mathbb{Z}[S] & \xrightarrow{G} & P \end{array} \tag{3.3.1}$$

其中顶部水平箭头 F 来自一个映射 $(\mathbb{N}\times\{\infty\})\times S\to\mathbb{Z}[S]$，该映射在$\infty\times S$处消失。这个映射由以下映射序列 $\{n\}\times S\to\mathbb{Z}[S]$ 给出：当 $n=0$ 时为 $\mathrm{id}^{\mathbb{Z}[S]}$，当 $n\geq 1$时为 $\mathrm{id}_{\mathbb{Z}[S]}-\iota_{n-1}\circ\pi_{n-1}$；这些映射在 ∞处的 S 上一致消失。然后，为了定义底部水平箭头 G，我们需要证明复合映射 $F\circ(1-\mathrm{Shift})$ 的值落在 P中，但该复合映射对应于凝聚集的映射

$$G:(\mathbb{N}\cup\{\infty\})\times S\to\mathbb{Z}[S]$$

在 $\infty\times S$处消失，并由 $\iota_n\circ\pi_n-\iota_{n-1}\circ\pi_{n-1}$ 给出：在 $\{n\}\times S$ 上为 $S\to\mathbb{Z}[S]$（其中我们约定 $\iota_{-1}\circ\pi_{-1}=0$）。特别地，$G(\{n\}\times S)$的值落在 P中，因此它延拓为一个映射$G\colon(\mathbb{N}\cup\{\infty\})\times S\to P$，该映射在 $\{\infty\}\times S$处消失，从而得到所需的分解。

对 (3.3.1) 进行固化，得到一个交换图

$$\begin{array}{ccc} (P\otimes\mathbb{Z}[S])^{L\square} & \xrightarrow{F} & \mathbb{Z}[S]^{L\square} \\ \wr\uparrow & & \uparrow \\ (P\otimes\mathbb{Z}[S])^{L\square} & \xrightarrow{G} & P^{L\square} \end{array} \tag{3.3.2}$$

其中左侧的竖直箭头是一个同构，而顶部的水平箭头具有由映射 $\{0\}\times S\to P\otimes\mathbb{Z}[S]$ 诱导的截面。由此可知，$\mathbb{Z}[S]^{L\square}$ 是 $P^{L\square}$ 的一个 retract，其幂等态射为 $r:P^{L\square}\to P^{L\square}$。要证明该映射确实是同构，我们需要证明 r 是恒等映射。为证明最后这个断言，注意图表 (3.3.1) 限制为一个图表

$$\begin{array}{ccc} P\otimes P & \xrightarrow{F} & P \\ {\scriptstyle (1-\mathrm{Shift})\otimes\mathrm{id}_P}\uparrow & & {\scriptstyle \mathrm{id}_P}\uparrow \\ P\otimes P & \longrightarrow & P \end{array}$$

通过包含映射 $P\subset\mathbb{Z}[S]$。事实上，映射 F 由 $\mathbb{Z}[S]$ 的自同态 $\mathrm{id}_{\mathbb{Z}[S]}-\iota_{n-1}\circ\pi_{n-1}$ 构成的序列给出，这些自同态限制为 P 的自同态 $\mathrm{id}_P-\iota_{n-1}\circ\pi_{n-1}$。取 solid 化后，我们得到

$$\begin{array}{ccc} (P\otimes P)^{L\square} & \xrightarrow{F} & P^{L\square} \\ \wr\uparrow & & {\scriptstyle \mathrm{id}_P}\uparrow \\ (P\otimes P)^{L\square} & \longrightarrow & P^{L\square}, \end{array} \tag{3.3.3}$$

并且由 (3.3.2) 得到的幂等映射 r 与由此得到的幂等映射相同，而后者就是恒等映射。 (3.3.3) □

现在，我们计算 P 的 solid 化。我们采用与引理 3.3.2 的证明中相同的技巧，用一个更简单的凝聚阿贝尔群替换 P。

引理 3.3.3。 设 $\prod_{\mathbb{N}}^{\mathrm{bnd}}\mathbb{Z}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\prod_{\mathbb{N}}\left(\mathbb{Z}\cap[-n,n]\subset\prod_{\mathbb{N}}\mathbb{Z}\right)$ 为有界整数序列构成的凝聚阿贝尔群。考虑由零序列$e_n\in\prod_{\mathbb{N}}^{\mathrm{bnd}}\mathbb{Z}$ 诱导的自然映射 $P\to\prod_{\mathbb{N}}^{\mathrm{bnd}}\mathbb{Z}$，其中 $e_n=(0,\ 0,\ \cdots,\ 0,\ 1,\ 0,\ \cdots)$，其中 e_n 除了第 n 个分量为 1 外，其余项均为零。则自然映射

$$P^{L\square}\to(\prod_{\mathbb{N}}^{\mathrm{bnd}}\mathbb{Z})^{L\square}$$

是一个同构。

证明。 我们断言存在一个交换方形

$$\begin{array}{ccc} P\otimes\prod_{\mathbb{N}}^{\mathrm{bnd}}\mathbb{Z} & \xrightarrow{F} & \prod_{\mathbb{N}}^{\mathrm{bnd}}\mathbb{Z} \\ {\scriptstyle (1-\mathrm{Shift})\otimes\mathrm{id}}\uparrow & & \uparrow \\ P\otimes\prod_{\mathbb{N}}^{\mathrm{bnd}}\mathbb{Z} & \xrightarrow{G} & P \end{array} \tag{3.3.4}$$

其中，顶部的水平箭头 F 由 $\geq n$ 分量上的投影 $\pi_{\geq n}$ 所给出的 $\prod_{\mathbb{N}}^{\mathrm{bnd}}\mathbb{Z}$ 的自同态零序列给出。为了证明这一断言，我们需要确认映射 $G=F\circ(1-\mathrm{Shift})$ 落在 P 中，但它由 $\prod_{\mathbb{N}}^{\mathrm{bnd}}\mathbb{Z}$ 的自同态零序列给出

该零序列由投影 $\pi_n = \pi_{\geq n} - \pi_{\geq n+1}$给出，其目标属于 P。对 (3.3.4) 进行 solid 化后，我们得到一个交换图表

$$\begin{array}{ccc} & \overset{\curvearrowleft}{} & \\ (P \otimes \prod_{\mathbb{N}}^{\mathrm{bnd}} \mathbb{Z})^{L\square} & \xrightarrow{F} & (\prod_{\mathbb{N}}^{\mathrm{bnd}} \mathbb{Z})^{L\square} \\ \wr\uparrow & & \uparrow \\ (P \otimes \prod_{\mathbb{N}}^{\mathrm{bnd}} \mathbb{Z})^{L\square} & \xrightarrow{G} & P^{L\square} \end{array}$$

使得上方的水平箭头有一个截面，该截面由张量第零个分量中的嵌入给出。于是，如引理 3.3.2 的证明中那样，可得到一个幂等自同态 $r\colon P^{L\square} \to P^{L\square}$，其 retract 为 $\mathbb{Z}[S]^{L\square}$；要证明 r 是恒等映射，只需注意到 (3.3.4) 限制为一个形如 (3.3.3) 的交换图，然后应用引理 3.3.2 证明中的论证。□

引理 3.3.4。定理 自然映射 $\prod_{\mathbb{N}^{\text{边界}}}\mathbb{Z} \to \prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}$ 在 *solid* 化中诱导一个同构 s

$$(\prod_{\mathbb{N}}^{\mathrm{bnd}} \mathbb{Z})^{L\square} = \prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}.$$

证明。 设 $\prod_{\mathbb{N}}^{\mathrm{bnd}} \mathbb{R} = \bigcup_n \prod_{\mathbb{N}} \left(\mathbb{R} \cap [-n, n]\right)$ 为凝聚实向量空间。我们有凝聚阿贝尔群的同构

$$\prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z} / \prod_{\mathbb{N}}^{\mathrm{bnd}} \mathbb{Z} = \prod_{\mathbb{N}} \mathbb{R} / \prod_{\mathbb{N}}^{\mathrm{bnd}} \mathbb{R}.$$

事实上，这是由我们有以下短正合列这一事实得出的

$$0 \to \prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z} \to \prod_{\mathbb{N}} \mathbb{R} \to \prod_{\mathbb{N}} \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to 0$$

and

$$0 \to \prod_{\mathbb{N}}^{\mathrm{bnd}} \mathbb{Z} \to \prod_{\mathbb{N}}^{\mathrm{bnd}} \mathbb{R} \to \prod_{\mathbb{N}} \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to 0.$$

特别地，商 $\prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z} / \prod_{\mathbb{N}}^{\mathrm{bnd}} \mathbb{Z}$ 可以赋予凝聚 $\mathbb{R}$-向量空间的结构，因此根据推论 3.2.6，它的 solid 化为零。这表明

$$(\prod_{\mathbb{N}}^{\mathrm{bnd}} \mathbb{Z})^{L\square} = (\prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z})^{L\square} = \prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}$$

正如所需。 □

推论 3.3.5。 设 $S = \lim_{\longleftarrow n} S_n$ 是一个轻射有限集，则我们有自然同构

$$\mathbb{Z}_\square[S] = R\underline{\mathrm{Hom}}(C(S, \mathbb{Z}), \mathbb{Z})$$

and

$$C(S, \mathbb{Z}) = R\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{Z}_\square[S], \mathbb{Z}).$$

证明。 第一个同构由以下事实得出：$C(S, \mathbb{Z}) = \lim_{\longrightarrow n} C(S_n, \mathbb{Z})$，且 $\mathbb{Z}_\square[S] = \lim_{\longleftarrow n} \mathbb{Z}[S_n]$。第二个同构由左伴随 $(-)^{L\square}$ 得出

$$R\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{Z}_\square[S], \mathbb{Z}) = R\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{Z}[S], \mathbb{Z}) = C(S, \mathbb{Z}).$$

□

推论 3.3.6。 定理 *3.3.1* 成立。此外，对于 I 和 J 可数集，自然映射 $\prod_I \mathbb{Z} \otimes^L_\square \prod_J \mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \prod_{I\times J} \mathbb{Z}$ 是一个同构。特别地， $\otimes^L_\square$ 是 $\otimes_\square$ 的左导出函子。

证明。 定理的结论 (1)-(3) 已在命题 3.2.5 中证明。由引理 3.3.2 至 3.3.4 可知，对于 I 可数集，$\mathbb{Z}[S]^\square \simeq \prod_I \mathbb{Z}$ 作为 solid 阿贝尔群在抽象意义下成立。根据这些引理中构造的显式同构，可以验证前述同构实际上与自然箭头一致

$$\mathbb{Z}[S]^{L\square} \xrightarrow{\sim} \varprojlim_n \mathbb{Z}[S_n]. \tag{3.3.5}$$

更明确地说，根据引理 3.3.3 和 3.3.4 的证明，这对 P 成立。特别地，对于可数的 I，我们有自然同构 $R\mathrm{Hom}$函子$(\prod_I \mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = \bigoplus_I \mathbb{Z}$和 $R\mathrm{Hom}$函子$(\bigoplus_I \mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = \prod_I \mathbb{Z}$。这表明对象 $\mathbb{Z}[S]^{L\square}$ 关于 $\mathbb{Z}$是自反的，因此只需证明映射 (3.3.5) 在取对偶后成为同构。这可由以下事实得出：

$$R\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{Z}[S]^{L\square}, \mathbb{Z}) = R\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{Z}[S], \mathbb{Z}) = C(S, \mathbb{Z})$$
$$= \varinjlim_i C(S_i, \mathbb{Z}) = \varinjlim_i R\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{Z}[S_i], \mathbb{Z}) = R\underline{\mathrm{Hom}}(\varprojlim_i \mathbb{Z}[S_i], \mathbb{Z}),$$

其中在最后一个等式中，我们使用了根据命题 2.1.7，$\lim_{\longleftarrow i} \mathbb{Z}[S_i]$ 与 $\prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}$ 同构这一事实。

另一方面，我们有一个 $P \times P \xrightarrow{\sim} P$ 同构，它由取一个反对角线给出 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$的枚举。这表明

$$\prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z} \otimes^L_\square \prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z} \cong (P \otimes P)^{L\square} \cong P^{L\square} \cong \prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}. \tag{3.3.6}$$

对该枚举的明确描述表明，同构 (3.3.6) 由自然映射给出

$$\prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z} \otimes^L_\square \prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \prod_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \mathbb{Z}.$$

□

凝固化函子的第一个有趣性质是，它计算 CW 复形的奇异上同调。

命题 3.3.7。 设 X 为一个 *CW* 复形，则 $\mathbb{Z}[X]^{L\square}$ 与 X中的奇异链复形等价。

证明。将 X 写成有限 CW 复形的余极限后，只需构造 $\mathbb{Z}[X]^{L\square}$ 与 X的链复形之间的自然拟同构，因此我们可以假设 X 是紧对象。设 $S \to X$ 是从一个轻射有限集出发的满射，其 Čech 神经为 $S_\bullet \to X$。我们有一个分解

$$\cdots \to \mathbb{Z}[S_2] \to \mathbb{Z}[S_1] \to \mathbb{Z}[S_0] \to \mathbb{Z}[X] \to 0$$

这证明了 $\mathbb{Z}[X]^{L\square}$ 由连通复形给出。

$$\cdots \to \mathbb{Z}_\square[S_2] \to \mathbb{Z}_\square[S_1] \to \mathbb{Z}_\square[S_0] \to 0.$$

根据推论 3.3.5，复形 $\mathbb{Z}[X]^{L\square}$ 是自反的；要将它与奇异链自然地识别，只需将其对偶与奇异上链自然地识别。但

$$R\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{Z}[X]^{L\square}, \mathbb{Z}) = R\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{Z}[X], \mathbb{Z}) = R\Gamma_{\mathrm{cond}}(X, \mathbb{Z})$$

是 X 的凝聚上同调；根据命题 2.3.8，我们已将其识别为 X 上的层上同调，因此也识别为奇异上链。□

3.4. **的平坦性以及范畴 Solid 的结构**。本节证明定理 3.2.4 的最后一部分，即 $\prod_{\mathbb{N}}\mathbb{Z}$ 作为 solid 阿贝尔群的平坦性。证明策略首先从描述所有有限表示 solid 阿贝尔群开始。

定义 3.4.1。 若一个 solid 阿贝尔群是 $\prod_{\mathbb{N}}\mathbb{Z}$ 的商，则称其为有限生成的。若一个 solid 阿贝尔群是映射 $\prod_{\mathbb{N}}\mathbb{Z}\to\prod_{\mathbb{N}}\mathbb{Z}$ 的余核，则称其为有限表示的；等价地，若它在 solid 阿贝尔群范畴中是紧对象，则称其为有限表示的。

定理 3.4.2。 Solid 中的有限表示对象构成一个阿贝尔范畴，并且在Solid中对核、余核和扩张封闭，使得 Solid $=\mathrm{Ind}(\mathrm{Solid}^{\mathrm{finpres}})$。此外，任意 $M\in\mathrm{Solid}^{\mathrm{finpres}}$ 都有一个分解

$$0\to\prod_{\mathbb{N}}\mathbb{Z}\to\prod_{\mathbb{N}}\mathbb{Z}\to M\to 0.$$

$\prod_{\mathbb{N}}\mathbb{Z}$的平坦性是一个直接推论。

推论 3.4.3。 *solid* 阿贝尔群 $\prod_{\mathbb{N}}\mathbb{Z}$ 对 *solid* 张量积是平坦的。

证明。 由于 Solid $=\varinjlim(\mathrm{Solid}^{\mathrm{finpres}})$，只需证明对于一个 M 有限表示的 solid 阿贝尔群，$M\otimes^L_{\square}\prod_{\mathbb{N}}\mathbb{Z}$ 集中于 0 次。由定理 3.4.2 可得一个分解

$$0\to\prod_{\mathbb{N}}\mathbb{Z}\to\prod_{\mathbb{N}}\mathbb{Z}\to M\to 0.$$

与 $\prod_{\mathbb{N}}\mathbb{Z}$ 作张量积，并利用推论 3.3.6，可知

$$M\otimes^L_{\square}\prod_{\mathbb{N}}\mathbb{Z}=\prod_{\mathbb{N}}M$$

显然，它集中于 0 次。 □

为了证明定理 3.4.2，我们需要以下引理。

引理 3.4.4。 $\prod_{\mathbb{N}}\mathbb{Z}$ 的任意有限生成子模都同构于 $\prod_I\mathbb{Z}$，其中 I 可数。

证明。 设 $M\subset\prod_{\mathbb{N}}\mathbb{Z}$ 是一个有限生成子对象，那么 M 是某个映射 $f\colon\prod_{\mathbb{N}}\mathbb{Z}\to\prod_{\mathbb{N}}\mathbb{Z}$的像，而该映射是以下映射的对偶

$$g:\bigoplus_{\mathbb{N}}\mathbb{Z}\to\bigoplus_{\mathbb{N}}\mathbb{Z}. \tag{3.4.1}$$

若 M 是离散的，则映射 f 可分解为映射 $\mathbb{Z}^k\to M$，且满足 $k\in\mathbb{N}$，这意味着M 作为离散阿贝尔群是有限生成的。由于 M 是无挠的，它是有限秩自由的，因此同构于 $\prod_I\mathbb{Z}$，其中 I 有限。因此，不失一般性，我们可以假设 M 不是离散的；在这种情况下，我们将证明 $M\cong\prod_{\mathbb{N}}\mathbb{Z}$。

我们需要以下断言：

断言。 设 N 是一个嵌入某个 $\mathbb{Z}$的直积中的可数阿贝尔群，则 N 是自由群。

断言的证明。 取 $\mathbb{Q}\otimes N$ 的一组基 $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，并令 $N_n=\langle e_0,\dots,e_n\rangle_{\mathbb{Q}}\cap N$。只需证明每个 N_n 都是有限秩自由的，也就是说，我们有 $N=\varinjlim_n N_n$，且商 N_{n+1}/N_n 无挠。不失一般性，我们可以假设 $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset N$。于是，只需证明 $M_n=N_n/\langle e_1,\dots,e_n\rangle_{\mathbb{Z}}$ 是有限的。假设它不是有限的，那么我们可以找到元素 $x_m\in M_n$，它们对于 $m\in\mathbb{N}$ 恰好具有 b_m 挠，使得 $b_m\to\infty$ 如 $m\to\infty$。取 x_m 的提升 $y_m\in N_n$，这意味着 $y_m=\sum_{i=0}^n {}^{c_i}{}_{,d_i}{}^{m}{}_{,m}e_i$，其系数满足以下性质：

- $c_{i,m}=0$ or $\mathrm{GCD}(c_{i,m}d_{i,m})=1$,
- $\mathrm{lcm}(d_{i,m})=b_m$.

根据假设， N 嵌入 $\prod_I \mathbb{Z}$。于是，存在某个投影 $\prod_I \mathbb{Z} \to \prod_{J\subset I} \mathbb{Z}$，使得 J 有限，且元素 $\{e_1, \ldots, e_n\}$ 的像线性无关，由此可证，对于 $m >> 0$，元素 y_m 不可能被映射到 $\prod_{i=0}^{k} \mathbb{Z}$ 中，使得 $b_m \to \infty$ 与 $m \to \infty$ 一样，这与假设矛盾。这就证明了该断言。□

我们可以将 (3.4.1) 中的映射 $g = j \circ h$ 分解为一个分裂满射 $h\colon \bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{Z} \to M$ 和一个单射 $j\colon M \to \bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}$。于是可以写出短正合列

$$0 \to K \to \bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{Z} \xrightarrow{h} M \to 0$$

and

$$0 \to M \xrightarrow{j} \bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{Z} \to Q \to 0$$

w其中 M 和 K 是自由阿贝尔群。取对偶后，我们得到正合序列

$$0 \to M^\vee \to \prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z} \to K^\vee \to 0$$

and

$$0 \to \underline{\mathrm{Hom}}(Q, \mathbb{Z}) \to \prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z} \to M^\vee \to \underline{\mathrm{Ext}}^1(Q, \mathbb{Z}) \to 0.$$

那么，复合映射

$$\prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z} \to K^\vee$$

为零，因此不失一般性，我们可以假设 $K = 0$，从而 g 是单射。因此，我们有一个正合序列

$$0 \to \bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{Z} \xrightarrow{g} \bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{Z} \to Q \to 0. \tag{3.4.2}$$

考虑自然映射

$$Q \to \prod_{\mathrm{Hom}(Q,\mathbb{Z})} \mathbb{Z}$$

并令 $\overline{Q}$ 为其像。根据前面的断言， Q 是自由阿贝尔群，因此 $Q \to \overline{Q}$ 是分裂满射。因此，通过去掉自由直和项，我们可以不失一般性地假设 $\mathrm{Hom}(Q, \mathbb{Z}) = 0$。那么，实际上有 $\mathrm{Hom}(Q, \mathbb{Z}) = 0$，也就是说，Hom 空间的 S-值点等于 $\mathrm{Hom}(Q, C(S, \mathbb{Z}))$，并且 $C(S, \mathbb{Z})$ 是一个自由 $\mathbb{Z}$-模。由此可得，(3.4.2) 的对偶是短正合列

$$0 \to \prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z} \to \prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z} \to \underline{\mathrm{Ext}}^1(Q, \mathbb{Z}) \to 0,$$

从而得到 f 的像同构于 $\prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}$，如所需。□

定理 *3.4.2* 的证明。 根据引理 3.4.4 的证明，任何有限表示模 $M \in$Solid 都可写成 $M = \prod_I \mathbb{Z} \oplus \mathrm{Ext}^1(Q, \mathbb{Z})$ 的形式，其中 I 是一个可数集， Q 是一个可数阿贝尔群，且 $\mathrm{Hom}(Q, \mathbb{Z}) = 0$。对一个自由分解取对偶

$$0 \to \bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{Z} \to \bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{Z} \to Q \to 0,$$

我们得到一个表示

$$0 \to \prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z} \to \prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z} \oplus \prod_{I} \mathbb{Z} \to M \to 0$$

证明定理的第二个陈述。随后，有限表现固态模在核、余核和扩张下的稳定性，对于有限表示

对象可由紧投射生成元分解的阿贝尔范畴而言，是一个标准事实（即伪紧或伪凝聚，参见 [Sta22, Tag 064N] ，关于环上的模的情形）。□

3.5. **solid 张量积的例子**。 我们以一些在实践中经常出现的 solid 张量积计算，来结束对凝实阿贝尔群的讨论。

例3.5.1 （幂级数环）。 设 $\mathbb{Z}[[q]]$ 为视为凝聚环的一元幂级数环。它是一个 solid 阿贝尔群，因为 $\mathbb{Z}[[q]] = \lim_{\longleftarrow n} \mathbb{Z}[q]/q^n$ 是离散模的极限。事实上，若 $\mathbb{Z}[\widehat{q}] = \mathbb{Z}[\mathbb{N} \cup \{\infty\}]/(\infty)$是零序列代数，见命题 3.1.3，则我们有$\mathbb{Z}[\widehat{q}]^{L\square} = \mathbb{Z}[[q]]$。推论 3.3.6 表明

$$\mathbb{Z}[[q_1]] \otimes^L_\square \mathbb{Z}[[q_2]] = \mathbb{Z}[[q_1, q_2]].$$

另一方面，代数同态 $\mathbb{Z}[q] \to \mathbb{Z}[[q]]$ 在视为凝实代数时是幂等的，即

$$\mathbb{Z}[[q]] \otimes^L_{\mathbb{Z}[q]} \mathbb{Z}[[q]] = (\mathbb{Z}[[q_1]] \otimes^L_\square \mathbb{Z}[[q_2]]) \otimes^L_{\mathbb{Z}[q_1 - q_2]} \mathbb{Z} = \mathbb{Z}[[q_1, q_2]] \otimes^L_{\mathbb{Z}[q_1 - q_2]} \mathbb{Z} = \mathbb{Z}[[q_1, q_2]]/^{\mathbb{L}}(q_1 - q_2) = \mathbb{Z}[[q]],$$

其中 $\mathbb{Z}[[\, q_1,\ q_2]]/^{\mathbb{L}}(q_1 - q_2)$ 是导出商，由一个 Koszul 复形表示 x.

例 3.5.2 (p-进整数)。 p-进整数 $\mathbb{Z}_p = \lim_{\longleftarrow n} \mathbb{Z}/p^n$ 是一个凝实阿贝尔群，因为它是离散阿贝尔群的极限。我们有一个凝实阿贝尔群的短正合列

$$0 \to \mathbb{Z}[[X]] \xrightarrow{X-p} \mathbb{Z}[[X]] \to \mathbb{Z}_p \to 0,$$

事实上，这是以下短正合列的极限

$$0 \to \mathbb{Z}[X]/X^n \xrightarrow{X-p} \mathbb{Z}[X]/X^n \to \mathbb{Z}/p^n \to 0.$$

因此，张量 $\mathbb{Z}_p \otimes^L_\square \mathbb{Z}[[Y]]$ 不过就是 $\mathbb{Z}_p[[Y]]$。
On t另一方面，张量积 $\mathbb{Z}_p \otimes^L_\square \mathbb{Z}_\ell$ 由复形表示

$$\mathbb{Z}_p[[X]] \xrightarrow{X-\ell} \mathbb{Z}_p[[X]],$$

若 $\ell \neq p$，则 $\mathbb{Z}_p \otimes^L_\square \mathbb{Z}_\ell = 0$；而若 $\ell = p$，我们得到 $\mathbb{Z}_p \otimes^L_\square \mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}_p$。特别地， $\mathbb{Z}_p$ 是 solid 张量积下的幂等$\mathbb{Z}$-代数。换言之，作为一个 $\mathbb{Z}_p$-模并非额外结构，而是 solid 阿贝尔群所具有的一种性质！

例 3.5.3 （I-进完备模）。 给定一个离散环 A 和 I 一个有限生成理想，可以定义导出意义下的 I-进完备性（见 [Man22b，定义 2.12.3] 及[Sta22，标签 091N]）。当 $I = (a)$ 由单个元素生成，且 $A \xrightarrow{a} A$ 是由 a给出的乘法时，导出范畴中的一个（凝聚） A-模对象 C 是 I-进完备的，当且仅当由沿复形$A \xrightarrow{a} A$的乘法给出的极限 $R\lim_{\longleftarrow a} C = 0$ 消失。若将 $J \to A$ 记作 $A \xrightarrow{a} A$，则可以把 J 视为一个广义 Cartier 除子，即一个可逆 A-模及一个映射 $J \to A$。我们可以通过张量积定义 J 的幂，从而得到广义 Cartier 除子 $J^n \to A$。于是，一个 A-模 C 是导出意义下 I-进完备的，当自然映射

$$C \to R\lim_{\longleftarrow} C/^{\mathbb{L}} J^n,$$

其中，商 $C/^{\mathbb{L}} J^n$ 是沿着导出环映射 $A \to A/^{\mathbb{L}} J^n$ 的推出，而 $A/^{\mathbb{L}} J^n$ 是由 Koszul 复形 $J \to A$ 给出的微分分次代数。

根据 [Man22b，引理 2.12，若 A 是有限生成的 $\mathbb{Z}$-代数，且 N， M 是连通的导出 I-进完备模，则 $N \otimes^L_{A,\ \square} M$ 也导出 I-进完备（此处的张量积是附属于 Solid 中交换环对象的自然张量积，等价地说，它是 A 上凝聚张量积的 solid 化）。

例 3.5.4 （ $\mathbb{Q}_p$-巴拿赫空间的张量积）。 将例 3.5.3 特化到巴拿赫空间，可得如下计算：设 I 和 J 是两个可数集，则

$$\widehat{\bigoplus_I}\mathbb{Q}_p \otimes^L_{\mathbb{Q}_p,\square} \widehat{\bigoplus_J}\mathbb{Q}_p = \widehat{\bigoplus_{I\times J}}\mathbb{Q}_p. \tag{3.5.1}$$

要证明这一点，由于 $\bigoplus_I \mathbb{Q}_p = (\bigoplus_I \mathbb{Z}_p)[\frac{1}{p}]$ 只需对 $\mathbb{Z}_p$进行相应的计算。根据例 3.5.2，环 $\mathbb{Z}_p$ 是一个幂等的 solid $\mathbb{Z}$-代数，因此 $\mathbb{Z}$-solid 张量积和 $\mathbb{Z}_p$-solid 张量积相同。然后，例 3.5.3 表明，solid 张量积

$$\widehat{\bigoplus_I}\mathbb{Z}_p \otimes^L_{\square} \widehat{\bigoplus_J}\mathbb{Z}_p$$

是 p-进完备的，因此它等于

$$R\varprojlim_n (\bigoplus_I \mathbb{Z}/p^n \otimes^L_{\square} \bigoplus_J \mathbb{Z}/p^n) = R\varprojlim_n \bigoplus_{I\times J} \mathbb{Z}/p^n = \widehat{\bigoplus_{I\times J}}\mathbb{Z}_p.$$

关于这一事实的更直接证明，参见 [RJRC22，引理 3.13]。

例 3.5.5 （弗雷歇空间的张量积）。 弗雷歇 $\mathbb{Q}_p$-向量空间按定义是[6] 巴拿赫空间的序列极限 $F = \varprojlim_n V_n$，特别地，它们自然是 solid $\mathbb{Q}_p$-向量空间。若 $G = \varprojlim_n W_n$ 是另一个弗雷歇空间，则

$$F \otimes^L_{\square} G = \varprojlim_n (V_n \otimes_{\square} W_n)$$

是经典泛函分析中的射影张量积。特别地，对于可数集 I与 J，我们得到

$$\prod_I \mathbb{Q}_p \otimes^L_{\square} \prod_J \mathbb{Q}_p = \prod_{I\times J} \mathbb{Q}_p.$$

关于这一事实的证明，可参见例如 [RJRC22，引理3.28]。

4. Analytic rings

代数几何的基本构件由交换环给出。在解析几何中，基本构件是所谓的“解析环”。解析环这一概念源于以下诉求：

- 一个解析环 A 应当具有一个底层的“拓扑”环或凝聚环 $A^\triangleright$。
- 一个解析环 A 应当配备完备 A-模的范畴$\mathrm{D}(A)$，以及一个完备张量积 $\otimes_A$。

在下一节中，我们将引入解析环，并证明它们的一些最基本的性质。我们将看到，该理论新的轻基础如何有助于构造解析环的新例子。在此之前，我们给出∞-范畴中轻凝聚对象的一般定义：

定义 4.0.1. 设 $\mathscr{C}$ 是一个具有可数极限的 ∞-范畴。轻型凝聚$\mathscr{C}$对象的范畴记作 $\mathrm{Cond}(\mathscr{C})^{\mathrm{light}}$，它是由轻型前有限集上的、取值于 $\mathscr{C}$ 的超层组成的 ∞-范畴 $\widehat{\ }\mathrm{Shv}(\mathrm{Prof}^{\mathrm{light}}, \mathscr{C})$。等价地，它是满足以下条件的函子 $T\colon \mathrm{Prof}^{\mathrm{light},\ \mathrm{op}} \to \mathscr{C}$ 的全子范畴：

(1) $T(\emptyset) = *$其中 $*$是 $\mathscr{C}$的终对象。(2) $T(S_1 \sqcup S_2) = T(S_1) \times T(S_2)$

[6]更经典的定义是一个拓扑空间，其拓扑由可数族半范数给出。对这些半范数取完备化，并转到相应的凝聚集合，就得到例子中描述的定义。

(3) 对于轻投射有限集的超覆盖 $S_\bullet \to S$ ， anima 的自然映射

$$T(S) \to \mathrm{Tot}(T(S_\bullet)) = \varprojlim_{[n]\in\Delta} T(S_\bullet)$$

是一个等价。

例 4.0.2. 轻凝聚anima的范畴定义为 CondAni := Cond(Ani)。类似地，若 Ring[7] 表示动画环的 ∞ -范畴，则凝聚动画环的范畴定义为 CondRing :=Cond(Ring)。

备注 4.0.3. 设 $\mathcal{C}$ 为一个可呈示的 ∞-范畴，其中整体化与 $\aleph_1$-滤过余极限交换（例如，一个 $\aleph_1$-紧生成的可呈示 ∞-范畴）。则 Cond($\mathscr{C}$)^{light} $\subset$ Cond($\mathscr{C}$) 是所有凝聚 $\mathscr{C}$-对象的全子范畴（见 [Man22b，定义 2.1.1]），使得对于$S = \lim_{\longleftarrow i} S_i$ 一个写成轻投射有限集的 $\aleph_1$-余滤极限的投射有限集，自然映射

$$\varinjlim_i T(S_i) \to T(S)$$

是一个等价。

4.1. 初步定义与性质。 我们希望为解析几何定义一些基本构件，从而可以自然地附上一个“完备模”范畴。事实表明，在凝聚数学中，一个凝聚环的完备模范畴是额外的数据；给定一个凝聚环 A ，完备化凝聚 A-模的方式可能非常不同，且其中任何一种都不应被优先选择。尽管如此，一旦“完备模”范畴被固定，成为完备模就应当只是一种性质。

另一方面，导出代数几何 [Lur04, Toe14]表明，研究代数簇的几何性质（如交）的正确框架是高阶范畴论。在解析几何中，对高阶范畴论和高阶代数（采用 [Lur09, Lur17, Lur18] 的形式）的需求更加显著：刚性空间或复空间的开局部化甚至都不是平坦的。尤其是，获得真正有用的新下降结果的唯一途径，就是考察模的导出 ∞-范畴。

对解析环这一概念的这些要求，在以下定义中得到了形式化（参见 [CS20, 定义 12.1 和命题 12.20] 以及 [Man22b, 定义 2.3.1]）。

定义 4.1.1 （解析环）。 未完备解析环 是一个对 $A = (A^\triangleright, \mathrm{D}(A))$，由一个凝聚动画环 $A^\triangleright$ 和凝聚 $A^\triangleright$-模的 ∞-范畴中的一个全子范畴 D(A) $\subset$ D($A^\triangleright$) 构成，并满足以下性质。

(1) D(A) 在 D($A^\triangleright$) 中对极限与余极限稳定（由[RS22]可知其自动可呈示）。(2) D(A) 在 D(CondAb)[8] 上是线性的。更精确地说，对所有 $C \in$D(CondAb) 与 $M \in$D(A)，对象 R Hom函子$\mathbb{Z}(C, M)$ 属于 D(A)。(3) 左伴随 F （由伴随函子定理 [Lur09，推论 5.5.2.9] 可知其存在）将连通对象映为连通对象。特别地，D(A) 具有由 D($A^\triangleright$) 诱导的自然 t-结构（见命题 4.1.8）。

- 我们称 A 是 $A^\triangleright$ 的未完备解析环结构。最后，如果还有 $A^\triangleright \in$ D(A)，我们就称 A 为解析环。我们常用 $A \otimes_{A^\triangleright} -$ 表示左伴随 F （注意这里省略了导出记号）。

[7]由于我们系统地使用高阶范畴，用 Ring 表示动画环范畴而非集合中交换环的经典范畴更为自然。从非导出世界到导出世界的记号变更将在本笔记其余部分反复出现。[8]该条件意味着 D(A) 实际上以凝聚阿贝尔群充实。它可以启发式地视为 D(A) 的一种适当的“连续性”或“凝聚”条件。

- 给定一个凝聚（动画）集合 T，我们令 $A[T] := A \otimes_{A^\triangleright} A^\triangleright[T]$，其中 $A^\triangleright[T]$ 是由 T 生成的自由 $A^\triangleright$-模。
- 解析环态射 $f\colon A \to B$ 是动画凝聚环的态射 $f\colon A^\triangleright \to B^\triangleright$，使得遗忘函子 $f_*\colon \mathrm{D}(B^\triangleright) \to \mathrm{D}(A^\triangleright)$ 将 $\mathrm{D}(B)$ 映至 $\mathrm{D}(A)$。
- 我们用 AnRing^{un} 表示未完备解析环的 ∞-范畴。令 $\mathrm{AnRing} \subset \mathrm{AnRing}^{un}$ 为（完备）解析环的全子范畴。

Remark 4.1.2. 定义 4.1.1 的条件 (2) 等价于以下条件：

(2') 对所有 $C \in \mathrm{D}(A^\triangleright)$ 和 $M \in \mathrm{D}(A)$，则 $R\underline{\mathrm{Hom}}_{A^\triangleright}(C, M)$ 属于 $\mathrm{D}(A)$。

事实上，只需分别在 $\mathrm{D}(A^\triangleright)$ 和 $\mathrm{D}(\mathrm{CondAb})$ 的生成元上检验条件 (2') 和 (2)。于是，不失一般性，我们可以假设 $C = A^\triangleright[S]$ or $C = \mathbb{Z}[S]$ for$S \in \mathrm{Prof}^{\mathrm{light}}$。在这种情况下，我们有

$$R\underline{\mathrm{Hom}}_{A^\triangleright}(A^\triangleright[S], M) = R\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[S], M).$$

备注 4.1.3。 回想一下，在新基础中我们使用轻投射有限集，因此对于一个凝聚动画环 $A^\triangleright$，范畴 $\mathrm{D}(A^\triangleright)$ 是可呈示的。根据反射原理 [RS22]，完备 A-模的范畴 $\mathrm{D}(A)$ 也是一个可呈范畴。

例 4 .1.4. 到目前为止，我们实质上只见过解析环的两个例子。

(1) 初始解析环是 $\mathbb{Z}^{\mathrm{cond}} := (\mathbb{Z}, \mathrm{D}(\mathrm{CondAb}))$，也就是凝聚整数环。更一般地，给定一个凝聚动画环 $B^\triangleright$，我们将 $B^{\triangleright,\mathrm{cond}} = (B^\triangleright, \mathrm{D}(B^\triangleright))$ 记作 $B^\triangleright$ 上的平凡解析环结构。(2) 一个更"完备"的解析环是 $\mathbb{Z}_\square = (\mathbb{Z}, \mathrm{D}(\mathrm{Solid}))$，也就是凝聚整数环。稍后在第 5 节中，我们将介绍更多源自立体几何的解析环例子。(3) 其他解析环包括 [CS20] 的液态环，以及第 1.4 节的气态环；从某种意义上说，这些环是全局的，因为它们在零序列子环$\mathbb{Z}[\widehat{q}] \subset \mathbb{Z}[[q]]$ 上定义了解析环结构，并能将其特化为所有类型局部域（实数、 p-进数以及模 p）上的解析环结构。(4) 在第 4.6 节中，我们将讨论构造解析环的一般方法。这解决了凝聚数学早期基础中的一个问题，即构造解析环的困难。

凝聚环通过平凡解析环结构全忠实地嵌入解析环中。

引理 4.1.5. 函子 $F\colon \mathrm{CondRing} \to \mathrm{AnRing}^{un}$ 将凝聚环 $A^\triangleright$ 映射到 $A^{\triangleright,\mathrm{cond}}$ 是全忠实的。此外，F 有一个右伴随，它将未完备解析环 B 映射到其底层凝聚环 $B^\triangleright$。

证明。 根据定义，给定两个未完备解析环 A 和 B，映射空间 $\mathrm{Map}_{\mathrm{AnRing}^{un}}(A, B)$ 是 $\mathrm{Map}_{\mathrm{CondRing}}(A^\triangleright, B^\triangleright)$ 的全子空间，其中遗忘函子 $\mathrm{D}(B^\triangleright) \to \mathrm{D}(A^\triangleright)$ 将B-完备对象映射为 A-完备对象。若 A 具有平凡解析环结构，则这一条件显然成立，由此得到

$$\mathrm{Map}_{\mathrm{AnRing}^{un}}(A^\triangleright, B) = \mathrm{Map}_{\mathrm{CondRing}}(A^\triangleright, B^\triangleright),$$

从而证明其全忠实性和伴随关系。 □

未完备解析环的完备模范畴具有自然的对称幺半结构。

命题 4.1.6 ([CS20，命题 12。4] 和 [Man22b，命题 2.3。2])。 范畴 $\mathrm{D}(A)$ 具有唯一的对称幺半结构 $\otimes_A$，使 $A \otimes_{A^\triangleright} -\colon \mathrm{D}(A^\triangleright) \to \mathrm{D}(A)$ 成为对称幺半的。此外，给定一个解析环态射 $A \to B$，函子

$$\mathrm{D}(A^\triangleright) \xrightarrow{B^\triangleright \otimes_{A^\triangleright} -} \mathrm{D}(B^\triangleright) \xrightarrow{B \otimes_{B^\triangleright}} \mathrm{D}(B)$$

（唯一地）通过一个函子分解

$$\mathrm{D}(A^{\triangleright}) \xrightarrow{A\otimes_{A^{\triangleright}}-} \mathrm{D}(A) \xrightarrow{B\otimes_{A}-} \mathrm{D}(B).$$

T函子 $B\otimes_A -$ 是遗忘函子 $\mathrm{D}(B) \to \mathrm{D}(A$ 的左伴随).

证明。 要证明 $\mathbf{D}(A)$ 具有自然对称幺半结构，使得 $A\otimes_{A^{\triangleright}}$ 是对称幺半的，只需证明完备化函子的核 K 是一个 $\otimes$-理想，这由 [NS18, 定理 I.3.6] 得出。设 $M \in \mathbf{D}(A^{\triangleright})$ 满足 $A\otimes_{A^{\triangleright}} M = 0$，并设 $C \in \mathbf{D}(A^{\triangleright})$。那么，对于 $N \in \mathbf{D}(A)$，我们有

$$\begin{aligned} R\underline{\mathrm{Hom}}_{A^{\triangleright}}(A \otimes_{A^{\triangleright}} (C \otimes_{A^{\triangleright}} M), N) &= R\underline{\mathrm{Hom}}_{A^{\triangleright}}(C \otimes_{A^{\triangleright}} M, N) \\ &= R\underline{\mathrm{Hom}}_{A^{\triangleright}}(M, R\underline{\mathrm{Hom}}_{A^{\triangleright}}(C, N)) \\ &= R\underline{\mathrm{Hom}}_{A^{\triangleright}}(A \otimes_{A^{\triangleright}} M, R\underline{\mathrm{Hom}}_{A^{\triangleright}}(C, N)) \\ &= 0, \end{aligned}$$

其中，前两个等式是显然的伴随关系，第三个等式成立是因为根据定义 4.1.1 的（2）（参见注记 4.1.2），$R\mathbf{Hom}_{A^{\triangleright}}(C, N)$ 是 A-完备的。由此可得 $A \otimes_{A^{\triangleright}} (C \otimes_{A^{\triangleright}} M) = 0$，正如所需。

现在，为了证明复合映射

$$\mathrm{D}(A^{\triangleright}) \xrightarrow{B^{\triangleright}\otimes_{A^{\triangleright}}-} \mathrm{D}(B^{\triangleright}) \xrightarrow{B\otimes_{B^{\triangleright}}} \mathrm{D}(B)$$

经由 $\mathbf{D}(A)$ 分解，只需证明它消去 $A\otimes_{A^{\triangleright}}$ 的核（这样得到的函子便立即是对称幺半的）。设 $M \in \mathbf{D}(A)$ 是一个被 A-完备化消去的对象，并设 $K \in \mathbf{D}(B)$，则

$$\begin{aligned} R\underline{\mathrm{Hom}}_{B^{\triangleright}}(B \otimes_{B^{\triangleright}} (B^{\triangleright} \otimes_{A^{\triangleright}} M), K) &= R\underline{\mathrm{Hom}}_{B^{\triangleright}}(B^{\triangleright} \otimes_{A^{\triangleright}} M, K) \\ &= R\underline{\mathrm{Hom}}_{A^{\triangleright}}(M, K) \\ &= R\underline{\mathrm{Hom}}_{A^{\triangleright}}(A \otimes_{A^{\triangleright}} M, K) \\ &= 0, \end{aligned}$$

其中前三个等式来自伴随，最后一个等式则由定义可知：K 是一个 A-完备模，因为它是解析环。□

备注 4.1.7。 设 A 是一个解析环。那么 $A[*]$ 是 $\mathbf{D}(A)$ 中的紧投射对象，且其自态射 $\mathbf{End}_A(A[*])$ 为 $= A^{\triangleright}(*)$。由此得到一个模范畴的对称幺半全忠实嵌入

$$\mathrm{D}(A^{\triangleright}(*)) \hookrightarrow \mathrm{D}(A)$$

它将 $\mathbb{Z}$-模范畴中的 $A^{\triangleright}(*)$-模范畴映入完备 A-模范畴。我们将此映射的本质像称为离散 A-模的全子范畴，并记作 $\mathbf{D}^{\delta}(A)$。

注意，$M \in \mathbf{D}^{\delta}(A)$ 中的对象不一定是离散的凝聚集合，例如，$A^{\triangleright}$ 可能具有非离散的凝聚结构。然而，模 M 相对于 $A^{\triangleright}$ 是离散的，因为它属于包含 $A^{\triangleright}$ 且对余极限稳定的最小完备 A-模全子范畴。

解析环上模的完备 化可以通过上同调群来判定。

命题 4.1.8 ([CS20，命题 12。4])。 设 A 是一个解析环。对象 $M \in \mathrm{D}(A^{\triangleright})$是 A-完备的，当且仅当对所有 $i \in \mathbb{Z}$，$\pi_i(M) = H^{-i}(M)$ 都是 A-完备的。

证明。 我们先证明该陈述对连通对象成立（即集中于正的同调次数）。令 $M \in \mathbf{D}(A)^{\geq 0}$，并考虑纤维序列

$$\pi_{\geq 1}M \to M \to \pi_0 M.$$

取完备化后，我们得到一个纤维序列

$$A \otimes_{A^\triangleright} (\pi_{\geq 1} M) \to M \to A \otimes_{A^\triangleright} (\pi_0 M).$$

由于完备化保连通对象，对 ≥ 1 进行截断后，我们得到一个映射

$$A \otimes_{A^\triangleright} (\pi_{\geq 1} M) \to \pi_{\geq 1} M$$

它表明 $\pi_{\geq 1} M$ 是 $A \otimes_{A^\triangleright} (\pi_{\geq 1} M)$ 的一个 retract。由于 $\mathrm{D}(A)$ 对余极限稳定，我们由此推出 $\pi_{\geq 1} M$，因此 $\pi_0(M)$ 属于 $\mathrm{D}(A)$。归纳论证表明，对所有 $i \geq 0$，$\pi_i(M)$ 都是 A-完备的。反过来，设 $M \in \mathrm{D}^{\geq 0}(A^\triangleright)$ 满足其所有同伦群 $\pi_i M$ 都是 A-完备的。那么 $M = \varprojlim_n \tau_{\leq n} M$ 是其 Postnikov 塔的极限。根据归纳法，每个截断 $\tau_{\leq n} M$ 都是 A-完备的，因此 M 也是如此，因为 $\mathrm{D}(A)$ 对极限稳定。

现在我们证明一般情形。设 $M \in \mathrm{D}(A)$，那么可以写成

$$M = \varinjlim_n \tau_{\geq -n} M,$$

根据连通情形，只需证明每个 $\tau_{\geq -n} M$ 都是 A-完备的。由于 A-完备化保连通对象，$\tau_{\geq -n} M$ 是 $A \otimes_{A^\triangleright} (\tau_{\geq -n} M)$ 的一个 retract，因此是 A-完备的，因为 $\mathrm{D}(A)$ 对余极限稳定。反过来，假设 $M \in \mathrm{D}(A^\triangleright)$ 满足对所有 $i \in \mathbb{Z}$，$\pi_i(M)$ 都是 A-完备的。根据连通情形，我们知道对所有 $n \in \mathbb{N}$，$\tau_{\geq -n} M$ 都是 A-完备的。将 $M = \varinjlim_n \tau_{\geq -n} M$ 写出即可得到该命题。□

我们的下一个目标是证明解析环存在小余极限。作为初步，我们先证明未完备解析环存在小余极限。首先回顾诱导解析结构 [Man22b，定义 2.3.13]。

引理 4.1.9（诱导解析结构）。设 A 是一个未完备解析环，$B^\triangleright$ 是一个动画 $A^\triangleright$-代数。那么在 $B^\triangleright$ 上存在自然的诱导解析结构 $B^\triangleright_{A/}$，使得 $\mathrm{D}(B^\triangleright_{A/}) \subset \mathrm{D}(B^\triangleright)$ 是由底层 $A^\triangleright$-模为 A-完备的 $B^\triangleright$-模组成的全子范畴。未完备解析环 $B^\triangleright_{A/}$ 是推出 $A \otimes_{A^{\triangleright,\,\mathrm{cond}}} B^{\triangleright,\,\mathrm{cond}}$。

证明。我们要证明 $B^\triangleright_{A/}$ 在 $B^\triangleright$ 上定义了一个（未完备）解析环结构。由于遗忘函子 $\mathrm{D}(B^\triangleright) \to \mathrm{D}(A^\triangleright)$ 与极限和余极限相交换，因此对极限和余极限的稳定性显然成立。由于我们可以将 $\mathrm{D}(B^\triangleright_{A/}) =$ 描述为 $\mathrm{Mod}_B(\mathrm{D}(A))$，并将 $\mathrm{D}(B) =$ 描述为模范畴 ${}_B(\mathrm{D}(A^\triangleright))$，且函子 $A \otimes_{A^\triangleright} -$ 是对称幺半的，因此它将 $B^\triangleright$-模映至 $B^\triangleright$-模，并为遗忘函子 $\mathrm{D}(B^\triangleright_{A/}) \to \mathrm{D}(B^\triangleright)$ 定义一个左伴随，这一点是形式上的，从而证明 $B^\triangleright_{A/} \otimes_{B^\triangleright} - = A \otimes_{A^\triangleright} -$。

对 $C \in \mathrm{D}(\mathrm{CondAb})$，关于 $R\mathrm{Hom}(C, -)$ 的稳定性显而易见。左伴随 $B^\triangleright_{A/} \otimes_{B^\triangleright} -$ 将连通对象映到连通对象，这一点也很清楚。我们已经证明 $B^\triangleright_{A/}$ 是一个未完备解析环。

现在来验证 $B^\triangleright_{A/} = A \otimes_{A^{\triangleright,\,\mathrm{cond}}} B^{\triangleright,\,\mathrm{cond}}$ 作为未完备解析环时的情形。设 C 是一个未完备解析环。由于 $B^{\triangleright,\,\mathrm{cond}}$ 和 $A^{\triangleright,\,\mathrm{cond}}$ 具有平凡解析环结构，引理 4.1.5 表明，映射 $B^{\triangleright,\,\mathrm{cond}} \to C$ 恰由一个凝聚动画环的映射 $B^\triangleright \to C^\triangleright$ 给出。因此，只需证明下面的映射空间图表是笛卡尔的

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Map}_{\mathrm{AnRing}^{uc}}(B^\triangleright_{A/}, C) & \longrightarrow & \mathrm{Map}_{\mathrm{CondRing}}(B^\triangleright, C^\triangleright) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Map}_{\mathrm{AnRing}^{uc}}(A, C) & \longrightarrow & \mathrm{Map}_{\mathrm{CondRing}}(A^\triangleright, C^\triangleright). \end{array} \tag{4.1.1}$$

(4.1.1) 的底部水平映射是一个包含映射。(4.1.1) 的拉回 $\mathscr{C}$ 是 $\mathrm{Map}^{\mathrm{CondRing}}(B^\triangleright, C^\triangleright)$ 的全子动画，由满足以下条件的 $A^\triangleright$-代数映射 $B^\triangleright \to C^\triangleright$ 组成：遗忘函子 $\mathrm{D}(C^\triangleright) \to \mathrm{D}(B^\triangleright)$ 将 C-完备对象映到 A-完备模。但根据定义，这就是映射空间 $\mathrm{Map}^{\mathrm{AnRing}^{un}}(B^\triangleright_{A/}, C)$，这就证明了我们想要证明的结论。□

未完备解析环的余极限的另一个重要例子，是通过取解析环结构的交集得到的。

引理 4.1.10. 设 $A^\triangleright$ 是一个凝聚动画环，$\{A_i\}_{i\in I}$ 是其上的一个（未完备）解析环结构图表。则 ***Pair*** $B = (A^\triangleright, \bigcap_i \mathrm{D}(A_i))$ 是一个（未完备）解析环，表示范畴 $\mathrm{AnRing}^{(un)}_{A^\triangleright/}$ 中其上的（未完备）解析环的余极限 $\lim_{\longrightarrow i} A_i$ 。

证明。令 B 表示 Pair $(A^\triangleright, \bigcap_i \mathrm{D}(A_i))$，其中交集取自 $\mathrm{D}(A^\triangleright)$。注意，定义 4.1.1 的条件 (1)-(3) 在交集下保持稳定；一旦证明了条件 (1)，条件 (2) 和 (3) 就显而易见。(1) 中对极限与余极限的稳定性是显然的。若对所有 i，$A^\triangleright$ 都是 A_i-完备的，则它也是 B-完备的，由此可证若所有 A_i 都是解析环，则 B 也是解析环。

剩下要证明的是，B 是图表 A_i 在 $A^\triangleright$上的（未完备）解析环范畴中的余极限。这可由以下事实推出：对任意 $C \in \mathbf{AnRing}^{un}$，映射

$$\mathrm{Map}_{\mathrm{AnRing}^{un}}(A_i, C) \to \mathrm{Map}_{\mathrm{CondRing}}(A^\triangleright, C^\triangleright)$$

对所有 i都是全忠实嵌入，因此它们的极限也是如此。于是，在 $\mathbf{Map}^{\mathrm{CondRing}}(A^\triangleright, C^\triangleright)$ 上取极限 $\lim_{\longleftarrow i} \mathbf{Map}_{\mathrm{AnRing}^{un}}(A_i, C)$，得到 $\mathbf{Map}^{\mathrm{CondRing}}(A^\triangleright, C^\triangleright)$ 的全子动画空间，其连通分支由满足以下条件的映射 $A^\triangleright \to C^\triangleright$ 组成：遗忘函子将 C-完备模映为 A_i-完备模，对所有 i均如此。这恰好就是映射空间 $\mathbf{Map}^{\mathrm{AnRing}^{un}}(B, C)$，从而证明了我们想要的结论。□

现在我们终于可以证明未完备解析环中余极限的存在性。

命题 4.1.11。未完备解析环范畴AnRing^{un} 具有小余极限。更确切地说，设 $\{A_i\}_I$ 是一个未完备解析环的图表。那么，$B = \lim_{\longrightarrow i} A_i$ 是一个未完备解析环，其底层环为 $B^\triangleright = \lim_{\longrightarrow i} A_i^\triangleright$，其完备模范畴$\mathrm{D}(B) \subset \mathrm{D}(B^\triangleright)$ 由满足以下条件的 $B^\triangleright$-模 M 构成：对所有 i，其限制到一个 $A_i^\triangleright$-模后都是 A_i-完备的。

证明。首先，我们证明命题陈述中所构造的对 $B = (B^\triangleright, \mathrm{D}(B))$ 是一个解析环。这是因为 B 可以写成余极限

$$B = \varinjlim_i B^\triangleright_{A_i/},$$

即 $B^\triangleright = \lim_{\longrightarrow i} A_i^\triangleright$ 上的未完备解析环结构（引理 4.1.10），其中 $B^\triangleright_{A_i/}$ 是引理 4.1.9 的诱导解析环结构。

现在我们考虑凝聚动画环的底图表 $\{A_i^\triangleright\}_i$。设 $C \in \mathbf{AnRing}^{un}$。根据解析环范畴的定义，极限

$$\varprojlim_i \mathrm{Map}_{\mathrm{AnRing}^{un}}(A_i, C) \tag{4.1.2}$$

是该空间的一个全子动画空间

$$\varprojlim_i \mathrm{Map}_{\mathrm{AnRing}^{un}}(A_i^\triangleright, C^\triangleright) = \mathrm{Map}(B^\triangleright, C^\triangleright).$$

此外，它是由那些映射 $B^\triangleright \to C^\triangleright$ 所构成的连通分支的全子动画，使得对所有 i，完备的 C-模都是 A_i-完备的；等价地，对所有 i，完备的 C-模都是 $B^\triangleright_{A_i/}$-完备的。这表明 (4.1.2) 是全动画空间 $\mathbf{Map}^{\mathrm{AnRing}^{un}}(B, C) \subset \mathbf{Map}(B^\triangleright, C^\triangleright)$，从而证明 $B = \lim_{\longrightarrow i} A_i$ 正如所求。□

前一个引理的一个直接推论是：解析环在未完备解析环范畴的筛余极限下保持稳定。

推论 4.1.12。 解析环的 ∞-范畴AnRing 在AnRing^{un}中的筛余极限下保持稳定。此外，设 $B = \lim_{\longrightarrow i\in I} A_i$ 是未完备解析环的一个筛余极限。那么对于$S \in \mathrm{Prof}^{\mathrm{light}}$ ，有

$$B[S] = \varinjlim_{i\in I} A_i[S] \tag{4.1.3}$$

证明。 只需证明第二个断言，即若情况如此，则

$$B[*] = \varinjlim_{i\in I} A_i[*] = \varinjlim_{i\in I} A_i^{\triangleright} = B^{\triangleright}$$

证明 $B^{\triangleright}$ 是 B-完备的，从而 B 是一个解析环。

由于 I 是 sifted 的， $B^{\triangleright} = \lim_{\longrightarrow i} A_i^{\triangleright}$ 具有凝聚动画环的自然结构，并且我们有范畴 $\mathrm{D}(B^{\triangleright}) = \lim_{\longleftarrow i} \mathrm{D}(A_i^{\triangleright})$ 的自然等价，其过渡映射由遗忘函子给出。因此，根据命题 4.1.11，我们有

$$\mathrm{D}(B) = \varprojlim_{i} \mathrm{D}(A_i) \subset \varprojlim_{i} \mathrm{D}(A_i^{\triangleright}) = \mathrm{D}(B^{\triangleright})$$

In t由此，我们看到 $B = \lim_{\longrightarrow i} B^{\triangleright}_{A_i/}$。 因此，对于 M 一个 $B^{\triangleright}$-模，我们有 t

$$\begin{aligned} B \otimes_{B^{\triangleright}} M &= \varinjlim_{i\in I} B^{\triangleright}_{A_i/} \otimes_{B^{\triangleright}} M \\ &= \varinjlim_{i} A_i \otimes_{A_i^{\triangleright}} M. \end{aligned}$$

将前述结果应用于 $B^{\triangleright}[S] = \lim_{\longrightarrow i} A^{\triangleright}[S]$ ，得到

$$B[S] = \varinjlim_{i} A_i \otimes_{A_i^{\triangleright}} (\varinjlim_{j} A_j^{\triangleright}[S]) = \varinjlim_{i} A_i \otimes_{A_i^{\triangleright}} A_j^{\triangleright}[S] = \varinjlim_{i} A_i[S]$$

其中在第 二个等价中，我们用到了 I 是 sifted 的事实。这就证明了该推论 . □

为了证明解析环存在任意余极限，我们首先需要讨论解析环的完备化。

定理 4.1.13 ([Man22b，命题 2.3。12])。 函子 $\mathrm{AnRing} \to \mathrm{AnRing}^{uc}$ 有一个左伴随 $A \mapsto A^{\cong}$ ，称为“完备化函子”。我们有 $\mathrm{D}(A) = \mathrm{D}(A)^{\cong}$ ，并且 $A^{\cong,\triangleright} = A \otimes_{A^{\triangleright}} A^{\triangleright}$ 是 $A^{\triangleright}$ 的 A-完备化（即 $\mathrm{D}(A)$ 中的单位）。特别地，AnRing 具有小余极限。解析环的图表 $\{A_i\}_i$ 的余极限为 $B^{\cong}$ ，其中 $B = \lim_{\longrightarrow i} A_i$ 是未完备解析环范畴中的余极限。

证明。 我们将证明该定理的一个较弱版本，其中“动画环”被替换为“交换环或 $\mathbb{E}_\infty$-环”。事实上，定理的困难之处在于证明单位 $A^{\cong,\triangleright}$具有自然的动画环结构。这将在下一节处理。

设 B 是一个解析环， A 是一个未完备解析环。根据定义，$\mathrm{Map}^{\mathrm{AnRing}^{un}}(A, B)$ 是交换凝聚代数映射 $\mathrm{Map}^{\mathrm{CAlg}(\mathrm{D}(\mathrm{Cond}))}(A^{\triangleright}, B^{\triangleright})$ 的全子动画，使得遗忘函子

$$\mathrm{D}(B^{\triangleright}) \to \mathrm{D}(A^{\triangleright})$$

将 $\mathrm{D}(B)$ 映射到 $\mathrm{D}(A)$。根据 [Lur17, Corollary 4.8.5.21], , anima $\mathrm{Map}^{\mathrm{CAlg}(\mathrm{D}(\mathrm{Cond}))}(A^{\triangleright}, B^{\triangleright})$ 自然等价于 $\mathrm{D}(\mathrm{CondAb})$-线性对称幺半函子的 anima：$\mathrm{D}(A^{\triangleright}) \to \mathrm{D}(B^{\triangleright})$。因此，$\mathrm{Map}^{\mathrm{AnRing}^{un}}(A, B)$ 可识别为上述对称幺半函子的全子范畴，其中的函子可经由 .....

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{D}(A^{\triangleright}) & \xrightarrow{B^{\triangleright}\otimes_{A^{\triangleright}}} & \mathrm{D}(B^{\triangleright}) \\ \downarrow{\scriptstyle A\otimes_{A^{\triangleright}}} & & \downarrow{\scriptstyle B\otimes_{B^{\triangleright}}} \\ \mathrm{D}(A) & \longrightarrow & \mathrm{D}(B). \end{array}$$

由于 D(A) 和 D(B) 分别是 D($A^{\triangleright}$) 和 D($B^{\triangleright}$) 的局部化，空间 $\mathrm{Map}^{\mathrm{AnRing}^{un}}(A,\ B)$ 自然等价于 D(CondAb)-线性对称幺半函子的空间：D(A) $\to$D(B)；后者也等价于 $\mathrm{Map}^{\mathrm{AnRing}}(A^{\simeq},\ B)$，从而证明了所需的伴随。

关于解析环余极限计算的最后一个断言，直接由左伴随函子 $(-)^{\simeq}$ 的存在性得出。□

前述讨论的一个推论是，函子 $A \mapsto$D(A) 与可呈范畴中的余极限相容，特别是满足范畴化 Künneth 公式。

命题 4.1.14. 函子 $\mathrm{D}\colon \mathrm{AnRing} \to \mathrm{CAlg}(\mathrm{Pr}^L_{\mathrm{D}(\mathbb{Z}^{\mathrm{cond}})})$ 将解析环 A 映至其完备模的对称幺半范畴 $\mathrm{D}(A)$，并且与余极限相容。

证明。 由定理 4.1.13，解析环范畴存在余极限。要证明 D 与余极限相容，只需证明它与筛余极限以及解析环的推出相容。

我们先证明筛余极限的情形。设 $\{A_i\}_i$ 是解析环的一个筛图表。由于 I 是筛的，CAlg($\mathrm{Pr}^L_{\mathrm{D}(\mathbb{Z}^{\mathrm{cond}})}$) 中的余极限 $\varinjlim_{i\in I}$D*(A_i)（其过渡映射由拉回给出）与 $\mathrm{Pr}^L_{\mathrm{D}(\mathbb{Z}^{\mathrm{cond}})}$ 中的余极限一致，而其底层范畴可计算为 $\mathrm{Pr}^R_{\mathrm{D}(\mathbb{Z}^{\mathrm{cond}})}$ 中的极限 $\varprojlim_{i\in I}$D$_*$(A_i)，其中过渡映射是遗忘函子。我们有一个全忠实嵌入

$$\varprojlim_{i\in I} \mathrm{D}_*(A_i) \subset \varprojlim_{i\in I} \mathrm{D}_*(A_i^{\triangleright,\mathrm{cond}}),$$

其中 $\varprojlim_{i\in I}$ D$_*$($A^{\triangleright}_{\cdot,i}{}^{\mathrm{cond}}$) 也计算了 CAlg($\mathrm{Pr}^L_{\mathrm{D}(\mathbb{Z}^{\mathrm{cond}})}$) 中的余极限 $\varinjlim_{i\in I}$ D*($A^{\triangleright}_{\cdot,i}{}^{\mathrm{cond}}$)。我们可以写作 D($A^{\triangleright}_{\cdot,i}{}^{\mathrm{cond}}$) $=$ Mod$_{A_i^{\triangleright}}$(D($\mathbb{Z}^{\mathrm{cond}}$))，并且根据 [Lur17, Corollary 4.8.5.14]，我们有

$$\begin{aligned}\varinjlim_{i\in I} \mathrm{D}^*(A_i^{\triangleright,\mathrm{cond}}) &= \varinjlim_{i} \mathrm{Mod}_{A_i^{\triangleright}}(\mathrm{D}(\mathbb{Z}^{\mathrm{cond}})) \\ &= \mathrm{Mod}_{\varinjlim_i A_i^{\triangleright}}(\mathrm{D}(\mathbb{Z}^{\mathrm{cond}})) \\ &= \mathrm{D}(\varinjlim_i A_i^{\triangleright,\mathrm{cond}}).\end{aligned}$$

我们推得 $\varinjlim_i$ D*(A_i) $=\varprojlim_i$D$_*$(A_i) $\subset$ D($\varinjlim_i A^{\triangleright}_{\cdot,i}{}^{\mathrm{cond}}$) 是凝聚 $\varinjlim_i A^{\triangleright}_{\cdot,i}{}^{\mathrm{cond}}$-模的全子范畴，其中的对象对所有 $i \in I$ 都是 A_i-完备的；这恰好就是 D($\varinjlim_i A_i$)，从而证明了我们想要的结论。

接下来我们证明推出情形下的断言。设 A 为解析环，B 和 C 为解析 A-代数。我们要证明，在 CAlg($\mathrm{Pr}^L_{\mathrm{D}(\mathbb{Z}^{\mathrm{cond}})}$) 中，D($B\otimes_A C$) $=$ D(B) $\otimes_{\mathrm{D}(A)}$ D(B)（即范畴化 Künneth 公式）。将 $A \to B$ 写成复合映射 $A \to B_{A/} \to B$ 后，只需证明以下情形下推出的相容性：要么 $A \to B$ 具有诱导结构，要么它由解析环结构给出。在第一种情形中，也就是当 $B = B_{A/}$ 时，根据定义，D($B_{A/}$) $=$ 模范畴$_B$(D(A))，因此 Künneth 公式可由 [Lur17, Theorem 4.8.46] 得出。下面假设 $A \to B$ 来自解析环结构，换言之，遗忘函子 D(B) $\to$ D(A) 是全忠实的。于是 D(A) $\to$ D(B) 是一个局部化，并且根据 [NS18, Proposition A.5], ，对于任意对称幺半范畴之间的映射 D(A) $\to \mathscr{C}$，都有一个全忠实嵌入

$$\mathrm{Fun}^{\otimes}(\mathrm{D}(B),\mathscr{C}) \subset \mathrm{Fun}^{\otimes}(\mathrm{D}(A),\mathscr{C})$$

其本质像由满足以下条件的对称幺半映射 $\mathrm{D}(A) \to \mathscr{C}$ 组成：它们将由 $\mathrm{D}(A) \to \mathrm{D}(B)$ 的核 K 给出的张量理想映为零。因此，我们得到一个拉回方块

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Fun}^{\otimes}(\mathrm{D}(B) \otimes_{\mathrm{D}(A)} \mathrm{D}(C), \mathscr{C}) & \longrightarrow & \mathrm{Fun}^{\otimes}(\mathrm{D}(C), \mathscr{C}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Fun}^{\otimes}(\mathrm{D}(B), \mathscr{C}) & \longrightarrow & \mathrm{Fun}^{\otimes}(\mathrm{D}(A), \mathscr{C}) \end{array}$$

并且映射 $\mathrm{Fun}^{\otimes}(\mathrm{D}(B) \otimes_{\mathrm{D}(A)} \mathrm{D}(C), \mathscr{C}) \subset \mathrm{Fun}^{\otimes}(\mathrm{D}(C), \mathscr{C})$ 是全忠实的，其本质像由那些消去由 K 生成的张量理想、沿着 $\mathrm{D}(A) \to \mathrm{D}(C)$ 的对称幺半函子 $\mathrm{D}(C) \to \mathscr{C}$ 组成。但此时映射 $\mathrm{D}(C) \to \mathrm{D}(B) \otimes_{\mathrm{D}(A)} \mathrm{D}(C)$ 是一个局部化，其全忠实右伴随 $f_*\colon \mathrm{D}(B) \otimes_{\mathrm{D}(A)} \mathrm{D}(C) \hookrightarrow \mathrm{D}(C)$ 的本质像由这样的对象 $M \in \mathrm{D}(C)$ 组成：对所有 $N \in K = \ker(\mathrm{D}(A) \to \mathrm{D}(B))$，都有 $R\mathrm{Hom}_C(C \otimes_A N, M) = R\mathrm{Hom}_A(N, M) = 0$。这意味着我们有一个拉回方块

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{D}(B) \otimes_{\mathrm{D}(A)} \mathrm{D}(C) & \longrightarrow & \mathrm{D}(C) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{D}(B) & \longrightarrow & \mathrm{D}(A) \end{array}$$

其中右侧的竖直映射和下方的水平映射是遗忘函子。这表明，借助定理 4.1.13，$\mathrm{D}(B) \otimes_{\mathrm{D}(A)} \mathrm{D}(C) = \mathrm{D}(B \otimes_A C)$，从而证明了我们想要的结论。□

4.2. **解析环的完备化**。 本节将完成定理 定理 4.1.13 的证明。为此，我们需要回顾如何由连通模构造动画环。

定义 4.2.1。 设 $\mathscr{C}$ 为一个（可呈示的）紧投射生成 1-范畴。令 $\mathscr{C}^0 \subset \mathscr{C}$ 为紧投射对象的全子范畴。 $\mathscr{C}$ 的动画化 （或其非阿贝尔导出范畴）定义为 $\mathscr{C}^0$ 的筛选归纳完备化：$\mathrm{Ani}(\mathscr{C}) := \mathrm{sInd}(\mathscr{C}^0)$（在 [Lur09, §5.5.8] 中也记作 $\mathcal{P}_{\Sigma}(\mathscr{C}^0)$）。更准确地说，它是以下全子范畴

$$\mathrm{sInd}(\mathcal{C}^0) \subset \mathrm{Fun}(\mathscr{C}^{0,\mathrm{op}}, \mathrm{Ani})$$

由保持有限积的可达预层 F 组成（即对于 X， $Y \in \mathscr{C}^0$，有 $F(X \sqcup Y) = F(X) \times F(Y)$）。

例 4.2.2. 动画化的标准例子如下：

(1) 若 $\mathscr{C} = \mathrm{Sets}$ 是集合范畴，则 $\mathscr{C}^0$ 是有限集范畴，而 $\mathrm{Ani}(\mathscr{C}) = \mathrm{Ani}$ 是 anima 范畴，亦即“空间”范畴（这由定义可知是同义反复）。(2) 若 $\mathscr{C} = \mathrm{Ab}$ 是阿贝尔群范畴，则 $\mathscr{C}^0$ 是自由阿贝尔群范畴，而 $\mathrm{Ani}(\mathscr{C})$ 是动画阿贝尔群范畴（文献中亦称为单纯阿贝尔群）。借助 Dold–Kan 对应 [Lur17，定理 1.2.3.7], 它亦等价于阿贝尔群的 ∞-导出范畴中连通对象所构成的范畴 $\mathrm{D}_{\geq 0}(\mathbb{Z})$。(3) 若 $\mathscr{C} = \mathrm{Ring}^{\mathrm{classic}}$ 是集合中静态/经典交换环的范畴，则 $\mathscr{C}^0$ 是有限个变量的多项式环的缩回所构成的范畴，而 $\mathrm{Ani}(\mathscr{C}^0)$ 是动画交换环范畴 Ring（文献中亦称为单纯交换环 范畴）。

定义 4.2.3 （对称函子）. 考虑 $\mathrm{D}_{\geq 0}(\mathbb{Z})$，即动画阿贝尔群的无穷范畴。对称幂函子

$$\mathrm{Sym}^n : \mathrm{D}_{\geq 0}(\mathbb{Z}) \to \mathrm{D}_{\geq 0}(\mathbb{Z})$$

定义为静态环与阿贝尔群中通常对称幂函子的左导出函子。更明确地说，它是保持筛余极限、并将有限生成自由阿贝尔群 F 映到其对称幂 $\mathrm{Sym}^n F$ 的唯一函子。

对我们而言，对称函子的重要性在于，它们出现在定义动画环的单子中。

命题 4.2.4. 令 Ring 表示动画交换环的 ∞-范畴。令 $\mathrm{D}_{\geq 0}(\mathbb{Z})$ 表示连通阿贝尔群的 ∞-范畴。那么遗忘函子

$$G : \mathrm{Ring} \to \mathrm{D}_{\geq 0}(\mathbb{Z})$$

有一个左伴随，由函子 $\mathrm{Ab} \to \mathrm{Ring}$ 的左导出函子给出；该函子将阿贝尔群 M 映射到其对称代数 $\mathrm{Sym}^\bullet M$。此外，前述伴随是单子的。

证明。 遗忘函子 $F : \mathrm{Ring}^{\mathrm{classic}} \to \mathrm{Ab}$ 的左伴随是对称幂函子 $\mathrm{Sym}^\bullet : \mathrm{Ab} \to \mathrm{Ring}^{\mathrm{classic}}$。令 $\mathrm{Ab}^0 \subset \mathrm{Ab}$ 和 $\mathrm{Ring}^0 \subset \mathrm{Ring}^{\mathrm{classic}}$ 分别表示紧投射对象的全子范畴；具体而言，Ab^0 是有限生成自由阿贝尔群的范畴，而 Ring^0 是有限型多项式代数（的收缩）的范畴。对称幂函子 $\mathrm{Sym}^\bullet$ 限制为保持余积的函子 $\mathrm{Sym}^\bullet : \mathrm{Ab}^0 \to \mathrm{Ring}^0$。于是我们可以构造筛选 ind 范畴 sInd，从而得到左导出函子

$$\mathrm{Sym}^\bullet \colon \mathrm{D}_{\geq 0}(\mathbb{Z}) \cong \mathrm{sInd}(\mathrm{Ab}^0) \to \mathrm{sInd}(\mathrm{Ring}^0) = \mathrm{Ring}\,. \tag{4.2.1}$$

根据构造，将 $\mathrm{Sym}^\bullet$ 限制在 Ab^0, 上时，它保留余积；也就是说，若 F_1 和 F_2 是有限生成自由阿贝尔群，则 $\mathrm{Sym}^\bullet(F_1 \oplus F_2) = \mathrm{Sym}^\bullet F_1 \otimes \mathrm{Sym}^\bullet F_2$。于是，由 [Lur09, 命题 5.5.8.15](3)可知，(4.2.1) 保持余极限。根据伴随函子定理 [Lur09, 推论 5.5.2.9]，函子 $\mathrm{Sym}^\bullet$ 有一个右伴随 G。注意，根据伴随的唯一性，G 限制在 $\mathrm{Ring}^{\mathrm{classic}} \subset \mathrm{Ring}$ 上就是遗忘函子 $G : \mathrm{Ring}^{\mathrm{classic}} \to \mathrm{Ab} \subset \mathrm{D}_{\geq 0}(\mathbb{Z})$。因此，要证明$G$ 是范畴 Ring 上的“遗忘函子”，只需证明它与筛余极限交换。这是因为 $\mathrm{Sym}^\bullet$ 将紧投射对象映为紧投射对象：给定 Ring 中的一个筛图表 $\{A_i\}_{i\in I}$ 以及 Ab $F \in$，我们有

$$\begin{aligned}
\mathrm{Map}_{\mathrm{D}_{\geq 0}(\mathbb{Z})}(F, G(\varinjlim_i A_i)) &= \mathrm{Map}_{\mathrm{Ring}}(\mathrm{Sym}^\bullet F, (\varinjlim_i A_i)) \\
&= \varinjlim_i \mathrm{Map}_{\mathrm{Ring}}(\mathrm{Sym}^\bullet F, (A_i)) \\
&= \varinjlim_i \mathrm{Map}_{\mathrm{D}_{\geq 0}(\mathbb{Z})}(F, GA_i) \\
&= \mathrm{Map}_{\mathrm{D}_{\geq 0}(\mathbb{Z})}(F, \varinjlim_i GA_i)
\end{aligned}$$

其中，第一个等价是伴随，第二个等价是因为 $\mathrm{Sym}^\bullet F$ 在 AniRing 中是紧射影，第三个等价来自另一个伴随，最后一个等价则是因为 F 在 $\mathrm{D}_{\geq 0}(\mathbb{Z})$ 中是紧射影。这证明自然映射 $\varinjlim_i GA_i \to G(\varinjlim_i A_i)$ 是一个等价。

最后，要证明该伴随是单子的，根据单子性定理 [Lur17, 定理 4.7.3.5] ，只需证明 G 是保守的；这显然成立，因为 $\mathrm{Sym}^\bullet$ 将 Ab^0 映到 Ring 的一组生成元。□

备注 4.2.5. 设 $\mathscr{C}$ 是一个具有有限极限的 ∞-范畴。伴随 $G\colon \mathrm{Ring} \to \mathrm{D}_{\geq 0}(\mathbb{Z}) : \mathrm{Sym}^\bullet$ 可扩展为预层层面的伴随

$$G\colon \mathrm{PShv}(\mathscr{C}, \mathrm{Ring}) \to \mathrm{PShv}(\mathscr{C}, \mathrm{D}_{\geq 0}(\mathbb{Z})) : \mathrm{Sym}^\bullet. \tag{4.2.2}$$

假设 $\mathscr{C}$ 还带有一个格罗滕迪克拓扑 $\mathcal{T}$，对于可呈示的 ∞-范畴 D，令 $\widehat{\ }\mathrm{Shv}(\mathscr{C}, \mathrm{D})$ 表示取值于 D 的 $\mathscr{C}$ 超层构成的全子范畴。那么伴随 (4.2.2)

限制为一个伴随

$$\widehat{G}\colon \widehat{\mathrm{Shv}}(\mathscr{C},\mathrm{Ring}) \to \widehat{\mathrm{Shv}}(\mathscr{C},\mathrm{D}_{\geq 0}(\mathbb{Z})) : \mathrm{Sym}^{\bullet}.$$

事实上，由于 G 保极限，它将全子范畴 $\mathbf{Shv}(\mathscr{C},\ \mathbf{Ring}) \subset \mathbf{PShv}(\mathscr{C},\ \mathbf{Ring})$ 映到 $\widehat{\mathbf{Shv}}(\mathscr{C},\ \mathbf{D}_{\geq 0}(\mathbb{Z})) \subset \mathbf{PShv}(\mathscr{C},\ \mathbf{D}_{\geq 0}(\mathbb{Z}))$。另一方面，超层的包含映射的左伴随是超完备化函子

$$(-)^{\wedge} : \mathrm{PShv}(\mathscr{C},\mathrm{D}) \to \widehat{\mathrm{Shv}}(\mathscr{C},\mathrm{D}).$$

因此，遗忘函子

$$\widehat{\mathrm{Shv}}(\mathscr{C},\mathrm{Ring}) \to \mathrm{PShv}(\mathscr{C},\mathrm{D}_{\geq 0}(\mathbb{Z}))$$

其左伴随是对称函子的超完备化，即 $(\mathbf{Sym}^{\bullet})^{\wedge}$。这将限制为一个伴随

$$\widehat{G}\colon \widehat{\mathrm{Shv}}(\mathscr{C},\mathrm{Ring}) \to \widehat{\mathrm{Shv}}(\mathscr{C},\mathrm{D}_{\geq 0}(\mathbb{Z})) : (\mathrm{Sym}^{\bullet})^{\wedge}.$$

显然，G 是保守的。此外，$\mathbf{Shv}(\mathscr{C},\ \mathbf{Ring})$ 中对象的筛余极限是预层中筛余极限经过超-$\widehat{}$层化所得。这表明 G 也与筛余极限交换，因此它是单子的。

将前述构造应用于赋予自然拓扑的 $\mathscr{C} = \mathbf{Prof}^{\mathrm{light}}$（并在超完备化函子中省略后续记号），我们得到单子伴随

$$G\colon \mathrm{CondRing} \to \mathrm{D}_{\geq 0}(\mathrm{CondAb}) : \mathrm{Sym}^{\bullet}$$

be凝聚动画环与凝聚动画阿贝尔群之间 .

经过前面的准备，现在我们可以陈述关于解析环完备化的关键命题。

命题 4.2.6 ([CS20，命题 12。26])。 设 A 是一个未完备解析环。令 $\mathrm{Ring}_A \subset \mathrm{Ring}_{A^{\triangleright}/}$ 为凝聚动画 $A^{\triangleright}$- 代数的全子范畴，其底模是 A- 完备的。考虑伴随

$$\mathrm{Sym}^{\bullet}_{A^{\triangleright}}\colon \mathrm{D}_{\geq 0}(A^{\triangleright}) \to \mathrm{Ring}_{A^{\triangleright}}\colon G. \tag{4.2.3}$$

那么，对于任意映射 $N \to M$，若其为 $A^{\triangleright}$-模之间的映射，并且在经过 A-完备化后诱导等价，则自然映射

$$A \otimes_{A^{\triangleright}} \mathrm{Sym}^{\bullet}_{A^{\triangleright}} N \to A \otimes_{A^{\triangleright}} \mathrm{Sym}^{\bullet}_{A^{\triangleright}}$$

也为等价。特别地，单子伴随(4.2.3) 局部化为单子伴随

$$\mathrm{Sym}^{\bullet}_{A} : \mathrm{D}_{\geq 0}(A) \to \mathrm{Ring}_{A}\colon G,$$

其中 $\mathrm{Sym}^{\bullet}_{A} = A \otimes_{A^{\triangleright}} \mathrm{Sym}^{\bullet}_{A^{\triangleright}} M$。

证明。 这就是 [CS20 引理 12.27]; 其证明通过研究多项式函子 $\mathbf{Sym}^i$ 的 Goodwillie 导数，并将断言归结为以下事实：对于所有素数 p，弗罗贝尼乌斯ϕ：$A \to A/p$ 都是解析环态射。最后这个断言将在第 4.3 节中证明。

我们详细说明对称幂单子 $\mathbf{Sym}^{\bullet}_{A^{\triangleright}}$ 如何下降为 $\mathbf{D}_{\geq 0}(A)$上的单子 $\mathbf{Sym}^{\bullet}_{A}$。令 $\mathscr{C}$为一个 ∞-范畴，$T \in \mathbf{Alg}(\mathbf{End}(\mathscr{C}))$为 $\mathscr{C}$中的一个单子，且令 $\iota\colon \mathscr{C}_0 \subset \mathscr{C}$为一个全子范畴，其包含映射存在左伴随 $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{C}_0$。假设对于 $\mathscr{C}$中所有满足 F-同构条件的映射 $Y \to X$，自然映射 $T(Y) \to T(X)$也诱导出一个 F-同构。那么我们断言，$T_F = F \circ T \circ F = F \circ T$具有 $\mathcal{C}_0$ 中单子的自然结构，使得 $\mathbf{LMod}_{T_F}(\mathscr{C}_0)$是 $\mathbf{LMod}_T(\mathscr{C})$ 的全子范畴，由满足以下条件的对象 X 组成：其在 $\mathscr{C}$ 中的底层对象属于 $\mathscr{C}_0$。

令 $U = \iota \circ F$为与局部化 F相关联的单子。那么，U是幺半范畴 $\mathscr{D} := \mathbf{End}(\mathscr{C})$ 中的幂等代数。令 $\mathbf{BMod}_U(\mathscr{D}) \subset \mathscr{D}$ 为由 $\mathscr{C}$ 的端态射 G 构成的全子范畴，其中自然映射 $G \to UG$ 和 $G \to GU$ 是同构（这与 ..... 一致

与 $\mathscr{D}$中的 U-双模范畴一致，因为 U是幂等代数）。那么，$\mathrm{BMod}_U(\mathscr{D})$是一个幺半范畴，其单位为 U；函子 $\mathrm{BMod}_U(\mathscr{D}) \to \mathscr{D}$是余松幺半函子，并保持张量积（因此，它不具备幺半性的唯一缺陷是该函子不保持单位）。这个包含映射有一个余松左伴随 $\mathscr{D} \to \mathrm{BMod}_U(\mathscr{D})$，它将 $X \mapsto UXU$映为.....。注意，由于 $\mathscr{C}_0$ 是 $\mathscr{C}$的局部化，我们有幺半范畴的自然等价

$$\mathrm{BMod}_U(\mathscr{D}) = \mathrm{End}(\mathscr{C}_0). \tag{4.2.4}$$

令 $\mathscr{D}_0 \subset \mathscr{D}$ 为由满足以下条件的函子 $X\colon \mathscr{C} \to \mathscr{C}$构成的全子范畴：它们将 F-同构映射为 F-同构；等价地，它是由自函子 X构成的范畴，其中自然映射 $UX \to UXU$是一个同构。我们断言， $\mathscr{D}^0$ 是 $\mathscr{D}$ 的全幺半子范畴；也就是说，它显然包含单位 1，并且若 X， $Y \in \mathscr{D}^0$ 将 F-同构映射为 F-同构，则其复合映射XY 也具有同样性质。因此，我们得到一个函子复合

$$\mathrm{BMod}_U(\mathscr{D}) \subset \mathscr{D}_0 \subset \mathscr{D}$$

其中第一个函子是松幺半函子并保持张量，第二个函子是幺半函子。由此我们推出，包含映射 $\mathrm{BMod}_U(\mathscr{D}) \subset \mathscr{D}_0$具有一个将 $X \mapsto UXU = UX$ 映射到相应对象的幺半左伴随。事实上，该包含映射具有一个先验的余松幺半左伴随 $X \mapsto UXU = UX$，但对象 $\mathscr{D}_0$ 所满足的条件 $UX \xrightarrow{\sim} UXU$ 保证了这个余松幺半结构实际上是幺半的。现在，根据假设，单子 T 属于 $\mathscr{D}_0$，这意味着 $T_U := UT$ 具有 $\mathrm{BMod}_U(\mathscr{D})$ 中的代数自然结构；根据 (4.2.4)，该结构产生了所需的单子T_F 于 $\mathscr{C}_0$ 上。还需证明，$\mathrm{LMod}_{T_F}(\mathscr{C}_0)$ 是 $\mathrm{LMod}_T(\mathscr{C})$ 的全子范畴，由那些满足以下条件的对象 M 组成：其底层对象在 $\mathscr{C}$ 中属于 $\mathscr{C}_0$。为此，注意到由于$T_U = UT = UTU$，我们有 $\mathrm{LMod}_{T_U}(\mathscr{C}) = \mathrm{LMod}_{T_F}(\mathscr{C}_0)$。因此，只需证明，代数的自然映射 $T \to T_U$ 诱导出一个全忠实函子 $\mathrm{LMod}_{T_U}(\mathscr{C}) \hookrightarrow \mathrm{LMod}_T(\mathscr{C})$，其本质像由满足 $U(M) = M$ 的那些 M 构成。但这一最后性质形式上由同构 $T_U \xrightarrow{1\otimes \mathrm{id}} T_U \otimes_T T_U$ 推出，该同构源自 $T_U \otimes_T T_U = (UT) \otimes_T T_U = UT_U = T_U$；也就是说，前述幂等性意味着遗忘函子 $\mathrm{LMod}_{T_U}(\mathscr{C}) \to \mathrm{LMod}_T(\mathscr{C})$ 是全忠实的，并且具有由 $T_U \otimes_T (-) = U(-)$ 给出的左伴随。□

推论 4.2.7。 设 A 是一个未完备解析环，则 A 作为 $\mathbb{E}_\infty$-环的完备化 $A^\cong$ 具有解析环的自然结构，使得 $A \to A^\cong$ 成为解析环态射。换言之， $A^{\cong, \triangleright} = A[*]$ 具有由命题 *4.2.6* 的完备对称幂定义的凝聚动画环的自然结构。特别地， $A \mapsto A^\cong$ 的构造是自然包含映射 $\mathrm{AnRing} \to \mathrm{AnRing}^{uc}$的左伴随。

证明。这由命题 4.2.6 和命题 4.2.4 的单子伴随推出，见注记 4.2.5。□

4.3. **弗罗贝尼乌斯**。 在命题 4.2.6 的证明中，我们用到了弗罗贝尼乌斯诱导解析环态射这一事实。本节旨在证明这一事实（定理 4.3.2）。关键步骤是引理 4.3.1，它比较轻型赋形集上的自由模的 Tate 构造与 C_p- 作用。

引理 4.3.1 ([CS20，假设 12。25])。 设 A 是一个解析环。设 S 是一个带有 C_p-作用的轻射有限集，并设 $S_0 = S^{C_p}$ 为不动点。那么自然映射

$$A[S_0]^{tC_p} \to A[S]^{tC_p}$$

是一个等价，其中$(-)^{tC_p}$ 是 *Tate* 构造。

证明。回忆一下谱的 Tate 构造：设 $X \in \mathrm{Sp}$，令 C_p 为由 p 个元素组成的循环群。假设我们有 C_p 对 X 的同伦作用，那么存在一个范数映射

Nm： $X_{C_p} \to X^{C_p}$ ，它从同伦余不变量映射到不变量。Tate 构造定义为余纤维

$$X^{tC_p} := \mathrm{cofib}(X_{C_p} \to X^{C_p}).$$

现在设 S 是一个带有 C_p作用的轻型赋形集，并设 $S_0 = S^{C_p}$ 是其不动点。对于带有紧化 $U \subset T$ 和边界 ∂T 的轻局部拟有限集 U ，令 $A[U] := A[T]/A[\partial T]$ 为在 ∞ 处消失的 A 测度的模。置 $\mathcal{U} = S \backslash S_0$。由于我们有一个推出图，模 $A[U]$ 与紧化无关

$$\begin{array}{ccc} \partial T & \longrightarrow & T \\ \downarrow & & \downarrow \\ \{\infty\} & \longrightarrow & U \cup \{\infty\}. \end{array}$$

只需证明 $A[U]^{tC_p} = 0$。根据命题 2.1.5，我们可以将 $U = \bigsqcup_n S'_n$ 写成轻型赋形集的可数不交并。于是， C_p 在 U 上的作用是全不连续的，不具有任何不动点。然后， $U/C_p = \bigsqcup_n S''_n$ 是轻型赋形集的可数不交并；沿映射 $U \to U/C_p$对这种分解取拉回，我们可以写出 $U \cong \bigsqcup_n C_p \times S''_n$。因此，如果 S'' 是 U/C_p的一个紧化，我们看到 $C_p \times S''$ 是 U的一个紧化。这说明

$$A[\overline{U}]^{tC_p} = \mathrm{cofib}(A[C_p \times \partial S'']^{tC_p} \to A[C_p \times S'']^{tC_p}).$$

但是，对于任意凝聚 anima T，我们都有 $A[C_p \times T] = A[C_p] \otimes A[T]$ ，因此它的 Tate 上同调消失 $A[C_p \times T]^{tC_p} = 0$ （因为 $A[C_p]$ 是 C_p的诱导表示），这就证明了我们想要证明的结论。□

定理 4.3.2 （[CS20，命题 12。24]）。 设 A 为一个解析环，并设 $A/p = A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_p$。则 ***Frobenius*** 映射 ϕ： $A^\triangleright \to A^\triangleright/p$ 是解析环的一个映射 ϕ： $A \to A/p$。

证明。 这在同上。 中得到了证明，其中所需的唯一条件是假设 12.25；由于引理 4.3.1，该条件在轻量设定中始终成立。□

4.4. 解析环结构的不变性。 对于解析环的构造而言，比较凝聚动画环的态射之间的解析环结构是很有用的。在本节中，我们将证明解析环结构是“形式 étale”的，即它们在幂零加厚和更高的动画结构下保持不变。我们遵循 [CS20，第 XII 讲附录1]。朝这一方向迈出的第一个结果是以下定理，它用底层阿贝尔范畴的数据刻画了解析环结构。

定理 4.4.1. 设 $A^\triangleright$ 是一个凝聚动画环。则 $A^\triangleright$ 上（未完备的）解析环结构 A 的集合与阿贝尔范畴 $\mathrm{Mod}(\pi_0(A^\triangleright))$ 的满足以下性质的全子范畴 $\mathscr{C}$ 构成双射：

(1) $\mathscr{C}$ 在 $\mathrm{Mod}(\pi_0(A^\triangleright))$ 中对所有极限、余极限和扩张封闭。***(2)*** $\mathscr{C}$ 是可呈示的。***(3)*** $\mathscr{C}$ 对任意高阶直积 $\prod_I^{(n)}$ 封闭（当 I 可数时，这些直积为零）。***(4)*** 对所有 $S \in \mathrm{Prof}^{\mathrm{light}}$ 和 $C \in \mathscr{C}$，***Ext*** 模 $\mathrm{Ext}^i_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[S], C)$ 都属于 $\mathscr{C}$。

更确切地说，给定 $A^\triangleright$ 的一个解析环结构 A ，范畴 $\mathscr{C} = \mathrm{D}(A) \cap \mathrm{D}^\heartsuit(A^\triangleright)$ 满足上述条件 ***(1)–(4)***。反过来，给定如上所述的子范畴 $\mathscr{C}$，由上同调群属于 $\mathscr{C}$ 的那些复形 C 所构成的范畴 $\mathrm{D} \subset \mathrm{D}(A^\triangleright)$ 在 $A^\triangleright$ 上定义了一个解析环结构。

为了证明 t 定理 我们首先证明较弱条件下局部化的一个双射 s.

命题 *4.4.2*（[*CS20*，命题 *12.*19]）。设 $A^{\triangleright}$ 为凝聚动画环。对极限与余极限稳定的全子 ∞-范畴 $\mathbf{D} \subset \mathbf{D}^{\geq 0}(A^{\triangleright})$ 的集合，与对极限、余极限、扩张和高阶导出积稳定的所有全子范畴 $\mathscr{C} \subset$ 模范畴$(\pi_0(A^{\triangleright})) = \mathbf{D}^{\heartsuit}(A^{\triangleright})$ 的集合之间存在自然双射，其对应方式为：将 $\mathbf{D}$ 映到它与模范畴$(\pi_0(A^{\triangleright}))$ 的交集，并将 $\mathscr{C}$ 映到由所有满足对一切 $i \geq 0$ 有 $\pi_i(C) \in \mathscr{C}$ 的 $C \in \mathbf{D}^{\geq 0}(A^{\triangleright})$ 所构成的全子范畴 $\mathbf{D}$。

证明。设 $\mathbf{D} \subset \mathbf{D}^{\geq 0}(A^{\triangleright})$ 是一个对极限和余极限稳定的全子范畴。定义 $\mathscr{C} = \mathbf{D} \cap \mathbf{D}^{\heartsuit}(A^{\triangleright})$。给定 $C \in \mathbf{D}$，函子 $\tau_{\geq 1} C$ 是 C的环路的悬挂，因此它属于 $\mathbf{D}$。这表明 $\pi_0(C)[0] \in \mathscr{C}$ 是 $\tau_{\geq 1} C[1] \to C$ 的余纤维。于是，$\pi_i(C)[0] \in \mathscr{C}$ 对所有 $i \geq 0$都成立。由于 $\mathbf{D}$ 对有限极限和有限余极限稳定，这表明 $\mathscr{C}$ 对有限极限、有限余极限和扩张稳定。由于任意直和是正合的，且 $\mathbf{D}$ 具有所有余极限，因此 $\mathscr{C}$具有任意直和，并对所有余极限稳定。最后，给定 $\mathscr{C}$中的一族对象 X_i，对所有 $n \in \mathbb{N}$，同伦积 $\prod_i (X_i[n])$ 都属于 $\mathbf{D}$，因为 $\mathbf{D}$ 对所有极限稳定。取同伦群可见，对所有 $n \in \mathbb{N}$，高阶积 $\prod_i^{(n)} X_i$ 都属于 $\mathscr{C}$。特别地，$\mathscr{C}$具有任意积，因此对所有极限稳定。

反过来，设 $\mathscr{C} \subset \mathbf{D}^{\heartsuit}(A^{\triangleright})$ 是一个在所有极限、余极限、扩张和任意高阶积下稳定的全子范畴。令 $\mathbf{D} \subset \mathbf{D}^{\geq 0}(A^{\triangleright})$ 为由那些同伦群属于 $\mathscr{C}$ 的对象 C 所构成的全子范畴。$\mathscr{C}$ 中对有限极限和扩张的稳定性表明，$\mathbf{D}$ 在纤维和余纤维下稳定。显然，$\mathbf{D}$ 在波斯尼科夫极限下也稳定。由于任意直和都是正合的，$\mathbf{D}$ 在直和下稳定，因此在所有余极限下稳定。$\mathscr{C}$ 中对任意高阶积的稳定性意味着 $\mathbf{D}$ 在任意同伦积下稳定，因此它在所有极限下稳定。□

备注 4.4.3。命题 4.4.2 的表述与 [CS20, 命题 12.19], 之间有一个小小的差异：前者要求在高阶导出积下稳定。在经典凝聚框架中，由于极端全不连通空间的存在，任意积都是正合的。然而，在轻量设定中，先验上只有可数积是正合的，而且对于基数不可数的集合，可能存在高阶导出函子。

定理 *4.4.1* 的证明。给定 $A^{\triangleright}$ 上的解析环结构 A，由命题 4.4.2 可知，范畴 $\mathscr{C} = \mathbf{D}(A) \cap \mathbf{D}^{\heartsuit}(A^{\triangleright})$ 满足定理 4.4.1 的条件 (1)–(3)。此外，定义 4.1.1 的条件 (2) 和命题 4.1.8 表明，$\mathscr{C}$ 在内部 Ext 函子作用下也保持不变。另一方面，命题 4.1.8 还指出，$\mathbf{D}(A) \subset \mathbf{D}$ 是由上同调群属于 $\mathscr{C}$ 的复形构成的全子范畴。

反过来，设 $\mathscr{C} \subset \mathrm{Mod}(\pi_0(A^{\triangleright}))$ 是定理陈述中的全子范畴，并设 $\mathbf{D}_{\geq 0} \subset \mathbf{D}^{\geq 0}(A^{\triangleright})$ 是由上同调群属于 $\mathscr{C}$ 的对象构成的全子范畴。命题 4.4.2 表明，$\mathbf{D}^{\geq 0}$ 在所有极限与余极限下稳定；根据反射原理 [RS22]，它也是可呈示的。其稳定化 $\mathbf{D} \subset \mathbf{D}(A^{\triangleright})$——即由上同调群属于 $\mathscr{C}$ 的所有复形构成的范畴——也同样如此。由于 $\mathbf{D}$ 在所有极限与余极限下稳定，包含映射 $L : \mathbf{D}(A^{\triangleright}) \to \mathbf{D}$ 存在左伴随。此外，由于 $\mathbf{D}^{\geq 0}$ 在 $\mathbf{D}^{\geq 0}(A^{\triangleright})$ 中对所有极限与余极限也稳定，这个左伴随保持连通对象。这就证明了定义 4.1.1 的条件 (1) 和 (3)。剩下只需证明 $\mathbf{D}$ 在 $S \in \mathrm{Prof}^{\mathrm{light}}$ 中的 $R\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[S], -)$ 作用下稳定。设 $M \in \mathbf{D}$。将 $M = \lim_{\longleftarrow n} \tau_{\geq n} M$ 写成其 Postnikov 塔的极限后，我们可以假设 $M \in \mathbf{D}^{\leq 0}$ 是余连通的。于是存在一个收敛的谱序列，其第二页为

$$E_2^{p,q} = \underline{\mathrm{Ext}}^p(\mathbb{Z}[S], \pi_{-q}(M)) \Rightarrow \pi_{-p-q}(R\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[S], M)).$$

由于谱序列的 E_2 页中的所有对象根据假设都属于 $\mathscr{C}$，且 $\mathscr{C}$ 对极限、余极限和扩张稳定，因此可以推得 $R\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}[S], M)$ 的上同调群属于 $\mathscr{C}$。由此可知，$\mathbf{D}$ 满足定义 4.1.1 的条件 (2)，因此它在 $A^{\triangleright}$ 上定义了一种解析环结构。□

第一个应用　　定理 4.4.1 的解析环结构的同伦不变性　　.

推论 4.4.4 ([CS20，命题 12。21])。 设 $A^\triangleright \to B^\triangleright$ 是动画凝聚环的一个映射，且 $\pi_0(A^\triangleright) \to \pi_0(B^\triangleright)$ 是一个同构。 $A^\triangleright$ 与 $B^\triangleright$ 的（未完备）解析环结构之间存在一个双射，该双射将 A 映射到 $B^\triangleright_{A/}$。

证明。 根据定理 4.4.1， $A^\triangleright$ 上的解析环结构与阿贝尔范畴模范畴($\pi_0(A^\triangleright)$)的适当局部化一一对应。这就证明了该推论。□

定理 4.4.1 的另一个应用是解析环结构在幂零加厚下的不变性。

命题4.4.5 ([CS20，命题 12。23])。 设 $A^\triangleright \to B^\triangleright$ 是凝聚动画环的一个映射，且 I 是 $\pi_0(A^\triangleright) \to \pi_0(B^\triangleright)$ 的核，且该核是幂零的。那么， $A^\triangleright$ 和 $B^\triangleright$ 上的未完备解析环结构之间存在自然双射，它将 $A^\triangleright$ 的解析环结构 A 映射为诱导解析环结构 $B^\triangleright_{A/}$。

证明。 根据推论 4.4.4，我们可以假设 $A^\triangleright$ 和 $B^\triangleright$ 是静态环。通过归纳，我们甚至可以假设 $I^2 = 0$。

设 B 是 $B^\triangleright$ 上对应于某个范畴 $\mathcal{C}_B$ 的解析环结构。令 $\mathscr{C} \subset \mathrm{D}^\heartsuit(A^\triangleright)$ 为满足 M 且 IM 和 M/IM 都属于 $\mathrm{D}(B)$ 的对象所构成的全子范畴。范畴 $\mathscr{C}$ 显然是可呈示的。我们断言，它对极限、余极限、扩张、任意高阶直积以及来自凝聚阿贝尔群的内部 Ext 群稳定。根据定义可知， $\mathscr{C}$ 对核、余核和扩张稳定，且包含 $\mathscr{C}_B$。它也包含任意直和，因为直和是正合的。为证明它包含任意高阶积，考虑 $\mathscr{C}$ 中的一族对象 $\{M_i\}_{i\in I}$。我们有一个同伦积的纤维序列

$$\prod_i^h IM_i \to \prod_i^h M_i \to \prod_i^h M_i/IM_i.$$

取长正合复形可知，高阶积 $\prod^{(n)} M_i$ 属于 $\mathscr{C}$；也就是说，根据定理 4.4.1，我们知道 $\mathscr{C}_B$ 中对象的任意高阶积仍属于 $\mathscr{C}_B$。最后， $\mathscr{C}_B$ 对与凝聚阿贝尔群之间的内部 Ext 稳定性，可由短正合列 $0 \to IM \to M \to M/IM \to 0$ 所诱导的长正合序列得到。□

4.5. **解析环态射**。 设 A 和 B 为解析环，并设 $f\colon A^\triangleright \to B^\triangleright$ 为凝聚动画环的态射。我们希望得到一个判据，以判断映射 f 是否为解析环态射 $f\colon A \to B$。范畴 $\mathrm{D}_{\geq 0}(B)$由对象 $B[S]$ 生成，其中S 为轻型赋形集。当且仅当对所有 S-轻型赋形集， $B[S]$ 都是 A-完备的， f 才是解析环态射。反过来，假设我们给定了函子性映射 $A[S] \to B[S]$ ，它们是关于 $A^\triangleright \to B^\triangleright$ 线性的，且与来自 $S \in \mathrm{Prof}^{\mathrm{light}}$的映射相容。那么，在一个温和条件下，这些数据会产生一个解析环映射：

命题 4.5.1 ([CS19，命题 7。14])。 沿用前面的记号。假设对于所有 $S \in \mathrm{Prof}^{\mathrm{light}}$ ，给定一个映射 $S \to A^\triangleright$，它在 $\mathrm{D}(A^\triangleright)$ 中诱导出 $A[S] \to A[*]$ ；并且对于复合映射 $S \to A^\triangleright \to B^\triangleright$，存在唯一的映射 $B[S] \to B[*]$ ，属于 $\mathrm{D}(B^\triangleright)$，使得图表

$$\begin{array}{ccc} \pi_0(A[S]) & \longrightarrow & \pi_0(A[*]) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_0(B[S]) & \longrightarrow & \pi_0(B[*]) \end{array}$$

可交换。因此 $f\colon A^\triangleright \to B^\triangleright$ 是解析环态射 $f\colon A \to B$。

证明。 令 $\mathscr{C}_A$ 和 $\mathscr{C}_B$ 分别为完备 A -模范畴和完备 B-模范畴的心。由定理 4.4.1，只需证明将 $\mathscr{C}_B$ 中的对象视为 $A^\triangleright$-模时，它们属于 $\mathscr{C}_A$ 。由于对象 $\pi_0(B[S])$ 是 $\mathscr{C}_B$ 的生成元，只需证明它们属于 $\mathscr{C}_A$。这就将问题归结为阿贝尔情形，此时可应用 [CS19，命题 7.14] 的证明。□

4.6. 通过消去代数进行局部化。 在凝聚数学的“旧”基础中，构造解析环是一项艰巨的挑战。构造凝聚整数需要全面理解局部紧阿贝尔群的扩张群，而构造液态环则涉及大量非局部凸泛函分析。在轻凝聚数学的新框架中，利用零序列的内部紧射影对象 P 构造解析环要容易得多。这简化了固体环的构造，并提供了一种受 Tate 曲线启发的气态环的自然构造。需要说明的是：液态环的构造仍和以前一样困难，而且轻理论本身并不能简化关键计算。不过，如下文所述，我们现在可以用一种更一般的方式构造模范畴的局部化。

设 $\mathscr{C}$ 是一个可呈示的对称幺半稳定 ∞-范畴。设 $A \in \mathscr{C}$ 是一个对象，并带有以下两个映射

(1) $m\colon\ A \otimes A \to A$ 和

(2) $\mu\colon\ 1 \to A$

使得复合映射 $A \xrightarrow{\mu\otimes}{}_{\text{恒等映射}} A \otimes A \xrightarrow{m} A$ 是 A 的恒等映射。我们令 $\mathscr{E} \subset \mathscr{C}$ 为由满足 $\mathrm{Hom}(A,\ M) = 0$ 的对象 M 构成的全子范畴。显然，根据反射原理 [RS22], , $\mathscr{E}$ 是可呈示的；它对 $\mathscr{C}$ 中的极限以及内部 Hom 稳定。

我们的目标是显式构造局部化函子 $\mathscr{C} \to \mathscr{E}$。令 $C = $ = fib$(1 \to A)$ 为纤维。定义 $F\colon\ \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ 为函子 $\mathrm{Hom}(C,\ -)$。由于我们有一个映射 $C \longrightarrow 1$，因此存在函子之间的一个自然变换 $\mathrm{id}_{\mathscr{C}} \to F$。

引理 4.6.1. 设 $X \in \mathscr{C}$和 $M \in \mathscr{E}$。那么 $\underline{\mathrm{Hom}}(F(X)\ M) \to \underline{\mathrm{Hom}}(X, M)$ 是一个等价 $e.$

证明。 展开这些构造可知，只需证明

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\underline{\mathrm{Hom}}(A, X), M) = 0. \tag{4.6.1}$$

我们断言，$\underline{\mathrm{Hom}}(A, X)$ 是 $A \otimes \mathrm{Hom}(A, X)$ 的一个 retract。假设该断言成立，则可得

$$\underline{\mathrm{Hom}}(A \otimes \underline{\mathrm{Hom}}(A, X), M) = \underline{\mathrm{Hom}}(\underline{\mathrm{Hom}}(A, X), \underline{\mathrm{Hom}}(A, M)) = 0,$$

这意味着 (4.6.1) 消失。现在来证明该断言。乘法映射$m\colon\ A \otimes A \to A$ 诱导出一个映射

$$\underline{\mathrm{Hom}}(A, X) \to \underline{\mathrm{Hom}}(A \otimes A, X)$$

它伴随于一个映射

$$A \otimes \underline{\mathrm{Hom}}(A, X) \to \underline{\mathrm{Hom}}(A, X).$$

另一方面，单位映射 $\mu\colon\ 1 \to A$ 诱导出一个映射 $\mathrm{Hom}(A,\ X) \to A \otimes \mathrm{Hom}(A,\ X)$。然后通过图表追踪可知，复合映射

$$\underline{\mathrm{Hom}}(A, X) \to A \otimes \underline{\mathrm{Hom}}(A, X) \to \underline{\mathrm{Hom}}(A, X) \tag{4.6.2}$$

是恒等映射，从而证明了该断言。事实上，图表（4.6.2）与一个图表伴随

$$f\colon A \otimes \underline{\mathrm{Hom}}(A, X) \xrightarrow{\mu\otimes \mathrm{id}_A} A \otimes A \otimes \underline{\mathrm{Hom}}(A, X) \xrightarrow{g} X$$

其中 g 是复合映射

$$g\colon A \otimes A \otimes \underline{\mathrm{Hom}}(A, X) \xrightarrow{m^*} A \otimes A \otimes \underline{\mathrm{Hom}}(A \otimes A, X) \xrightarrow{ev_{A\otimes A}} X.$$

于是，我们得到一个交换方形

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A \otimes \underline{\mathrm{Hom}}(A, X) & \xrightarrow{m^*} & A \otimes A \otimes \underline{\mathrm{Hom}}(A \otimes A, X) \\ \downarrow{\scriptstyle m\otimes \mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle ev_{A\otimes A}} \\ A \otimes \underline{\mathrm{Hom}}(A, X) & \xrightarrow{\qquad ev_A \qquad} & X \end{array}$$

因此， f 也是复合映射

$$A\otimes\underline{\mathrm{Hom}}(A,X)\xrightarrow{\mu\otimes\mathrm{id}_A}A\otimes A\underline{\mathrm{Hom}}(A,X)\xrightarrow{m\otimes\mathrm{id}}A\otimes\underline{\mathrm{Hom}}(A,X)\xrightarrow{ev_A}X$$

这与求值映射 ev_A 相同，因为 $m\circ(\mu\otimes$ 恒等映射$_A)$ $=$ 恒等映射$_A$。取伴随后可得，复合映射 (4.6.2) 是恒等映射。□

令 $n\in\mathbb{N}$，并令 F^n： $\mathscr{C}\to\mathscr{C}$ 为函子 F 的第 n 次迭代。自然变换 $\mathrm{id}_{\mathscr{C}}\to F$ 产生如下自然变换的序列图

$$\mathrm{id}_{\mathscr{C}}\to F\to F^2\to\cdots\to F^n\to\cdots.$$

令 $F^\infty=\lim_{\longrightarrow n}F^n$。引理 4.6.1 表明，对于所有 $n\in[0,\infty]$、 $X\in\mathscr{C}$ 和 $M\in\mathscr{E}$，自然映射

$$\underline{\mathrm{Hom}}(F^n(X),M)\xrightarrow{\sim}\underline{\mathrm{Hom}}(X,M)\tag{4.6.3}$$

是一个等价。我们希望对 F 施加一些条件，使 F^∞ 成为包含映射的左伴随。

命题 4.6.2。 假设以下条件之一成立：

（1）序列余极限 $F^\infty(X)=\lim_{\longrightarrow n}F^n(X)$ 对所有 X 都稳定（例如，当 A 是幂等的时）。

（2）$\underline{\mathrm{Hom}}(A,-)$: $\mathscr{C}\to\mathscr{C}$ 与序列余极限交换（例如，当 A 在 $\mathscr{C}$ 中是内部紧致的时）。

那么 F^∞: $\mathscr{C}\to\mathscr{C}$ 取值于 $\mathscr{E}$，并且是包含映射 $\mathscr{E}\subset\mathscr{C}$ 的左伴随。

证明。 由（4.6.3）可知，只需证明 F^∞ 取值于 $\mathscr{E}$。条件（1）和（2）表明，对所有 $X\in\mathscr{C}$，自然映射

$$\varinjlim_n\underline{\mathrm{Hom}}(A,F^n(X))\to\underline{\mathrm{Hom}}(A,F^\infty(X))$$

是一个等价。注意，我们有一个交换图，其各行都是纤维序列

$$\begin{tikzcd}
\underline{\mathrm{Hom}}(A,F^{n+1}(X)) \arrow[r] & F^{n+1}(X) \arrow[r] & F^{n+2}(X) \\
\underline{\mathrm{Hom}}(A,F^n(X)) \arrow[r] \arrow[u] & F^n(X) \arrow[r] \arrow[u] & F^{n+1}(X). \arrow[u] \arrow[ul, dashed, "\mathrm{id}"]
\end{tikzcd}$$

那么，在各列中对 $n\to\infty$ 取余极限，得到一个纤维序列

$$\varinjlim_n\underline{\mathrm{Hom}}(A,F^n(X))\to\varinjlim_n F^n(X)\xrightarrow{\sim}\varinjlim_n F^{n+1}(X),$$

其中右箭头是一个等价。这就证明了 $\mathrm{Hom}(A,F^\infty(X))$ $=\overline{\longrightarrow n}$ $=$ 0 □ $\lim\overline{\mathrm{Hom}(A,F^n(X))}$，如所需。

例 4.6.3. 交换代数中的一些经典局部化，是命题 4.6.2 中所述局部化的例子。

(1) 设 R 是一个动画环， $\mathscr{C}=\mathrm{D}(R)$ 且 $P=R/^{\mathbb{L}}f$。那么，由满足 $R\mathrm{Hom}_R(P,M)=0$ 的对象 M 构成的范畴 $\mathscr{E}\subset\mathscr{C}$ 恰好是 $\mathscr{E}=\mathrm{D}(R[1/f])$。事实上，显式计算表明 $F^\infty(M)=\lim_{\longrightarrow\times f}M=M[1/f]$。(2) 设 R 和 $\mathscr{C}$ 仍如前，并取 $P=R[1/f]$。那么 P 是一个幂等代数，而由满足 $R\mathrm{Hom}_R(P,M)=0$ 的 R-模 M 构成的范畴 $\mathscr{E}\subset\mathscr{C}$，恰好是 f-进完备模的范畴。函子 F^∞ 在 $n=1$ 处稳定，而 $F(M)=\lim_{\longleftarrow n}M/^{\mathbb{L}}\overline{f^n}$ 就是 f-进完备化函子。

例 4.6.4. 设 $P=\mathbb{Z}[\mathbb{N}\cup\{\infty\}]/(\infty)$ 为零序列的自由凝聚阿贝尔群。根据命题 3.1.3，它具有自然的代数结构，使得 $\mathbb{Z}[q]\to P$ 是代数同态，其中 q 映射到 $[1]$。我们将记作 $P=\mathbb{Z}[\widehat{q}]$。

(1) 在 $\mathbb{Z}[\widehat{q}]$ 中乘以 q 对应于移位映射 Shift: $P \to P$。那么，凝实阿贝尔群的范畴恰好是满足下述条件的凝聚阿贝尔群 M

$$R\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{Z}[\widehat{q}]/(1-q), M) = 0.$$

对象 P 是内紧投射的，因此前述局部化属于命题 4.6.2 的情形（2）。

（2）令 $\mathbb{Z}_\square$ 为凝聚整数环。我们知道， $\mathbb{Z}_\square \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\widehat{q}] = \mathbb{Z}[[q]]$ 是变量 q上的幂级数环。我们可以通过如下方式构造由多项式代数产生的其他固态结构：定义固态 $\mathbb{Z}[T]_\square$-模范畴，记作 Mod($\mathbb{Z}[T]_\square$)，它是 $\mathbb{Z}$-固态 $\mathbb{Z}[T]$-模 M 构成的全子范畴，使得

$$R\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{Z}[T]}(\mathbb{Z}[[q]][T]/(1-Tq), M) = 0.$$

启发式地说，我们要求零序列 $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$是 T-可求和的，也就是说，要求 $\sum_n b_n T^n$收敛。注意， $\mathbb{Z}[[q]][T]/(1-qT) = \mathbb{Z}((T^{-1}))$是$T^{-1}$上的 Laurent 幂级数环。根据例3.5.1，代数 $\mathbb{Z}((T^{-1}))$在 $\mathbb{Z}[T]$上是幂等的。因此，前述局部化同时属于命题 4.6.2 的条件（1）和（2）。

(3) 使用命题 4.6.2 可以抽象构造出的新型解析环是气态环。令 $A^\triangleright = \mathbb{Z}[\widehat{q}][q^{-1}]$，并考虑代数 $A^\triangleright \otimes_{\mathbb{Z}} P$。令 T表示 P的变量。于是， $A^\triangleright$上的气态结构是关于代数 $A \otimes_{\mathbb{Z}} P/(1-qT)$的局部化。换言之，对象 $M \in \mathrm{D}(A^\triangleright)$ 是气态的，当且仅当

$$R\underline{\mathrm{Hom}}_{A^\triangleright}(A \otimes_{\mathbb{Z}} P/(1-qT), M) = 0.$$

(4) 更一般地，给定一个解析环 A，考虑 $P_A = A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\widehat{q}]$。那么，对于任意既是 P_A-代数R又是完美 P_A-模的对象，可以考虑局部化 $\mathscr{E} \subset \mathrm{D}(A)$，它由满足 $R\mathrm{Hom}(R, M) = 0$的对象 M 组成。范畴 $\mathscr{E}$ 满足定义 4.1.1 的条件 (1) 和 (2)。要为 $A^\triangleright$定义解析环结构，唯一的限制是连通性条件 (3)，而这一条件实际上很容易在实践中验证。尽管如此，这仍然通过一种系统化的过程解决了构造多个解析环实例的问题（在验证连通性的条件 (3) 之后）。

尽管如此，构造解析环的困难仍然存在，现在则体现在轻投射有限集上自由完备模的计算中。其优点在于，现在问题不再是定义或构造，而是计算，这在概念上要清晰得多。

5. 凝聚解析环

在本节中，我们给出源于非阿基米德几何的解析环的例子。在第 3 节中，我们构造了凝聚整数的解析环 $\mathbb{Z}_\square$ ，我们的首要目标是将这一构造推广到 $\mathbb{Z}$ 上的有限型代数，进而推广到任意离散动画环。然后，我们讨论概形与离散 adic 空间上凝聚拟凝聚层的范畴。

5.1. **Smashing 谱**。 在介绍固态解析环的例子之前，我们先讨论（稳定）对称幺半 ∞-范畴中的一些一般构造；这些构造对于解析叠的定义至关重要。从六函子形式体系的角度来看，它们是空间的开浸入与闭浸入的自然范畴化。我们将遵循 [CS22, 讲座 V]，另见[Aok23, Aok24]。 **在本小节中，我们始终采用完全导出的处理方式，即除非另有说明，张量积和 Hom 空间均指导出的张量积和 Hom 空间**。

5.1.1. 拓扑六函子。作为动机，我们先回顾一些关于拓扑空间上的层的基本事实。设 X 为一个拓扑空间，并令 $D(X,\mathbb{Z})$ 为 X 上阿贝尔层的导出范畴。给定 $U\subset X$ 一个开子空间和 $Z=X\backslash U$ 其闭补集，我们有不同的函子联系范畴 $D(U,\mathbb{Z})$、$D(Z,\mathbb{Z})$ 和 $D(X,\mathbb{Z})$。更具体地说，我们有

- 拉回函子
$$\iota^*: D(X,\mathbb{Z})\to D(Z,\mathbb{Z})$$
$$j^*: D(X,\mathbb{Z})\to D(U,\mathbb{Z}).$$
- 函子　　子 ι^* 有一个右伴随，由推前函子或零延拓函子给出　　r
$$\iota_*: D(Z,\mathbb{Z})\to D(X,\mathbb{Z}).$$
- ι_* 本身也有一个右伴随，由支撑在 Z 上的截面给出
$$\iota^!: D(X,\mathbb{Z})\to D(Z,\mathbb{Z}).$$

函子 ι_* 满足投影公式，即下面的箭头是一个等价

$$\iota_*N\otimes_{\mathbb{Z}_X}M\xrightarrow{\sim}\iota_*(N\otimes_{\mathbb{Z}_Z}\iota^*M). \tag{5.1.1}$$

更明确地说，$\iota_*\mathbb{Z}_Z$ 是支撑在 Z上的局部常值层 $\mathbb{Z}$，并且我们有

$$\iota_*\iota^*=\iota_*\mathbb{Z}_Z\otimes_{\mathbb{Z}_X}-.$$

于是，函子 $\iota^!$ 可描述为

$$\iota_*\iota^!=\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{Z}_X}(\iota_*\mathbb{Z}_Z,-).$$

另一方面，函子 j^* 既有左伴随，也有右伴随。

- 右伴随 j_*：$D(U,\mathbb{Z})\to D(X,\mathbb{Z})$是自然的推前函子。
- 左伴随$j_!$：$D(U,\mathbb{Z})\to D(X,\mathbb{Z})$是自然的零延拓函子。

此外，函子 $j_!$ 满足投影公式，即自然映射

$$j_!(N\otimes_{\mathbb{Z}_U}M)\xrightarrow{\sim}j_!N\otimes_{\mathbb{Z}_X}M \tag{5.1.2}$$

是一个等价。

事实证明，函子 ι_*、j_* 和 $j_!$ 是全忠实的；这是因为映射 $\mathbb{Z}_X\to\iota_*\mathbb{Z}_Z$ 在 $D(X,\ \mathbb{Z})$中是幂等的，也就是说，自然映射 $\iota_*\mathbb{Z}_Z\xrightarrow{\mathrm{id}\ \otimes 1}\iota_*\mathbb{Z}_Z\otimes^L_{\mathbb{Z}_X}\iota_*\mathbb{Z}_Z$是一个等价。因此，在 $D(X,\ \mathbb{Z})$中存在涉及全部四个函子的自然纤维序列:

$$\iota_*\iota^!\to\mathrm{id}_X\to j_*j^*$$
$$j_!j^*\to\mathrm{id}_X\to\iota_*\iota^*.$$

前述纤维序列导出了导出范畴的“Verdier正合序列”

$$D(Z,\mathbb{Z})\underset{\iota^!}{\overset{\iota^*}{\underset{\longleftarrow}{\overset{\longleftarrow}{\longrightarrow}}}}\ D(X,\mathbb{Z})\underset{j_*}{\overset{j_!}{\underset{\longleftarrow}{\overset{\longleftarrow}{\longrightarrow}}}}\ D(U,\mathbb{Z}). \tag{5.1.3}$$

人们希望将 (5.1.3) 的局部化序列与 (5.1.1) 和 (5.1.2) 的投影公式一并推广，以便讨论对称幺半范畴的抽象开浸入与闭浸入。这一想法借助 smashing 谱得以实现。

5.1.2. *smashing* 谱与幂等代数。 对于开浸入与闭浸入的一般概念，关键对象是幂等代数。

定义 5.1.1. 设 $\mathscr{C}$ 是一个具备呈示性的对称幺半稳定 ∞-范畴，其单位为 1。特别地， $\mathscr{C}$ 是闭的，即它具有内部 Hom。

$\mathscr{C}$ 中的幂等代数是一个映射

$$\mu : 1 \to A$$

$\mathscr{C}$ 中满足以下条件的映射

$$A \xrightarrow{\mathrm{id}_A \otimes \mu} A \otimes A$$

是一个等价。幂等代数之间的态射 $A \to B$ 是 $\mathscr{C}$ 中保持单位的映射。我们令 $\mathrm{Sm}(\mathscr{C})$ 为 $\mathscr{C}$ 中幂等代数范畴的对偶，并称其为 $\mathscr{C}$ 的 *smashing* 谱。

先验地说，幂等代数不必具备任何代数结构。不过，它总是会被赋予一个由以下自然等价导出的自然交换代数结构

$$A \cong A \otimes A \cong A \otimes A \otimes A \cong \cdots$$

连同所有高阶相容性，参见 [Lur17，命题 4.8.2.9]。

给定 A $\mathscr{C}$ 中的一个幂等代数，自然映射

$$\mathrm{Mod}_A(\mathscr{C}) \to \mathscr{C}$$

是全忠实的，也就是说， $M \in \mathscr{C}$ 是一个 A-模，当且仅当 $M \xrightarrow{\mu \otimes}_{\mathrm{id}} A \otimes M$ 是一个等价。换句话说，对于 $\mathscr{C}$ 中的一个对象而言，成为 A-模是一种性质，而非额外结构。此外， M 是一个 A-模，当且仅当 $\mathrm{Hom}(A, M) \to M$ 是一个同构。

最后，给定 A 和 B 幂等代数，幂等代数的映射空间 $\mathrm{Map}^{1/}(A, B)$ 要么可缩，要么为空。这表明 $\mathrm{Sm}(\mathscr{C})$ 是一个偏序集。事实上，范畴 $\mathrm{Sm}(\mathscr{C})$ 具有 locale 的结构，也就是说，它的行为如同某个拓扑空间的闭子空间构成的偏序集：

命题 5.1.2 ([CS22，命题 5。3], [Aok23，定理 3。8])。 偏序集 $\mathrm{Sm}(\mathscr{C})$ 是一个 *locale*，其闭子空间 $Z \subset \mathrm{Sm}(\mathscr{C})$ 对应于 $\mathscr{C}$ 的幂等代数 A，因此

(1) $Z \cap Z'$ 对应于 $A \otimes A'$；*(2)* $Z \subset Z'$ 当且仅当 $A \otimes A' = A$；*(3)* $Z \cup Z'$ 对应于 $\mathrm{fib}(A \oplus A' \to A \otimes A')$，单位由 $1 \xrightarrow{\mu_A \oplus}_{(-\mu_{A'})} A \oplus A'$ 给出。等价地， $Z \cup Z'$ 对应于拉回 $A \times_{A \otimes A'} A'$。*(4)* $\bigcap_i A_i$ 对应于 $\lim_{\longrightarrow i} A_i$。

我们经常用 $Z \subset \mathrm{Sm}(\mathscr{C})$ 表示 $\mathscr{C}$ 的局部的一个闭子空间，并用 $A(Z)$ 表示所附带的幂等代数。

5.1.3. 对称幺范畴的开浸入与闭浸入。令 $\mathrm{CAlg}(\mathrm{Pr}^L_{\mathrm{st}})$ 表示具备呈现性的对称幺稳定 ∞-范畴的 ∞ 范畴。我们将借鉴拓扑空间的六函子来定义开浸入与闭浸入。出于几何上的原因，我们将在对偶范畴 $\mathrm{Affine}(\mathrm{Pr}^L_{\mathrm{st}}) := \mathrm{CAlg}(\mathrm{Pr}^L_{\mathrm{st}})^{\mathrm{op}}$ 中工作；对于给定的 $\mathscr{C} \in \mathrm{CAlg}(\mathrm{Pr}^L_{\mathrm{st}})$，我们用 $\mathrm{Spec}\,\mathscr{C} \in \mathrm{Affine}(\mathrm{Pr}^L_{\mathrm{st}})$ 表示其在对偶范畴中的对象。给定 $\mathrm{Affine}(\mathrm{Pr}^L_{\mathrm{st}})$ 中的箭头 $f\colon \mathrm{Spec}\,\mathscr{C} \to \mathrm{Spec}\,\mathscr{E}$，我们将记 $f^*\colon \mathscr{E} \to \mathscr{C}$ 为 $\mathrm{CAlg}(\mathrm{Pr}^L_{\mathrm{st}})$ 中对应的映射。

定义 5.1.3. 设 $f\colon \mathrm{Spec}\,\mathscr{C} \to \mathrm{Spec}\,\mathscr{E}$ 是 $\mathrm{Affine}(\mathrm{Pr}^L_{\mathrm{st}})$ 中的一个映射。

(1) 我们称 f 是闭浸入，如果 f^* 有一个保余极限的全忠实右伴随$f_*:\mathscr{C}\to\mathscr{E}$，使得对于 $M\in\mathscr{C}$ 和 $N\in\mathscr{E}$，自然映射

$$f_*M\otimes N\to f_*(M\otimes f^*N)$$

是一个等价。

(2) 如果 f^* 具有一个全忠实左伴随 $f_!:\ \mathscr{C}\to\mathscr{E}$，使得对于 $M\in\mathscr{C}$ 和 $N\in\mathscr{E}$，自然映射

$$f_!(M\otimes f^*N)\to f_!M\otimes N$$

是一个等价。

简而言之，$\mathbf{Affine}(\mathbf{Pr}^L_{\mathrm{st}})$ 中的态射 $f:\ \mathbf{Spec}\,\mathscr{C}\to\mathbf{Spec}\ \mathscr{E}$ 是闭浸入，当且仅当 f_* 保余极限、全忠实并满足投影公式（因此我们有$f_!=f_*$）。类似地，f 是开浸入，当且仅当 f^* 具有一个左伴随 $f_!$，该左伴随是全忠实的并满足投影公式（因此我们有 $f^*=f_!$）。下面的命题用 smashing 谱刻画了闭浸入和开浸入。

命题 5.1.4 ([CS22，命题 6。5])。设 $f:\ \mathbf{Spec}\,\mathscr{C}\to\mathrm{Spec}\ \mathscr{E}$是 $\mathrm{Affine}(\mathrm{Pr}^L{}_{\mathrm{st}})$中的一个态射 .

(1) f 是闭浸入，当且仅当存在一个（必然唯一的）幂等代数$A\in\mathscr{E}$，使得 $1_{\mathscr{C}}\to f^*A$ 是同构，并且诱导的自然映射 模范畴$_A$（$\mathscr{E}$） $\to\mathscr{C}$是等价。*(2)* f 是开浸入，当且仅当存在一个（必然唯一的）幂等代数 A，使得 $f^*A=0$，并且诱导的自然映射 $\mathscr{E}/$模范畴$_A$（$\mathscr{E}$） $\to\mathscr{C}$是等价。

备注 5.1.5。设 $\mathscr{C}\in\mathbf{CAlg}(\mathbf{Pr}^L_{\mathrm{st}})$，并设 $A\in\mathscr{C}$是一个幂等代数，其关联的闭子空间为 $Z\subset\mathbf{Sm}(\mathscr{C})$，开补为 U。令 $\mathscr{C}(Z)=$模范畴$_A(\mathscr{C})$ 和 $\mathscr{C}(U)=\mathscr{C}/\mathscr{C}(U)$ 分别表示与 Z 和 U 相关联的闭局部化与开局部化。为便于后续参考，我们将明确写出开浸入与闭浸入对应的六函子。

(1) 拉回映射 $\iota^*:\ \mathscr{C}\to\mathscr{C}(Z)$ 由基变换 $\iota^*M=A\otimes M$给出，对于 $M\in\mathscr{C}$。推前 $\iota_*:\ \mathscr{C}(Z)\to\mathscr{C}$是遗忘函子，而 $\iota^!$ 由下式确定

$$\iota_*\iota^!M=\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathscr{C}}(A,M)$$

对于 $M\in\mathscr{C}$。

(2) 我们记 $j^*:\ \mathscr{C}\to\mathscr{C}(U)$ 为拉回或局部化映射。函子 $j_!$和 j_*由下式确定

$$j_!j^*M=\mathrm{fib}(1\to A)\otimes M$$

and

$$j_*j^*=\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathscr{C}}(\mathrm{fib}(1\to A),M)$$

对于 $M\in\mathscr{C}$。

闭浸入和开浸入在 $\mathbf{Affine}(\mathbf{Pr}^L_{\mathrm{st}})$ 中沿拉回、包含映射、并集和交集的行为符合拓扑上的预期（参见 [CS22，引理 6.4 以及推论 6.6]）。此外，还可以“免费”得到底层对称幺半范畴沿 locale 的拓扑的下降。

定理 5.1.6 ([CS22，定理 6。7])。*(1)* 在 $\mathrm{Affine}(\mathrm{Pr}^L_{\mathrm{st}})$中存在一个格罗滕迪克拓扑，其中 $\mathscr{C}$ 的覆盖由 $\mathscr{C}$ 的开局部化给出，其对应的开子集覆盖 $\mathrm{Sm}(\mathscr{C})$。*(2)* 恒等函子 $\mathrm{Affine}(\mathrm{Pr}^L_{\mathrm{st}})^{\mathrm{op}}\to\mathrm{CAlg}(\mathrm{Pr}^L_{\mathrm{st}})$ 关于此格罗滕迪克拓扑是一个层。*(3)* 开（相应地，闭）浸入的偏序集对此格罗滕迪克拓扑也满足下降。

备注 5.1.7。 定理 5.1.6 还有一个变体，其中覆盖由有限多个闭局部化给出，其闭子空间覆盖 $\mathrm{Sm}(\mathscr{C})$。稍后我们将看到，一种更一般的格罗滕迪克拓扑，称为 !-拓扑，以对称幺半范畴的开覆盖和闭覆盖作为特殊覆盖。

5.1.4. 斯通对偶。 我们以简短讨论本节作结，介绍拓扑空间与分配格之间一种技术性较强但很有用的对偶，称为 *Stone* 对偶，参见 [Sto37]and [GvG24]。

定义 5.1.8 ([GvG24，第 1.2] 节). 格 L 是指每个有限集都存在上确界和下确界的偏序集。更基本地说，格是一个元组 $(L, \vee, \wedge, \bot, \top)$，满足以下公理：

(1) 运算 $\vee$ 和 $\wedge$ 满足交换律；(2) 运算 $\vee$ 和 $\wedge$ 满足结合律；(3) 运算 $\vee$ 和 $\wedge$ 满足幂等律；(4) 吸收律 $a \wedge (a \vee b) = a$ 和 $a \vee (a \wedge b) = a$ 对 $a, b \in L$成立。(5) 最小元 $\bot$ 是 $\vee$ 的单位，而最大元 $\top$ 是 $\wedge$的单位。

格之间的映射 $f\colon L \to M$ 若保留二元运算$\vee, \wedge$ 和对象 $\bot, \top$，则称为格同态；等价地，若 f 是保留下确界和有限子集上确界的偏序集映射。

备注 5.1.9. 沿用定义 5.1.8 中的记号，若 L 是每个有限集都有上确界的偏序集，则定义如下运算：

(1) $a \vee b = \inf_{c \in L}(c \geq a$ 和 $c \geq b)$，即 $a \vee b$ 是 $\{a, b\}$的上确界。(2) $a \vee b = \sup_{c \in L}(c \leq a$ 和 $c \leq b)$，即 $a \wedge b$ 是 $\{a, b\}$ 的下确界。(3) 元素 $\bot$ 是 $\emptyset$ 的上确界，元素 $\top$ 是 $\emptyset$ 的下确界。

反过来，给定如前所述的元组 $(L$、$\vee$、$\wedge$、$\bot$、$\top)$，可在 L 上定义偏序结构：规定 $a \leq b$ 当且仅当 $a \wedge b = a$；等价地，根据吸收律，规定 $a \wedge b = b$。于是，元素 $\bot$ 是 L 的极小元，而 $\top$ 是极大元。

例 5.1.10。 设 X 是一个拓扑空间。在 X 上有两个自然格，即开子空间格 $\mathrm{Op}(X)$ 和闭子空间格 $\mathrm{Cl}(X)$。事实上，$\mathrm{Op}(X)$ 和 $\mathrm{Cl}(X)$ 都是以包含映射为序的偏序集，其中 $\vee$ 和 $\wedge$ 分别由交集和并集给出。极大元和底元素分别是 X 和 $\emptyset$。存在格 $\mathrm{Op}(X)^{\mathrm{op}} \cong \mathrm{Cl}(X)$ 的自然反等价，它将开子空间 U 映到其补元 $Z = X \backslash U$。拓扑空间之间的连续映射 $f\colon Y \to X$ 会导出格同态 $f^*\colon \mathrm{Op}(X) \to \mathrm{Op}(Y)$ 和 $f^*\colon \mathrm{Cl}(X) \to \mathrm{Cl}(Y)$。

定义 5.1.11。 格 L 称为分配的，如果对所有 $a, b, c \in L$ 都有 $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$，或者等价地，如果 $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$。

例 5.1.12。 分配格的典型例子是拓扑空间 X的开子空间或闭子空间所构成的偏序集。此外，若 X 是谱空间（参见 [Sta22，第 08YF 节]，），则 X 的拟紧开子空间的偏序集 $\mathrm{Op}(X)^{\mathrm{qc}}$ 对有限并和有限交稳定，因此构成一个分配格。

Ston此对偶是谱空间与分配格之间的对偶 es.

定理 5.1.13 ([GvG24，定理 6。4])。 令 Spec 表示谱空间及谱映射所构成的范畴，令 $\mathrm{Lat}^{\mathrm{dis}}$ 表示分配格的范畴。函子 $\mathrm{Spec}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Lat}^{\mathrm{dis}}$将谱空间 X 映到其拟紧开子空间的偏序集 $\mathrm{Op}(X)^{\mathrm{qc}}$，这是一个范畴等价。

证明概要。 我们只说明 $\mathrm{Op}(-)^{\mathrm{qc}}$ of [GvG24, 定义 6.3], 逆的构造；关于等价的更多细节，请参阅同上。给定一个分配格 L

人们将其斯通对偶 $\mathsf{St}(L)$ 构造为这样一个拓扑空间：其底层集合为 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Latt}}(L,[1])$，其中 $[1]=\{0<1\}$。$\mathsf{St}(L)$ 上的拓扑定义如下：给定 $a\in L$，定义子空间 $U_a\subset \mathsf{St}(L)$ 为格映射 x 的集合：$L\to[1]$，满足 $x(a)=1$。于是可以验证：

(1) 若 $a<b$，则 $U_a\subset U_b$。(2) 对于 $a,\ b\in L$ 有 $U_{a\wedge b}=U_a\cap U_b$ 和 $U_{a\vee b}=U_a\cup U_b$。(3) $U_\bot=\emptyset$ 和 $U_\top=\mathsf{St}(L)$。

于是，$\mathsf{St}(L)$ 的拓扑是由满足 $a\in L$ 的子空间 U_a 生成的拓扑。 □

例 5.1.14. Stone 对偶在拟有限集上的特化如下。设 L 是一个格，若存在 $a^c\in L$ 使得 $a\wedge a^c=\bot$ 且 $a\vee a^c=\top$，则称元素 $a\in L$ 为既开又闭；我们称 a^c 为 a 的补元。容易验证，若 a 存在补元，则该补元唯一。若格 L 中的每个元素 $a\in L$ 都存在补元，则称其为布尔格。设 L 是一个布尔格，注意到 L 具有自然的布尔环结构，其乘积为 $ab:=a\wedge b$，和为 $a+b=(a\vee b)\wedge(a\wedge b)^c$；$L$ 的乘法单位元是元素 $\top$，零元是 $\bot$。将布尔格 $(L,\ \vee,\ \wedge,\ \bot,\ \top)$ 映到布尔环 $(L,\ +,\ \cdot)$ 的函子诱导出范畴等价

$$\mathsf{Lat}^{\mathrm{Boolean}}\cong\mathsf{Ring}^{\mathrm{Boolean}}$$

布尔格与布尔环之间。因此，定理 5.1.13 的 Stone 对偶特化为如下范畴等价

$$\mathsf{Prof}^{\mathrm{op}}\cong\mathsf{Ring}^{\mathrm{Boolean}}$$

将投射有限集 S 映射为局部常值函数的布尔环 $C(S,\ \mathbf{F}_2)$，这些函数从 S 到 $\mathbf{F}_2$。该函子的逆将布尔环 R 映射为拓扑空间 $\mathrm{Spec}\,R$。

例 5.1.15. 下面给出一个典型例子，说明定理 5.1.13 的应用。设 $\mathscr{C}$ 是一个可呈示的对称幺半稳定 ∞-范畴，$\mathrm{Idem}(\mathscr{C})$ 表示 $\mathscr{C}$的幂等代数构成的偏序集，其中 $A\le A'$ 当且仅当 $A\to A'$。根据定义，$\mathrm{Sm}(\mathscr{C})=\mathrm{Idem}(\mathscr{C})^{\mathrm{op}}$，我们将 $\mathrm{Sm}(\mathscr{C})$ 视为 $\mathscr{C}$的开局部化所构成的偏序集。设 $L\subset\mathrm{Sm}(\mathscr{C})$ 是 smashing 局部化的一个子空间，在有限并、有限交下封闭，并包含幂等代数 0 和 A。那么 L 是 $\mathrm{Sm}(\mathscr{C})$ 中的一个分配子格；由 Stone 对偶，存在一个 locale 的自然映射

$$f\colon \mathrm{Sm}(\mathscr{C})\to\mathrm{St}(L)$$

由以下事实唯一确定：对于 $a\in L$，其对应的开子空间 $U_a\subset\mathsf{St}(L)$ 满足$f^{-1}(U_a)=a\in\mathsf{Sm}(\mathscr{C})$。

5.2. **环** $\mathbb{Z}[T]_{\square}$。设 $P=\mathbb{Z}[\mathbb{N}\cup\{\infty\}]/(\infty)$ 为零序列的凝聚阿贝尔群，并令 $\mathbb{Z}[\hat{q}]$ 为视为代数的 P。$\mathbb{Z}[\hat{q}]$ 中乘以 $q=[1]$ 对应于移位映射。由于 $\mathbb{Z}[\hat{q}]\subset\mathbb{Z}[[q]]$，这个环是整环，并且有短正合列

$$0\to\mathbb{Z}[\hat{q}]\xrightarrow{1-q}\mathbb{Z}[\hat{q}]\to\mathbb{Z}[\hat{q}]/(1-q)\to 0.$$

根据定义，Solid 是由满足以下条件的凝聚阿贝尔群组成的全子范畴 M

$$R\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[\hat{q}]/(1-q),M)=0.$$

这一局部化过程符合命题 4.6.2 (2) 的一般框架，因为 P 在凝聚阿贝尔群中是内紧投射。根据定理 3.2.4 (12)，我们知道

$$\mathbb{Z}[\hat{q}]^{L\square}=\mathbb{Z}[[q]].$$

考虑将单变量多项式代数 $\mathbb{Z}[T]$ 视为一个 solid 阿贝尔群。我们令$A=(\mathbb{Z}[T],\ \mathbb{Z})_{\square}$表示诱导解析结构 $\mathbb{Z}[T]_{\mathbb{Z}_{\square}/}$。于是

$$A\otimes_{\mathbb{Z}}P=(\mathbb{Z}[T],\mathbb{Z})_{\square}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}[\hat{q}]=\mathbb{Z}[[q]][T]$$

是变量 q上的幂级数环上的多项式代数。于是，我们可以通过要求 T 在一个 A-模 M 中的零序列（m_n）是“T-可求和的”，来使变量 solid 化；也就是说，$\sum_n m_n T^n$在 M中收敛（且收敛唯一并具有函子性）。这引出了下面的定义。

定义 5.2.1。 对象 $M \in$ 模范畴(A)（分别在 D(A) 中）称为 T-凝实的，如果自然映射

$$R\underline{\mathrm{Hom}}_A(A \otimes_{\mathbb{Z}} P, M) \xrightarrow{1-T\,\mathrm{Shift}^*} R\underline{\mathrm{Hom}}_A(A \otimes_{\mathbb{Z}} P, M)$$

是一个等价。我们令 Mod$(\mathbb{Z}[T]_\square)$（分别为 D$(\mathbb{Z}[T]_\square)$）表示 T-凝实模的全子范畴（分别位于阿贝尔范畴或导出范畴中）。

由于 $A \otimes_{\mathbb{Z}} P$是一个紧射影 A-代数，命题 4.6.2 (2) 表明 D$(\mathbb{Z}[T]_\square)$ 是 $A^\triangleright$上的一个（未完备的）解析环结构；唯一需要验证的条件是局部化的右 t-正合性，但这自然成立，因为局部化是包含映射的左伴随，而包含映射是 t-正合的。我们将进一步推进，实际计算 $S \in \mathbf{Prof}^{\mathrm{light}}$的自由凝实模 $\mathbb{Z}[T]_\square[S]$。

首先请注意，纤维序列 $A \otimes_{\mathbb{Z}} P \xrightarrow{1-T_{\mathrm{Shift}}} A \otimes_{\mathbb{Z}} P \to Q$ 实际上是正合的，并且等价于短正合列

$$0 \to \mathbb{Z}[[q]][T] \xrightarrow{1-Tq} \mathbb{Z}[[q]][T] \to \mathbb{Z}((T^{-1})) \to 0 \tag{5.2.1}$$

其中 $\mathbb{Z}((T^{-1})) = \mathbb{Z}[[T^{-1}]][T]$ 是变量 T^{-1}的 Laurent 幂级数代数。特别地，由于 $\mathbb{Z}[[X]]$ 是幂等的（$\mathbb{Z}[X]$，$\mathbb{Z}$）$_\square$-代数，可推出 $\mathbb{Z}((T^{-1}))$ 是幂等的（$\mathbb{Z}[T]$，$\mathbb{Z}$）$_\square$-代数。由此得到以下命题。

命题 5.2.2。 范畴 $\mathrm{D}(\mathbb{Z}[T]_\square)$ 是 $\mathrm{D}((\mathbb{Z}[T], \mathbb{Z})_\square)$ 关于幂等代数 $\mathbb{Z}((T^{-1}))$的局部化。更确切地说，我们有一个半正交分解

$$\mathrm{D}(\mathbb{Z}((T^{-1}))_{\mathbb{Z}_\square/}) \xrightarrow{\iota_*} \mathrm{D}((\mathbb{Z}[T], \mathbb{Z})_\square) \xrightarrow{j^*} \mathrm{D}(\mathbb{Z}[T]_\square)$$

其中 ι_* 是自然包含，j^* 是局部化函子。令 ι^* 为基变换$\mathbb{Z}((T^{-1})) \otimes_A -$，令 j_* 为 j^*的右伴随。

根据可呈示对称幺半稳定∞-范畴中 smashing 局部化的一般理论（参见 [CS22，讲座 V] 和注 5.1.5），我们可以显式计算函子 j_*:

$$j_* j^* M = R\underline{\mathrm{Hom}}_A(\mathrm{fib}(\mathbb{Z}[T] \to \mathbb{Z}((T^{-1}))), M),$$

特别是，函子 $j_* j^*$ 与极限和余极限相交换。

利用 $\mathbb{Z}((T^{-1}))$ 的分解 (5.2.1)，可以很容易地计算出 $R\mathrm{Hom}_A(\mathbb{Z}((T^{-1})), \mathbb{Z}[T]) = 0$，因此 $j_* j^* \mathbb{Z}[T] = \mathbb{Z}[T]$。事实上，我们可以写成

$$R\underline{\mathrm{Hom}}_A(\mathbb{Z}[[q]][T], \mathbb{Z}[T]) = \mathbb{Z}[T]((q))/q\mathbb{Z}[T][[q]]$$

作为 $\mathbb{Z}[q,T]$-模，且乘以 $1 - Tq$在 $\mathbb{Z}[T][[q]]$上是可逆的。

利用这一计算，我们可以证明以下定理（更多细节请参见 [CS19, 第八讲]）。

定理 5.2.3。 全子范畴 $\mathrm{D}(\mathbb{Z}[T]_\square) \subset \mathrm{D}((\mathbb{Z}[T], \mathbb{Z})_\square)$ 在 $\mathbb{Z}[T]$上定义了一个解析环结构。对于 $S = \lim_{\longleftarrow n} S_n$，一个表示为有限集极限的轻射有限集，其生成的自由 $\mathbb{Z}[T]_\square$-模为

$$\mathbb{Z}[T]_\square[S] = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}[T][S_n].$$

证明。 记 $A = (\mathbb{Z}[T], \mathbb{Z})_\square$。定义 4.1.1 的条件 (1) 和 (2) 由命题 4.6.2 以及对象 $A \otimes_{\mathbb{Z}} P/(1 - Tq)$ 在 D$((\mathbb{Z}[T], \mathbb{Z})_\square)$ 中是紧对象这一事实立即得出。接下来只需证明条件 (3)，这可通过计算 $\mathbb{Z}[T]_\square[S]$ 得出。回想一下，若 S 是无限的，则 $\mathbb{Z}_\square[S] \cong \prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}$。由于 D$(\mathbb{Z}[T]_\square)$ 是相对于对象的局部化

在 D($\mathbb{Z}((T^{-1}))$) 中，因此只需证明映射 $(\prod_{\mathbb{N}}\mathbb{Z})[T] \to \prod_{\mathbb{N}}(\mathbb{Z}[T])$ 的余纤维 Q 是一个 a$\mathbb{Z}((T^{-1}))$-模。但有

$$\prod_{\mathbb{N}}(\mathbb{Z}[T])/((\prod_{\mathbb{N}}\mathbb{Z})[T]) = \prod_{\mathbb{N}}(\mathbb{Z}((T^{-1})))/((\prod_{\mathbb{N}}\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}_\square} \mathbb{Z}((T^{-1}))).$$

我们推得

$$j_*j^*Q = R\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{Z}[T]}(\mathrm{fib}(\mathbb{Z}[T] \to \mathbb{Z}((T^{-1}))), Q) = 0$$

因为 Q 是一个 $\mathbb{Z}((T^{-1}))$-模。我们得到

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}[T]_\square[S] &= j_*j^*(\mathbb{Z}_\square[S][T]) \\ &= j_*j^*(\varprojlim_n \mathbb{Z}[T][S_n]) \\ &= \varprojlim_n (j_*j^*\mathbb{Z}[T][S_n]) \\ &= \varprojlim_n \mathbb{Z}[T][S_n]\end{aligned}$$

从而完成定理的证明。 □

5.3. **有限型代数的凝固环**。 现在我们将环 $\mathbb{Z}[T]_\square$ 的构造推广到 $\mathbb{Z}$ 上的有限型代数。

定义 5.3.1. (1) 设 R 是一个凝固动画代数，且令 $r \in \pi_0(R)$。我们称一个凝固R-模 M 是 r-凝固的，若对于 r 的任意提升 $\mathbb{Z}[T] \to R$， M 限制为 $\mathbb{Z}[T]$-模后是T-凝固的（由推论 4.4.4 可知，此条件与将 r 提升为到 $\mathbb{Z}[T] \to R$ 的映射无关）。(2) 设 R 是 $\mathbb{Z}$ 上的有限型代数。令 $R_\square$ 为 R 上的解析环结构，使得 R-模 M 完备，当且仅当对于所有 $r \in R$， M 都是 r-凝固的。

定理 5.3.2。 设 R 是 $\mathbb{Z}$上的有限型代数。则对于 $S =$ 极限$_{\longleftarrow n} S_n$ 轻型赋形集合，自然映射

$$R_\square[S] \to \varprojlim_n R[S_n]$$

是一个同构。特别地，$\mathrm{D}(R_\square)$ 是其心的导出范畴，而 $\otimes^L_{R_\square}$ 是 $\otimes_{R_\square}$的左导出函子。此外，对于 $R_\square$-张量积， $\prod_{\mathbb{N}} R$ 是平坦的。

我们的首要任务是计算 $R_\square[S]$ 对于 $S \in \mathrm{Prof}^{\mathrm{light}}$的自由凝固生成元。注意，任何有限型代数都是多项式代数的一个商，因此我们先从多项式代数开始:

命题 5.3.3。 设 T_1，……， T_n 是一个变量集合，则自然映射

$$\mathbb{Z}[T_1]_\square \otimes_{\mathbb{Z}_\square} \cdots \otimes_{\mathbb{Z}_\square} \mathbb{Z}[T_n]_\square \to \mathbb{Z}[T_1, \ldots, T_n]_\square \tag{5.3.1}$$

是一个同构。换言之，一个 $\mathbb{Z}$-凝固 $\mathbb{Z}[T_1, \ldots, T_n]$-模是 $\mathbb{Z}[T_1, \ldots, T_n]$-凝固的，当且仅当它是 T_1，……， T_n-凝固的。此外，对于 $S =$ 极限$_{\longleftarrow n} S_n$，将其写成有限集的可数极限时，我们有

$$\mathbb{Z}[T_1, \ldots, T_n]_\square[S] = \varprojlim_n \mathbb{Z}[T_1, \ldots, T_n]_\square[S_n].$$

证明。 设 $A = \mathbb{Z}[T_1]_\square \otimes_{\mathbb{Z}_\square} \cdots \otimes_{\mathbb{Z}_\square} \mathbb{Z}[T_n]_\square$，这是 $\mathbb{Z}[T_1, \ldots, T_n]$ 上的解析环结构，使一个 A-完备模当且仅当它对所有 $i = 1, \ldots, n$ 都是 T_i-Solid。显然有 D($\mathbb{Z}[T_1, \ldots, T_n]_\square$) $\subset$ D(A) $\subset$ D($\mathbb{Z}[T_1, \ldots, T_n]^{\mathrm{cond}}$)。我们需要证明反向包含映射 D($A$) $\subset$D($\mathbb{Z}[T_1, \ldots, T_n]_\square$)，也就是说，如果一个 Solid $\mathbb{Z}[T_1, \ldots, T_n]$-模对所有 $i = 1, \ldots, n$ 都是 T_i-Solid，那么它对所有 $p(T) \in \mathbb{Z}[T_1, \ldots, T_n]$ 都是$p(T)$-Solid。

首先，我们来计算环 A 的紧投射生成元。我们通过对变量个数进行归纳，证明对于 $S = \lim_{\longleftarrow k} S_k$ 前有限

$$A[S] = \varprojlim_n \mathbb{Z}[T_1, \dots, T_n][S_k],$$

情形 $n = 1$ 为定理 5.2.3。假设该断言对 n 成立，并考虑 $B = \mathbb{Z}[T_1, \dots, T_n, T_{n+1}]_{A/}$ 所诱导的解析环结构。令 $C = \mathbb{Z}[T_1]_\square \otimes_{\mathbb{Z}_\square} \cdots \otimes_{\mathbb{Z}_\square} \mathbb{Z}[T_{n+1}]_\square$。根据定义，$\mathrm{D}(C) \subset \mathrm{D}(B)$ 是由 $\mathbb{Z}[T_{n+1}]$-Solid 对象构成的全子范畴（因为对于所有 $i = 1, \dots, n$，它们已经是 $\mathbb{Z}[T_i]$-Solid）。根据命题 5.2.2，对象 $M \in \mathrm{D}(A)$ 是 $\mathbb{Z}[T_{n+1}]$-Solid，当且仅当

$$R\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{Z}[T_{n+1}]}(\mathbb{Z}((T_{n+1}^{-1})), M) = 0.$$

沿 $(\mathbb{Z}[T_{n+1}], \mathbb{Z})_\square \to B$ 进行基变换后，这等价于

$$R\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{Z}[T_1, \dots, T_{n+1}]}(B \otimes_{\mathbb{Z}[T_{n+1}]} \mathbb{Z}((T_{n+1}^{-1})), M) = 0.$$

回顾一下，我们有如下分解

$$0 \to \mathbb{Z}[[q]][T_{n+1}] \xrightarrow{1 - qT_{n+1}} \mathbb{Z}[[q]][T_{n+1}] \to \mathbb{Z}((T_{n+1}^{-1})) \to 0.$$

于是，根据归纳，我们有

$$B \otimes_{\mathbb{Z}[T_{n+1}]} \mathbb{Z}((T_{n+1}^{-1})) = \mathbb{Z}[T_1, \dots, T_n]((T_{n+1}^{-1})),$$

它是一个幂等的 B-代数。然后，按照定理 5.2.3 中的相同论证可得

$$C_\square[S] = \varprojlim_n \mathbb{Z}[T_1, \dots, T_{n+1}][S_k]$$

如所需。

现在注意，任意离散的 $\mathbb{Z}[T_1, \dots, T_n]$-模都立即是 $\mathbb{Z}[T_1, \dots, T_n]_\square$-完备的，因为对任意 $a \in \mathbb{Z}[T_1, \dots, T_n]$，它都是 a-solid。这表明 $A[S] \cong \prod_I \mathbb{Z}[T_1, \dots, T_n]$ 是 $\mathbb{Z}[T_1, \dots, T_n]_\square$-完备的（因为完备模对乘积稳定），因此任意完备的 A-模都是 $\mathbb{Z}[T_1, \dots, T_n]_\square$-完备的（因为它对余极限稳定）。由此可得

$$\mathrm{D}(A) \subset \mathrm{D}(\mathbb{Z}[T_1, \dots, T_n]_\square) \subset \mathrm{D}(\mathbb{Z}[T_1, \dots, T_n]^{\mathrm{cond}})$$

因此我们得到等价

$$\mathrm{D}(A) = \mathrm{D}(\mathbb{Z}[T_1, \dots, T_n]_\square),$$

这就证明了映射 (5.3.1) 是一个等价。 □

推论 5.3.4. 设 R 是一个有限型代数，且 $\mathbb{Z}[T_1, \dots, T_n] \to R$ 是一个满射。则

$$R_\square = R_{\mathbb{Z}[T_1, \dots, T_n]_\square /}$$

具有诱导的 解析结构。此外，对于 $S = \lim_{\longleftarrow k} S_k$ 轻射有限集，我们有

$$R_\square[S] = \varprojlim_k R[S_n].$$

证明。根据定义，M-模是 $\mathbb{Z}[T_1, \dots, T_n]_\square$-完备的，当且仅当对所有 $a \in \mathbb{Z}[T_1, \dots, T_n]$ 都是 a-完备的。根据 $R_\square$ 的定义，这表明它具有诱导解析结构。特别是，

$$R_\square[S] = R \otimes^L_{\mathbb{Z}[T_1, \dots, T_n]_\square} \mathbb{Z}[T_1, \dots, T_n]_\square[S].$$

我们将证明一个更一般的事实：设 M 是有限型 $\mathbb{Z}[T_1, \dots, T_n]$-模，那么

$$M \otimes^L_{\mathbb{Z}[T_1, \dots, T_n]_\square} \prod_k (\mathbb{Z}[T_1, \dots, T_n]_\square) = \prod_k M.$$

事实上，考虑一个有限投射分解 $P_\bullet \to M$，其中所有项 P_n 都是 $\mathbb{Z}[T_1,\dots,T_n]$ 的有限个副本。那么 $M \otimes^L_{\mathbb{Z}[T_1,\dots,T_n]_\square} \prod_k(\mathbb{Z}[T_1,\dots,T_n]_\square)$ 等价于复形 $P_\bullet \otimes^L_{\mathbb{Z}[T_1,\dots,T_n]_\square} \prod_k(\mathbb{Z}[T_1,\dots,T_n]_\square)$。由于每一项 P_n 都是有限秩自由模，实际上我们有

$$P_\bullet \otimes^L_{\mathbb{Z}[T_1,\dots,T_n]_\square} \prod_k(\mathbb{Z}[T_1,\dots,T_n]_\square) = \prod_k P_\bullet.$$

由于可数积是正合的，我们有一个等价

$$\prod_k P_\bullet \xrightarrow{\sim} \prod_k M.$$

□

定理 *5.3.2* 的证明。关于投射有限集上的自由对象的断言即为推论 5.3.4。$\mathrm{D}(R_\square)$ 是其心的导出范畴，以及 $\otimes^L_{R_\square}$ 是 $\otimes_{R_\square}$ 的左导出函子这一事实，可由定理 3.2.4 中类似陈述的相同论证得出。关于 $\prod_n R$ 的平坦性的最后一条陈述将在命题 5.3.7 中证明。□

接下来只需证明 $\prod_n R$ 的平坦性，这可通过类似于证明 $\mathbb{Z}$.

定义 5.3.5。设 R 是有限型代数。若一个 $R_\square$-模是 $\prod_I R$ 在 I 一个可数集上的商，则称其为有限生成。若一个 $R_\square$-模是一个映射$\prod_I R \to \prod_J R$ 的余核，其中 I 和 J 是可数集，则称其为有限表示。

我们希望深入理解有限表示的 $R_\square$-模。在某些拓扑假设下，这些模更容易描述：

引理 5.3.6. 设 R 是一个有限型代数。若 $M \in$模范畴$_{R_\square}$ 是拟分离的，则以下条件等价。

i. M 是有限表示的。 *ii.* M 是有限生成的。 *iii.* $M = \varprojlim M_n$ 是由有限生成离散 R- 模组成、且过渡映射为满射的射影系统的极限。

证明。设 $(M_n)_n$ 是一个如 (iii) 所示的射影系统。由于 R 是诺特的，我们可以找到一个正合于右端的分解

$$R^{s_n} \to R^{k_n} \to M_n \to 0$$

对每个 n。通过逐步构造该分解，我们可以构造提升

$$\begin{array}{ccccccc} R^{s_{n+1}} & \longrightarrow & R^{k_{n+1}} & \longrightarrow & M_{n+1} & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ R^{s_n} & \longrightarrow & R^{k_n} & \longrightarrow & M_n & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

使得所有 垂直映射是满射。取极限后，我们得到一个右正合列

$$\prod_{\mathbb{N}} R \to \prod_{\mathbb{N}} R \to M \to 0$$

从而证明 (iii)⇒ (i)。

显然，(i) ⇒ (ii)。接下来只需证明 (ii) 推出 (iii)。我们有一个满射 $\prod_I R \to M \to 0$，其核为 K。不失一般性，我们可以假设 $I = \mathbb{N}$。空间 $\prod_{\mathbb{N}} R$来自一个可度量化拓扑空间，并且由于 M 是拟分离的，空间 $K \subset \prod_{\mathbb{N}} R$ 是

闭的。将 $\prod_{\mathbb{N}} R = \lim_{\longleftarrow n} R^n$ 写成有限秩自由 R-模的极限，我们看到 $K = \lim_{\longleftarrow n} K_n$，其中 K_n 是 K 在投影 $\prod_{\mathbb{N}} R \to R^n$中的像。这表明

$$M = \varprojlim_n R^n/K_n$$

从而证明了我们想要的结论。 □

命题 5.3.7. 设 R 是有限型 $\mathbb{Z}$-代数。设模范畴$(R_\square)$ 为 $R_\square$-模的阿贝尔范畴，并设模范畴$(R_\square)^{fp} \subset$模范畴$(R_\square)$ 为有限表现凝固模的全子范畴。以下结论成立：

(1) 有模范畴$(R_\square) =$Ind(模范畴$(R_\square)^{fp}$)。*(2)* 有限表示模的范畴模范畴$(R_\square)^{fp}$ 是一个阿贝尔范畴，在所有核、余核和扩张下封闭。*(3)* 任意有限表示模 M 都是伪紧的，即它有如下形式的分解$P_\bullet \to M$，其中 $P_\bullet$ 是由轻射有限集 S 上的自由 $R_\square$-模。*(4)* $R_\square$-模 $\prod_{\mathbb{N}} R$ 是平坦的。

证明。 (1) 范畴 $\mathrm{Mod}_{R_\square}$ 有一个由 $\prod_{\mathbb{N}} R$ 给出的紧投射生成元。这形式上表明，有限表示模是 $\mathrm{Mod}_{R_\square}$ 中的紧对象，并给出了 (1) 中作为归纳范畴的描述。

(2) 根据交换代数中的标准论证，只需证明 $\prod_{\mathbb{N}} R$ 的任意有限生成模 M 实际上都是有限表示的。但 M 是拟分离的，而引理 5.3.6 意味着 M 是有限表示的。

(3) 设 M 是一个有限表示模，并考虑一个右正合列

$$\prod_{\mathbb{N}} R \xrightarrow{f} \prod_{\mathbb{N}} R \to M \to 0.$$

根据 (2)，核 $K = \ker f$ 是一个有限表示模。通过归纳论证，我们可以构造 M 的分解 $P_\bullet \to M$，其中每一项都同构于 $\prod_{\mathbb{N}} R$。(4) 只需证明，对于任意有限表示模 M，我们有 $M \otimes^L_{R_\square} \prod_{\mathbb{N}} R = \prod_{\mathbb{N}} M$，因为这样张量积便是正合的。这是由以下事实得出的：对于 $P \cong \prod_{\mathbb{N}} R$，有 $P \otimes^L_{R_\square} \prod_{\mathbb{N}} R = \prod_{\mathbb{N}} P$，并且可利用 (3) 中 M 的分解。

□

备注 5.3.8。设 R 是一个有限型 $\mathbb{Z}$-代数。那么对于任意伪紧 solid $R_\square$-模，我们有 $M \otimes^L_{R_\square} \prod_{\mathbb{N}} R = \prod_{\mathbb{N}} M$；具体来说，这是由可数个 R 的乘积的 solid 张量积计算，以及 M 有一个项由 $\prod_{\mathbb{N}} R$ 给出的射影分解这一事实得出的

作为一个特殊推论，若 R 是一个几乎有限表示的动画代数，也就是说，$\pi_0(R)$ 是有限生成的 $\mathbb{Z}$-代数，且对所有 i，$\pi_i(R)$ 是一个有限 $\pi_0(R)$-模，那么由推论 4.4.4 得到的诱导解析环结构 $R_\square := R_{\pi_0(R)_\square/}$ 满足

$$R_\square[S] = \varprojlim_n R[S_n],$$

因此，对于可数集 I 和 J，有 $\prod_I R \otimes_{R_\square} \prod_J R \overset{n}{=} \prod_{I \times J} R$。

固体环结构也与整扩张无关。

推论 5.3.9. 设 $R \to A$ 是有限生成代数的整映射。则解析环的自然映射 $A_{R_\square/} \to A_\square$ 是一个同构。

证明。 根据假设， R 和 A 都是有限生成的 $\mathbb{Z}$-代数，且 A 在 R上整，因此 A 是有限 R-模。由注 5.3.8可知 $A \otimes_{R_\square} \prod_{\mathbb{N}} R = \prod_{\mathbb{N}} A$，这就推出了该推论。□

最后，下面的引理有助于理解凝固模的张量积。

引理 5.3.10。设 R 是 $\mathbb{Z}$ 上的有限型代数。以下所有张量积均取导出张量积。

(1) 设 P 和 Q 是伪紧 R-模，则 $P \otimes_{R_\square} Q$ 是伪紧的。*(2)* 设 $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个连通伪紧 R 模的可数族。则 $\prod_n P_n$ 是伪紧的。此外，若 Q 是另一个伪紧对象，则 $Q \otimes_{R_\square} \prod_n P_n = \prod_n (Q \otimes_{R_\square} P_n)$。*(3)* 设 $(P_n)_{n\in N}$ 和 $(Q_n)_n$ 是连通伪紧 $R_\square$-模的序列射影图表，则 $\lim_{\longleftarrow n} P_n$ 和 $\lim_{\longleftarrow n} Q_n$ 是伪紧的、 -1-连通的，并且

$$\left(\varprojlim_n P_n\right) \otimes_{R_\square} \left(\varprojlim_n Q_n\right) = \varprojlim_n P_n \otimes_{R_\square} Q_n.$$

(4) 设 $(P_{n,m})_{n,m\in\mathbb{N}}$ 是连通伪紧 R-模的一个族，并设 Q 是一个伪紧 R-模。则 ***Solid*** R-模的自然映射为[9]

$$\left(\prod_n \bigoplus_m P_{n,m}\right) \otimes_{R_\square} Q \xrightarrow{\sim} \prod_n \bigoplus_m \left(P_{n,m} \otimes_{R_\square} Q\right)$$

是一个等价。

证明。（1）和（2）由注 5.3.8 得出：任意伪紧对象都有一个射影分解，其各项是 R 的可数积；细节留给读者。将极限写成纤维后，（3）由（1）和（2）得出

$$\varprojlim_n P_n \to \prod_{n\in\mathbb{N}} P_n \to \prod_{n\in\mathbb{N}} P_n.$$

现在证明（4）。由 AB6 性质，我们可以写成

$$\left(\prod_n \bigoplus_m P_{n,m}\right) = \varinjlim_{f\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}} \prod_n \bigoplus_{m\le f(n)} P_{n,m}$$

其中映射 $f\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 具有逐点偏序。我们看到

$$\begin{aligned}\left(\prod_n \bigoplus_m P_{n,m}\right) \otimes_{R_\square} Q &= \varinjlim_{f\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}} \left(\prod_n \bigoplus_{m\le f(n)} P_{n,m}\right) \otimes_{R_\square} Q \\ &= \varinjlim_{f\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}} \left(\prod_n \bigoplus_{m\le f(n)} P_{n,m} \otimes_{R_\square} Q\right) \\ &= \prod_n \bigoplus_m \left(P_{n,m} \otimes_{R_\square} Q\right)\end{aligned}$$

其中，第一次和最后一次等价用到了 AB6 性质，第二次等价用到了引理的（2）。□

备注 5.3.11。引理 5.3.10 可推广到注 5.3.8 意义下的几乎有限表示动画环。事实上，若 R 是一个几乎有限表示动画环，则称一个 $R_\square$-模 M 为伪紧，如果它满足以下等价条件之一（相关讨论见 [CS22, Definition 9.9 和 Proposition 9.10]）：

[9]感谢 Yutaro Mikami 指正了本引理先前版本中的错误。

（1）对于一致上同调左有界 $R_\square$-模的一个滤过余极限 $N = \varinjlim_i N_i$，自然映射

$$\varinjlim_i R\underline{\mathrm{Hom}}_R(M, N_i) \to R\underline{\mathrm{Hom}}_R(M, \varinjlim_i N_i) \tag{5.3.2}$$

是一个同构。

(2) M 对于某个 $k \in \mathbb{N}$ 是 $(-k)$-连通的，并且对所有 $n \in \mathbb{N}$，$M[k]$($\tau_{\leq n}$) 都是一个 n-截断的紧对象 $\tau_{\leq n}R_\square$-模。(3) 存在某个 $k \in \mathbb{Z}$，使得 M 可写为 $M = \varinjlim_{n \in \mathbb{Z}_{\geq k}} M_n$，其中 M_n 是一个紧对象 $R_\square$-模，其同调支撑于 $[k, \infty)$，且 cofib$(M_n \to M)$ 是 $(n+1)$-连通的；并且对所有 $n \geq k$，存在一个纤维序列 $M_n \to M_{n+1} \to R_\square[S_{n+1}][n+1]$，其中 S_{n+1} 是一个轻射有限集。

我们简要勾勒上述 (1)–(3) 之间的等价性。对于 (1) $\Rightarrow$ (2)，Hom 空间上的条件意味着 M 必须是上同调右有界的，即对某个 $k \in \mathbb{N}$，它是 $(-k)$-连通的。事实上，由于 D$(R_\square)$ 右完备，我们有 $\tau_{\leq 0}M = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} \tau_{[-n,0]}M$，因此自然映射 $M \to \tau_{\leq 0}M$ 经由某个截断 $M \to \tau_{[-k,0]}M$ 分解，这意味着 M 必须是 $(-k)$-连通的。若 M 是 $(-k)$-连通的，显然条件 (1) 也意味着 $\tau_{\leq n}(M[k])$ 是一个紧对象，因为它是 $\tau_{\leq n}R_\square$上的 n-截断连通模。对于 (2) $\Rightarrow$ (3)，不失一般性，我们可以假设 M 是连通的；由于 $\pi_0(M)$ 是一个紧对象静态 $\pi_0(R_\square)$-模，存在一个轻射有限集 S_0 及一个满态射 $R_\square[S_0] \to M$；我们令 $M_0 := R_\square[S_0]$，并令$Q_1 :=$ cofib$(M_0 \to M)$。于是 Q_1 也满足条件 (2)，且它是 1-连通的；接着我们可以找到一个轻射有限集 S_1 和一个映射 $R_\square[S_1][1] \to Q_1$，使得 $Q_2 :=$cofib$(R_\square[S_1][1] \to Q_1)$ 是 2-连通的。然后定义 $M_1 :=$ fib$(M \to Q_2)$，根据定义可立即验证存在一个纤维序列 $M_0 \to M_1 \to R_\square[S_1][1]$。归纳地重复这一构造，便可得到 (3) 中将 M 表示为余极限的表示。最后，对于 (3) $\Rightarrow$ (1)，若 $N = \varinjlim_i N_i$ 是 D$(R_\square)$ 中 0-截断对象的一个滤过余极限，而 $M = \varinjlim_n M_n$ 如 (3) 所述，且所有 M_n 都是连通模（不失一般性，通过移位可以假设如此），那么 Hom 空间 (5.3.2) 是 0-截断的，并且对于 $m \in \mathbf{M}$，其 π_{-m} 同伦群仅取决于 $\tau_{\leq m}M = \tau_{\leq m}M_m$，后者是一个 m-截断的紧对象 $\tau_{\leq m}R_\square$-模；由此得到 (5.3.2) 的等价性，从而证明了所需结论。

回到我们最初的讨论，可以利用上文 (3) 中伪紧$R_\square$-模的显式表示来证明引理 5.3.10 的断言 (1)-(4)，具体细节留给感兴趣的读者。

我们推得以下命题

命题 5.3.12。设 R 是 $\mathbb{Z}$ 上的有限型代数，$I \subset R$ 是 R 的有限生成理想。下文中的所有张量积均指导出张量积。

(1) 设 R_I 为 R 的导出 I-进完备化（注意，由于 R 是诺特的，这与经典的 I-进完备化 $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ 一致）。那么 R_I 是 *Solid* R-模中的伪紧对象，并且 $R_I \otimes_{R_\square} \prod_{\mathbb{N}} R = \prod_{\mathbb{N}} R_I$（关于导出完备模的定义，参见 [Man22b，定义 2.12。3]）。 $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ *(2)* 设 $J \subset R$ 为另一个有限生成理想。那么 $R_I \otimes_{R_\square} R_J = R_{I+J}$。特别地，$R_I$ 是幂等 $R_\square$-代数。*(3)* 设 N 和 M 为连通的导出 I-进完备 $R_\square$-模。那么 $N \otimes_{R_\square} M$ 是导出 I-进完备的。

证明。对于第 (1) 部分，令 $I = (f_1, \ldots, f_k)$，由于 R 是诺特的，我们可以写成

$$\widehat{R}_I = \varprojlim_n R/^{\mathbb{L}}(f_1^n, \ldots, f_k^n)$$

其中导出商 $R/^{\mathbb{L}}(f_1^n, \ldots\ldots, f_k^n)$ 定义为动画环的张量积$\backsim R \otimes_{\mathbb{Z}[T_1,\ldots,T_k]} \mathbb{Z}$，其中 $T_i \mapsto f_i^n$ 属于 R，而 $T_i \mapsto 0$ 属于 $\mathbb{Z}$。由引理 5.3.10 可推得，R_I 是伪紧的 Solid R-模，并且

$$\widehat{R}_I \otimes_{R_\square} \prod_{\mathbb{N}} R = \varprojlim_n \prod_{\mathbb{N}} R/^{\mathbb{L}}(f_1^n, \ldots, f_k^n) = \prod_{\mathbb{N}} \widehat{R}_I.$$

对于 (2)，写作 $J = (g_1, \ldots\ldots, g_s)$，那么根据引理 5.3.10，也可形式上推出

$$\widehat{R}_I \otimes_{R_\square} \widehat{R}_J = \varprojlim_n \left(R/^{\mathbb{L}}(f_1^n, \ldots, f_k^n) \otimes_R R/^{\mathbb{L}}(g_1^n, \ldots, g_s^n) \right) = \widehat{R}_{I+J}.$$

最后，对于 (3)，通过归纳，我们可以不失一般性地假设 $I = (f)$ 由单个元素生成。N 和 M 都存在一个由形如 $\bigoplus_K \prod_{\mathbb{N}} R$ 的对象构成的复形给出的分解，其中 K 是任意大的指标集。因此，为了证明该断言，我们可以不失一般性地假设$\widehat{\quad}$ $\widehat{\quad}$ N 和 M 的形式为 $\bigoplus_K \prod_{\mathbb{N}} R_I$，其中完备直和是相对于 I-阿迪克拓扑而言的。由于取导出 I-完备化与$\aleph_1$-滤过余极限可交换，我们可以不失一般性地假设 K 是可数的，甚至可以假设$K = \mathbb{N}$。

于是我们得到一个纤维序列

$$\left(\bigoplus_{\mathbb{N}} \prod_{\mathbb{N}} R \right)[[T]] \xrightarrow{T-f} \left(\bigoplus_{\mathbb{N}} \prod_{\mathbb{N}} R \right)[[T]] \to \widehat{\bigoplus}_{\mathbb{N}} \prod_{\mathbb{N}} \widehat{R}_I.$$

$\widehat{\ }$由引理 5.3.10 (4) 以及 R_I 关于张量积 $\otimes_{R_\square}$ 的幂等性，我们推得

$\widehat{\quad}$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\quad}$ $\widehat{\ }$ $\backsim \bigoplus_{\mathbb{N}} \prod_{\mathbb{N}} R_I = \bigoplus_{\mathbb{N}} R_I \otimes_{R_\square} \prod_{\mathbb{N}} R_I$。因此，只需证明自然映射

$$\widehat{\bigoplus}_{\mathbb{N}} \widehat{R}_I \otimes_{R_\square} \widehat{\bigoplus}_{\mathbb{N}} \widehat{R}_I \to \widehat{\bigoplus}_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \widehat{R}_I$$

是一个同构。现在写作 $\mathbb{Z}[T] \to \mathbb{Z}[T, X_1, \ldots, X_k] \to R$，其中 $\mathbb{Z}[T, X_1, \ldots, X_k] \to R$ 是满射，且 $T \mapsto f \in R$。我们断言

$$\widehat{\bigoplus}_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}[[T]] \otimes_{\mathbb{Z}[T]_\square} R_\square = \widehat{\bigoplus}_{\mathbb{N}} \widehat{R}_I, \tag{5.3.3}$$

若断言成立，则不失一般性，我们可以假设 $R = \mathbb{Z}[T]$ 且 $I = (T)$。先来证明这个断言，注意到

$$\widehat{\bigoplus}_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}[[T]] \otimes_{\mathbb{Z}[T]_\square} R_\square = \left(\widehat{\bigoplus}_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}[[T]] \otimes_{\mathbb{Z}[T]_\square} \mathbb{Z}[T, X_1, \ldots, X_n]_\square \right) \otimes_{\mathbb{Z}[T,X_1,\ldots,X_n]_\square} R_\square.$$

由引理 5.3.13，沿 $\mathbb{Z}[T]_\square \to \mathbb{Z}[T, X_1, \ldots, X_n]_\square$ 的基变换与极限可交换。这意味着它将 T-进完备对象映至 T-进完备对象，我们立即得到

$$\widehat{\bigoplus}_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}[[T]] \otimes_{\mathbb{Z}[T]_\square} \mathbb{Z}[T, X_1, \ldots, X_n]_\square = \widehat{\bigoplus}_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n][[T]].$$

由于 R 作为 $\mathbb{Z}[T, X_1, \ldots, X_n]$-模是伪凝聚的，它作为 solid 模是伪紧的，而表示

$$0 \to \left(\bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}[T, X_1, \ldots, X_n] \right)[[Y]] \xrightarrow{Y-T} \left(\bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}[T, X_1, \ldots, X_n] \right)[[Y]] \to \widehat{\bigoplus}_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n][[T]] \to 0$$

结合引理 5.3.10 (4)，可得等价 (5.3.3)。

根据前面的讨论，我们只需证明自然映射

$$\widehat{\bigoplus}_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}[[T]] \otimes_{\mathbb{Z}[T]_\square} \widehat{\bigoplus}_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}[[T]] \xrightarrow{\sim} \widehat{\bigoplus}_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \mathbb{Z}[[T]] \tag{5.3.4}$$

是一个等价（我们将看到，前面的结论对于解析环的张量积 $(\mathbb{Z}[T],\mathbb{Z})_{\square}$ 也成立），这需要进行如下显式计算。我们可以将其写成凝聚 $\mathbb{Z}[T]$-模

$$\widehat{\bigoplus}_{\mathbb{N}}\mathbb{Z}[[T]] = \varinjlim_{\substack{f\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}\\ f(n)\to\infty\\ n\to\infty}} \prod_{n\in\mathbb{N}} T^{f(n)}\mathbb{Z}[[T]].$$

因此，(5.3.4) 的左端项等价于

$$\widehat{\bigoplus}_{\mathbb{N}}\mathbb{Z}[[T]] \otimes_{\mathbb{Z}[T]_{\square}} \widehat{\bigoplus}_{\mathbb{N}}\mathbb{Z}[[T]] = \varinjlim_{\substack{f,g\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}\\ f(n),g(m)\to\infty}}{}^{n,m\to\infty} \prod_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} T^{f(n)+g(m)}\mathbb{Z}[[T]].$$

另一方面，(5.3.4) 的右端项等价于

$$\widehat{\bigoplus}_{\mathbb{N}}\mathbb{Z}[[T]] \xrightarrow{\sim} \widehat{\bigoplus}_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}\mathbb{Z}[[T]] = \varinjlim_{\substack{h\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}\\ h(n,m)\to\infty\\ \sup(n,m)\to\infty}} \prod_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} T^{h(n,m)}\mathbb{Z}[[T]].$$

因此，为了证明该等价，我们必须证明：给定 $h\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$，其中 $h(n,m)\to\infty$ 作为 $\sup(n,m)\to\infty$，存在 $f,g\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$，其中 $f(n)\ g(m)\to\infty$ 作为 $n,m\to\infty$，使得对所有 $(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$，有 $f(n)+g(m)\le h(n,m)$；为此可以取 $f(n)=\lfloor \frac{1}{2}\inf_m h(n,m)\rfloor$ 以及 $g(m)=\lfloor \frac{1}{2}\inf_n h(n,m)\rfloor$。□

引理 5.3.13. 设 R 为一个有限型 $\mathbb{Z}$-代数，并考虑环态射 $R\to R[T]$。则基变换 $R[T]_{\square}\otimes_{R_{\square}} -\colon \mathrm{D}(R_{\square})\to \mathrm{D}(R[T])_{\square}$ 自然同构于函子$R\mathrm{Hom}$函子$_R(R((T^{-1}))/TR[T], -)$，特别地，它与极限交换。

证明。 记 $F:= R\mathrm{Hom}_R(R((T^{-1}))/TR[T],\ -)$。令 $R((T^{-1}))/TR[T]\to R$ 表示取洛朗级数展开的零次项的投影。对于 $M\in \mathrm{D}(R_{\square})$，这给出了一个自然映射 $M\to F(M)$。由于模 $F(M)$ 具有自然的 $R[T]$-模结构，这个自然变换自然地延拓到 $R[T]\otimes_R M\to F(M)$。我们断言 $F(M)$ 是 $R[T]_{\square}$-完备的，由此将得到一个自然映射 $R[T]_{\square}\otimes_{R_{\square}} M\to F(M)$。为证明该断言，注意到 $R((T^{-1}))/R[T]$ 是一个紧对象 $R_{\square}$-模，因此 F 与极限和余极限均可交换。于是，要证明它将 $R_{\square}$-完备模映为 $R[T]_{\square}$-完备模，只需对 R 证明即可。我们有

$$R\underline{\mathrm{Hom}}_R(R((T^{-1}))/TR[T], R) = R[T] \tag{5.3.5}$$

作为 $R\mathrm{Hom}$函子$_R(R[T],\ R) = R((T^{-1}))$，$/TR[T]$ 且紧对象 $R_{\square}$-模是自反的。现在，考虑自然变换

$$R[T]_{\square}\otimes_{R_{\square}} M\to F(M),$$

要证明它是等价，只需在一族紧射影生成元上证明，也就是在 $\prod_{\mathbb{N}} R$ 上证明。但此时，$R[T]_{\square}\otimes_{R_{\square}} -$ 和 $F(-)$ 都与 R 的可数个副本的乘积可交换，因此只需对 $M=R$ 证明，这归结为 (5.3.5)。□

备注 5.3.14. solid 张量积在更一般的情形下也保持导出 I-进完备连通模，参见 [Man22b，命题 2.12.10]。特别地，命题 5.3.12 对几乎有限表示于 $\mathbb{Z}$ 上的动画环同样成立，如注 5.3.8 所述；对于诱导解析环结构也成立。

5.4. **概形作为解析堆栈**。 随着环 $R_{\square}$ 的引入（其中 R 为有限生成$\mathbb{Z}$-代数），我们便可以讨论概形作为解析堆栈的两种不同实现（这些将在后文笔记中介绍）。

5.4.1. 经典方法。 我们首先需要将交换环视为解析环。令 Ring 为（离散）动画环的 ∞-范畴；给定 R 这一离散动画环，我们将其在离散阿贝尔群的导出范畴中的模范畴记为 $\mathrm{D}(R) = \mathrm{Mod}_R(\mathrm{D}(\mathbb{Z}))$。

命题 5.4.1. 存在一个全忠实嵌入

$$(-)^{\mathrm{cond}} : \mathrm{Ring} \to \mathrm{AnRing}$$

将环 R 映射到解析环 $R^{\mathrm{cond}} = (R, \mathrm{D}(R^{\mathrm{cond}}))$，再映射到 R 上的平凡解析环结构，即其完备模全都是凝聚 R-模的解析环结构。

证明。这由动画环到动画凝聚环的自然全忠实嵌入（视为离散环）得出。□

备注 5.4.2。 设 R 是一个离散动画环。根据定义，我们有 $\mathrm{D}(R^{\mathrm{cond}}) =$ 模范畴$_R(\mathrm{D}(\mathbb{Z}^{\mathrm{cond}}))$。因此，根据 [Lur17，定理 4.8.4.6]，我们有 $\mathrm{D}(R^{\mathrm{cond}}) = \mathrm{D}(R) \otimes_{\mathrm{D}(\mathbb{Z})} \mathrm{D}(\mathbb{Z}^{\mathrm{cond}})$。根据注记 4.1.7，$\mathrm{D}(R)$ 等价于离散 R^{cond}-模的全子范畴 $\mathrm{D}^{\delta}(\mathbb{Z}^{\mathrm{cond}})$。注意，由于 R 作为凝聚集合也是离散的，$\mathrm{D}^{\delta}(\mathbb{Z}^{\mathrm{cond}})$ 中的所有对象都是离散的。

设 R 是一个动画交换环，并令 $\mathrm{Spec}\, R$ 为其扎里斯基谱，定义为 $\pi_0(R)$ 的扎里斯基谱。令 $\mathrm{D}(R)$ 为 ∞- 导出范畴，其中对象是 R- 模。$\mathrm{Spec}\ R$ 的扎里斯基拓扑有一个由开仿射概形构成的基，其元素形如 $\mathrm{Spec}\ R[f^{-1}]$，其中 $f \in R$（按定义，$R[f^{-1}] = \varinjlim_{\times f} R = R \otimes_{\mathbb{Z}[T]} \mathbb{Z}[T^{\pm 1}]$ 是由乘以f的映射的余极限给出的）。我们可以用定理 5.1.6 和备注 5.1.7 的语言重新表述 R-模的经典扎里斯基下降。

命题 5.4.3. 设 $\{U_i = \mathrm{Spec}\, R_i\}_{i=1}^n$ 是 $\mathrm{Spec}\ R$ 的有限仿射扎里斯基覆盖。则对称幺半范畴之间的态射 $\{f_i^*: \mathrm{D}(R) \to \mathrm{D}(R_i)\}_{i=1}^n$ 构成一个闭覆盖。特别地，对于扎里斯基拓扑，我们有 $\mathrm{Spec}\, R$ 上拟凝聚层的下降。

证明。 我们分两步证明该命题。

步骤 *1*。 设 $f_1, \ldots, f_n \in R$ 是生成单位理想的元素，并假设该覆盖具有 $U_i = \mathrm{Spec}\ R[f_i^{-1}]$ 的形式。显然，R-代数 $R[f_i^{-1}]$ 是幂等的，因此它们在 locale $\mathrm{Sm}(\mathrm{D}(R))$ 中定义闭子空间。我们要证明它们覆盖该 locale；而这等价于要求存在一个复形等价

$$R \xrightarrow{\sim} [\bigoplus_{i=1}^{n} R[\frac{1}{f_i}] \to \bigoplus_{i<j} R[\frac{1}{f_i f_j}] \to \cdots \to R[\frac{1}{f_1 \cdots f_n}]]$$

这相当于底层环的扎里斯基下降。

步骤 *2*。 现在设 $\{U_i\}_{i=1}^n$ 是 R 的任意开覆盖。由扎里斯基下降可知，存在一个复形的自然等价

$$R \xrightarrow{\sim} [\bigoplus_{i=1}^{n} R_i \to \bigoplus_{i<j} R_i \otimes_R R_j \to \cdots \to \bigotimes_{i} R_i]$$

因此，唯一需要证明的是每个 R-代数 R_i 都是幂等的。对于 R 的任意开仿射子空间$U = \mathrm{Spec}\ R'$，存在 U 的一个扎里斯基覆盖，其形式为 $R[f_i^{-1}]$，其中 $f_i \in R$ 取适当的值。显然，$R[f_i^{-1}] = R'[f_i^{-1}]$，因此我们有一个等价

$$R' \xrightarrow{\sim} [\bigoplus_{i=1}^{n} R[\frac{1}{f_i}] \to \bigoplus_{i<j} R[\frac{1}{f_i f_j}] \to \cdots \to R[\frac{1}{f_1 \cdots f_n}]],$$

但右侧是 $\mathrm{D}(R)$ 中的幂等代数，它对应于 locale $\mathrm{Sm}(\mathrm{D}(R))$ 中与代数 $R[f_i^{-1}]$ 相关联的闭子空间的并集。这表明 R' 是幂等的，从而完成证明。□

命题 5.4.3 的一个直接推论是为概形构造拟凝聚层。

推论 5.4.4。设 X 为一个概形，其结构层为 $\mathscr{O}_X$；设 $|X|^{\mathrm{op}}$ 为底层集合为 $|X|$ 的拓扑空间，并赋予由以下方式给出的最粗拓扑：规定形如 $|U| \subset X$（其中 U 为开扎里斯基子空间）的子集为闭子空间。在此拓扑下，$|X|^{\mathrm{op}}$ 是一个谱空间。

于是，将开仿射扎里斯基子空间 $U \subset X$ 映射到 $\mathrm{D}(\mathscr{O}_X(U))$ 的函子是一个层。更确切地说，设 $\mathrm{D}(X) = \lim\nolimits_{\leftarrow U \subset X} \mathrm{D}(\mathscr{O}_X(U))$ 为 X 上的拟凝聚层范畴，其中 U 遍历 X 的开仿射子空间偏序集。于是存在唯一的 *locale* 自然满态射

$$F : \mathrm{Sm}(\mathrm{D}(X)) \to |X|^{\mathrm{op}}$$

使得对于开仿射拟紧 $U \subset X$，有 $\mathrm{D}(F^{-1}(U)) = \mathrm{D}(\mathscr{O}_X(U))$。

证明。这由命题 5.4.3 得出，唯一需要验证的是该映射是满射的。对于最后一个断言，设 $U \subset X$ 是一个扎里斯基开子集，并设 A_U 是与 U相关联的幂等代数。那么我们有

$$U = \{x \in X : k(x) \otimes_{\mathscr{O}_X} A_U \neq 0\}.$$

这表明，对于两个扎里斯基开集，若有 $F^{-1}(U) = F^{-1}(U')$，即 $A_U = A_{U'}$，则 $U = U'$，从而证明了满射性。□

备注 5.4.5。在推论 5.4.4 中，我们使用经典的拟凝聚层范畴这一点并不重要。事实上，这可由注记 5.4.2 的 Künneth 公式推出。此外，扎里斯基下降可以如下推广：令 $\mathbf{Pr}^L_{\mathrm{D}(R)}$ 为 $\mathrm{D}(R)$-线性可呈范畴的（∞,2）-范畴。给定一个环态射 $R \to S$，有一个自然的基变换函子 $\mathbf{Pr}^L_{\mathrm{D}(R)} \to \mathbf{Pr}^L_{\mathrm{D}(S)}$，由 Lurie 张量积 $M \mapsto M \otimes_{\mathrm{D}(R)} \mathrm{D}(S)$ 给出。于是，将开仿射扎里斯基子空间 $U = \mathrm{Spec}\, R' \subset \mathrm{Spec}\, R$ 映到 $\mathbf{Pr}^L_{\mathrm{D}(R')}$ 的函子是扎里斯基拓扑下的一个层。例如，这可由 [Mat16，命题 3.45] 推出，因为任意扎里斯基覆盖都会给出一个代数的可下降态射。环的可下降映射将是仿射解析栈的 !-覆盖 的原型示例，见第 6.3 节。

经典拟凝聚层扎里斯基下降中出现了一种违反直觉的现象：$\mathrm{Spec}\, R$ 的开扎里斯基子空间竟会产生 locale $\mathrm{Sm}(\mathrm{D}(R))$ 的闭子空间！这解释了为什么概形上的拟凝聚层经典理论在真情形之外并没有（显然！）定义良好的紧支撑上同调理论。解决这一差异的一种方法是，将概形以另一种方式实现为解析叠，或者等价地，将交换环范畴以另一种方式嵌入解析环范畴。归根结底，采用一种同时推广拟凝聚层两种理论的框架会更加方便；这由离散 adic 空间理论所刻画（见 [CS19，第 IX 和 X 讲]）。不过在此之前，让我们完成对经典代数几何所定义的 locale 的拓扑研究。

5.4.2. 形式完备化。正如我们先前所观察到的，开扎里斯基映射 $U = \mathrm{Spec}\, R' \to \mathrm{Spec}\, R$ 会产生 locale $\mathrm{Sm}(\mathrm{D}(R))$ 的闭子空间。一个自然的问题是如何描述这些开补；它们由形式概形给出。

命题 5.4.6. 设 X 为一个概形，并设 $U \subset X$ 为一个拟紧拟分离开扎里斯基子空间，其闭补集为 $Z \subset X$。设 $X^{\wedge_Z}$ 为 X 沿 Z的（导出）形式完备化。设 $\mathrm{D}(X)$ 为 X 上导出拟凝聚层的∞-范畴，并设 $F : \mathrm{Sm}(\mathrm{D}(X)) \to |X|^{\mathrm{op}}$ 为推论 *5.4.4* 所给出的 *locale* 映射。则开子空间 $F^{-1}(Z)$ 的底层范畴为 $X^{\wedge_Z}$上（导出）完备拟凝聚层的范畴。

证明. 我们将说明最简单的情形：当 $X = \mathrm{Spec}\ R$ 为仿射且 $U = \mathrm{Spec}\ R[f^{-1}]$ 由对 $f \in R$ 取逆给出时；一般情形则由扎里斯基下降以及对定义 Z 的理想 I 的生成元个数进行归纳而得出。

由定义，$\mathrm{D}(F^{-1}(Z))$ 是 Verdier 商 $j^*\colon \mathrm{D}(R) \to \mathrm{D}(R)/\mathrm{D}(R[f^{-1}])$。此外，函子 $j_*\colon \mathrm{D}(F^{-1}(Z)) \to \mathrm{D}(R)$ 是全忠实的，其本质像为那些元素 $M \in \mathrm{D}(R)$，使得自然映射

$$M \to R\mathrm{Hom}_R(\mathrm{fib}(R \to R[f^{-1}]), M)$$

是一个等价（等价地，即那些使得 $R\mathrm{Hom}_R(R[f^{-1}], M) = 0$ 的 M）。但我们可以将 $R[f^{-1}] = \varinjlim_{\times f} R$ 写成在 R 上乘以 f 的余极限，从而我们发现

$$R\mathrm{Hom}_R(\mathrm{fib}(R \to R[f^{-1}]), M) = R\varprojlim_n (M \otimes^L_R R/^{\mathbb{L}} f^n)$$

其中 $R/^{\mathbb{L}} f^n$ 是 R 对 f^n 的导出商，由 Koszul 复形 $[R \xrightarrow{f^n} R]$ 表示。因此，由定义，f 的本质像由那些导出 f-进完备的模组成。

现在设 $I = (f) \subset R$ 为由 f 生成的理想。为完成该命题的证明，只需看到：对 I 的根基中的任意元素 $g \in \mathrm{Rad}(I)$，一个导出 f-进完备模也是导出 g-进完备的。事实上，这将表明范畴 $\mathrm{D}(F^{-1}(Z))$ 仅依赖于 $\mathrm{Spec}\, R$ 沿 Z 的形式完备化，并且由定义它由 $X^{\wedge_Z}$ 的完备模组成。为看出这一点，我们注意到 $\mathrm{Spec}\ R[g^{-1}] \subset \mathrm{Spec}\ R[f^{-1}]$，即我们有幂等 R-代数的映射 $R[f^{-1}] \to R[g^{-1}]$。但随后

$$\begin{aligned} R\mathrm{Hom}_R(R[g^{-1}], M) &= R\mathrm{Hom}_R(R[g^{-1}] \otimes^L_R R[f^{-1}], M) \\ &= R\mathrm{Hom}_R(R[g^{-1}], R\mathrm{Hom}_R(R[f^{-1}], M)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

从而证明了我们想要证明的结论。 □

总而言之，在经典代数几何中，我们处于一种奇特的情形：拟紧拟分离开扎里斯基映射在导出范畴层面上给出闭映射，而沿有限生成的 Zariski 闭子概形取形式完备化则给出开浸入。要解决这一“悖论”（实际上这并非理论的缺陷，而是其特色！），我们需要改为考虑凝聚拟凝聚层。

5.4.3. 实体方法。现在我们来讨论概形拟凝聚层理论的实体方法。我们需要一个定义：

定义 5.4.7。设 R 是一个交换环，我们将解析环 $R_\square$ 定义为余极限

$$R_\square = \varinjlim_{B \subset R} B_\square$$

其中 B 遍历所有有限生成的 $\mathbb{Z}$-子代数，而 $B_\square$ 是定理 5.3.2 中构造的解析环。等价地，$R_\square$ 是 R 上的解析环结构，其中凝聚 R-模是 $R_\square$-完备的，当且仅当它对所有 $r \in R$ 都是 r-凝聚的。

一般而言，对于 R 一个动画交换环，我们令 $R_\square$ 为经由推论 4.4.4 由 $\pi_0(R)_\square$ 诱导到 R上的解析环结构。等价地，一个 R-模 M 是 $R_\square$-完备的，当且仅当它的所有上同调群 $H^*(M)$都是 $\pi_0(R)_\square$-完备的。

备注 5.4.8. 由定理 5.3.2，对 B 而言，有限生成的 $\mathbb{Z}$-代数 $B_\square$ 是 B的解析环结构，即 B 是 $B_\square$-完备的。由此形式地可得，任何离散（导出） B-模也是$B_\square$-完备的。这表明，对任意动画环 R，该环本身是 $R_\square$-完备的，因而 $R_\square$是 R上的解析环结构。

备注 5.4.9. 设 R 为一个动画环，并设 $S \subset \pi_0(R)$为作为 $\mathbb{Z}$-代数的一组生成元。由推论 5.3.4，环 $R_\square$ 也可作为 R 上的解析环结构得到，它使一个 $\mathbb{Z}$-Solid$R$-模完备，当且仅当对所有 $s \in S$它都是 s-Solid的。

备注 5.4.10。 读者或许会问，为什么不将 $B_\square$ 定义为这样一个解析环：它在前有限集 $S = \lim_{\longleftarrow_n} S_n$ 上的取值由 $B_\square[S] = \lim_{\longleftarrow_n} B[S_n]$ 给出；这样便能定义一个我们或许想称为「超固体模」的范畴。原因是，这通常无法在 B 上赋予解析环结构[10]。到目前为止，我们看到，当 B 是有限生成的 $\mathbb{Z}$-代数（或是一个在 $\mathbb{Z}$ 上几乎有限表示的动画环）时，这样的定义是合理的。事实证明，当 B 是本质有限型时，这种做法也行得通；也就是说，它是一个有限生成 $\mathbb{Z}$-代数的 Zariski 局部化（即开 Zariski 局部化的余极限）。例如，当$B = \mathbb{Q}$ 时，我们得到「超固体」有理数，而范畴 $\mathsf{D}(\mathbb{Q}_\square) \subset \mathsf{D}(\mathbb{Z}_\square)$ 是开$\widehat{}$局部化，它是幂等 $\mathbb{Z}_\square$-代数 $\mathbb{Z} = \prod_p \mathbb{Z}_p$ 的补元。

一般而言，通过超越解析环的概念，可以定义任意动画环和 $\mathbb{E}_\infty$-代数上的超固体模范畴；关于域的情形下的定义，参见 [MA24]，关于为本质上有限型于 $\mathbb{Z}$ 的环所构造的超固体环，参见 [BK25] 。

设 $R \to S$ 是动画环之间的一个映射，根据凝固环的解析环结构的定义，存在一个解析环之间的映射 $R_\square \to S_\square$。事实上，一个完备的 $S_\square$-模是一个 S-模 M，并且对所有 $s \in S$ 都是凝固的；具体而言，这意味着对于所有映射 $\mathbb{Z}[T] \to R$，模 M 都是 $\mathbb{Z}[T]_\square$-凝固的。因此，容易看出，它限制得到的 R-模也是 $R_\square$-完备的。于是我们得到一个函子

$$(-)_\square : \mathrm{Ring} \to \mathrm{AnRing}$$

从动画交换环到解析环。

我们需要检验的首要性质之一，是函子 $(-)_\square$ 与余极限的相容性。

命题 5.4.11. 函子 $(-)_\square : \mathrm{Ring} \to \mathrm{AnRing}$ 是全忠实的，并且与余极限交换。

证明。 设 R, S 为一个 动画环。我们要证明动画环之间的自然全忠实映射 a

$$(-)^\triangleright : \mathrm{Map}_{\mathrm{AnRing}}(R_\square, S_\square) \to \mathrm{Map}_{\mathrm{Ring}}(R, S)$$

是本质满的。为此，回想一下，我们有一个映射 AnRing $\to$ CondRing，它将一个解析环映到其底层凝聚环。断言由复合映射

$$\mathrm{Ring} \xrightarrow{(-)_\square} \mathrm{AnRing} \xrightarrow{(-)^\triangleright} \mathrm{CondRing}$$

是全忠实的这一事实可得。

接下来，我们证明第二个结论。设 $\{R_i\}_{i \in I}$ 为动画交换环的一个图表，设 $\{R_{i,\square}\}_{i \in I}$ 为其对应的固体环图表。由命题 4.1.11，余极限 $\lim_{\longrightarrow_i} R_{i,\square}$ 是由 $S := \lim_{\longrightarrow_i} R_i$ 上解析环结构的完备化给出的解析环，其中一个 S-模 M 完备，当且仅当它对所有 i 都是 $R_{i,\square}$-完备的。但这等价于对所有 $r \in R_i$ 和所有 $i \in I$， M 都是 r-凝固的；而这也等价于对所有 $s \in S$， s 都是凝固的。这就证明了 $\lim_{\longrightarrow_i} R_{i,\square} = S_\square$ ，如所需。□

我们下一步要构造与概形相关联的固态解析栈（将在第 6 节中正式定义）。事实证明，这等价于在仿射概形的层面证明函子 $\mathrm{Spec}\, R \mapsto \mathsf{D}(R_\square)$ 满足扎里斯基下降。我们先证明由基本开 Zariski 子空间给出的覆盖满足这一点。我们需要一些技术引理。

[10]问题在于，在附属于 B 的超固体模的正确定义中，从超固体到凝聚 B-模的遗忘函子 $\mathsf{D}(B_\square) \to \mathsf{D}(B)$ 一般而言并非全忠实。

引理 5.4.12。设 $f: A \to B$ 是解析环之间的映射，且由此诱导的导出范畴映射 $f^*: \mathrm{D}(A) \to \mathrm{D}(B)$ 是 *locale* 的开浸入。那么对任意解析环 C 和任意映射 $A \to C$，基变换 $C \to C \otimes_A B$ 在 *locale* 层面也诱导一个开浸入。

证明。这可由命题 4.1.14 的 Künneth 公式形式地推出；我们也给出一个自包含的证明。根据假设，存在 $D \in \mathrm{D}(A)$，它是一个幂等代数，使得 $\mathrm{D}(B) \subset \mathrm{D}(A)$ 是由满足 $R\mathrm{Hom}_A(D, M) = 0$ 的那些 M 构成的全子范畴。这在 $A^\triangleright$ 上定义了一个未完备解析环结构。因此，根据定理 4.1.13，$C \otimes_A B$ 由 $C^\triangleright$ 上的解析环结构的完备化给出；在该结构下，一个 $C^\triangleright$-模 M 完备，当且仅当它是 C 且 B-完备的。这等价于要求 M 是 C-完备的，并且 $R\mathrm{Hom}_C(C \otimes_A D, M) = 0$。因此，$C \otimes_A B$ 是幂等 C-代数 $C \otimes_A D$ 的开局部化补，这就证明了我们所要证明的结论。□

引理 5.4.13. 以下解析环映射在 *locale* 层面上给出开浸入：

(1) $\mathbb{Z}[T]_{\mathbb{Z}_{\square/}} \to \mathbb{Z}[T]_\square$ *with complement* 幂等代数 $\mathbb{Z}((T^{-1}))$. *(2)* $\mathbb{Z}[T]_{\mathbb{Z}_{\square/}} \to \mathbb{Z}[T^{\pm 1}]_{\mathbb{Z}[T^{-1}]_{\square/}}$ *with complement* 幂等代数 $\mathbb{Z}[[T]]$.

证明. 第 (1) 部分即定理 5.2.3。第 (2) 部分可用与同上类似的论证得出，细节留给读者。□

引理 5.4.14. 设 R 是一个动画交换环，且设 $f \in R$。那么解析环映射 $R_\square \to R[f^{-1}]_\square$ 在 *locale* 层面上诱导一个开浸入。

证明. 由命题 5.4.11 可知

$$R[f^{-1}]_\square = R_\square \otimes_{\mathbb{Z}[T]_\square} \mathbb{Z}[T^{\pm 1}]_\square$$

其中 $T \mapsto f$。因此，根据引理 5.4.12，只需证明映射 $\mathbb{Z}[T]_\square \to \mathbb{Z}[T^{\pm 1}]_\square$ 诱导 locale 的一个开浸入；而这由引理 5.4.13 (2) 对 $\mathbb{Z}[T]_{\mathbb{Z}_{\square/}} \to \mathbb{Z}[T^{\pm 1}]_{Z[T^{-1}]_{\square/}}$ 沿 $\mathbb{Z}[T]_{\mathbb{Z}_{\square/}} \to \mathbb{Z}[T]_\square$ 作基变换即可得出。□

命题 5.4.15. 设 R 是一个动画交换环，且 $\{U_i = \mathrm{Spec}\ R[f_i^{-1}]\}_{i=1}^n$ 是由基本仿射子空间构成的 $\mathrm{Spec}\ R$ 的开覆盖。那么映射 $R_\square \to R[f_i^{-1}]_\square$ 在 *locale* $\mathrm{Sm}(\mathrm{D}(R_\square))$ 中诱导一个开覆盖。

证明。由引理 5.4.14 可知，拉回映射 $\mathrm{D}(R_\square) \to \mathrm{D}(R[f_i^{-1}]_\square)$ 是开局部化。根据诺特近似，不失一般性地设 R 是一个有限表示的动画代数（为简单起见，也可只设为 $\mathbb{Z}$ 上的有限生成代数）。在这种情况下，$S = \varprojlim_n S_n$ 前有限的自由 Solid R-模为

$$R_\square[S] = \varprojlim_n R[S_n].$$

根据构造，$R_\square \to R[f_i^{-1}]_\square$ 的闭补集 Z_i 由幂等 $R_\square$-代数给出

$$R[[f_i]] := R_\square \otimes_{\mathbb{Z}[T]_{\mathbb{Z}_{\square/}}} \mathbb{Z}[[T]]$$

它也由导出商 $R[[X]]/^{\mathbb{L}}(X - f_i)$ 给出。因此，为了证明该命题，只需证明 $\cap_{i=1}^n Z_i = \emptyset$ 属于 $\mathrm{Sm}(\mathrm{D}(R_\square))$，也就是说，$\bigotimes_{i=1}^n R[[f_i]] = 0$。但我们有

$$\bigotimes_{i=1}^n R[[f_i]] = R[[X_1, \ldots, X_n]]/^{\mathbb{L}}(X - f_1, \ldots, X - f_n).$$

现在令 $1 = \sum_i a_i f_i$，并考虑映射 $g\colon \mathbb{Z}[T] \to R[[X_1, \ldots, X_n]]$，它将 T 映射到 $\sum_i a_i X_i$。于是 g 可唯一地（由幂等性）延拓为映射 $\mathbb{Z}[[T]] \to R[[X_1, \ldots, X_n]]$。这表明单位 $1 \in \bigotimes_{i=1}^n R[[f_i]]$ 给出了一个从 $\mathbb{Z}[[T]]$出发的映射，但 $\mathbb{Z}[[T]]/(T-1) = 0$，这证明 $1 = 0$ 在张量中，因此 $\bigotimes_{i=1}^n R[[f_i]] = 0$，如所需。□

定理 5.4.16. 设 R 是一个动画环，且设 $\{U_i = \operatorname{Spec} R_i\}_{i=1}^n$ 是 $\operatorname{Spec} R$的一个开仿射扎里斯基覆盖。那么映射 $R_\square \to R_{i,\square}$ 诱导 *locale* $\operatorname{Sm}(\mathrm{D}(R_\square))$的一个开覆盖。

证明。 首先，我们证明映射 $R_\square \to R_{i,\ \square}$ 在 locale 层面诱导出开浸入。为此，取覆盖 U_i 的基本仿射开集 Spec $R[f_{i,j}]^{-1}$。我们有 $R[f_{i,j}^{-1}] = R_i[f_{i,j}^{-1}]$，并且由命题 5.4.15 可知，$\{R_{i,\square} \to R_i[f_{i,j}^{-1}]_\square\}_j$ 给出了 locale 的一个开覆盖。这意味着 $\mathrm{D}(R_\square) \to \mathrm{D}(R_{i,\ \square})$ 是一个开浸入（因为它是开浸入 $\mathrm{D}(R_\square) \to \mathrm{D}(R_i[f_{i,j}^{-1}]_\square)$ 的并集）。最后，开浸入 $\{\mathrm{D}(R_\square \to \mathrm{D}(R_{i,\ \square}))\}_i$ 覆盖 $\operatorname{Sm}(\mathrm{D}(R_\square))$ 这一事实，源于命题 5.4.15，以及我们可以通过基本 Zariski 开子空间找到 $\{U_i\}_{i=1}^n$ 的细化这一事实。□

推论 5.4.17. 设 X 是一个概形，其结构层为 $\mathscr{O}_X$。将开仿射扎里斯基子空间 $U \subset X$映到 $\mathrm{D}(\mathscr{O}_X(U)_\square)$ 的函子是一个层。更准确地说，设 $\mathrm{D}_\square(X) = \lim\nolimits_{\longleftarrow U \subset X} \mathrm{D}(\mathscr{O}_X(U)_\square)$ 为 X上的凝聚拟凝聚层范畴，其中 U遍历开仿射子空间的偏序集。此外，存在唯一的 *locale* 满态射

$$F : \operatorname{Sm}(\mathrm{D}_\square(X)) \to |X|$$

使得对于 $U \subset X$开仿射刚性空间，有 $\mathrm{D}_\square(F^{-1}(U)) = \mathrm{D}(\mathscr{O}_X(U)_\square)$。

证明。 这是定理 5.4.16 的推论。唯一尚待验证的断言是 F的满射性。为此，我们可以假设 $X = \operatorname{Spec} R$是仿射的。设 $U, U' \subset X$是两个开扎里斯基子集，使得 $F^{-1}(U) = F^{-1}(U')$，我们要证明 $U' = U$。将它们与开仿射子空间取交后，不失一般性地可以假设 $U' \subset U = X$。于是，要证明该断言，只需证明：若对于 $Z \subset X$ 某个闭子空间，其对应的幂等代数 A_Z 为零，则 $Z = \emptyset$。假设结论不成立，则 $A_Z = 0$ 且 $Z \neq \emptyset$。存在一个闭点 $x \in Z$以及一个解析环的映射 $R_\square \to \kappa(x)_\square$，它导出一个 locale 映射

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Sm}(\mathrm{D}(\kappa(x)_\square)) & \xrightarrow{F_x} & \operatorname{Spec}(\kappa(x)) \\ \downarrow{\scriptstyle G} & & \downarrow \\ \operatorname{Sm}(\mathrm{D}(R_\square)) & \xrightarrow{F} & \operatorname{Spec}(R). \end{array}$$

但于是我们有 $G^{-1}(F^{-1}(Z)) = F_x^{-1}(\operatorname{Spec}(\kappa(x)))$，这说明 $F^{-1}(Z) \neq \emptyset$，与 $A_Z = 0$ 的事实矛盾。□

5.5. **离散 Huber 对**。在第5.4节中，我们看到了两种将拟相干层范畴附加到概形 X 上的方法（在后文中我们会看到，这对应于以两种不同的方式将概形 X 实现为解析叠）。为了继续发展理论，将这两种构造都推广到离散 Huber 环和离散 adic 空间的理论中会更加方便。

定义 5.5.1。动画离散 Huber 对是一个元组 $(R,\ R^+)$，其中 R 是动画离散环，且 $R^+ \subset \pi_0(R)$ 是一个整闭子环。离散 Huber 对 $(R,\ R^+) \to (A,\ A^+)$ 的态射是动画环之间的映射 $R \to A$，满足 R^+ 被映射到 A^+。我们将 $\mathrm{Ring}^{\mathrm{Hub}}$ 记为动画离散 Huber 对的 ∞-范畴。

引理 5.5.2. 范畴 $\mathrm{Ring}^{\mathrm{Hub}}$ 容许余极限，并且具有由离散对 $(\mathbb{Z}[T], \mathbb{Z})$ 与 $(\mathbb{Z}[T], \mathbb{Z}[T])$ 的有限余极限给出的紧生成元。

证明。 设 $\{(R_i, R_i^+)_{i \in I}$ 是 $\mathrm{Ring}^{\mathrm{Hub}}$ 中的一个图表，则其余极限由 Huber 对 (A, A^+) 给出，其中 $A = \varinjlim_i R_i$，而 $A^+ \subset \pi_0(A)$ 是由 $R_i^+ \to \pi_0(A)$ 的像生成的环的整闭包。特别地，函子 $(R,\ R^+) \mapsto R, R^+$ 与 $\mathrm{Ring}^{\mathrm{Hub}}$ 中的滤过余极限可交换。

要证明 $(\mathbb{Z}[T],\mathbb{Z})$ 和 $(\mathbb{Z}[T],\mathbb{Z}[T])$ 是 $\mathrm{Ring}^{\mathrm{Hub}}$ 的紧生成元，只需证明函子

$$F:\mathrm{Ring}^{\mathrm{Hub}}\to \mathrm{Ani}\times \mathrm{Ani}$$

将一个环 $(R,\ R^+)$ 映射到映射空间 $\mathrm{Map}_{\mathrm{Ring}^{\mathrm{Hub}}}$（$(\mathbb{Z}[T],\ \mathbb{Z})$，$(R,\ R^+)$）和 $\mathrm{Map}_{\mathrm{Ring}^{\mathrm{Hub}}}$（$(\mathbb{Z}[T],\ \mathbb{Z}[T])$，$(R,\ R^+)$）的映射是联合保守的，并且与滤过余极限相容。但我们知道

$$\mathrm{Map}_{\mathrm{Ring}^{\mathrm{Hub}}}((\mathbb{Z}[T],\mathbb{Z}),(R,R^+))=R$$

and

$$\mathrm{Map}_{\mathrm{Ring}^{\mathrm{Hub}}}((\mathbb{Z}[T],\mathbb{Z}[T]),(R,R^+))=R\times_{\pi_0(R)}R^+,$$

断言得证。 □

备注 5.5.3。Huber 对 $(\mathbb{Z}[T],\ \mathbb{Z}[T])$ 不是 投射的。事实上，考虑商 $A=\mathbb{Z}[T]/T^n$。于是 $(A,\ A)$ 是 $(\mathbb{Z}[T],\ \mathbb{Z})\otimes_{(\mathbb{Z}[T],\mathbb{Z})}(\mathbb{Z},\ \mathbb{Z})$ 的推出，映射 $T\mapsto T^n$ 和 $T\mapsto 0$；将推出写成棒构造后可知，$(R,\ R^+)\mapsto R^+$ 与几何实现不相容（问题在于，Huber 对上的余极限总会在第二个参数中取整闭包）。

给定一个离散 Huber 对，我们可以自然地附加一个固态解析环；为了方便起见，我们将进行一个更一般的构造。

定义 5.5.4。设 $(A,\ S)$ 是由一个固态动画环和一个从集合 $S\to\pi_0(A)(*)$ 到 A 的底层离散静态环的映射组成的对。我们将解析环 $(A,\ S)_\square$ 定义为 A 上解析环结构的完备化，使得一个凝聚 A-模完备当且仅当它是一个 solid 阿贝尔群，并且对于所有 $s\in S$，它如定义 5.2.1 中所述是 s-solid 的。

引理 5.5.5。设 $(R、\ S)$ 是一个元组，其中 R 是离散动画环，而 $S\subset\pi_0(R)$ 是一个子集。设 $R^+[S]\subset\pi_0(R)$ 为由 S 的像生成的子代数的整闭包。则自然映射

$$(R,S)_\square\to(R,R^+[S])_\square$$

是一个等价。

证明。由推论 4.4.4，不失一般性，我们可以假设 R 是静态的。设 (R,S) 是一对，其中 R 是一个离散环，$S\subset R$ 是一个集合。令 $R^+[S]$ 为由 S 生成的 R 子代数的整闭包。我们断言 $(R,S)_\square=(R,R^+(S))_\square$。事实上，设 $r\in R^+[S]$，则 r 在由 S 中有限多个元素生成的子代数 B 上是整的。因此，由推论 5.3.9，我们有解析环的映射

$$B[r]_\square=B[r]_{B_\square/}\to(R,S)_\square,$$

这又产生了一个解析环映射

$$(R,B[r])_\square\to(R,S)_\square.$$

沿所有 $r\in R^+[S]$ 取余极限，我们得到映射 $(R,S)_\square\to(R,R^+[S])_\square\to(R,S)_\square$，从而证明 $(R,R^+[S])_\square=(R,S)_\square$，如所需。□

命题 5.5.6 ([And21, 命题 3.34])**.** 函子 $\mathrm{Ring}^{\mathrm{Hub}}\to\mathrm{AnRing}$ 将 (R,R^+) 映射到 $(R,R^+)_\square$，是保余极限且全忠实的。

证明。首先注意，对于任意满足 R 为离散动画环的 Pair (R,S)，其底层环 $(R,S)^\flat_\square=R$ 是完备的，因为任意离散模都是 Solid（分别地，对于 $s\in S$，是 s-Solid）。与余极限的交换性由以下几项推出：$(R,S)_\square$ 的定义——将 R-模定义为完备，当且仅当它作为阿贝尔群是 Solid，且对于所有 $s\in S$ 都是 s-Solid；命题 4.1.11 中关于（未完备化的）解析环余极限的描述；以及引理 5.5.5。

现在证明全忠实性。由于该函子保余极限，且 $(\mathbb{Z}[T],\mathbb{Z})$ 和 $(\mathbb{Z}[T],\mathbb{Z}[T])$ 生成 $\mathrm{Ring}^{\mathrm{Hub}}$，因此只需证明，对于离散 Huber 对 (R,R^+)，映射

$$R\to \mathrm{Map}_{\mathrm{AnRing}}((\mathbb{Z}[T],\mathbb{Z})_\square,(R,R^+)_\square) \tag{5.5.1}$$

and

$$R\times_{\pi_0(R)} R^+\to \mathrm{Map}_{\mathrm{AnRing}}((\mathbb{Z}[T],\mathbb{Z}[T])_\square,(R,R^+)_\square) \tag{5.5.2}$$

是等价。由定义，$(\mathbb{Z}[T],\mathbb{Z})_\square = \mathbb{Z}[T]_{\mathbb{Z}_\square/}$ 具有由整数诱导的 solid 结构。因此，映射空间 (5.5.1) 是 $(R,R^+)_\square$ 的底离散环，而这正是所期望的 R。对于第二个断言，注意映射 $(\mathbb{Z}[T],\mathbb{Z})_\square\to(\mathbb{Z}[T],\mathbb{Z}[T])_\square$是幂等的，因此 (5.5.2) 的映射空间完全由其连通分支决定。但由定义，$\pi_0(\mathrm{Map}^{\mathrm{AnRing}}((\mathbb{Z}[T],\mathbb{Z}[T])_\square,(R,R^+)_\square))$ 由所有映射$\mathbb{Z}[T]_\square\to(R,R^+)_\square$组成。由推论 4.4.4，我们可以不失一般性地假设 R 是静态的，于是由定义我们有 $(R,R^+)_\square = R_{R^+_{\square}/}$。然后，对于 $S=\varprojlim_n S_n$ 一个轻射有限集，我们有

$$(R,R^+)_\square[S]=R\otimes_{R^+} R^+_\square[S].$$

因此，我们可以写成

$$(R,R^+)_\square[S]=\varinjlim_{\substack{B\subset R^+\\ M\subset R}} M_\square[S]$$

其中，B 遍历 R^+的所有有限生成子代数，M 遍历 R^+中所有有限 B-子模，并且 $M_\square[S]=\varprojlim_n M[S_n]$。现在，设 $T\in R$满足存在映射 $\mathbb{Z}[T]_\square\to(R,\ R^+)_\square$，并令 $C\subset R^+$为由 T的像生成的子代数。那么，$(R,\ R^+)_\square[S]$是$C_\square$-完备的，并且存在一个 $C_\square$-模映射

$$C_\square[S]\to(R,R^+)_\square[S]$$

取 $S=\mathbb{N}\cup\{\infty\}$ 并将 $\mathbb{Z}_\square[S]\cong\prod_{\mathbb{N}}\mathbb{Z}$ 等同起来，我们得到一个映射

$$\prod_{\mathbb{N}} C\to \varinjlim_{\substack{B\subset R^+\\ M\subset R}}\prod_{\mathbb{N}} M.$$

特别地，存在一个有限生成环 $B\subset R^+$ 和一个有限 B-模 $M\subset R$，使得序列$(1,\ T,\ T^2,\ .....)$落在 $\prod_{\mathbb{N}} M$中。因此，T的所有幂都属于 M，这意味着T 在 B 上整，从而 $T\in R^+$。证明至此完成。□

5.6. 离散 Adic 空间。 Huber 对非阿基米德几何的近似建立在 adic 空间的形式体系之上 [Hub93, Hub94, Hub96]。对该理论的传统近似需要讨论拓扑环和连续赋值，随后还会引入一项技术性的层化性质，以保证结构层对解析拓扑的下降。本节将遵循 [CS19, 第九讲] 中的方法，并将讨论范围限制在离散 adic 空间理论，在其中这些拓扑和层化方面的微妙问题都不复存在。

5.6.1. *Huber* 对的 *adic* 谱。

定义 5.6.1. 设 (R,R^+) 是一个离散 Huber 对，其中 R 是静态环。令 $\mathrm{Spa}(R,R^+)$ 为满足以下条件的乘法赋值 $x:R\to\Gamma$ 的等价类集合：对所有 $f\in R^+$，均有 $|f(x)|\le 1$。对于一般离散 Huber 对 (R,R^+)，定义 $\mathrm{Spa}(R,R^+):=\mathrm{Spa}(\pi_0(R)\ R^+)$。称 $\mathrm{Spa}(R,R^+)$ 为 (R,R^+) 的 adic 谱。当 R^+ 是 $\mathbb{Z}$ 的像的整闭包时，我们简记为 $\mathrm{Spv}(R)$；这是 R 的赋值的等价类集合，称为 R 的赋值谱。我们有 $\mathrm{Spa}(R,R^+)\subset\mathrm{Spv}(R)$。

备注 5.6.2。定义 $\mathrm{Spa}(R,\ R^+)$ 的另一种等价方式如下：它是由元组 $(\mathfrak{p},\ V)$ 构成的集合，其中 $\mathfrak{p}$ 是 R 的素理想，而 $V\subset\kappa(\mathfrak{p})$ 是 $\mathfrak{p}$ 处的分式域中的一个赋值环，并且包含 $R^+\to\kappa(\mathfrak{p})$ 的像。

Huber 在 Spa(R, R^+) 上定义了一种拓扑，称为 Huber 拓扑或解析拓扑。其定义如下：设 (R, R^+) 是一个离散 Huber 对，且 $(f_1, \dots, f_n, g)$ 是 R 中元素组成的元组。定义有理局部化 Spa(R, R^+) $\left(\frac{f_1,\dots,f_n}{g}\right)$ 为 Spa(R, R^+) 的子集，该子集由满足以下条件的赋值等价类 x 构成：$R \to \Gamma$，使得 $|g| \neq 0$ 且对于所有 $i = 1, \dots, n$，$|f_i(x)| \leq |g(x)|$。Spa(R, R^+) 的解析拓扑是通过规定有理子集为开子空间而生成的拓扑。我们把以下结论留给读者作为练习：对于离散 Huber 对的映射 $(R, R^+) \to (S, S^+)$，诱导映射 Spa$(S, S^+) \to$ Spa(R, R^+) 保持有理局部化（因此关于 Huber 拓扑是连续的），并且有理局部化的交集仍是有理局部化。

下述命题将 R 的整闭子环与 Spv(R) 的适当子集等同起来。

命题 5.6.3 ([CS19，命题 9。2])。设 R 为静态离散环。整闭子环 $R^+ \subset R$ 与子集 $U \subset \mathrm{Spv}(R)$ 之间存在双射，这些子集是有理局部化 $U_{f,\,1} := \mathrm{Spv}(R)(\frac{f}{1})$ 的交。具体而言，有

$$R^+ = \{f \in R : \forall x \in U, |f(x)| \leq 1\}$$

and

$$U = \bigcap_{f \in R^+} U_{f,1} = \mathrm{Spa}(R, R^+).$$

特别地，

$$R^+ = \{f \in R : \forall x \in \mathrm{Spa}(R, R^+), |f(x)| \leq 1\}.$$

证明。设 $U = \bigcap_{f \in I} U_f$，1 为如该引理所述的一个交，设 $R^+ \subset R$ 为元素 $f \in I$ 在 R 中生成的代数的整闭包。则易见 $U =$ Spa(R, R^+)。反之，我们要说明整闭子环 $R^+ \subset R$ 完全由 Spa(R, R^+) 决定。为此，设 $f \in R$ 使得对所有 $x \in$ Spa(R, R^+) 都有 $|f(x)| \leq 1$。若 $f \notin R^+$ 则 f 不在 $R^+[\frac{1}{f}] \subset R[\frac{1}{f}]$ 中，且存在 $R^+[\frac{1}{f}]$ 的一个包含 $\frac{1}{f}$ 的素理想 $\mathfrak{p}$。设 $\mathfrak{q}$ 为含于 $\mathfrak{p}$ 的一个极小素理想。于是我们可以找到一个赋值环 V 以及一个映射 Spec $V \to$ Spec $R^+[\frac{1}{f}]$，它将泛点映到 $\mathfrak{q}$，将特殊点映到 $\mathfrak{p}$。由于 Spec $R[\frac{1}{f}] \to$ Spec $R^+[\frac{1}{f}]$ 的像包含极小素理想 $\mathfrak{q}$（映射 $R^+[\frac{1}{f}] \to R[\frac{1}{f}]$ 为单射），我们可以将对应于 Spec $V \to$ Spec $R^+[\frac{1}{f}]$ 的赋值提升到 $R[\frac{1}{f}]$。所得赋值在 R^+ 上取值为 ≤ 1，并且由于 $f \in \mathfrak{p}$，在 f 上取值为 > 1。由此得到矛盾。□

接下来，我们要证明 Spa(R, R^+) 上存在良定义的解析拓扑，并构造一个结构层。

命题 5.6.4. 设 (R, R^+) 是一个离散 *Huber* 环，且 $(f_1, \dots, f_n, g)$ 是生成 R 的单位理想的一个元组。令 $R(\frac{f_1,\dots,f_n}{g})^+ \subset \pi_0(R[\frac{1}{g}])$ 为由 R^+ 的像以及所有 $i = 1, \dots, g$ 生成的子环的整闭包。那么自然映射

$$\Psi : \mathrm{Spa}(R[\frac{1}{g}], R(\frac{f_1, \dots, f_n}{g})^+) \to \mathrm{Spa}(R, R^+)$$

诱导出到 $\mathrm{Spa}(R, R^+)$ $\left(\frac{f_1,\dots,f_n}{g}\right)$ 的一个同胚。此外，若两个有理局部化 (R_1, R_1^+) 和 (R_2, R_2^+) 满足：当视为 $\mathrm{Spa}(R, R^+)$ 中的子空间时，$\mathrm{Spa}(R_1, R_1^+) = \mathrm{Spa}(R_2, R_2^+)$，则存在唯一的 R-代数同构 $R_1 \cong R_2$，使得 $R_1^+ = R_2^+$。

证明概要。根据注 5.6.2 中对 adic 谱通过素理想和赋值环所作的描述，显然 Ψ 是单射。要证明它满射到 $U =$ Spa(R, R^+) $\left(\frac{f_1,\dots,f_n}{g}\right)$，只需验证点 $(\mathfrak{p}, V) \in$ Spa(R, R^+) 属于 U，当且仅当 g 在 $\kappa(\mathfrak{p})$ 中非零，且对所有 $i = 1, \dots, n$ 都成立。不过，核对定义可知

这些恰好是 Spa($R[\frac{1}{g}]$, $R(\frac{f_1,\dots,f_n}{g})^+$) 的元素：通过包含映射 Spec $R[\frac{1}{g}] \subset$ Spec R 来识别两个环的素理想，并利用赋值环是整闭的这一点得到整闭包。要证明在 Huber 拓扑下它是同胚，只需检查 Spa($R[\frac{1}{g}]$, $R(\frac{f_1,\dots,f_n}{g})^+$) 的有理局部化被映到 Spa($R$, R^+) 的有理局部化；这一点留作读者练习。

最后，设 $(h_1,\dots,h_k,s)$ 是另一个生成相同有理局部化的元组。首先，注意到存在包含映射 F: Spec $R \to$ Spec(R,R^+)，它将一个素理想 $\mathfrak{p}$映射到对 $(\mathfrak{p},\kappa(\mathfrak{p}))$。容易看出，与 $(f_1,\dots,f_n,g)$ 对应的有理局部化在 F 下的原像是 Spec $R[\frac{1}{g}]$。这表明局部化 $R[\frac{1}{s}]$和 $R[\frac{1}{g}]$在 Spec R上诱导相同的开扎里斯基子空间，因此 $R[\frac{1}{s}] = R[\frac{1}{g}]$。于是，等式

$$R(\frac{f_1,\dots,f_n}{g})^+ = R(\frac{h_1,\dots,h_k}{s})^+$$

由命题 5.6.3 得出，从而证明了最后一个断言。 □

定义 5.6.5. 设 (R,R^+) 是一个离散 Huber 对，并记 $X =$Spa(R,R^+)。令 $\mathscr{O}_X$和$\mathscr{O}_X^+$ 为定义在 X 的有理开子集上的预层，它们分别将 Spa(R',R'^+) 映射到 R' 和 R'^+。

离散 Huber 环的 adic 谱还有一个重要的最终性质：它立即是层化的：

命题 5.6.6。 设(R,R^+) 是一个离散 *Huber* 环，$X = \mathrm{Spa}(R,R^+)$ 是它的 *adic* 谱。记 X_{rat} 为 X 的有理局部化位点。那么，X_{rat} 上的结构预层 $\mathscr{O}_X$是离散 R-模的导出范畴上的一个层。同样，$\mathscr{O}_X^+$ 也是 R^+-代数的阿贝尔范畴上的一个层

证明。 存在一个连续映射 F: Spec $R \to$ Spa(R,R^+)，将一个素理想 $\mathfrak{p}$ 映到元组 $(\mathfrak{p},\kappa(\mathfrak{p}))$。于是预层 $\mathscr{O}_X$ 不过是 Spec R的结构层的（导出）推前，这说明它是一个层。$\mathscr{O}_X^+$ 的层性质则由以下事实得到：对于一个有理子空间$U \subset X$，有

$$\mathscr{O}_X^+(U) = \{f \in \mathscr{O}_X(U) : \forall x \in U, |f(x)| \le 1\}.$$

□

5.6.2. 解析拓扑的下降。在上一段中，我们定义了离散 Huber 对的非阿基米德谱，定义了其解析拓扑，并证明结构预层实际上是一个层。我们的下一个目标是证明，将 $(R,R^+) \mapsto \mathrm{D}((R,R^+)_\square)$ 映射为函子的函子满足解析拓扑的下降（之后我们将把它重新解释为解析环上的 !- 下降）。我们需要一个技术引理。

引理 5.6.7 ([Hub94，引理 2。6], [CS19，引理 10。4])。设 (R,R^+) 是一个离散 *Huber* 对，且有 $X =\mathrm{Spa}(A,A^+)$。假设 $U_1,\dots,U_n \subset X$ 是覆盖 X 的有理开子集。那么存在 $s_1,\dots,s_N \in A$ 生成单位理想，使得每个 $X(\frac{s_1,\dots,s_N}{s_j})$都包含于某个$U_i$ 中；特别地，$\{\overline{X(\frac{s_1,\dots,s_N}{s_j})}\}_j$细化 $\{U_i\}$。

定理 5.6.8。 设 (R,R^+) 是一个离散 *Huber* 环，令 $X =\mathrm{Spa}(R,R^+)$ 为其 *adic* 谱。令 X_{rat} 为由 X的有理开子空间的有限不交并构成的位点。则函子

$$\mathrm{D} : X_{\mathrm{rat}}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{CAlg}(\mathrm{Pr}^{L,\mathrm{ex}})$$

关于映射 $U \in X_{\mathrm{rat}}$到 $\mathrm{D}((\mathscr{O}_X(U)\ \mathscr{O}_X(U)^+)_\square)$的呈现对称幺半稳定 ∞-范畴是一个层。

证明。步骤 *1*。设 $\{U_i\}_{i\in I}$ 是 X 的有限有理覆盖，并设 $\{U_J\}_{J\subset I}$ 是 U_i的有限交所成的偏序集。我们希望证明自然映射

$$\mathrm{D}((R,R^+)_\square)\to \varprojlim_{U_J\subset X}\mathrm{D}((\mathscr{O}_X(U_J),\mathscr{O}_X(U_J)^+)_\square) \tag{5.6.1}$$

是范畴等价。

根据引理 5.6.7，我们可以找到生成 R 的单位理想的元素 s_1、……、s_N，使得有理覆盖 $\{X(\frac{s_1,\dots,s_N}{s_j})\}_j$细化了$\{U_i\}$。因此，只需证明相对于形如 $\{U_j=X(\frac{s_1,\dots,s_N}{s_j})\}_j$ 的覆盖的下降。

步骤 *2*. 我们先考虑 s_N 是 R 中的单位的情形。将 s_j 替换为 s_j/s_N 后，我们可以假设 $s_N=1$。我们断言，覆盖 $\{U_j=X(\frac{s_1,\dots,s_{N-1},\,1}{s_j})\}_j$ 有一个由劳朗覆盖复合而成的细化

$$X=X(\frac{1}{f})\cup X(\frac{f}{1}). \tag{5.6.2}$$

事实上，它被不同 j 对应的劳朗覆盖 $X=X(\frac{1}{s_j})\cup X(\frac{s_j}{1})$ 的交集细化。因此，根据归纳论证，只需处理如 (5.6.2) 中的单个劳朗覆盖的情形。但这个覆盖对应于解析环之间的映射

$$(R,R^+)_\square\to\mathbb{Z}[T]_\square\otimes_{\mathbb{Z}[T]}(R,R^+)=(R,R(\frac{f}{1})^+)$$

and

$$(R,R^+)_\square\to(\mathbb{Z}[T^{\pm1}],\mathbb{Z}[T^{-1}])_\square\otimes_{\mathbb{Z}[T]}(R,R^+)=(R[\frac{1}{f}],R(\frac{1}{f})^+)$$

其中 T 映射到 f。引理 5.4.13 表明，这些映射在 locale 层面上给出了开浸入。因此，为了证明下降，根据沿 $\mathbb{Z}[T]\to(R,R^+)$ $(T\mapsto f)$ 的基变换，并由定理 5.1.6，只需证明开局部化 $(\mathbb{Z}[T],\mathbb{Z})_\square\to\mathbb{Z}[T]_\square$和 $(\mathbb{Z}[T],\mathbb{Z})_\square\to(\mathbb{Z}[T^{\pm1}],\mathbb{Z}[T^{-1}])_\square$覆盖 locale $\mathrm{D}((\mathbb{Z}[T],\mathbb{Z})_\square)$。这相当于证明 solid $\mathbb{Z}[T]$-幂等代数 $\mathbb{Z}((T^{-1}))$ 和 $\mathbb{Z}[[T]]$ 的张量积为零。但我们有

$$\mathbb{Z}((T^{-1}))\otimes_{\mathbb{Z}[T]}\mathbb{Z}[[T]]=\mathbb{Z}[[X,T]]^{\mathbb{L}}/(XT-1),$$

但 $XT-1$ 是 $\mathbb{Z}[[X,T]]$ 中的一个单位，因而张量积为零。

步骤 *3*. 现在我们处理一般情形。元素 $s_1,\dots,s_N$给出了 Spec R 的一个扎里斯基覆盖$\{\mathrm{Spec}\ R[\frac{1}{s_j}]\}_j$；令 $V_j=X(\frac{g}{g})$ 表示 $|g|\neq0$所在的轨迹，并令 $\{V_K\}_{K\subset J}$表示由这些 V_j'构成的有限交的偏序集。注意，$R(\frac{g}{g})^+$恰好是 R^+在 $R[\frac{1}{g}]$中的整闭包。于是，由引理 5.5.5 可得 $(R[\frac{1}{g}],R^+)_\square=(R[\frac{1}{g}],R(\frac{g}{g})^+)_\square$。根据扎里斯基下降，自然映射

$$\mathrm{D}((R,R^+)_\square)=\varprojlim_{V_K\subset X}\mathrm{D}((\mathscr{O}_X(V_K),\mathscr{O}_X^+(V_K))_\square)$$

是一个等价。具体而言，扎里斯基覆盖产生了 $\mathrm{D}(R)$ 的 locale 的闭覆盖，并且根据定理 5.1.6，到 $\mathrm{D}((R,\ R^+)_\square)$ 的基变换同样产生一个闭覆盖。根据步骤 2，有理覆盖 $\{V_K\cap U_j\}_j$产生了 locale $\mathrm{Sm}(\mathrm{D}((\mathscr{O}_X(V_K)\ \mathscr{O}_X^+(V_K))_\square))$ 的开覆盖，因此我们有

$$\mathrm{D}((\mathscr{O}_X(V_K),\mathscr{O}_X^+(V_K))_\square)=\varprojlim_{U_J\subset X}\mathrm{D}((\mathscr{O}_X(V_K\cap U_J),\mathscr{O}_X^+(V_K\cap U_J))_\square),$$

相对于偏序集 $\{V_K\}$ 取极限，我们得到

$$\begin{aligned}\mathrm{D}((R,R^+)_\square) &= \varprojlim_{V_K\subset X} \mathrm{D}((\mathscr{O}_X(V_K),\mathscr{O}_X^+(V_K))_\square)\\ &= \varprojlim_{V_K\subset X}\varprojlim_{U_J\subset X} \mathrm{D}((\mathscr{O}_X(V_K\cap U_J),\mathscr{O}_X^+(V_K\cap U_J))_\square)\\ &= \varprojlim_{U_J\subset X}\varprojlim_{V_K\subset X} \mathrm{D}((\mathscr{O}_X(V_K\cap U_J),\mathscr{O}_X^+(V_K\cap U_J))_\square)\\ &= \varprojlim_{U_J\subset X} \mathrm{D}((\mathscr{O}_X(U_J),\mathscr{O}_X^+(U_J))_\square)\end{aligned}$$

其中第一个等价是关于 X 的扎里斯基下降，第二个由步骤 2 应用于有理子空间 V_K 得出，第三个是极限的交换，最后一个是将扎里斯基下降应用于有理子空间 U_J。至此，定理得证。□

为了给离散 adic 空间定义推论 5.4.4 和 5.4.17 的正确类比，我们需要修改 Spa$(R,\ R^+)$ 上的 Huber 拓扑。

定义 5.6.9。设 $(R,\ R^+)$ 是一个离散 Huber 对。我们将 $X=\mathrm{Spa}(R,\ R^+)^{\mathrm{mod}}$ 定义为赋予最粗拓扑的 adic 谱，使得形如 $X(\frac{1}{f})$ 和 $X(\frac{f}{1})$ 的有理局部化是开集（$f\in R$），而形如 $X(\frac{g}{g})$ 的有理局部化是闭集（$g\in R$）。我们称 $X=\mathrm{Spa}(R,\ R^+)^{\mathrm{mod}}$ 为修正赋值谱。

引理 5.6.10. 设 (R,R^+) 是一个离散 *Huber* 对，且 $X=\mathrm{Spa}(R,R^+)^{\mathrm{mod}}$ 是其修正赋值谱。那么 X 是一个谱空间，其拟紧拟分离开子空间由形如 $X(\frac{1}{f})$、$X(\frac{f}{1})$ 和 $X(g=0):=X\backslash X(\frac{g}{g})$ 的子空间的交的有限并给出。

证明. 根据定义，Spa$(R,R^+)^{\mathrm{mod}}$ 是使两个映射连续的最粗拓扑：

$$t\colon \mathrm{Spa}(R,R^+)\to\mathrm{Spec}(R) \text{ and } s\colon \mathrm{Spa}(R,R^+)\to\mathrm{Spec}(R)^{\mathrm{op}}$$

其中 s 和 t 是如下映射：它们将注 5.6.2 中由一对 $x=(V\subset\kappa(\mathfrak{p}))$ 确定的赋值分别映到 $s(x)=\mathfrak{p}$ 和 $t(x)=\mathfrak{m}_V$（V 的极大理想）。

由引理中所述子空间的交的有限并给出的任何子空间，在修正拓扑下都是拟紧拟分离的；也就是说，它在 Spa(R,R^+) 的可构造拓扑中既开又闭。根据定义，这些对象构成修正拓扑的一个基，且对有限并稳定，因此它们恰好是 Spa$(R,R^+)^{\mathrm{mod}}$的拟紧拟分离开子空间。容易验证该空间是 T_0（或 Kolmogorov）的，因此根据 Hochster 判据 [Wed19, 命题 3.31]，Spa$(R,R^+)^{\mathrm{mod}}$ 是一个谱空间。□

推论 5.6.11. 设(R,R^+) 是一个离散 *Huber* 对，并令$\mathrm{Spa}(R,R^+)^{\mathrm{mod}}$ 为修正赋值谱。于是，将有理子集 $U\subset X$映射到$\mathrm{D}((\mathscr{O}_X(U)\ \mathscr{O}_X^+(U))_\square)$ 的函子导出一个唯一的 *locale* 自然满射

$$F:\mathrm{Sm}(\mathrm{D}((R,R^+)_\square))\to\mathrm{Spa}(R,R^+)^{\mathrm{mod}}.$$

证明.映射 F 的存在性由定理 5.6.8 以及推论 5.4.4 和 5.4.17 形式上直接得出。

唯一需要验证的是 F 的满射性。我们要证明：给定 $U,U'\subset$Spa$(R,R^+)^{\mathrm{mod}}$ 中关于修正拓扑的两个开子空间，如果 $F^{-1}(U)=F^{-1}(U')$，那么 $U=U'$。为此，取 $x\in$Spa(R,R^+)，并令 $(\kappa(x)\ \kappa(x)^+)$ 为 x 处的剩余域。我们可以不失一般性地假设 $U'\subset U$。然后，利用 F 的自然性，并沿所有仿射刚性点取拉回，只需处理 $R=K$ 是一个域且 $K^+\subset K$ 是一个整闭子环的情形。在这种情况下，解析拓扑与修正拓扑一致，而 Spa(K,K^+) 的开子空间按包含映射构成一个偏序集。Spa(K,K^+) 的拟紧开子空间具有 Spa$(K,K',^+)$ 的形式，其中 $K^+\subset K',^+$ 是一个整闭环。因此，通过对 U 与

开仿射刚性空间取交，要证明满射性，只需证明：对于任意开子空间 $U \subset \mathrm{Spa}(K, K^+)$，如果 $F^{-1}(U) = F^{-1}(\mathrm{Spa}(K, K^+))$，那么 $U = \mathrm{Spa}(K, K^+)$。假设结论不成立，取 $x \in \mathrm{Spa}(K, K^+)$ 为极大闭点，则 $F^{-1}(x) = \emptyset$。令 A_x 为与 x 对应的幂等代数，并令 $\{Z_j\}_j$ 为闭子空间构成的偏序集，其中闭子空间的拟紧拟分离开补空间对应的幂等代数为 A_{Z_j}。于是我们有

$$0 = A_x = \varinjlim_j A_{Z_j}.$$

由于余极限是滤过的，存在某个 j，使得 $1 \in A_{Z_j}$ 为零，因此对所有$k \geq j$，都有 $A_{Z_k} = 0$。但这将意味着 $F^{-1}(X \backslash Z_j) = F^{-1}(X)$，且 $X \backslash Z_j = \mathrm{Spa}(K, K^{\prime,+})$ 是仿射拟紧的，其中K^+ 严格包含于 $K^{\prime,+}$。这与命题 5.5.6 中离散 Huber 对到解析环的全忠实性矛盾，从而证明了我们想要的结论。□

备注 5.6.12。 我们没有将推论 5.6.11 表述为适用于一般离散 adic 空间，因为解析拓扑不同于修正拓扑，因此离散 adic 空间并非由沿修正拓扑粘合仿射空间得到。相反，由于解析拓扑同时包含修正拓扑的闭子空间和开子空间，离散 adic 空间将是通过 !-覆盖粘合仿射子空间的例子，见第 6.3 节。

6. 解析叠

在第 5 节中，我们构造了与概形相关联的经典拟凝聚层范畴和凝聚拟凝聚层范畴；凝聚理论将开扎里斯基子空间映射到 locale 意义下真正的开子空间，而经典理论则将开扎里斯基子空间映射到闭子空间。我们还看到，离散 adic 空间可以赋予凝聚拟凝聚层理论，不过对于后者，Huber 的开子空间在 locale 中产生的是局部闭子空间。解决这一表面悖论的一种方法，是引入一个大得多的<解析叠>范畴，在其中，对于非常广泛的一类“可下降”映射[11]，包括开覆盖、闭覆盖或局部闭覆盖，都可以进行粘合。

为了定义解析叠范畴[12]，我们需要回顾一些关于六函子形式体系和核范畴的事实，参见 [Man22b、Man22a], [Sch26b] 以及 [HM24]。事实上，解析叠理论与其拟凝聚层理论相协调地共同建立起来，不可能只提及其中一个而不涉及另一个。随后，我们定义解析叠范畴，并介绍其六函子形式体系理论的一些基本事实。最后，我们通过解析叠范畴讨论代数几何中的六函子以及拓扑空间上的层。

6.1. 6-函子形式体系。 构造六函子形式体系理论的想法可追溯至 Grothendieck，他最初为概形的 étale 上同调构造了这类运算。此后，数学中出现了不同的六函子理论（例如D-模理论、拓扑空间上的层或动机理论）。然而，据作者所知，直到最近，Mann 才在其著作 [Man22b 附录 A 中引入抽象六函子形式体系的形式化定义5] （该工作建立在 Liu-Zheng 关于 étale 层以及 Gaitsgory-Rozemblyum 关于 IndCoh 层的早期成果之上）。

随后，Scholze [Sch26b],进一步探索了抽象六函子形式体系的理论，而目前该领域的标准参考文献是 Heyer-Mann [HM24]的著作。本节将对抽象六函子理论作一个非常基础、粗略的介绍。我们强烈建议

[11]稳定范畴中的可下降代数由 Mathew 在 [Mat16], 中引入。解析叠理论中出现的可下降性概念是一个推广，它利用了解析环的六函子形式体系。[12]我特意说“范畴”而不是“范畴”，因为在某些情况下，最好选取解析环的一个便于处理的子范畴，以便构造我们感兴趣的解析叠。

感兴趣的读者阅读论文 [Man22b, Man22a, HM24, Sch26b]，以便更完整、更深入地了解这一主题。我们要强调，抽象六函子形式体系的理论对于解析叠理论至关重要。

6.1.1. 几何设置。 定义六函子形式体系所需的第一项数据是一个环境范畴和一个标记箭头类：

定义 6.1.1。 一个几何设置 是一个元组 $(\mathcal{C}, \mathcal{C}_0)$，由一个 ∞-范畴和一个（非满）子范畴 $\mathcal{C}'$ 组成，并满足以下条件：

(1) $\mathcal{C}_0$ 包含 $\mathcal{C}$ 的所有等价（即它是一个宽子范畴）。(2) 若 $f\colon Y \to X$ 属于 $\mathcal{C}_0$，且 $g\colon X' \to X$ 属于 $\mathcal{C}$，则 f 沿 g 的拉回 $Y' \to X'$ 在 $\mathcal{C}$ 中存在，且属于 $\mathcal{C}_0$。(3) 范畴 $\mathcal{C}_0$ 有纤维积，且包含映射 $\mathcal{C}_0 \subset \mathcal{C}$ 保持这些纤维积。

备注 6.1.2。 几何设置的数据等价于一个对 $(\mathcal{C}, E)$ 的数据，其中E 是 $\mathcal{C}$ 中的一个箭头类，满足以下条件（参见 [HM24，引理 2.1.5]）：

(i) E 包含所有同构，(ii) E 在复合下稳定，并且对 $\mathcal{C}$ 中的态射具有拉回，且在拉回下稳定；(iii) 对每个 $f\colon Y \to X$ 属于 E 的情形，对角态射 $f\colon Y \to Y \times_X Y$（由 (ii) 可知其存在）属于 E。

在这种情况下，我们令 $\mathcal{C}_E \subset \mathcal{C}$ 为 $\mathcal{C}$ 的宽子范畴，其态射由 E 中的态射构成。Pair $(\mathcal{C}, \mathcal{C}_E)$ 是定义 6.1.1 意义下的几何设置。

几何设置背后的理念是，范畴 $\mathcal{C}$ 是几何对象（例如概形、adic 空间、复簇、解析叠等）的底层范畴，而 E 是“!-可行映射”的类，也就是说，这类映射在对几何设置 $(\mathcal{C}, E)$ 上的抽象三函子形式体系的适当定义中，将具有下 !-函子。下面的引理表明，E 中的态射类是右可消去的：

引理 6.1.3. 考虑 $\mathcal{C}$中的映射 $Z \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} X$。若 $f \circ g$ 与 f 属于 E，则 g亦然。

证明. 我们可以将映射 g 写成复合映射 $Z \xrightarrow{(\mathrm{id}, g)} Z \times_X Y \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} Y$，因此只需证明$\mathrm{pr}_2$ 与(id_Z, g) 属于 E。但pr_2 是 $Z \xrightarrow{f\circ g} X$ 沿 $Y \xrightarrow{f} X$ 的基变换，故其属于 E，而(id_Z, g) 是 $Z \times_X Y \xrightarrow{(g, \mathrm{id})} Y \times_X Y$沿对角映射 $\Delta_f\colon Y \to Y \times_X Y$的基变换，该对角映射亦属于 E。□

6.1.2. 对应范畴。 给定一个几何设置 $(\mathcal{C}, E)$，可以构造一个 ∞-对应范畴 $\mathrm{Corr}(\mathcal{C}, E)$ [Sch26b, 定义 3.1] [HM24，定义 2.2.1]。其构造在组合学上颇为复杂，而证明它是一个 ∞-范畴也需要一番功夫[HM24，命题 2.2.9]。对应范畴背后的直观理解是，它为六函子形式体系中的函子 f^* 和 $g_!$ 提供了蓝图。非正式地说，对应范畴 $\mathrm{Corr}(\mathcal{C}, E)$ 是一个 ∞-范畴，其对象与 $\mathcal{C}$的对象相同，从 X到 Y 的态射是 $\mathcal{C}$中的一个图表

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{g} & Y \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \\ X & & \end{array}$$

带有 $g \in E$。$\mathbf{Corr}(C, E)$ 中两个映射 $X \to Y$ 和 $Y \to Z$ 的复合，是该图表的外层对应，其中含有拉回方块

$$\begin{array}{ccccc} W \times_Y U & \longrightarrow & U & \longrightarrow & Z \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ W & \longrightarrow & Y & & \\ \downarrow & & & & \\ X & & & & \end{array}$$

（注意，要使箭头 $W \times_Y U \to Z$ 属于 E，需要 E 对拉回和复合封闭。）

为了从对应范畴定义六函子形式体系，必须将其提升为一个合适的 ∞-拟运算子，记为 $\mathbf{Corr}(\mathcal{C}, E)^{\otimes}$。如果 $\mathcal{C}$ 具有有限直积，这个 ∞-拟运算子便赋予对应范畴一个对称幺半结构，参见 [HM24, §2.3]。$\mathbf{Corr}(\mathcal{C}, E)^{\otimes}$ 的构造如下：

首先，给定一个 ∞-范畴 $\mathcal{C}$，便有余笛卡尔 ∞-拟运算子 $\mathcal{C}^{\sqcup}$ [Lur17, 命题 2.4.3.3]。如果 $\mathcal{C}$ 具有余积，那么 $\mathcal{C}^{\sqcup}$ 就是对称幺半拟运算子，其对象为对 $(I, (X_i)_{i\in I})$，其中 I 是一个有限集，而 $(X_i)_{i\in I}$ 是 $\mathcal{C}$ 中元素的集合；态射 $(I, (X_i)_{i\in I}) \to (J, (Y_j)_{j\in J})$ 由一个基点集的映射构成

$$f : I \cup \{*\} \to J \cup \{*\}$$

以及对于所有 $j \in J$ 的映射

$$\bigsqcup_{i \in f^{-1}(j) \cap I} X_i \to Y_j.$$

考虑余拟运算子 $(\mathcal{C}^{\mathrm{op},\sqcup})^{\mathrm{op}}$。若 $\mathcal{C}$ 具有有限积，则可非正式地将该范畴描述如下：其对象是对 $(I, (X_i)_{i\in I})$，而态射 $(I, (X_i)_{i\in I}) \to (J, (Y_j)_{j\in J})$ 是基点集的映射

$$f : J \cup \{*\} \to I \cup \{*\}$$

以及对所有 $i \in I$

$$X_i \to \prod_{j \in f^{-1}(i) \cap J} Y_j.$$

现在，范畴 $\mathbf{Corr}(\mathcal{C}, E)^{\otimes}$ 本身是 $(\mathcal{C}^{\mathrm{op},\sqcup})^{\mathrm{op}}$ 在箭头 E 的一个合适的选择下的对应范畴。箭头 $f\colon (I, (X_i)_{i\in I}) \to (J, (Y_j)_{j\in J})$ 属于 E，若 $f\colon J \to I$ 是一个同构，且对所有 $j \in J$，映射 $X_{f(j)} \to Y_j$ 位于 E 中。结果表明 $((\mathcal{C}^{\mathrm{op},\sqcup})^{\mathrm{op}}, E)$ 构成一个几何设置。人们定义 ∞- 拟运算子

$$\mathrm{Corr}(\mathcal{C}, E)^{\otimes} := \mathrm{Corr}((\mathcal{C}^{\mathrm{op},\sqcup})^{\mathrm{op}}, \widetilde{E}).$$

让我们更明确地描述 $\mathbf{Corr}(\mathcal{C},\ E)^{\otimes}$ 的形式。$\mathbf{Corr}(\mathcal{C},\ E)^{\otimes}$ 的对象与 $(\mathcal{C}^{\mathrm{op},\ \sqcup})^{\mathrm{op}}$的对象相同，也就是说，是对 $(I,\ (X_i)_{i\in I})$。$\mathbf{Corr}(\mathcal{C},\ E)^{\otimes}$中的态射 $(I,\ (X_i)_{i\in I}) \dashrightarrow (J,\ (Y_j)_{j\in J})$ 是 $(\mathcal{C}^{\mathrm{op},\ \sqcup})^{\mathrm{op}}$中的一个对应

$$\begin{array}{ccc} (J, (Z_j)_{j\in J}) & \xrightarrow{g} & (J, (Y_j)_{j\in J}) \\ \downarrow f & & \\ (I, (X_i)_{i\in I}) & & \end{array},$$

~其中 g 属于 E。更准确地说，我们有一个基点集的映射 $f\colon I \cup \{*\} \to J \cup \{*\}$，并且对于所有 $j \in J$，一个 $\mathcal{C}$中的对应

$$\begin{array}{ccc} Z_j & \xrightarrow{g_j} & Y_j \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \\ \prod_{i \in I \cap f^{-1}(j)} X_i & & \end{array} \tag{6.1.1}$$

与 $g_j \in E$ （参见 [Sch26b，定义 3.11]）。

T对应范畴 Corr$(\mathcal{C}, E)$ 具有两个基本映射：

$$F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Corr}(\mathcal{C}, E) \tag{6.1.2}$$

and

$$G : \mathcal{C}_E \to \mathrm{Corr}(\mathcal{C}, E). \tag{6.1.3}$$

这两个映射 F 和 G 的非正式构造如下：它们在对象上是恒等映射。一个映射$f^{\mathrm{op}}\colon\ X \to Y$中的 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$，对应于一个映射 $f\colon\ Y \to X$，被送到对应

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\mathrm{id}} & Y \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \\ X & & \end{array} .$$

一个映射 $g\colon\ X \to Y$中的 $\mathcal{C}_E$ 被送到对应

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & Y \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \\ X & & \end{array} .$$

映射 F 甚至可以提升为幺半群的映射 $\mathcal{C}^{\mathrm{op},\sqcup} \to$ Corr$(\mathcal{C}, E)^{\otimes}$；如果 $\mathcal{C}$ 具有有限积，它甚至还是对称幺半的。同样，映射 G 也可以提升为幺半群的映射$\mathcal{C}_E^{\times} \to$ Corr$(\mathcal{C}, E)^{\otimes}$。

6.1.3. 抽象六函子形式。令 $\mathrm{Cat}_\infty^{\times}$ 为由带有笛卡尔对称幺半结构的（小） ∞-范畴构成的 ∞-范畴。

定义 6.1.4。设 $(\mathcal{C}, E)$ 为一个几何设置。$(\mathcal{C}, E)$ 上的 3-函子形式体系 D 是一个 ∞-幺半群的态射

$$\mathrm{D} : \mathrm{Corr}(\mathcal{C}, E)^{\otimes} \to \mathrm{Cat}_\infty^{\times}.$$

备注 6.1.5。设 $(\mathcal{C}, E)$ 为一个几何设置。3-函子形式体系的定义在目标方面相当灵活。也就是说，给定 $\mathscr{D}$ 任意一个对称幺半2-范畴，都可以将松弛对称幺半函子 D : Corr$(\mathcal{C}, E) \to \mathscr{D}$ 定义为取值于 $\mathscr{D}$的 3-函子形式体系 。如果 $\mathscr{C}$有一个终对象 $*$，那么由 [HM24 引理 31.9] 中的同一论证可知，D 自然地通过一个松弛对称幺半函子分解

$$\mathrm{D}\colon\ \mathrm{Corr}(\mathcal{C}, E) \to \mathrm{Mod}_{\mathrm{D}(*)}(\mathscr{D}).$$

若 $\mathscr{D} =$Pr^L 是配备 Lurie 张量积的可呈范畴 2-范畴，我们称取值于 Pr^L 的 3-函子形式体系为可呈示 3-函子形式体系。若 $\mathcal{C}$ 有终对象
$*$，D- 通过范畴 Pr$^L{}_{\mathrm{D}(*)}$:=模范畴$_{\mathrm{D}(*)}$(Pr^L) 分解为 D($*$)-线性可呈范畴。

让我们简要说明函子 D 如何编码六函子形式体系的重要特征；更详细的解释请参见 [HM24第3节 1] 。

(a) 首先，将 D 与函子 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Corr}(\mathcal{C}, E)$ 复合，我们得到一个松对称幺半函子

$$\mathcal{C}^{\mathrm{op},\sqcup} \to \mathrm{Cat}_\infty^\times,$$

这恰好与一个函子所包含的数据相同

$$\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{CAlg}(\mathrm{Cat}_\infty^\times)$$

从 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 到对称幺半范畴（[Lur17，定理 2.4.3.18]）。这可以称为 D 的系数函子。作为一种记号上的滥用，我们常将 D 与其在 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 上的限制视为相同；此时，可取例外拉回箭头的类以及将 D 从 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 延拓到 $\mathrm{Corr}(\mathcal{C}, E)$ 的过程，都可由上下文明确得知。

(b) 任意态射 $Z\colon X \to Y$ in $\mathrm{Corr}(\mathcal{C}, E)$，都可表示为图表

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{g} & Y \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \\ X & & \end{array}$$

可以写成复合映射 $X \to Z \to Y$，其中第一个箭头是 $X \leftarrow Z = Z$，第二个是 $Z = Z \to Y$。给定 $f\colon X \to Y$ 中的一个映射，我们定义拉回函子 $f^*\colon \mathrm{D}(Y) \to \mathrm{D}(X)$ 为 $\mathrm{D}(Y \xleftarrow{f} X = X)$；若 $f \in E$，则定义 $f_!\colon \mathrm{D}(X) \to \mathrm{D}(Y)$ 为 $\mathrm{D}(X = X \to Y)$。于是 D 将 $Z\colon X \to Y$ 映为函子 $g_! f^*\colon \mathrm{D}(X) \to \mathrm{D}(Y)$。

如此一来，E 在 $\mathcal{C}$ 中的箭头类，恰好就是那些允许定义!-函子的箭头；人们通常将 E 称为!-可用箭头类。(6.1.2) 和 (6.1.3) 中函子 F 和 G 的函子性，体现了函子 f^* 和 $f_!$ 在复合下的自然相容性。

(c) 适当基变换。设 $g\colon Y \to X$ 是 E 中的一个箭头，设 $f\colon X' \to X$ 是 $\mathcal{C}$中的一个映射。考虑笛卡尔方块

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{g'} & X' \\ \downarrow{\scriptstyle f'} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y & \xrightarrow{g} & X. \end{array}$$

适当基变换由函子 $\mathrm{D}(Y) \to \mathrm{D}(X')$ 的自然等价 $f^* g_! \cong g'_! f'^*$ 构成。它由函子 D 如下得到：设 $h_1 = (Y = Y \xrightarrow{g} X)$和 $h_2 = (X \xleftarrow{f} X' = X')$是对应范畴中的映射。那么 $h_2 \circ h_1 = (Y \xleftarrow{f'} Y' \xrightarrow{g'} X')$，且我们有

$$f^* g_! = \mathrm{D}(h_2) \circ \mathrm{D}(h_1) = \mathrm{D}(h_2 \circ h_1) = g'_! f'^*.$$

注意，由于这个公式只涉及 $*$ 和 !-函子，因此可直接从 $\mathrm{Corr}(\mathcal{C},\ E)$ 得到这一恒等式，无需进行算子提升。

(d) 投影公式。设 $g\colon X \to Y$ 是 E中的一个映射。投影公式为任意 $N \in \mathrm{D}(X)$ 和 $M \in \mathrm{D}(Y)$ 给出一个自然同构

$$g_!(g^* M \otimes N) \cong M \otimes g_! N. \tag{6.1.4}$$

它涉及全部三个函子，因此使用对应范畴的算子版本 $\mathrm{Corr}(\mathcal{C},\ E)^\otimes$ 至关重要。投影公式是函子之间的一个等价

$$\mathrm{D}(Y) \times \mathrm{D}(X) \to \mathrm{D}(Y). \tag{6.1.5}$$

因此，在对应范畴的层面上，我们必须找到一个映射

$$(\{1,2\}, (Y, X)) \to (\{1\}, Y)$$

它可以以两种不同的方式写出，从而得到 (6.1.5) 的两个函子。考虑 $\mathrm{Corr}(\mathcal{C},E)^{\otimes}$ 中的交换图

$$\begin{array}{ccc} (Y,X) & \longrightarrow & (Y,Y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & Y \end{array}$$

其中，上方的水平映射为 $(Y,X)\xrightarrow{(\mathrm{id}_Y,g)}(Y,Y)$，下方的水平映射为 g，左侧的垂直映射由 $(Y,X)\xleftarrow{(g,\mathrm{id}_X)} X=X$ 给出，右侧的垂直映射由对角态射 $(Y,Y)\xleftarrow{\Delta} Y=Y$给出。右上方的复合产生函子

$$(M,N)\mapsto(M,g_!N)\mapsto M\otimes g_!N$$

而左下方的复合产生函子

$$(M,N)\mapsto(g^*M\otimes N)\mapsto g_!(g^*M\otimes N).$$

由于右上方和左下方的复合都产生同一个函子，因此我们得到所需的自然等价 (6.1.4)。

6.1.4. $*$ 和 !-下降。 为便于后文参考，我们引入可呈 3-函子形式体系上的以下下降概念。

定义 6.1.6。 设 $(\mathcal{C},E)$ 是一个几何设置，D 是定义在 $(\mathcal{C},E)$ 上的可呈 3-函子形式体系。假设 $\mathcal{C}$ 具有有限积，且包含映射 $X\to X\bigsqcup Y$是可取例外拉回的。

(a) 态射 $f:\ Y\to X$ 于 $\mathcal{C}$ 中，具有 Čech 神经 $Y^\bullet$，满足 D^* 或 $*$-下降，如果范畴的自然映射

$$\mathrm{D}^*(X)\to\mathrm{Tot}(\mathrm{D}^*(Y^\bullet))$$

是一个等价，其中所有过渡映射均由上 $*$-函子诱导。我们称 f 满足普适 D^* 或 $*$-下降，如果前述在沿任意映射$X'\to X$ 于 $\mathcal{C}$中拉回之后仍然成立。

(b) 态射 $f:\ Y\to X$ 于 E 中，具有 Čech 神经 $Y^\bullet$，满足 $\mathrm{D}^!$ 或 !-下降，如果范畴的自然映射

$$\mathrm{D}^!(X)\to\mathrm{Tot}(\mathrm{D}^!(Y^\bullet))$$

是一个等价，其中所有过渡映射均由上 !-函子诱导。我们称 f 满足普适 $\mathrm{D}^!$ 或 !-下降，如果前述在沿任意映射$X'\to X$ 于 $\mathcal{C}$中拉回之后仍然成立。

备注 6.1.7。 普适 !-下降是一个非常强的条件。事实上，由 [Sch26b，定理 5.12]，映射 f: $Y\to X$ 于 E 中满足普适 $*$ 与 !-下降，当且仅当 f 在沿 E 中的元素 $X'\to X$ 拉回之后满足 !-下降。此外，作为 [Sch26b，定理 5.19]，中六函子扩张定理的推论，态射 f 在沿任意预层 $T\to X$ 拉回之后将满足普适 $*$与 !-下降。这曾是 [Sch26b]先前版本中普适!-下降 的原始定义。

证明这些事实需要引入可呈核范畴，但这超出了本笔记的讨论范围。我们将仅概述第 6.2 节中的标准核范畴，并介绍 [Sch26b 定理 5.12] 的一个特殊情形：当六函子形式体系是对称幺半的，即满足范畴论 Künneth 时；参见命题 6.3.7。

6.2. **核范畴、suave 与 prim 对象**。六函子形式体系的强大之处，在于考察其核范畴。

定义 6.2.1. 设 $(\mathcal{C}, E)$ 是一个几何设置，D 是定义在 $(\mathcal{C}, E)$ 上的 3-函子形式体系。设$S \in \mathcal{C}$ 并考虑 $(\mathcal{C}_E)_{/S}$ 上可取 ! 拉回映射的范畴。令 D_S 表示 D 在 $(\mathcal{C}_E)_{/S}$ 上的限制。 S 上的 核范畴 $\mathrm{K}_{\mathrm{D},S}$ 是一个 $(\infty,2)$-范畴，它通过沿着松弛对称幺半函子的富化传递得到

$$\mathrm{D}_S : \mathrm{Corr}((\mathcal{C}_E)_{/S})^{\otimes} \to \mathrm{Cat}_{\infty}^{\times}.$$

更具体地说 确切地说， S 上的核范畴是如下所述的 2-范畴 ：

(i) 它与 $(\mathcal{C}_E)_{/S}$ 具有相同的对象。(ii) 给定两个对象 $X, Y \in \mathrm{K}_{\mathrm{D},S}$，函子范畴 $\mathrm{Fun}_S(X,Y) = \mathrm{Fun}^{\mathrm{K}_{\mathrm{D},S}}(X,Y)$ 定义如下

$$\mathrm{Fun}_S(X,Y) = \mathrm{D}(Y \times_S X).$$

(iii) $\mathrm{Fun}_S(X,X) = \mathrm{D}(X \times_S X)$ 中的单位由对象 $\Delta_! 1_X$ 给出，其中 $\Delta : X \to X \times_S X$ 是对角映射。

(iv) 复合律 $\mathrm{Fun}_S(Y,Z) \times \mathrm{Fun}_S(X,Y) \to \mathrm{Fun}_S(X,Z)$ 由卷积积给出

$$\star : \mathrm{D}(Z \times_S Y) \times \mathrm{D}(Y \times_S X)$$

其中，对于 $M \in \mathrm{D}(Z \times_S Y)$ 和 $N \in \mathrm{D}(Y \times_S X)$，有

$$M \star N = \pi_{13,!}(\pi_{12}^* M \otimes \pi_{23}^* N)$$

其中 π_{ij} 是 $Z \times_S Y \times_S X$ 的投影映射。

备注 6.2.2. 核范畴的构造具有不同的函子性：一种源自改变 3-函子形式体系 D，其他则分别源自沿 $Y \to X$ 在 $\mathcal{C}$ 或 $\mathcal{C}_E$ 中的拉回和低阶 shierk 映射。一般而言，核范畴可置于 2-范畴的三函子形式体系中，即一个松对称幺半函子

$$\mathrm{K}_{\mathrm{D},-} : \mathrm{Corr}(\mathcal{C}, E)^{\otimes} \to \mathrm{Cat}_{(\infty,2)}^{\times},$$

参见 [HM24, 定理 4.2.4]。

特别地，核范畴 $\mathrm{K}_{\mathrm{D},S}$ 自然带有对称幺半 2-范畴结构，而二函子

$$\Psi : \mathrm{K}_{\mathrm{D},S} \to \mathrm{Cat}_{\infty,/\mathrm{D}(S)}^{\times}$$

由 $\mathrm{Fun}_S(S, -)$ 给出，是松弛对称幺半的。

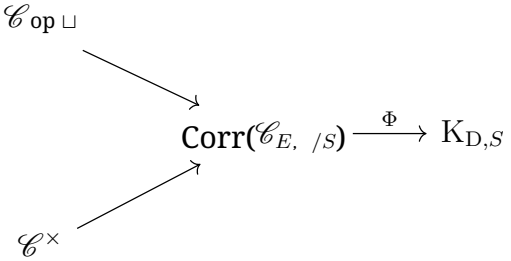
备注 6.2.3： 有 一个由富化的转移所产生的自然对称幺半函子 t

$$\Phi : \mathrm{Corr}((\mathcal{C}_E)_{/S}) \to \mathrm{K}_{\mathrm{D},S}$$

从 S 上的对应范畴（在这种情况下，它不过是一个跨度范畴）到核范畴。它在对象上是恒等映射，并将一个对应 $X \xleftarrow{f} Z \xrightarrow{g} Y$ 送到态射 $(g,f)_! 1_Z \in \mathrm{D}(Y \times_S X) = \mathrm{Fun}_S(X,Y)$，其中 $(g,f) : Z \to Y \times_S X$ 是图。特别地，由于对应范畴中的任意对象都是自对偶的，$\mathrm{K}_{\mathrm{D},S}$ 中的所有对象也都是自对偶的。这产生了一个自然的二范畴反自同构 $\mathrm{K}^{\mathrm{op}}{}_{\mathrm{D}\,S} = \mathrm{K}_{\mathrm{D},S}$，将 $X \mapsto \mathrm{Mor}_S(X,S) = X$ 送至。

这一技术性观察在实践中非常有用，也解释了为何许多非交换环（其模范畴通过（解析）叠上的拟凝聚层构造而来）会自然地带有一个差一个扭曲的反自同构（例如群的分布代数、包络代数或微分算子代数）。

记号 6.2.4。 设 $(\mathscr{C}, E)$ 是一个具有纤维积的几何设置，D 是 $(\mathscr{C}, E)$ 上的一个 3-函子形式体系，且 $S \in \mathscr{C}$。我们有如下对称幺半范畴图表



为方便记号，我们将上复合记为 $[-]^*\colon \mathscr{C}_{\mathrm{op}} \to \mathrm{K}_{\mathrm{D},\ S}$ 将下复合记为 $[-]_!\colon \mathscr{C} \to \mathrm{K}_{\mathrm{D},\ S}$。根据对应范畴的自然反对合，映射 $[-]^*$ 和 $[-]_!$ 在 $\mathrm{K}_{\mathrm{D},\ S}$中互为对偶。给定 $X \in \mathscr{C}_{E,\ /S}$ 我们将分别记它们经由 $[-]^*$ 和 $[-]_!$ 在 $\mathrm{K}_{\mathrm{D},\ S}$ 中的像为 $[X]^*$ 和 $[X]_!$；若要忽略对象层面的差异，则简记为 $X = [X]^* = [X]_!$。对于 $f\colon Y \to X$ 这一 $\mathscr{C}_{E,\ /S}$中的映射，我们将映射 f 经由 $[-]_!$ 和 $[-]^*$ 得到的像分别记为 $f_!\colon Y \to X$ 和 $f^*\colon X \to Y$。

最后，若 $Y, X \to S$ 是 ! 可映射，且 $M \in \mathrm{D}(Y \times_S X) = \mathrm{Fun}_S(X, Y)$，我们用 ${}_YM_X\colon X \to Y$ 表示 $\mathrm{K}_{\mathrm{D},S}$ 中相应的映射。按照这一记号， M 是自对偶的，意即 ${}_YM_X\colon X \to Y$ 与 ${}_XM_Y\colon Y \to X$ 互为对偶；此处我们考虑的是 $M \in \mathrm{D}(X \times_S Y) = \mathrm{Fun}_S(Y, X)$。

6.2.1. ***Suave* 与 *prim* 对象。** 引入核的2-范畴的一个主要原因，是诸如庞加莱对偶和 Serre 对偶等陈述中的普适性可以很容易地用伴随来编码。围绕这一思想的主要定义如下：

定义 6.2.5。 设 $(\mathcal{C}, E)$ 是一个几何设置，且 D 是 $(\mathcal{C}, E)$ 上的一个 3-函子形式体系。令$S \in \mathcal{C}$，并令 $\mathrm{K}_{\mathrm{D},S}$ 为 S 上的核范畴。设 $f : X \to S$ 是一个 ! 可映射，且 $M \in \mathrm{D}(X)$。

(i) 对象 M 称为 f-*suave* （或者，如果根据上下文 f 已十分明确，则简称 suave），如果将其视为映射 $M\colon X \to S$in $\mathrm{K}_{\mathrm{D},\ S}$，它是一个左伴随。我们令 $\mathrm{SD}_f(M)$ 表示其右伴随，并将其称为 M 的***suave*** 对偶。(ii) 对象 M 称为 f-*prim* （或者，如果根据上下文 f 已十分明确，则简称 prim），如果将其视为映射 $M : X \to S$ in $\mathrm{K}_{\mathrm{D},\ S}$，它是一个右伴随。我们令 $\mathrm{PD}_f(1)$ 表示其左伴随，并将其称为 M 的***prim*** 对偶

下面的命题解释了 suave 对象和 prim 对象与六函子之间的关系（参见 [HM24，第 4.4 节和第 4.5] 节）：

命题 6.2.6。 沿用定义 *6.2.5* 的记号。设 $f : X \to S$ 是一个 !-***able*** 映射，且 $M \in \mathrm{D}(X)$

(1) 假设 M 是 ***suave***，并令 $\mathrm{SD}_f(M)$ 为其右伴随。则函子之间存在自然等价 $\mathrm{D}(S) \to \mathrm{D}(X)$。

$$\mathrm{SD}_f(M) \otimes f^* = \underline{\mathrm{Hom}}_X(M, f^!)$$

此外，这些等价在任意基变换 $S' \to S$ 后仍成立，$\mathrm{SD}_f(M)$ 的构造满足基变换，并且 $\mathrm{SD}_f(M)$ 也是 ***suave***，其 ***suave*** 对偶由 M 给出。特别地，$\mathrm{SD}_f(M) = f_!1_S$。

(2) 假设 M 是 ***prim***，并令 $\mathrm{PD}_f(M)$ 为其左伴随。则函子之间存在自然等价 $\mathrm{D}(X) \to \mathrm{D}(S)$

$$f_!(\mathrm{PD}_f(M) \otimes -) = f_*(\underline{\mathrm{Hom}}_X(M, -))$$

此外，这些等价在任意基变换 $S' \to S$ 后仍成立，$\mathrm{PD}_f(M)$ 的构造满足基变换，并且 $\mathrm{PD}_f(M)$ 也是 ***prim***，其 ***prim*** 对偶由 M 给出。

suave 的一个特殊情形 e 与 prim 对象是在 $M = 1$ 时，这实际上值得为其单独下定义 ：

定义 6.2.7。 设 D 是几何设置 $(\mathcal{C}, E)$ 上的一个 3-函子形式体系。若一个 !-able 映射$f: X \to S$ 满足 1 是 suave，则称其为$suave$；我们将 $\omega_f = \mathrm{SD}_f(1)$ 记作 1 的 suave 对偶，并称其为对偶化层 f。类似地，若 f 满足 1 是 prim，则称其为$prim$；我们将 $\delta_f = \mathrm{PD}_f(1)$ 记作 1 的 prim 对偶，并称其为余对偶化层 f。

Suave 对象和 prim 对象满足许多稳定性性质，这些性质可以通过伴随关系形式化地验证（例如，suave 对象在 prim 下方 ! 函子和 suave 上方 $*$ 函子下保持稳定）。它们还满足适当的下降性质：它们满足目标上的万有 $*$-下降 [HM24，引理 4.5.6]，，并满足源上的适当 suave 或 prim 下降 [HM24，引理 4.7.4]。这些一般性的下降性质非常重要，因为它们使我们能够在不同情境下将 Serre 对偶或庞加莱对偶的证明局部化为简单得多的计算；它们还有助于通过非常一般的格罗滕迪克拓扑构造解析叠，并扩展六函子形式体系中 !-可箭头的类别。

suave 对象和 prim 对象的另一个非常重要的特点是，它们有助于证明万有 $*$ 或 !-下降（参见 [HM24，引理 4.7.1 和 4.7.4]）：

命题 6.2.8。 设 $f: Y \to X$ 是一个6-函子形式体系上的!-可态射，并且该形式体系容许可数极限与余极限。设 $Y^\bullet$ 是 f 的 *Čech* 神经，并记 $f_n: Y^n \to X$。

(i) 假 设 f 是 *suave*，则 $f^!$ 保守当且仅当自然映射

$$\varinjlim_{[n]\in\Delta^{op}} f_{n,!}f_n^!1 \to 1$$

是同构。若此条件成立，则对任意基变换 $X' \to X$，该结论仍成立，并且 f 具有普适 $*$ 与 !-下降。我们称 f 满足 *suave* 下降。

(ii) 假设 f 是 *prim*，且该6-函子形式体系是稳定的。若 $f_*1_Y \in \mathrm{D}(X)$ 是一个可下降代数，则对任意基变换 $X' \to X$，这一结论仍成立，并且 f 满足普适 $*$ 与 !-下降。我们称 f 满足 *prim* 或可下降下降。

最后，我们陈述主定理，它使我们能够将六函子形式体系扩展到叠。首先需要一个定义，参见 [HM24，定义 3.4。1]

定义 6.2.9。 设 $(\mathcal{C}, E)$ 是一个几何设置，其中 $\mathcal{C}$ 是一个（本质小的）位点。称 $(\mathcal{C}, E)$ 上的六函子形式体系是层化的，如果映射

$$\mathrm{D}^*: \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Cat}_\infty$$

满足下降条件。

例 6.2.10。 (1) 第一个例子是平凡位点 $\mathcal{C}$，其覆盖由同构生成。在此情形下，Shv($\mathcal{C}$) 就是 $\mathcal{C}$ 上的预层范畴。

(2) 对解析叠理论而言，一个非常有用的例子是 D-拓扑，其覆盖由典范覆盖生成，而这些覆盖具有普适 D^* 和 $\mathrm{D}^!$-下降。注意，根据注 6.1.7，D-拓扑与 !-拓扑 完全相同；后者的覆盖是次典范的，并满足普适 !-下降。(3) 层化六函子形式体系最极端的例子是 D^*-拓扑，其覆盖由具有普适 D^*-下降的典范覆盖生成。

定理 6.2.11 ([HM24, 定理 3.4.11])。 设 $(\mathcal{C}, E)$ 是一个几何设置，使得 $\mathcal{C}$ 是一个位点。设 D 是 $(\mathcal{C}, E)$ 上的一个层化 6-函子形式体系。那么，$\mathcal{X} := \mathrm{Shv}(\mathcal{C})$ 中存在一个边的集合 E'，具有以下性质：

(i) 包含映射 $\mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{X}$ 定义了几何设置 $(\mathcal{C}, E) \to (\mathcal{X}, E')$ 之间的态射，并且 D唯一地扩张为 $(\mathcal{X}, E')$上的 6-函子形式体系。*(ii)* E' 在目标上是 $*$-局部的：设 $f: Y \to X$ 是 $\mathcal{X}$ 中的一个映射，其拉回到 $\mathcal{C}$ 中每个对象$X' \to X$ 上都属于 E'。那么 f 属于 E'。

(iii) E' 在目标和源上都是 !-局部的：设 $f\colon Y \to X$ 是 $\mathcal{X}$ 中的一个映射，若在源或目标上关于 E是 !-局部的，则 f 属于 E'。

(iv) E' 是驯顺的：每个映射 $f\colon Y \to X$，若在 E' 中且带有 $X \in \mathcal{C}$，则在源上是!-局部地属于 E。

此外，存在 E' 的一个极小选择。若假定 $\mathcal{C}$ 是超子典范[13]，则将层换成超完备层时，同样的结果仍然成立。

备注 6.2.12. 由 [HM24，引理 3.4.13]，若映射 $X \hookrightarrow X \sqcup Y$ 在 $\mathcal{C}$ 上是可取例外拉回，则定理 6.2.11 中 ! 可箭头的类在不交并下也是稳定的。

正如定理 6.2.11 所述，目标中的局部条件要求对 $\mathcal{C}$ 中的所有对象进行检验。在 D-拓扑下，只需针对一个满态射来检验这一点：

引理 6.2.13. 设 $(\mathcal{C}, E)$ 为一个几何设置，且 D 为 $(\mathcal{C}, E)$ 上的一个6-函子形式体系。赋予$\mathcal{C}$ D-拓扑，并考虑 D 到层 $\mathrm{Shv}_{\mathrm{D}}(\mathcal{C})$ 的延拓。设 $f\colon Y \to X$ 为一个映射，使得存在满态射 $X' \to X$ 位于 $\mathrm{Shv}_{\mathrm{D}}(\mathcal{C})$ 中，且拉回 $f'\colon Y' \to X'$ 是!可取例外拉回。则 f 是 !可取例外拉回。

证明。令 $Z \in \mathcal{C}$，我们要证明拉回 $f_Z\colon Y \times_X Z \to Z$ 是可取例外拉回的，并应用定理 6.2.11 (ii)。我们知道映射 $X' \to X$ 是一个满态射，因此存在 $\mathcal{C}$ 中的一个 D-覆盖 $Z' \to Z$，以及位于 X 上的一个提升 $Z' \to X'$。由于 $Z' \to Z$ 是普适 !-下降的，根据定理 6.2.11 (iii)，只需证明拉回 $Y \times_X Z' \to Z'$ 是可取例外拉回的。但这个映射也可以写成 $Y' \times_{X'} Z' \to Z'$，它是可取例外拉回的，因为类 E' 在拉回下稳定。□

6.2.2. *étale* 映射与真映射。 在 étale 映射和 prim 映射中，有一类合适的映射，其上同调行为类似于 étale 映射或真映射。令 $(\mathcal{C}, E)$ 为一个几何设置，并令 D 为 $(\mathcal{C}, E)$ 上的一个六函子形式体系。

定义 6. 2.14 ([HM24，定义 4.6.1])。 设 $f\colon Y \to X$ 是 E中的一个截断映射 .

(1) 若 Δ_f 是 étale 或同构，且 f 是 suave，则称 f 为$\acute{e}tale$。(2) 若 Δ_f 是真映射或同构，且 f 是 prim，则称 f 为真 .

备注 6.2.15。 由于定义 6.2.14 中的映射 f 是截断映射，某个迭代对角映射将成为同构。因此，当且仅当任意迭代对角映射都是 suave（分别为 prim）时，截断映射是 étale（分别为真）。

在 [HM24 的引理 4.6.3] 中，说明了 étale 映射和适当映射的一些稳定性性质：它们在基变换和复合下稳定，并满足适当的右消去性质（该文第 (i) 部分）；它们在目标上是 D^*-局部的（该文第 (ii) 部分）；并且在源上相对于 étale（分别为真）映射是 $\mathrm{D}^!$-局部的（该文第 (iii) 部分）。

最后，[HM24，引理 4.6.4] 表明，若 $f\colon Y \to X$ 是 étale（分别为真）映射，则存在预期的函子自然等价 $f^! \xrightarrow{\sim} f^*$（分别为 $f_! \xrightarrow{\sim} f_*$）。

6.2.3. 开映射与闭映射。 第 5.1.3 节中对对称幺半稳定范畴的开映射与闭映射的概念可以推广到任意六函子形式体系（另见 [Kes25，定义 3.11]）。设 $(\mathcal{C},\ E)$ 是一个几何设置，D 是定义在 $(\mathcal{C},\ E)$ 上的可呈六函子形式体系。

定义 6.2.16。 (1) E 中的态射 $f\colon Y \to X$ 称为开映射，如果它是 étale 映射且为浸入。

(2) E 中的态射 $f\colon Y \to X$ 称为闭映射，如果它是真映射且为浸入。

六函子形式体系中的开映射与闭映射满足预期的相容性（参见 [Kes25，命题 3.12]）。

[13]只要 $\mathcal{C}$ 中的可表预层和函子 D^* 满足相应的下降条件，也可以在层和超层之间进行局部化

命题 6.2.17。以下结论成立：

(1) 设 $Z \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} X$ 是 E 中的 !-*able* 映射，使得 g 是开映射（分别为闭映射）。那么，当且仅当 $g \circ f$ 是开映射（分别为闭映射）时，f 是开映射（分别为闭映射）。（*2*）设 $f\colon Y \to X$ 是 E 中的开映射（分别为闭映射），则 $f^*\colon \mathrm{D}(X) \to \mathrm{D}(Y)$ 是对称幺半范畴之间的开映射（分别为闭映射）。（*3*）设 $f\colon Y \to X$ 是开映射（分别为闭映射），设 $g\colon X' \to X$ 是 $\mathcal{C}$ 中具有基变换 $f'\colon Y' \to X'$ 的映射。那么 f' 是开映射（分别为闭映射），且自然映射

$$\mathrm{D}(X') \otimes_{\mathrm{D}(X)} \mathrm{D}(Y) \to \mathrm{D}(Y') \tag{6.2.1}$$

在 Pr^L 中是等价。

证明。(1) 根据 [HM24，引理 4.6.3 (i)]，非分歧且真映射在基变换下稳定，并满足右消去性质。浸入也具有相同性质。

(2) 我们要证明，若 f 是 étale 浸入，则 $f^*\colon \mathrm{D}(X) \to \mathrm{D}(Y)$ 是对称幺半范畴之间的开映射。由于 f 是 étale 的，f^* 有一个满足基变换的左伴随 $f_\natural$。又因为 f 是浸入，所以有 $Y = Y \times_X Y$；根据适当基变换，我们有 $f^* f_\natural =$，它们是 $\mathrm{D}(Y)$ 上的自函子。这表明 $f_\natural\colon \mathrm{D}(Y) \to \mathrm{D}(X)$ 是全忠实的，从而证明 f^* 是开浸入。对于适当映射，类似的论证也成立，只需用 f_* 替代 $f_\natural$。

(3) 浸入和 étale（分别地，真）在基变换下保持不变。因此，开映射与闭映射在基变换下保持不变。对于公式 (6.2.1) 中的 Künneth 公式，由于 f^* 是对称幺半稳定范畴之间的开映射，有

$$\mathrm{D}(Y) = \mathrm{coMod}_{f_\natural 1}\mathrm{D}(X)$$

$\sim$ $\sim$ $\mathrm{D}(Y)$ 也类似。因此，由于 $f_\natural 1 = g^* f_\natural 1$ 在基变换下成立，通过对余幂等余代数 $f_\natural 1 \in \mathrm{D}(X)$ 的局部化序列取 Lurie 张量积，即可得到 (6.2.1)。

□

6.3. **解析叠与拟凝聚6函子形式体系**。在对抽象六函子形式体系进行前期准备之后，我们终于可以引入解析叠范畴。

6.3.1. 仿射子空间上的拟凝聚六函子。令 $\mathrm{AnStk}^{\mathrm{aff}} = \mathrm{AnRing}^{\mathrm{op}}$ 为解析环的对偶范畴，我们称之为仿射解析栈。给定 A 一个解析环，令 $\mathrm{AnSpec}\, A \in \mathrm{AnStk}^{\mathrm{aff}}$ 为与 A 关联的对象，称为的解析谱。

为了定义解析叠，我们需要在解析环上选取合适的格罗滕迪克拓扑。首先，我们需要为解析环建立六函子形式体系。为此，我们应用 [HM24, 命题 3.3。3], 并定义 $\mathrm{AnStk}^{\mathrm{aff}}$ 中的箭头类 (E, I, P)，分别由仿射解析叠的可取例外拉回、开浸入和适当映射组成。

备注 6.3.1。对于抽象几何设定 $(\mathcal{C}, E)$ 的某个合适分解 (I, P)，映射类 I 和 P 未必是 HM24 定义 4.6 中意义下的真态射和 étale 态射。唯一的问题是，这些映射不一定是截断的（只有 $I \cap P$ 是截断的）。在实践中，类 I 或 P 将由截断映射构成（例如，对于解析环，I 将是 (-1)-截断的，即浸入）。

用 Scholze 和 Stefanich 的 Gestalten 语言来说，[Sch26a], 中 $\mathcal{C}$ 上的 I 和 P 中的箭头，将在与 $(\mathcal{C}, E)$ 上的六函子形式体系 D 相关联的 Gestalten 上诱导出 0-étale 和 0-适当态射。

定义 6.3.2. 设 $f\colon \mathrm{AnSpec}\ B \to \mathrm{AnSpec}\, A$ 是仿射解析栈之间的映射。

(1) 如果 $B = B_{A/}$ 具有诱导解析环结构，我们就称 f 属于类 P。

(2) 若拉回映射 $f^*\colon \mathsf{D}(A) \to \mathsf{D}(B)$ 在 smashing 谱中是开浸入，则称 f 属于类 I。(3) 若映射 $B_{A/} \to B$ 导出开浸入 $\mathsf{D}(B_{A/}) \to \mathsf{D}(B)$，则称 f 属于类 E （或称 f 是可取例外拉回的）。

下面的引　　理证明了映射类 (E, I, P 所需的稳定性性质　　):

引理 6.3.3。 设 $\mathcal{C} = \mathrm{AnStk}^{\mathrm{aff}}$。有如下结论：

(1) 映射类 I、 P 和 E 在 $\mathcal{C}$ 中给出几何设置。*(2)* 任意映射 $f \in E$ 都可写为复合映射 $p \circ i$，其中 $i \in I$ 且 $p \in P$。*(3)* I 的每个态射都是 -1-截断的，即它是单态射。*(4)* 设 $j \in I$，则拉回映射 j^* 有一个全忠实左伴随 $j_\natural$，满足投影公式和适当基变换。*(5)* 设 $p \in P$，则右伴随 p_* 满足投影公式和适当基变换。*(6)* 对每个笛卡尔图表

$$\begin{array}{ccc} U' & \xrightarrow{j'} & X' \\ \downarrow{\scriptstyle p'} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ U & \xrightarrow{j} & X \end{array}$$

在 $\mathcal{C}$ 中，若 $j \in I$ 且 $p \in P$，则自然映射 $j_\natural p'_* \xrightarrow{\sim} p_* j'_\natural$ 是一个等价。

证明。 (1). 我们需要证明注记 6.1.2 中箭头 I、 P 和 E 所满足的稳定性性质。为简便起见，我们也将解析环范畴中的箭头类称为同样的名称。

显然，这三类都包含同构。 I 和 P 这两类显然也在复合下稳定：对于 I，这是因为对称幺半范畴之间两个开浸入的复合仍是开浸入（由定理 5.1.6 可得）；对于 P 中的各类，则由诱导解析环结构的定义可得。得益于命题 4.1.14（对于开浸入）和引理 4.1.9（对于 P 中的对象），它们在任意 $\mathcal{C}$ 中箭头的基变换下也稳定。

我们来证明 E 中的类在复合下稳定。设 $A \to B$ 和 $B \to C$ 是 E 中的两个映射，则 $B_{A/} \to B$ 和 $C_{/B} \to C$ 在对称幺半范畴层面诱导出开浸入。我们要证明映射 $C_{A/} \to C$ 诱导出开浸入，但它可以写成以下复合映射

$$C_{A/} \to C_{/B} \to C,$$

第一个映射是 $B_{A/} \to B$ 沿映射 $B_{A/} \to C_{A/}$的基变换，因此它是开浸入。由前述可知， $C_{A/} \to C$ 是开浸入，这就证明了我们想要的结论。

最后，还需证明 I、 P 和 E 中的类在取对角线下是稳定的。我们从 I开始。设 $A \to B$ 是 I中的一个映射，我们要证明乘法映射m： $B \otimes_A B \to B$属于 I。但映射 $A \to B$作为解析环是幂等的，因为 B是 $A^{\triangleright}$上的一个未完备解析环结构。因此， m是一个等价，特别地属于 I。接下来，对于 P和E，只需看到：给定解析环的任意映射 $A \to B$，态射 $B \otimes_A B \to B$总具有诱导结构。这源于如下事实：一个 $B^{\triangleright} \otimes_A B^{\triangleright}$-模是 $B \otimes_A B$-完备的，当且仅当它限制到张量中出现的每一项时是 B-完备的，并且（对于从 B出发的两个映射中的任意一个）复合映射 $B \to B \otimes_A B \to B$ 是恒等映射。

(2). 这由 E 的定义显然可得。(3). 这由映射 $A \to B$ 作为解析环是幂等的这一事实显然可得。(4). 这由命题 4.1.14、投影公式以及对称幺半范畴中开浸入的开基变换得出。

(5). 这由命题 4.1.14 以及如下事实得出：对于对称幺半范畴 $\mathscr{E}$ 和交换代数 $A \in \mathrm{CAlg}(\mathscr{E})$，遗忘映射模范畴$_A(\mathscr{E}) \to \mathscr{E}$是 $\mathscr{E}$-线性的（即满足投影公式），并且沿任意 $\mathscr{E}$-线性范畴的基变换成立（[Lur17，定理 4.8.4.6]）。

(6). 由命题 4.1.14，只需证明以下事实：设 $\mathscr{E}$ 是一个稳定对称幺半范畴，$A \in \mathrm{CAlg}(\mathscr{E})$是 $\mathscr{E}$ 中的一个交换代数，$D \in \mathrm{Idem}(\mathscr{E})$是一个幂等代数。设 $\mathscr{E}(U) = \mathscr{E}/$模范畴$_D(\mathscr{E})$是它的开局部化。考虑如下对称幺半范畴的交换图表

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{E} & \xrightarrow{j^*} & \mathscr{E}(U) \\ \downarrow{\scriptstyle f^*} & & \downarrow{\scriptstyle f'^{,*}} \\ \mathrm{Mod}_A(\mathscr{E}) & \xrightarrow{j'^{,*}} & \mathrm{Mod}_A(\mathscr{E}(U)). \end{array}$$

令 f_*和 f'_*分别为 f^*和 $f'^{,*}$的右伴随；类似地，令 $j_\natural$和 $j'_\natural$分别为 j^* 和 $j'^{,*}$ 的左伴随。那么自然态射

$$j_\natural f'_* \xrightarrow{\sim} f_* j'_\natural$$

是一个等价。这形式上可由以下事实推出：态射 $j_\natural$ 由 $j_\natural j^* M = \mathrm{fib}(1 \to D) \otimes M$给出，其中 $M \in \mathscr{E}$；而态射 $j'_\natural$由 $j'_\natural j'^{,*} N = (\mathrm{fib}(A \to A \otimes D)) \otimes_A N$给出，其中 $N \in$ 模范畴$_A(\mathscr{E})$。事实上，相对张量积的结合律产生自然等价

$$\mathrm{fib}(1 \to D) \otimes_A N \xrightarrow{\sim} \mathrm{fib}(A \to A \otimes D) \otimes_A N$$

对于 $N \in$ 模范畴$_A(\mathscr{E})$。 □

推论 6.3.4. 令 $\mathcal{C} = \mathrm{AnStk}^{\mathrm{aff}}$ 为仿射解析栈范畴，并令 E 为定义 *6.3.2* 中 $\mathcal{C}$ 的!-***able*** 箭头类。那么存在一个将 $\mathrm{D}\colon \mathrm{AnStk}^{\mathrm{aff},\mathrm{op}} \to \mathrm{Pr}^L$ 提升为可呈示六函子形式体系的提升（若在2-范畴意义下构造，则唯一）

$$\mathrm{D}\colon \mathrm{Corr}(\mathcal{C}, E)^{\otimes} \to \mathrm{Pr}^{L,\otimes}$$

其中，对于 $j \in I$，有 $j_! = j_\natural$；对于 $p \in P$，有 $p_! = p_*$。

证明。六函子形式体系的构造由 [HM24，命题 3.3.3]得出，其中所有必要条件均在引理 6.3.3 中得到验证；唯一性则由 [CLL25，定理 A]得出，方法是将对应范畴提升为 2-范畴。 □

下面的引理将带有诱导解析环结构的仿射解析栈之间的 suave 映射刻画出来。

引理 6.3.5. 设 $f\colon A \to B$ 是一个带有平凡解析环结构的解析环态射。当且仅当 B 作为凝聚 A-模可对偶时，f 是 ***suave***。

证明. 映射 f 是 prim，并带有诱导解析环结构。该引理是 [HM24, 引理 4.5.10] 的一个特例。□

得益于命题 4.1.14 的保余极限性质，我们得出核范畴的如下全忠实性：

引理 6.3.6. 设 $(\mathcal{C}, E)$ 是一个几何设置，并设 $\mathrm{D}\colon \mathrm{Corr}(\mathcal{C}, E) \to \mathrm{Pr}^L$ 是一个可呈六函子形式体系。假设 $\mathrm{D}\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{CAlg}(\mathrm{Pr}^L)$ 满足范畴化 ***Künneth*** 公式，即它与推出相交换。设 $S \in \mathcal{C}$，则自然的松对称幺半函子

$$\Psi\colon \mathrm{K}_{\mathrm{D},S} \to \mathrm{Pr}^L_{\mathrm{D}(S)}$$

是对称幺半的且 2-全忠实（关于对称幺半结构的讨论，参见备注 *6.2.2* 和 *6.2.3*）。特别地，这对 $\mathcal{C} = \mathrm{AnStk}^{\mathrm{aff}}$ 成立。

证明。设 $X, Y \to S$ 是 S 上可取例外拉回的对象。由范畴化 Künneth 公式，函子 $\mathrm{D}\colon \mathrm{Corr}((\mathcal{C}_E)_{/S}) \to \mathrm{Pr}^L_{\mathrm{D}(S)}$ 是对称幺半的，这意味着 $\mathrm{D}(Y \times_S X) = \mathrm{D}(Y) \otimes_{\mathrm{D}(S)} \mathrm{D}(X)$。另一方面，$X \in \mathrm{Corr}((\mathcal{C}_E)_{/S})$ 中的对象由 [HM24，命题 2.3.9]，自然地是自对偶的，这使得范畴 $\mathrm{D}(Y)$ 和 $\mathrm{D}(X)$ 在 $\mathrm{Pr}^L_{\mathrm{D}(S)}$ 中自然地自对偶。根据 [HM24，命题 2.3.9] 以及这些函子分别由图表 $X = X \to S$ 和 $S \leftarrow X = X$ 所定义，这种对偶性会交换下方的 ! 与上方的 $*$-函子。由于函子 $\Phi\colon \mathrm{Corr}((\mathcal{C}_E)_{/S}) \to \mathrm{K}_{\mathrm{D},S}$ 是对称幺半的、本质满射的，且其与松弛对称幺半函子 $\Psi\colon \mathrm{K}_{\mathrm{D},S} \to \mathrm{Pr}^L_{\mathrm{D}(S)}$ 的复合映射也为对称幺半的，因此可得 Ψ 也是对称幺半的。

另一方面，根据定义，从 X 到 Y 在 $\mathrm{K}_{\mathrm{D},\,S}$ 中的态射范畴由下式给出

$$\mathrm{Fun}_S(X, Y) = \mathrm{D}(Y \times_S X).$$

那么，2-范畴的态射 Ψ 给出了范畴的自然态射

$$\mathrm{D}(Y \times_S X) \to \mathrm{Fun}_{\mathrm{D}(S)}(\mathrm{D}(X), \mathrm{D}(Y)). \tag{6.3.1}$$

(6.3.1) 中的范畴等价随即由 X 和 $\mathrm{D}(X)$ 分别在 $\mathrm{K}_{\mathrm{D},\,S}$ 及 $\mathrm{Pr}^L_{\mathrm{D}(S)}$ 中的自然自对偶性，以及范畴化 Künneth 公式得到。□

6.3.2. !-下降。构造出仿射解析栈的六函子后，我们将研究其 D-拓扑，它将作为解析叠理论所选用的拓扑。借助引理 6.3.6，可以对 D-覆盖给出一个更简单的刻画。

设 $(\mathcal{C},\ E)$ 是一个几何设置，其中 $\mathcal{C}$ 是具有有限极限的范畴。设 D 是定义在 $(\mathcal{C},\ E)$ 上的可呈 6-函子形式体系。以下命题是 [Sch26b, 定理 5.12] 的一个特例，其中我们假设范畴化 Künneth 公式成立。

命题 6.3.7. 设 $(\mathcal{C},\ E)$ 和 D 如前，并假设 D 满足范畴化 *Künneth* 公式。设 $\{Y_i \to X\}_i$ 是 $\mathcal{C}$ 上任意一族可进行 *!*-运算的态射，并设 $Y_\bullet \to X$ 是 $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ 中 $\bigsqcup_i Y_i \to X$ 的 *Čech* 神经。那么以下条件等价：

(a) 族 $\{Y_i \to X\}$ 满足普适 D^* 和 $D^!$-下降。*(b)* 自然映射 $D(X) \to Tot(D^!(Y_\bullet))$ 是范畴等价，其中过渡映射由上 *!*-映射给出。*(c)* 自然映射 $\lim_{[n]\in\Delta^{\mathrm{op}}} D_!(Y_\bullet) \xrightarrow{\sim} D(X)$ 是 $Pr^L_{\mathrm{D}(X)}$ 中的等价，其中过渡映射由下 *!*-映射给出。*(d)* 2-范畴 $Pr^L_{\mathrm{D}(X)} \to Tot(Pr^L_{\mathrm{D}(Y_\bullet)})$ 的自然映射是等价；此处过渡映射由沿增广余单纯代数 $D(X) \to D(Y_\bullet)$ 在 Pr^L 中的基变换给出。*(e)* 2-范畴 $Pr^L_{\mathrm{D}(X)} \to Tot(Pr^L_{\mathrm{D}(Y_\bullet)})$ 的自然映射是全忠实的。

特别地，该命题对 $\mathcal{C} = \mathrm{AnStk}^{\mathrm{aff}}$ 成立。

备注 6.3.8。命题 6.3.7 是一个重要实例，展现了六函子形式体系的抽象理论如何用于构造解析叠。可以将此引理视为 Mathew [Mat16] 关于可下降代数映射这一概念的推广。

证明。为简化记号，我们假设 $\{Y_i \to X\}$ 由单个映射 $Y \to X$ 组成（一般情形下证明中的论证相同）。为了证明命题 6.3.7，我们需要一个关于满足 Künneth 公式的六函子形式体系所产生的线性范畴之间伴随的关键事实。不失一般性，我们可以假设 $C = (C_E)_{/S}$。由于六函子形式体系 $\mathrm{D}\colon \mathrm{Corr}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Pr}^L_{\mathrm{D}(S)}$ 是对称幺半的，对于 $f\colon X \to S$ 一个可取例外拉回映射，该范畴 $\mathrm{D}(X) \in \mathrm{Pr}^L_{\mathrm{D}(S)}$ 自然地是自对偶的。我们有一个拉回函子 $f^*\colon \mathrm{Pr}^L_{\mathrm{D}(S)} \to \mathrm{Pr}^L_{\mathrm{D}(X)}$，它不过是相对于 Lurie 张量积沿 $\mathrm{D}(S) \to \mathrm{D}(X)$ 的基变换。这个

函子有一个右伴随 f_*，它正是遗忘函子 $f_*\colon \mathbf{Pr}^L_{\mathrm{D}(X)} = \text{模范畴}_{\mathrm{D}(X)}(\mathbf{Pr}^L_{\mathrm{D}(S)}) \to \mathbf{Pr}^L_{\mathrm{D}(S)}$。由于 $\mathbf{D}(X)$ 可对偶，f^* 也有一个左伴随 $f_!$，满足

$$\begin{aligned}\mathrm{Fun}_{\mathrm{D}(S)}(f_!M, N) &= \mathrm{Fun}_{\mathrm{D}(X)}(M, \mathrm{D}(X) \otimes_{\mathrm{D}(S)} N)\\ &= \mathrm{Fun}_{\mathrm{D}(X)}(M, \mathrm{Fun}_{\mathrm{D}(S)}(\mathrm{D}(X), N))\\ &= \mathrm{Fun}_{\mathrm{D}(S)}(\mathrm{D}(X) \otimes_{\mathrm{D}(X)} M, N)\\ &= \mathrm{Fun}_{\mathrm{D}(S)}(M, N),\end{aligned}$$

对于 $M \in \mathbf{Pr}^L_{\mathrm{D}(X)}$ 和 $N \in \mathbf{Pr}^L_{\mathrm{D}(S)}$，其中在第二个等价中，我们用到了 $\mathbf{D}(X)$ 的自对偶性。这表明 $f_! = f_*$，即 f_* 既是 f^* 的左伴随，也是其右伴随。

现在我们来证明这个命题。

(a) 蕴含 (b) 由 !-下降的定义显然可知。对于 (b) 蕴含 (c)，注意，在取右伴随后，$\mathbf{Pr}^L_{\mathrm{D}(X)}$ 中的余极限可计算为 $\mathbf{Pr}^R_{\mathrm{D}(X)}$ 中的极限，而这些极限正是通过底层范畴中的极限计算的。对于 (c) 蕴含 (d)，设 $f_\bullet\colon Y_\bullet \to X$ 为 $Y \to X$ 的 Čech 神经。拉回函子

$$\mathrm{Tot}(f_\bullet^*)\colon \mathrm{Pr}^L_{\mathrm{D}(X)} \to \mathrm{Tot}(\mathrm{Pr}^L_{\mathrm{D}(Y_\bullet)})$$

与每个单独的函子 $\mathbf{Pr}^L_{\mathrm{D}(X)} \to \mathbf{Pr}^L_{\mathrm{D}(Y_\bullet)}$ 一样，同时具有左伴随和右伴随。右伴随将余笛卡尔截面 $M_\bullet$ 送到 $\mathbf{Tot}(f_{\bullet,*}M_\bullet)$，而左伴随将 $M_\bullet$ 送到 $\mathbf{lim}_{\longrightarrow_{[n]\in\Delta^{\mathrm{op}}}} f_{\bullet,*}M_\bullet$。要证明 $\mathbf{Tot}(f_\bullet^*)$ 是一个等价，只需证明这些伴随中的某些伴随的单位和余单位是同构。

关于全忠实性，令 $N \in \mathbf{Pr}^L_{\mathrm{D}(X)}$，我们希望证明自然映射

$$N \to \mathrm{Tot}(f_{\bullet,*}f_\bullet^* N)$$

是一个等价。右侧的极限也可以写成

$$\begin{aligned}\mathrm{Tot}(f_{\bullet,*}f_\bullet^* N) &= \mathrm{Tot}(\mathrm{D}(X_\bullet) \otimes_{\mathrm{D}(X)} N)\\ &= \mathrm{Tot}\left(\mathrm{Fun}_{\mathrm{D}(X)}(\mathrm{D}(Y_\bullet), N)\right))\\ &= \mathrm{Fun}_{\mathrm{D}(X)}(\varinjlim_{[n]\in\Delta^{\mathrm{op}}} \mathrm{D}_!(Y_n), N)\\ &= \mathrm{Fun}_{\mathrm{D}(X)}(\mathrm{D}(X), N)\\ &= M\end{aligned}$$

其中，在第二个等价中，我们使用了 $\mathbf{D}(Y_\bullet)$ 作为 $\mathbf{D}(X)$-模的自对偶性；在第三个等价中，我们使用了 $*$-拉回映射的对偶恰好是下方 ! 映射；在第四个等价中，使用了条件 (c)。这证明了函子 $\mathbf{Tot}(f_\bullet^*)$ 是全忠实的。现在我们来证明它是一个等价。为此，令 $M_\bullet$ 是 $\mathbf{Tot}(\mathbf{Pr}^L_{\mathrm{D}(Y_\bullet)})$ 中的一个余笛卡尔截面，我们希望证明自然映射

$$\mathrm{D}(Y_n) \otimes_{\mathrm{D}(X)} \mathrm{Tot}(M_\bullet) \to M_n$$

对于所有 $[n] \in \Delta$ 都是一个等价。为证明这一点，请注意

$$\begin{aligned}\mathrm{D}(Y_n) \otimes_{\mathrm{D}(X)} \mathrm{Tot}(M_\bullet) &= \mathrm{Tot}\left(\mathrm{D}(Y_n) \otimes_{\mathrm{D}(X)} M_\bullet\right)\\ &= \mathrm{Tot}(M_{\bullet+n+1})\\ &= M_n\end{aligned}$$

其中，第一个等价用到了 $\mathbf{D}(Y_n)$ 在 $\mathbf{D}(X)$ 上可对偶，第二个用到了图表 $M_\bullet$ 是余笛卡尔的，且由 Künneth 公式可得 $\mathbf{D}(Y_\bullet) \otimes_{\mathrm{D}(X)} \mathbf{D}(Y_n) = \mathbf{D}(Y_{\bullet+n+1})$，最后一个则用到了 $M_{\bullet+n+1}$ 是分裂的，且对所有 $n \geq 0$，其极限为 M_n。

蕴含关系 (d) ⇒ (e) 显而易见。最后，我们证明 (e) 蕴含 (a)。为此，请注意，单位（由将 f_* 视为 f^* 的右伴随而来）

$$\mathrm{D}(X) \to \mathrm{Tot}(\mathrm{D}(X_\bullet))$$

是等价的，当且仅当满足 D^*-下降。类似地，余单位（由将 f_* 视为 f^* 的左伴随而得）

$$\varinjlim_{[n]\in\Delta} \mathrm{D}(X_\bullet) \to \mathrm{D}(X)$$

等价于 $\mathrm{D}^!$-下降（此映射由对 $*$-拉回映射取对偶而得，这些映射恰好是下方 ! 映射）。条件 (d) 蕴含 $X_\bullet \to X$ 的 D^* 和 $\mathrm{D}^!$-下降。对于普遍的 $*$ 和 !-下降，只需注意，若 $\mathrm{D}(X) \to \mathscr{E}$ 是对称幺半映射，则 $\mathscr{E} \to \mathrm{D}(X_\bullet) \otimes_{\mathrm{D}(X)} \mathscr{E}$ 在关于线性范畴的层面上也满足下降。将此应用于 $\mathcal{C}$ 上任意预堆的 $\mathrm{D}(X) \to \mathrm{D}(Y)$，并利用范畴化 Künneth 公式得知 $\mathrm{D}(X_\bullet) \otimes_{\mathrm{D}(X)} \mathrm{D}(Y) = \mathrm{D}(X_\bullet \times_X Y)$，即可推出所需的普遍 D^* 和 $\mathrm{D}^!$-下降。□

定义 6.3.9. 设 $(\mathcal{C}, E)$ 为一个几何设置，且 D 是定义在 $(\mathcal{C}, E)$ 上、如命题 6.3.7 中所述的六函子形式体系。根据同上。 态射 $f\colon Y \to X$ in $\mathcal{C}$ 是 D-覆盖，当且仅当它是次典范覆盖并满足 !-下降。 $\mathcal{C}$ 上的 !-拓扑 是由以下覆盖生成的格罗滕迪克拓扑：由 !-可映射 $\{f_i\colon Y_i \to X\}_{i\in I}$ 构成的任意族，这些映射是次典范覆盖且满足 !-下降。

下面的引理表明，在范畴 $\mathrm{D}(X)$（ $X \in \mathcal{C}$）满足某些拟紧条件时，!-拓扑是有限型的。

引理 6.3.10. 设 $(\mathcal{C}, E)$ 和 D 同前。假设对所有 $X \in \mathcal{C}$，单位 $1_X \in \mathrm{D}(X)$ 都是紧对象。则若 $\{f_i\colon Y_i \to X\}_I$ 是满足 !-下降的 !-可态射族，则存在一个有限子族 $\{f_i\colon Y_i \to X\}_{i\in J}$（其中 $I \subset J$ 是有限子集），同样满足 !-下降。

证明。令 $\mathrm{D}_!\colon \mathcal{C}_{E,/X} \to \mathrm{Pr}^L_{\mathrm{D}(X)}$ 为由下 !-映射给出的函子，我们用相同的方式表示其在预层上的延拓。令 $\{Y_I^\bullet\}_{\Delta_I^{\mathrm{op}}}$ 为 $\{f_i\colon Y_i \to X\}$ 的 Čech 神经（参见 HM24，定义 A.4.5]），我们知道，由下 !-函子诱导的自然映射 $f_{I,!}\colon \mathrm{D}_!(|Y_I^\bullet|) \xrightarrow{\sim} \mathrm{D}(X)$ 是等价。对于有限子集 $J \subset I$，令 $Y_J^\bullet$ 为 $\{f_i\colon Y_i \to I\}_{i\in J}$ 的 Čech 神经。我们想证明，存在某个有限子集 $J \subset I$，使得自然映射 $f_{J,!}\colon \mathrm{D}_!(|Y_J^\bullet|) \to \mathrm{D}(X)$ 是等价。我们可以将 $\mathrm{D}_I(|Y_I^\bullet|) = \varinjlim_{J\subset I} \mathrm{D}_!(|Y_J^\bullet|)$ 写作 $\mathrm{Pr}^L_{\mathrm{D}(X)}$ 中的对象，因此有 $1_X = \varinjlim_J f_{J,!}f^!_J 1_X$，其中 $f^!_J\colon \mathrm{D}(X) \to \mathrm{D}_!(|Y_J^\bullet|)$ 是 $f_{J,!}$ 的右伴随函子。由于 1_X 是紧对象，存在某个有限的 J，使得 1_X 是 $f_{J,!}f^!_J 1 \in \mathrm{D}(X)$ 的 retract。因此，元素 $f^!_J 1_X \in \mathrm{D}_!(|Y_J^\bullet|)$ 给出 $\mathrm{Pr}^L_{\mathrm{D}(X)}$ 中的映射 $h\colon \mathrm{D}(X) \to \mathrm{D}_!(|Y_J^\bullet|)$，它与下 !-映射 $f_{J,!} \circ h$ 的复合是 $\mathrm{D}(X)$ 的一个线性自函子，并且恒等映射是它的 retract。换言之，$\mathrm{D}(X)$ 是范畴 $\mathrm{D}_!(|Y_J^\bullet|)$ 的一个 2-撤回。

现在，证明的其余部分与 [Sch26a 的命题 8.11] 完全相同（实际上是其一个特例）。由范畴论 Künneth 可知，$\mathrm{D}_!(|Y_J^\bullet|)$ 也是映射 $\{\mathrm{D}(Y_i) \to \mathrm{D}(X)\}_{i\in J}$ 的 Čech 余神经，因此 $\mathrm{D}_!(|Y_J^\bullet|) \to \mathrm{D}(X)$ 是 $\mathrm{Pr}^L_{\mathrm{D}(X)}$ 中的余幂等余代数。由于 $\mathrm{D}(X)$ 是 $\mathrm{D}_!(|Y_J^\bullet|)$ 的一个 2-撤回， [Sch26a 的引理 8.13] 推出 $\mathrm{D}(X)$ 属于由 $\mathrm{D}(|Y_J^\bullet|)$ 生成的 Pr^L-线性范畴。考虑到 $\mathrm{D}(X)$-线性性，并利用 $\mathrm{D}(|Y_J^\bullet|)$ 是余幂等的，这意味着 $\mathrm{D}(X)$ 也是 $\mathrm{D}(|Y_J^\bullet|)$ 的一个余模，即 $\mathrm{D}(|Y_J^\bullet|) \otimes_{\mathrm{D}(X)} \mathrm{D}(X) = \mathrm{D}(X)$，从而如所需，$\mathrm{D}(|Y_J^\bullet|) = \mathrm{D}(X)$。□

6.3.3. !-等价。在定义 6.3.9 中，我们看到，在满足范畴论 Kunneth 公式的六函子形式体系中，D 与 !-拓扑是相同的。借助定理 6.2.11，我们可以将 D 延拓为 $\mathcal{C}$ 上关于 !-拓扑的层范畴中的六函子形式体系。然而，该定义

解析叠在 [CS24] 中的，涉及一个介于 !-层与 !-超层之间的额外局部化。这一额外局部化实际上颇为微妙；特别是，前引处的定义需要一处修正，我们将在本段中加以说明（这一修正是 Scholze 在作者撰写论文 *Fargues-Fontaine* 曲线上的德拉姆叠 [ABLB+25] 时向作者解释的）。

设 $\mathcal{C}$ 是一个具有有限极限和终对象 $*$ 的（小）范畴，并令 $\mathcal{P}(\mathcal{C}) = \mathrm{PShv}(\mathcal{C}, \mathrm{Ani})$ 为 $\mathcal{C}$ 上 anima 的预层范畴。设 $(\mathcal{C}, E)$ 是 $\mathcal{C}$ 中的一个几何设置，且 $\mathrm{D} : \mathrm{Corr}(\mathcal{C}, E) \to \mathrm{Pr}^L$ 是 $(\mathcal{C}, E)$ 上满足范畴化 Künneth 公式的可呈六函子形式体系。假设 $\mathcal{C}$ 具有有限不交并，且 $* \to * \sqcup *$ 是可取例外拉回的。令 $\mathcal{C}_E$ 为 $\mathcal{C}$ 的非满宽子范畴，由 E 中的箭头张成。考虑函子 $\mathrm{D}^!\colon \mathcal{C}_E^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Pr}^R$ 及其到 $\mathcal{P}(\mathcal{C}_E)$ 的右 Kan 延拓。我们还将 $\mathrm{D}_!\colon \mathcal{P}(\mathcal{C}_E) \to \mathrm{Pr}^L$ 记作由下 !-映射给出的函子在 $\mathcal{C}_E$ 上的左 Kan 延拓（这不过是 $\mathrm{D}^!$ 在等价 $\mathrm{Pr}^{L,\mathrm{op}} = \mathrm{Pr}^R$ 下的反函子）。我们对 $(\mathcal{C}, E)$ 作如下假设；该假设在解析环的情形下成立：

假设 6.3.11。 设 I 为一个范畴，$I^{\triangleright}$ 为其终对象为 $\emptyset$ 的右锥。设 $X_\bullet\colon I^{\triangleright} \to \mathcal{C}$ 为 $\mathcal{C}$ 中的一个图表，使得自然映射

$$\mathrm{D}(X_\emptyset) \to \varprojlim_{i \in I^{\mathrm{op}}} \mathrm{D}^*(X_i)$$

是一个等价，其中过渡映射由拉回映射给出。则对所有 $Y \in \mathcal{C}$，自然映射

$$\mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(X_\emptyset, Y) \to \varprojlim_{i \in I^{\mathrm{op}}} \mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(X_i, Y)$$

是一个等价。

备注 6.3.12。 假设 6.3.11 有助于简化一族映射 $\{f_i\colon Y_i \to X\}$ in $\mathcal{C}_E$ 成为 D-覆盖的条件。事实上，它是一个 D-覆盖，当且仅当它满足普适 D^* 和 $\mathrm{D}^!$-下降，即同上。 告诉我们，D^*-下降已蕴含它是一个子规范覆盖。由于 D 按构造满足范畴 Kunneth 性质，命题 6.3.7 蕴含 $\{f_i\}$ 是一个 D-覆盖，当且仅当它满足 !-下降。

定义 6.3.13。 假设假设 6.3.11 成立。 $\mathcal{P}(\mathcal{C}_E)$ 中的一个映射 $f\colon Y \to X$ 若对于 $\mathcal{P}(\mathcal{C}_E)$ 中 f 的任意迭代对角映射的任意拉回，经由 $\widetilde{\mathrm{D}^!}$ 映为一个等价，则称为 !-等价。我们令 $\mathrm{Shv}(\mathcal{C}_E) \subset \mathcal{P}(\mathcal{C}_E)$ 表示满足以下条件的对象 $\mathscr{F}$ 所构成的全子范畴：对于 $\mathcal{P}(\mathcal{C}_E)$ 中任意 $\aleph_1$- 紧对象[14] !- 等价 $Y \to X$，映射 $\mathscr{F}(X) \to \mathscr{F}(Y)$ 是一个等价。

引理 6.3.14。令 $(\mathcal{C}, E)$ 如前。令 $\{f_i\colon Y_i \to X\}$ 为 $\mathcal{C}$ 中满足 *!*-下降的 *!*-可取例外拉回映射族，并令 $\mathcal{P}(\mathcal{C}_E) \subset \mathcal{P}(\mathcal{C})$ 中由 f_i 的像定义的子对象为 $X' \subset X$。则 $f\colon X' \to X$ 是一个 *!*-等价。反之，$\mathcal{P}(\mathcal{C}_E)$ 中的任意 *!*-等价对于 $\widetilde{}$ *!*-拓扑都是 ∞-连通的，特别地，我们有嵌入 $\mathrm{Shv}(\mathcal{C}_E) \subset \mathrm{Shv}(\mathcal{C}_E) \subset \mathrm{Shv}(\mathcal{C}_E)$。

证明。 对于第一个断言，注意到 f 的迭代对角映射都是同构，因此只需证明它在 $\mathcal{P}(\mathcal{C})$中经过任意拉回并应用函子 $\mathrm{D}^!$后仍产生同构；这由命题 6.3.7 得出。对于第二个断言，由于 !-等价的对角映射仍是 !-等价，要证明它是 ∞-连通的，只需证明它关于 !-拓扑是满射的（也就是说，在一个 topoi 中，∞-连通映射与所有对角映射都是满态射的映射相同）。设 $f\colon Y \to X$ 是一个 !-等价。为了证明它是满态射，我们可以在 X中局部化，因此可以假设 $X \in \mathcal{C}_E$。接着，我们可以将 $Y = \varinjlim_i Y_i$ 写成$\mathcal{C}_E$中的对象的余极限 $/X$。于是，根据假设，$\mathrm{D}(X) = \varprojlim_i \mathrm{D}^!(Y_i)$，沿上 !-映射，或者

[14]这个条件意味着，预层的映射 $f\colon Y \to X$ 是 $\aleph_1$-紧对象；也就是说，沿着 $X' \to X$ 与 $X' \in \mathcal{C}_E$ 拉回时，对象 $Y \times_X X'$ 是可表预层的可数余极限。$\aleph_1$ 的选择是任意的，任何不可数基数都可以满足要求；不过在实践中，以及在凝聚数学的轻量设定下，它是一个足够大且非常方便的基数。

等价地，$\mathrm{D}(X) = \varinjlim_i \mathrm{D}_!(Y_i)$ 在 $\mathbf{Pr}^L$ 中。我们断言，映射族 $\{f_i\colon Y_i \to X\}$ 是一个 !-覆盖，这将推出 $Y \to X$ 是 !-拓扑中的满态射，正如所需。为证明最后这个断言，设$\{Y^\bullet\}_{\Delta_I^{\mathrm{op}}}$ 是 $\{f_i\}_i$ 的 Čech 神经（参见 [HM24，定义 A.4.5]）。我们要证明自然映射

$$\mathrm{D}_!(|Y^\bullet|) = \varinjlim_{\Delta_I^{\mathrm{op}}} \mathrm{D}_!(Y^\bullet) \to \mathrm{D}(X)$$

是 $\mathbf{Pr}^L$ 中的一个等价（或等价地，$\mathrm{D}(X) = \varprojlim_{\Delta_I} \mathrm{D}(Y^\bullet)$）。由于 $\mathrm{D}_!(Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{D}(X)$，且 $\mathrm{D}_!$沿目标属于 $\mathcal{C}$ 的映射满足基变换（由 Künneth），我们得到

$$\begin{aligned}\mathrm{D}_!(|Y^\bullet|) = \mathrm{D}_!(|Y^\bullet|) \otimes_{\mathrm{D}(X)} \mathrm{D}_!(Y) &= \mathrm{D}_!(|Y^\bullet| \times_X Y) \\ &= \varinjlim_i \mathrm{D}_!(|Y^\bullet| \times_X Y_i) \\ &= \varinjlim_i \mathrm{D}_!(Y_i) \\ &= \mathrm{D}(X)\end{aligned}$$

其中，在第三个等价中，我们用到了 $Y^\bullet \times_X Y_i$ 是分裂的且其余极限为 Y_i。这证明了该引理。□

推论6.3.15. 设$(\mathcal{C}, E)$ 如前。则$\widetilde{\mathrm{Shv}}(\mathcal{C}_E)$ 是一个 ∞-*topoi*。此外，$\widetilde{\mathrm{Shv}}(\mathcal{C}_E)$ 是$\mathrm{Shv}(\mathcal{C}_E)$ 在 [Lur09，定义6.5.2.17]意义下的余拓扑局部化。

证明。 $\widetilde{\mathrm{Shv}}(\mathcal{C}_E)$ 是一个 ∞-topoi 这一事实由 [ABFJ22，定理4.3.3] 以及 !-等价类按定义在对角线与拉回下稳定这一事实推出。它是余拓扑局部化这一事实源于：它是通过对层将一类 ∞-连通对象取逆而得到的。□

该函子 $\mathcal{C}_E \to \mathcal{C}$ 将 !-覆盖映射为 !-覆盖，通过左 Kan 延拓，在 topoi $\widetilde{\mathrm{Shv}}(\mathcal{C}_E) \to \widetilde{\mathrm{Shv}}(\mathcal{C})$ 的层面上得到一个左正合且保余极限的函子。

定义 6.3.16。 令 $(\mathcal{C},\ E)$ 和 D 如前所述。我们将范畴 $\widetilde{\mathrm{Shv}}(\mathcal{C}) \subset \widetilde{\mathrm{Shv}}(\mathcal{C})$ 定义为层的全子范畴：其限制到 $\mathcal{C}_E$ 后将 !-等价映射为等价。

备注 6.3.17。 让我们在 $\mathbf{Pr}^L$ 中以更高阶代数的术语解释一种理解 Shv 的替代方式。我们有一列 ∞-topoi 的几何映射

$$\widehat{\mathrm{Shv}}(\mathcal{C}_E) \xrightarrow{g_*} \widetilde{\mathrm{Shv}}(\mathcal{C}_E) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Shv}(\mathcal{C}_E),$$

其中 $\widehat{\mathrm{Shv}}(\mathcal{C}_E)$ 是 $\mathcal{C}$ 上的超层范畴，其左伴随在 $\mathbf{Pr}^L$ 中产生代数的幂等映射（幺半群结构由笛卡尔结构给出）

$$\mathrm{Shv}(\mathcal{C}_E) \to \widetilde{\mathrm{Shv}}(\mathcal{C}_E) \to \widehat{\mathrm{Shv}}(\mathcal{C}_E).$$

我们还有 topoi 的一个几何态射 $h_*\colon \widetilde{\mathrm{Shv}}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Shv}(\mathcal{C}_E)$，它产生拉回函子$h^*\colon \mathrm{Shv}(\mathcal{C}_E) \to \widetilde{\mathrm{Shv}}(\mathcal{C})$。于是，topoi 的自然映射

$$\mathrm{Shv}(\mathcal{C}) \otimes_{\mathrm{Shv}(\mathcal{C}_E)} \widetilde{\mathrm{Shv}}(\mathcal{C}_E) \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathrm{Shv}}(\mathcal{C}) \text{ and } \mathrm{Shv}(\mathcal{C}) \otimes_{\mathrm{Shv}(\mathcal{C}_E)} \widehat{\mathrm{Shv}}(\mathcal{C}_E) \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathrm{Shv}}(\mathcal{C})$$

是同构。事实上，基变换 $\widetilde{\mathrm{Shv}}(\mathcal{C}) \to \widetilde{\mathrm{Shv}}(\mathcal{C})\otimes_{\mathrm{Shv}(\mathcal{C}_E)} \mathrm{Shv}(\mathcal{C}_E)$ 是 $\widetilde{\mathrm{Shv}}(\mathcal{C})$ 的局部化，它通过对 $\widetilde{\mathrm{Shv}}(\mathcal{C})$ 中那些在 $\mathrm{Shv}(\mathcal{C}_E)$ 中被取逆的箭头取逆而得到，即通过对 $\mathrm{Shv}(\mathcal{C}_E)$ 中的 !-等价取逆而得到的 $\widetilde{\mathrm{Shv}}(\mathcal{C})$ 的局部化。这正是定义 6.3.16 的 $\widehat{\mathrm{Shv}}(\mathcal{C}_E)$ 范畴。类似地，张量 $\widetilde{\mathrm{Shv}}(\mathcal{C})\otimes_{\mathrm{Shv}(\mathcal{C}_E)} \mathrm{Shv}(\mathcal{C}_E)$ 是通过对 $\mathrm{Shv}(\mathcal{C}_E)$ 的所有超覆盖取逆而得到的 $\widetilde{\mathrm{Shv}}(\mathcal{C})$ 的局部化；由于这些超覆盖生成 $\widehat{\mathrm{Shv}}(\mathcal{C})$ 中的那些，因此此时的张量积不过是 $\widetilde{\mathrm{Shv}}(\mathcal{C})$。

$\widetilde{\quad}$下面的命题表明 D^* 在 $\mathrm{Shv}(\mathcal{C})$ 中仍然是一个层。

命题 6.3.18. 设 $Y \to X$ 是 !-等价映射，在 $\mathrm{Shv}(\mathcal{C})$ 中。那么自然映射 $\mathrm{D}^*(X) \to \mathrm{D}^*(Y)$ 是一个等价。

证明。 由于 D^* 是一个关于 !-拓扑的层，我们可以局部地处理 X，并假设 $X \in \mathcal{C}$，且 $Y = \varinjlim_i Y_i$ 是 $\mathcal{C}_{/X}$ 中 ! 可映射映射的余极限。于是 $\mathrm{D}(X) = \mathrm{D}_!(Y) = \varprojlim_i \mathrm{D}(Y_i)$ 在 $\mathrm{Pr}^L_{\mathrm{D}(X)}$ 中。由引理 6.3.6 的全忠实嵌入可推出，$\mathrm{D}_!(Y)$ 是 $\mathrm{D}^*(Y)$ 的预对偶；也就是说，$\mathrm{D}_!(Y)$ 的对偶是沿着 $\mathrm{D}(Y_i)$ 的对偶所取的极限 $\varprojlim_i \mathrm{D}(Y_i)^\vee$，但范畴 $\mathrm{D}(Y_i)$ 在 $\mathrm{Pr}^L_{\mathrm{D}(X)}$ 中是自对偶的，而下 !-函子的对偶是上 $*$-函子。引理得证。□

$\widetilde{\quad}$**推论 6.3.19.** 设 $(\mathcal{C}, E)$ 与之前相同。存在一个几何设置 $(\mathrm{Shv}(\mathcal{C})\ E')$ 以及一个几何设置的态射 $\widetilde{\quad}(\mathcal{C}, E) \to (\mathrm{Shv}(\mathcal{C})\ E')$，使得 D 在 $(\mathcal{C}, E)$ 上的六函子形式体系 $\widetilde{\quad}$唯一地延拓到 $(\mathrm{Shv}(\mathcal{C})\ E')$，且 E' 满足定理 *6.2.11* 的性质。

证明。 这由定理 6.2.11 得出，因为 D^* 对余拓扑局部化 $\widetilde{\quad}\mathrm{Shv}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Shv}(\mathcal{C})$满足下降。□

最后，我们讨论如何构造从拓扑斯到解析叠的态射。

引理 *6.3.20.* 设 $(\mathcal{C}, E)$ 与上述相同。设 $\mathcal{D}$ 为一个具有纤维积的位点，其层托普斯为 $\mathcal{S}hv(\mathcal{D})$。设 $\mathcal{S}hv(\mathcal{D}) \to \mathcal{T}$ 是一个到 ∞-*topoi* 上的余拓扑局部化。假设给定一个左正合函子 $F\colon \mathcal{D} \to \mathcal{P}(\mathcal{C})$，并考虑其左 *Kan* 延拓，得到一个左正合且保余极限的函子 $\mathcal{P}(\mathcal{D}) \to \mathcal{P}(\mathcal{C})$。假设 $\mathcal{D}$ 中的任意覆盖 $\{Y_i \to X\}$ 都被映为 $\mathcal{P}(\mathcal{C})$中的一个关于 *!*-拓扑的覆盖 $\{F(Y_i) \to F(X)\}$。那么存在唯一的左正合保余极限局部化 $F'\colon \mathcal{S}hv(\mathcal{D}) \to \mathcal{S}hv(\mathcal{C})$，它是 F的局部化。进一步假设，$\mathcal{S}hv(\mathcal{D})$中的所有 ∞-连通对象，只要在 $\mathcal{T}$ 中诱导等价，就会被映为 $\mathcal{S}hv(\mathcal{C})$中的 *!*-等价（由于 F' 保余极限且左正合，此映射自动是 ∞-连通的）。那么存在唯一的左正合$\widetilde{\quad}$且保余极限的局部化 $\mathcal{T} \to \mathcal{S}hv(\mathcal{C})$，它是 F'的局部化。

证明。 这可由拓扑斯理论中的抽象论证得出，参见 [ABFJ22，定理 4.3.3]。 □

前一个引理有助于构造解析叠范畴之间的自然映射。

引理 *6.3.21.* 设 $(\mathcal{C}, E)$ 是一个具有有限极限的几何设置，D 是 $(\mathcal{C}, E)$ 上满足范畴化 *Künneth* 公式和假设 *6.3.11* 的可呈 *6*-函子形式体系。设 $(\mathcal{C}_1, E_1)$ 是另一个具有有限极限的几何设置，并考虑几何设置之间的左正合态射 $(\mathcal{C}_1, E_1) \to (\mathcal{C}, E)$。考虑 D_1，即将 D 限制为 $(\mathcal{C}_1, E_1)$ 上的六函子形式体系，并假设 D_1 也满足假设 *6.3.11*。那么，函子 $\mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ 将 *!-* 覆盖映射到 *!-* 覆盖，并导出一个关于 *!-* 拓扑的层的左正合且保余极限态射 $\mathcal{S}hv(\mathcal{C}_1) \to \mathcal{S}hv(\mathcal{C})$。此外，$\mathcal{S}hv(\mathcal{C}_1)$ 中的 *!*-等价会被映射为 $\mathcal{S}hv(\mathcal{C})$ 中的 *!*-等价，因此$\widetilde{\quad}$$\widetilde{\quad}$前述函子局部化为拓扑斯之间的左正合且保余极限函子 $\mathcal{S}hv(\mathcal{C}_1) \to \mathcal{S}hv(\mathcal{C})$。

证明。 由于函子保留拉回，$\mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ 将 !-覆盖映射为 !-覆盖这一事实是显然的，而 D_1 是 D 在 $(\mathcal{C}_1, E_1)$ 上的限制。于是，拓扑斯 $F\colon \mathrm{Shv}(\mathcal{C}_1) \to \mathrm{Shv}(\mathcal{C}_2)$ 的分解便是形式上的。还需证明前一个映射将 !-等价映射为 !-等价；由于它保留∞-连通对象（作为拓扑斯态射的拉回），这将表明它分解$\widetilde{\quad}$$\widetilde{\quad}$为一个左正合且保余极限的函子 $\mathrm{Shv}(\mathcal{C}_1) \to \mathrm{Shv}(\mathcal{C})$。

设 $f\colon Y \to X$ 是 $\mathrm{Shv}(\mathcal{C}_1)$ 中的一个 !-等价，我们要证明 $F(f)\colon F(Y) \to F(X)$ 是 $\mathrm{Shv}(\mathcal{C})$ 中的一个 !-等价。设 $Z \in \mathcal{C}$，我们要证明，对于 $F(f)$ 的任意迭代对角 $F(Y) \to F(Y)^{(n)}$以及任意映射 $Z \to F(Y)^{(n)}$，拉回 $F(Y) \times_{F(Y)^{(n)}} Z \to Z$局部地（相对于 Z 上的 !-拓扑）来自 $\mathrm{Shv}(\mathcal{C}_E)$ 中的一个 !-等价。由于 F是左正合的，我们有 $F(Y)^{(n)} = F(Y_{(n)})$；又由于 $\mathrm{Shv}(\mathcal{C}_1)$ 中的 !-等价在对角态射下稳定，我们可以假设 $n = 0$，也就是说，只需考虑一个满足 $Z \in \mathcal{C}$ 的映射 $Z \to F(X)$。

由于 f 是一个 !-等价，我们可以找到一个满态射 $\bigsqcup X_i \to X$，其中 $X_i \in \mathcal{C}_1$，使得每个拉回 $Y \times_X X_i \to X_i$ 都来自 $\mathrm{Shv}(\mathcal{C}_1,_{E_1})$ 中的一个 !-等价。由于 F 保余极限，我们有$\widetilde{\ }$，因此 $\bigsqcup_i F(X_i) \to F(X)$ 是一个满态射，于是存在一个 !-覆盖 $Z := \bigsqcup_{j\in J} Z_j \to Z$ 以及一个$\widetilde{\ }$提升 $Z \to \bigsqcup_i F(X_i)$。因此，不失一般性，我们可以假设 $X \in \mathcal{C}_1$, $Y \to X$ 来自 $\mathrm{Shv}(\mathcal{C}_1,_{E_1})$ 中的一个 !-等价，并且 $Z \in \mathcal{C}$。在这种情况下，我们可以将 $Y = \varinjlim_i Y_i$ 写成 X 上 !- 可取例外拉回对象的余极限，使得 $\mathrm{D}(X) = \varinjlim_i \mathrm{D}_!(Y_i)$，因此 $F(Y) = \varinjlim_i F(Y_i) \to F(X)$。这意味着 $F(Y) \times_{F(X)} Z = \varinjlim_i F(Y_i) \times_{F(X)} Z$，所以 $F(Y) \times_{F(X)} Z \to Z$ 来自 $\mathrm{Shv}(\mathcal{C}_E)$ 中的一个对象；我们要证明该对象实际上是一个 !-等价。为此，我们需要验证 $\mathrm{D}^!$ 在任意迭代对角的任意拉回中都被识别。由于该迭代对角是 $F(f)$ 的迭代对角的拉回，且 $\mathrm{D}^!$ 满足 $\mathrm{Shv}(\mathcal{C}_E)$ 上 !-拓扑的下降，通过重复之前的化简，只需证明 $\mathrm{D}_!(F(Y) \times_{F(X)} Z) = \mathrm{D}(Z)$；而根据范畴论 Künneth，我们有

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}_!(F(Y) \times_{F(X)} Z) &= \varinjlim_i \mathrm{D}_!(F(Y_i) \times_{F(X)} Z) \\
&= \varinjlim_i \mathrm{D}_!(F(Y_i)) \otimes_{\mathrm{D}(F(X))} \mathrm{D}(Z) \\
&= \mathrm{D}(F(X)) \otimes_{\mathrm{D}(F(X))} \mathrm{D}(Z) \\
&= \mathrm{D}(Z)
\end{aligned}$$

从而证明了我们想要的结论。 □

6.3.4. 解析叠。 我们将第 6.3.3 节中的构造专门应用于解析叠 cks.

下面的引理验证了在解析环情形下的假设 6.3.11。

引理 6.3.22。 设 I 为一个范畴，$I^{\triangleleft}$ 为其右锥，且其始对象为 -1。设 $A_\bullet\colon I^{\triangleleft} \to \mathrm{AnRing}$ 为一个图表。假设自然映射 $\mathrm{D}^*(A_{-1}) \to \lim\nolimits_{\leftarrow i\in I} \mathrm{D}^*(A_i)$ 是一个等价。那么对于所有 $B \in \mathrm{AnRing}$，自然映射

$$\mathrm{Map}_{\mathrm{AnRing}}(B, A_{-1}) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{i\in I} \mathrm{Map}_{\mathrm{AnRing}}(B, A_i)$$

是一个同构。

证明。根据定义，Map $_{\mathrm{AnRing}}\ B\ A\ \subset\ _{\mathrm{CondRing}}\ B^{\triangleright}\ A^{\triangleright}$ $f\ B^{\triangleright} \to A^{\triangleright}$ A B $A_{-1} = {}^{*}\ A_i$ (,) Map (,) 是如下映射的全子动画：对于这些映射，-完备模是-完备的。假设 D( ) $\lim\leftarrow_i$(D ( ))，则作为凝聚动画环有 $A^{\triangleright}_{-1} = \lim\leftarrow_i(A_i^{\triangleright})$，并且我们有

$$\mathrm{Map}_{\mathrm{CondRing}}(B^{\triangleright}, A^{\triangleright}_{-1}) = \varprojlim_i \left(\mathrm{Map}_{\mathrm{CondRing}}(B^{\triangleright}, A_i^{\triangleright}) \right).$$

因此，为完成该证明，只需证明：若映射 $B^{\triangleright} \to A^{\triangleright}_{-1}$ 使得遗忘函子对所有 $i \in I$ 都将 A_i-完备模映到 B-完备模，则它将 A_{-1}-完备模映到 B-完备模。这是 $\mathrm{D}(A_{-1}) = \lim\leftarrow_i(\mathrm{D}^*(A_i))$ 的一个形式推论。□

利用前面的准备工作，我们给出解析叠范畴的定义 .

定义 6.3.23。 令 $\mathcal{C} = \mathrm{AnStk}^{\mathrm{aff}}$ 为仿射解析叠的范畴，E 为 ! 可箭头类，并令 D 为推论 6.3.4 中构造的、定义在 $(\mathcal{C}, E)$ 上的拟凝聚层六函子形式体系。令 $S \in \mathcal{C}$，并令 $\mathcal{C}_0 \subset \mathcal{C}_{/S}$ 为一个在有限极限和余积下封闭的本质小的满子范畴。令 $E_0 = E \cap \mathrm{Arr}(\mathcal{C}_0)$ 为 $\mathcal{C}_0$ 中的 ! 可箭头类，并滥用记号，将 D' 表示为 D 在 $\mathcal{C}_0$上的限制。我们将 $\mathcal{C}_0$的解析$\widetilde{\ }$叠 范畴定义为 Definition 6.3.16 中的 $\mathrm{Shv}(\mathcal{C}_0)$，记作 $\mathrm{AnStk}(\mathcal{C}_0)$。我们也滥用记号，将 D 表示为推论 6.3.19 中拟凝聚层六函子形式体系到解析叠 $\mathrm{AnStk}(\mathcal{C}_0)$ 的延拓。

警告 6.3.24。 在定义 6.3.23 中，我们避开了 $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}$ 的情形来构造解析叠范畴。在 [CS24] Clausen and Scholze 提到，这实际上是可行的，但需要证明解析环范畴和 !-拓扑的一些额外技术性质，而这些性质作者尚不了解（例如，解析环的可呈现性或 !-等价的可达性）。

尽管如此，在实践中，人们总是可以选择一个足够大且本质上小的解析环范畴 $\mathcal{C}_0$，使其足以满足应用需要，并执行定义 6.3.23 的构造。这正是我们在这些笔记中将其应用于代数几何中的 Serre 对偶时所采取的观点。考虑到这一技术要点，并滥用记号，我们将用 AnStk 表示一个足够大的全子范畴 $\mathcal{C}_0 \subset \mathrm{AnStk}^{\mathrm{aff}}$（可能依赖于语境）上的解析叠范畴，该全子范畴在可数极限与有限余积下稳定（或等价地，一族在可数余极限与有限积下稳定的小解析环）。

6.4. **代数栈**。 在本节中，我们给出一个合适的代数栈范畴（在广义上理解）在解析叠中的实现。设 Ring 为动画环范畴，并设 $\mathrm{Sch}^{\mathrm{aff}} = \mathrm{Ring}^{\mathrm{op}}$ 为其仿射概形的对偶范畴。Ring 上的一个标准格罗滕迪克拓扑是平坦拓扑。考虑系数函子 $R \mapsto \mathrm{D}(R) = \mathrm{Mod}_R(\mathrm{D}(\mathbb{Z}))$，它由导出阿贝尔群中的 R-模给出。人们也可以考虑其凝聚化提升 $\mathrm{D}^{\mathrm{cond}}(R) = \mathrm{D}(R) \otimes_{\mathrm{D}(\mathbb{Z})} \mathrm{D}(\mathbb{Z}^{\mathrm{cond}}) = \mathrm{Mod}_R(\mathrm{D}(\mathbb{Z}^{\mathrm{cond}}))$。通过取箭头类 $E = P = all$ 与 $I = iso$，引理 6.3.3 为 D 与 $\mathrm{D}^{\mathrm{cond}}$ 两者构造了六函子形式体系，并且我们有六函子形式体系的态射 $\mathrm{D} \to \mathrm{D}^{\mathrm{cond}}$，作为幺半群 $\mathrm{Corr}(\mathrm{Sch}^{\mathrm{aff}})^{\otimes} \to \mathrm{Cat}_\infty^{\times}$ 的态射。

备注 6.4.1。 函子 D 和 $\mathrm{D}^{\mathrm{cond}}$ 之间存在一种简洁的关系。令 $\mathrm{D}_!$ 和 $\mathrm{D}_!^{\mathrm{cond}}$ 表示将 $\mathrm{Sch}^{\mathrm{aff}}$ 上的!-层左 Kan 延拓到预层所得的函子。由构造可知，作为函子 $\mathcal{P}(\mathrm{Sch}^{\mathrm{aff}}) \to \mathrm{Pr}^L$，有 $\mathrm{D}_!^{\mathrm{cond}} = \mathrm{D}_! \otimes_{\mathrm{D}(\mathbb{Z})} \mathrm{D}(\mathbb{Z}^{\mathrm{cond}})$。取 $\mathrm{D}(\mathbb{Z}^{\mathrm{cond}})$-线性对偶可得

$$\begin{aligned}\mathrm{D}^{\mathrm{cond}} &= \mathrm{Fun}_{\mathrm{D}(\mathbb{Z}^{\mathrm{cond}})}(\mathrm{D}_!^{\mathrm{cond}}, \mathrm{D}(\mathbb{Z}^{\mathrm{cond}})) \\ &= \mathrm{Fun}_{\mathrm{D}(\mathbb{Z}^{\mathrm{cond}})}(\mathrm{D}_! \otimes_{\mathrm{D}(\mathbb{Z})} \mathrm{D}(\mathbb{Z}^{\mathrm{cond}}), \mathrm{D}(\mathbb{Z}^{\mathrm{cond}})) \\ &= \mathrm{Fun}_{\mathrm{D}(\mathbb{Z})}(\mathrm{D}_!, \mathrm{D}(\mathbb{Z}^{\mathrm{cond}})).\end{aligned}$$

更一般地，对于任意解析环 $\mathcal{A}$，我们都可以用与之前相同的方式，在 $\mathrm{Sch}^{\mathrm{aff}}_{/\operatorname{Spec}\mathcal{A}(*)}$ 上构造一个六函子形式体系 $\mathrm{D}^{\mathcal{A}}$，使得 $\mathrm{D}_!^{\mathcal{A}} = \mathrm{D}_! \otimes_{\mathrm{D}(\mathcal{A}(*))} \mathrm{D}(\mathcal{A})$。如果 $\mathrm{D}(\mathcal{A})$ 是紧生成的（例如 $\mathcal{A} = \mathbb{Z}_\square$），那么它就是一个可对偶的 $\mathrm{D}(\mathcal{A}(*))$-线性范畴，并且有

$$\mathrm{D}^{\mathcal{A}} = \mathrm{Fun}_{\mathrm{D}(\mathbb{Z})}(\mathrm{D}_!, \mathrm{D}(\mathcal{A})) = \mathrm{D}^* \otimes_{\mathrm{D}(\mathcal{A}(*))} \mathrm{D}(\mathcal{A}).$$

命题 6.3.7 表明，动画环的映射 $A \to B$ 是 D 的!-覆盖（等价地，是 $\mathrm{D}^{\mathrm{cond}}$ 的!-覆盖）当且仅当它是可下降映射。因此，相对于函子 D，仿射概形上的!-拓扑与可下降拓扑相同。类似地，若 $f\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ 是 $\mathrm{Sch}^{\mathrm{aff}}$ 上的预堆，则映射 f 对函子 D 是!-等价，当且仅当它对函子 $\mathrm{D}^{\mathrm{cond}}$ 也是!-等价（见注记 6.4.2）。由此形式上得到一个范畴之间的左正合保余极限函子

$$(-)^{\mathrm{cond}}\colon \widetilde{\mathrm{Shv}}(\mathrm{Sch}^{\mathrm{aff}}) \to \mathrm{AnStk} \tag{6.4.1}$$

使得与复合映射 $\widetilde{\mathrm{Shv}}(\mathrm{Sch}^{\mathrm{aff}}) \xrightarrow{\mathrm{D}} \mathrm{AnStk} \to \mathrm{Cat}_\infty$ 为 $\mathrm{D}^{\mathrm{cond}}$ 从 $\mathrm{Sch}^{\mathrm{aff}}$ 到 $\widetilde{\mathrm{Shv}}(\mathrm{Sch}^{\mathrm{aff}})$ 的右 Kan 延拓。我们将 $\mathrm{AlgStk} := \widetilde{\mathrm{Shv}}(\mathrm{Sch}^{\mathrm{aff}})$ 记为代数栈的范畴，它是按照第 6.3.3 节通过对预层的 !-等价求逆得到的。

[15]这是对名称 代数栈 一种非常非标准的用法；经典上，人们使用 étale 或平坦拓扑，并对这些代数叠施加一些额外的几何约束，例如要求存在一个概形沿可表 étale 或平坦映射覆盖它们。在我们的框架中，这个名称便于区分那些源自代数几何的解析叠。

备注 6.4.2。根据命题 6.3.7，一组有限的动画环映射 $\{A \to B_i\}_{i\in I}$ 是 !-覆盖，当且仅当映射 $A \to \prod_i B_i$ 如 [Mat16] 中所述是可下降的。

令 $\mathscr{F} \in \mathcal{P}(\mathrm{Sch}^{\mathrm{aff}})$，根据注 6.4.1，有

$$\mathrm{D}_!(\mathscr{F}) \otimes_{\mathrm{D}(\mathbb{Z})} \mathrm{D}(\mathbb{Z}^{\mathrm{cond}}) = \mathrm{D}_!^{\mathrm{cond}}(\mathscr{F}),$$

其中，$\mathrm{D}_!$ 是函子 $\mathrm{Spec}(A) \mapsto \mathrm{D}_!(A)$ 的左 Kan 延拓，其过渡映射由下 !-映射给出；而 $\mathrm{D}_!^{\mathrm{cond}}(\mathscr{F})$ 是 $\mathrm{Spec}(A) \mapsto \mathrm{D}_!(A^{\mathrm{cond}})$ 的左 Kan 延拓。因此，仿射方案上的预栈映射 $f\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ 对于 $\mathrm{D}_!$ 是 !- 等价，当且仅当它对于 $\mathrm{D}_!^{\mathrm{cond}}$ 是 !-等价。事实上，如果 f 对于 D 是 !-等价，那么根据基变换，它对于 $\mathrm{D}^{\mathrm{cond}}$ 也是 !-等价。反之，如果 f 对于 $\mathrm{D}^{\mathrm{cond}}$ 是 !-等价，则希望推导出它对于 D 是 !-等价。这源于线性范畴沿 $\mathrm{D}(\mathbb{Z}) \to \mathrm{D}^{\mathrm{cond}}(\mathbb{Z})$ 满足下降这一事实，因为作为对称幺半范畴，它有一个截面，该截面由在点 ev_* 处求值给出：$\mathrm{D}^{\mathrm{cond}}(\mathbb{Z}) \to \mathrm{D}(\mathbb{Z})$，见引理 2.3.5。

由引理 6.3.21，存在一个自然的左正合且保余极限函子 $(-)^{\mathrm{cond}}\colon \mathrm{AlgStk} \to \mathrm{AnStk}$，将代数叠映至解析叠，并将 $\mathrm{Spec}\, A$ 送至 $\mathrm{AnSpec}(A^{\mathrm{cond}})$。! 等价（或可下降映射）的例子包括 ω_1-fpqc 超覆盖（推论 6.4.6），以及静态诺特概形之间有限型态射的 h-覆盖 [BS17，定理 11.26]。

要使构造 (6.4.1) 在实践中有用，就需要构造足够多的（良好）动画环的 !-（超）覆盖。在 [Mat16，命题 3.31]Mathew 证明了 ω_1-紧对象的忠实平坦映射是可下降的：

引理 6.4.3. 设 $f\colon A \to B$ 是动画环的一个 ω_1-紧对象的忠实平坦态射。那么 f 是指标为 ≤ 2 的可下降映射。

证明。由于 $A \to B$ 是忠实平坦的，$Q = \mathrm{cofib}(A \to B)$ 是一个平坦的 A-模。由于 Q 是可数呈示的，根据 Lazard 定理 [Lur17，定理 7.2.2.15]，Q 是有限秩自由 A-模的可数滤过余极限。因此，$Q \otimes_A Q$ 也是有限秩自由 A-模的可数滤过余极限，并且它的投射维数为 ≤ 1。特别地，复合 $Q \otimes_A Q[-2] \to Q[-1] \to A$ 必定为零。由此可得，f 的下降指数为 ≤ 2。□

我们可以将 !-下降推广到可数环的忠实平坦超覆盖。

定义 6.4.4。设 A 是一个动画环，A 的一个 ω_1-fpqc 覆盖是动画环映射 $\{A \to A_i\}$ 的一个有限集合，其中每个 A_i 都是一个 ω_1-紧对象 A-代数，并且 $A \to \prod_{i\in I} A_i$是忠实平坦的。

命题 6.4.5. 设 $A \to A_\bullet$ 是动画环的一个 ω_1-紧对象忠实平坦超覆盖。则来自几何实现的映射 $|\mathrm{Spec}\, A_\bullet| \to \mathrm{Spec}\, A$ 是一个 !-等价。

证明. 由命题 6.3.7，只需证明函子 $A \to \mathrm{D}^!(A)$（其拉回映射由上 !-映射给出）是 ω_1-紧对象平坦拓扑上的超层。由于由引理 6.4.3，ω_1-紧对象忠实平坦映射是可下降的，我们知道 $A \mapsto \mathrm{D}^!(A)$ 是 ω_1- 紧对象平坦拓扑上的层。由 [Man22b，命题 A.3.21] 只需证明：若 $A \to A_\bullet$ 是 Ring_{ω_1} 中的一个 ω_1-紧对象忠实平坦超覆盖，则自然函子

$$\mathrm{D}(A) \to \mathrm{Tot}(\mathrm{D}^!(A_\bullet)) \tag{6.4.2}$$

是全忠实的。为证明全忠实性，我们采用与 [Man22b，命题 3.1.26]相同的证明。函子 (6.4.2) 有一个左伴随，它将余笛卡尔截面 $(M_n)_{n\in\Delta}$ 送到 $\varinjlim_{[n]\in\Delta^{\mathrm{op}}} M_n$，其中我们通过标量限制将所有 M_n 视为 A-模。因此，我们必须证明，对于 $M \in \mathrm{D}(A)$，自然映射

$$\varinjlim_{[n]\in\Delta^{\mathrm{op}}} \mathrm{Hom}_A(A_n, M) \to M \tag{6.4.3}$$

是一个等价。根据 Lazard 定理 [Lur17, 定理 7.2.2，环 A_n 是一个平坦 A-模。15],A_n 可以写成有限秩自由 A-模的滤过余极限。由于 A_n 是一个 ω_1-紧对象 A-模

（作为 A 上的代数是可数生成的），它是有限秩自由 A-模的可数滤过余极限。特别地，函子 $\mathrm{Hom}_A(A_n, -)$ 是左 t-正合的，并且其上同调维数为≤ 1。

Writing $M = \varinjlim_k \tau_{\geq -k} M$ 作为其典范截断的余极限，我们看到

$$\varinjlim_k \mathrm{Hom}_A(A_n, \tau_{\geq -k} M) \to \mathrm{Hom}_A(A_n, M)$$

是一个同构。因此，不失一般性，我们可以假设 M 是 1-连通的。在这种情况下，单纯对象 $(\mathrm{Hom}_A(A_n, M))_{[n]\in\Delta^{\mathrm{op}}}$ 是连通的。固定 $n \geq 1$，根据 [Lur17, Proposition 1.2.4.5]，对于 $k < n$，同伦群之间存在一个等价

$$\pi_k(\varinjlim_{\Delta^{\mathrm{op}}} \mathrm{Hom}_A(A_\bullet, M)) = \pi_k(\varinjlim_{\Delta^{\mathrm{op}}_{\leq n}} \mathrm{Hom}_A(A_\bullet, M)).$$

另一方面，令 $\mathrm{Spec}(\widetilde{A}_\bullet)$ 为 $(\mathrm{Spec}\, A_\bullet)^{\Delta^{\mathrm{op}}_{\leq n}}$ 的余骨架。由于 $\mathrm{D}^!$ 是一个平坦层，并且根据[Lur09, Lemma 6.5.3.9]，我们有

$$\mathrm{D}^!(A) = \mathrm{Tot}(\mathrm{D}^!(\widetilde{A}_\bullet))$$

特别是 $M = \varinjlim_{\Delta} \mathrm{Hom}_A(A, M)$。我们推得

$$\begin{aligned}
\pi_k(\varinjlim_{\Delta^{\mathrm{op}}} \mathrm{Hom}_A(A_\bullet, M)) &= \pi_k(\varinjlim_{\Delta^{\mathrm{op}}_{\leq n}} \mathrm{Hom}_A(A_\bullet, M)) \\
&= \pi_k(\varinjlim_{\Delta^{\mathrm{op}}_{\leq n}} \mathrm{Hom}_A(\widetilde{A}_\bullet, M)) \\
&= \pi_k(\varinjlim_{\Delta^{\mathrm{op}}} \mathrm{Hom}_A(\widetilde{A}_\bullet, M)) \\
&= \pi_k(M).
\end{aligned}$$

由于 $0 \leq k < n$ 是任意的，我们得出自然映射 (6.4.3) 是一个等价，从而证明了所需结论。□

由引理 6.3.21，我们得到以下推论。

推论 6.4.6。存在左正合保余极限函子

$$(-)^{\mathrm{cond}} \colon \widehat{\mathrm{Shv}}_{\omega_1-\mathrm{fpqc}}(\mathrm{Sch}^{\mathrm{aff}}) \to \mathrm{AlgStk} \to \mathrm{AnStk}$$

从 *fppf* 拓扑下 $\mathrm{Sch}^{\mathrm{aff}}$ 上的（可及）超层到代数叠（再到解析叠），由包含映射 $\mathrm{Sch}^{\mathrm{aff}} \to \mathrm{AlgStk}$ 的左 *Kan* 延拓给出。

我们以证明概形的 qcqs 态射在适当意义下是可取例外拉回且为真来结束本节。

命题 6.4.7。设 $f\colon Y \to X$ 是概形之间的 *qcqs* 态射。那么 f 对 ! 可取例外拉回（对于 D 和 $\mathrm{D}^{\mathrm{cond}}$ 均成立），它是 *prim*，且对偶化层 $\delta_f \cong 1$ 存在一个平凡化。

证明。根据 [HM24 引理 4.5.7]，我们可以证明 f 在源中的某个普适 D^*-覆盖上局部为 prim，因此不失一般性，可以假设 X 是仿射的。根据 [HM24 引理 4.5.8 (ii) 和 4.7.4]，我们还可以证明，在预复合一个既是 prim 又是可下降的概形态射 $Y' \to Y$ 后，f 为 prim。

我们先证明 f 是仿射的情形下该命题成立。若 X 是仿射的，则 Y 也是仿射的，并且根据拟凝聚层六函子形式体系的构造，f 是 prim。根据构造，我们还有 $\delta_f = 1$。若 f 是拟紧且分离的，取一个有限开仿射覆盖 $g\colon \bigsqcup U_i \to Y$。那么映射 g 是仿射的，并且根据前一步可知它是 prim。由扎里斯基下降，映射 g 是可下降的，因此 g 是 prim 且可下降的覆盖。由于复合映射 $\bigsqcup_i U_i \to Y \to X$ 是一个不交并

的仿射概形之间的态射，它是可取例外拉回且 prim，因此映射 f 也是如此。最后，我们处理拟紧拟分离的情形。可以找到一个有限开仿射覆盖 $g\colon \bigsqcup_i U_i \to Y$，使得 g 是拟紧且分离的。由前一步可知，g 是 prim，并且根据扎里斯基下降，它是可下降的。由于复合映射 $\bigsqcup_i U_i \to Y \to X$ 是 prim 映射的有限不交并（再次利用其仿射性），我们便得到所需的结论：f 是 prim。

最后，还需要确定对偶化层。若 f 是仿射概形之间的态射，则根据六函子形式体系的构造，$\delta_f = 1$。若 f 是概形之间的仿射态射，则我们有一个平凡化 $\delta_* \cong 1$，它是通过在扎里斯基拓扑下沿目标粘合仿射情形的平凡化得到的。对于拟紧且分离的情形，对角态射 Δf 是仿射的，因此$\delta_{\Delta f} \cong 1$，而 HM24 引理 4.6 的证明 [4] 给出了一个同构 $\delta_f \cong 1$（它仅取决于对角态射的平凡化），因为 f 是 prim。通过归纳论证可证明，对于 f 概形之间的拟紧拟分离态射，$\delta_f \cong 1$。□

在第7节中，我们将在此框架下证明 Serre 对偶；也就是说，若 $f\colon Y \to X$ 是概形之间的真光滑态射，则它上同调光滑，其对偶化层由 $\det(\Omega^1_{Y/X})[\dim(Y/X)]$ 给出。

6.4.1. 形式概形。 实践中出现的一类重要代数栈是形式概形。我们首先讨论扎里斯基拓扑沿 !-覆盖的下降

引理 6.4.8. 设 $A \to B^\bullet$ 是动画环的 !-超覆盖。则 $|\operatorname{Spec} B^\bullet| \to \operatorname{Spec} A$ 是拓扑空间的等价。

证明。只需证明：若 $A \to B$ 是 !-覆盖（即它是可下降的），则映射 $f\colon \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ 是拓扑空间的商映射。由于沿 $A \to B$ 的基变换是保守的，映射 f 显然是满射。为说明 f 是商映射，设 $C \subset \operatorname{Spec} A$ 是一个子空间，使得 $f^{-1}(C) \subset \operatorname{Spec} B$ 是拟紧拟分离开子空间，我们希望看到 C 本身是拟紧拟分离开的。我们将遵循 [BS17，定理 11.26] 的证明思路。设 $A \to B^\bullet$ 为 $A \to B$ 的 Čevh 余神经，并设 $B^\bullet \to B^\bullet_C$ 为对应于 Zariski 开子空间 $f^\bullet$、$_{-1}(C) \subset \operatorname{Spec}(B^\bullet)$ 的幂等代数，其中 $f^\bullet\colon \operatorname{Spec}(B^\bullet) \to \operatorname{Spec}(A)$。由于 $A \to B$ 是可下降的，我们有等价 $\mathrm{D}(A) = \operatorname{Tot}(\mathrm{D}(B^\bullet))$，它限制为最终连通模上对称幺半范畴的等价 $\mathrm{D}^+(A) = \operatorname{Tot}(\mathrm{D}^+(B^\bullet))$（这是因为 $A \to B$ 在稳定范畴 $\mathrm{D}^+(A)$ 中已经是可下降的）。因此，$B^\bullet \to B^\bullet_C$ 下降为一个幂等的、最终连通的代数 $A \to A_C$，位于 $\mathrm{D}^+(A)$ 中。由于 $B \to B_C$ 作为代数是紧对象，$A \to A_C$ 同样如此，并且由 [BHL17，定理 1.10] A_C 是附属于 $\operatorname{Spec} A$ 的某个 Zariski 开子空间的幂等代数，该子空间必定是 C，从而证明它如所期望的那样是开的。□

命题 6.4.9. 设 X 是一个导出概形，将其视为函子 $X\colon \mathrm{Ring}^\delta \to \mathrm{Ani}$，从离散动画环到 *anima*。则 X 满足!-下降。此外，若 $\mathscr{F} \to \mathscr{G}$ 是!-拓扑下 $\mathrm{Sch}^{\mathrm{aff}}$ 上层的一个!-等价，则自然映射 $X(\mathscr{G}) \to X(\mathscr{F})$ 是一个等价。特别地，X 是注记 *6.4.2* 意义下的代数栈，并且我们有一个全忠实嵌入

$$\mathrm{Sch} \hookrightarrow \mathsf{AlgStk}.$$

证明。设 X 为一个概形，$A \to B$ 为一个具有 Čech 余神经 $A \to B^\bullet$的可下降映射。我们要证明自然映射 $X(A) \to \operatorname{Tot}(X(B^\bullet))$ 是一个等价。通过过渡到相应的拓扑空间，我们得到一个 anima 的交换图（其中底部对象是集合）

$$\begin{array}{ccc} X(A) & \longrightarrow & \operatorname{Tot}(X(B^\bullet)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \operatorname{Map}_{\mathsf{Top}}(\operatorname{Spec} A, |X|) & \longrightarrow & \operatorname{Tot}(\operatorname{Map}_{\mathsf{Top}}(\operatorname{Spec}(B^\bullet), |X|)). \end{array}$$

由引理 6.4.8，下方的映射是一个等价；要证明 $X(A) = \mathrm{Tot}(X(B^\bullet))$，只需在竖直箭头的纤维上证明即可。因此，我们可以不失一般性地假设已经固定了一个拓扑空间的映射 $\mathrm{Spec}\, A \to |X|$。于是，由扎里斯基下降，可化归到 $\mathrm{Spec}\ A \to |X|$ 穿过一个开仿射概形 $\mathrm{Spec}\, C \subset X$ 的情形，从而化归到 $X = \mathrm{Spec}\, C$ 本身。该陈述随后由动画环上的 !-拓扑是次典范这一事实得出（例如，因为它也满足 D*-下降，并由引理 6.3.22）。

接下来，我们证明 X 也将 !-等价映为等价。设 $\mathscr{F} \to \mathscr{G}$ 是一个 !-层的 !-等价。我们要证明 $X(\mathscr{G}) \to X(\mathscr{F})$ 是 anima 的等价。由 !-下降，不失一般性，我们可以假设 $\mathscr{F} = \mathrm{Spec}(A)$ 本身是仿射的；于是 $\mathscr{G} \to \mathrm{Spec}(A)$ 可表示为余极限 $\mathscr{G} = \varinjlim_i \mathrm{Spec}(B_i)$，特别地，$\mathrm{D}_!(A) = \varinjlim_i \mathrm{D}_!(B_i)$，取对偶后得到 $\mathrm{D}^*(A) = \mathrm{D}^*(B_i)$。接下来用与仿射情形相同的论证即可：由引理 6.4.8，拓扑空间的映射 $|\mathscr{G}| \to \mathrm{Spec}(A)$ 是同构，因此我们可以假设已经固定了一个映射 $\mathrm{Spec}(A) \to X$。然后，由扎里斯基下降，我们归结为 $X = \mathrm{Spec}(C)$ 为仿射的情形；此时结论由 !-拓扑是次典范的并满足假设 6.3.11 这一事实推出。□

定义 6.4.10. 设 X 为一个概形，$C \subset X$ 为一个局部闭子空间。我们将 X 沿 C 的形式完备化定义为代数子叠 $X^\wedge_C \subset X$，其在 $\mathrm{Spec}\, A$ 上的值由下式给出

$$X^\wedge_C(\mathrm{Spec}\, A) = \begin{cases} X(A) & \text{if } |\mathrm{Spec}\, A| \to C \subset |X| \\ \emptyset & \text{otherwise.} \end{cases}$$

例 6.4.11. 设 X 为一个概形，$U \subset X$ 为一个开子概形，则 $X^\wedge_U = U$.

下面我们将更明确地描述概形沿扎里斯基闭子空间的形式完备化，至少在理想满足某些有限生成条件的情况下如此。

命题 6.4.12. 设 A 为一个动画环，且 $X = \mathrm{Spec}\ A$，并设 $Z \subset |\mathrm{Spec}\ A|$ 为与有限生成理想 $I \subset \pi_0(A)$相关联的扎里斯基闭子空间，该理想由元素 f_1、……、f_n生成。则自然映射

$$\varinjlim_k \mathrm{Spec}(A/^{\mathbb{L}}(f_1^k, \ldots, f_n^k)) \to X^\wedge_Z \tag{6.4.4}$$

是代数栈之间的等价。

证明。根据定义可知，$X^\wedge_Z$ 是叠 $X^\wedge_{Z_i}$ 的交集，其中 $Z_i \subset |X_i|$是由 $\{f_i = 0\}$ 给出的闭子集，$i = 1, \ldots, n$。因此，通过归纳论证，不失一般性地，我们可以假设 I 由单个元素 f生成。在这种情况下，$X^\wedge_I$ 是 Zariski 局部化 $\mathrm{Spec}\ B \to \mathrm{Spec}\ B[\frac{1}{f}]$的补元。设 $\mathrm{Spec}\ C \to \mathrm{Spec}\ B$是一个仿射概形的映射，且它经由 $X^\wedge_I$分解，那么 $C \otimes_B B[\frac{1}{f}] = 0$，并且存在某个 k，使得 $f^k = 0$属于 C。于是，我们得到一个映射 $B/^{\mathbb{L}} f^k \to C$，证明 (6.4.4) 实际上是满射。现在我们证明它是单射；通过基变换，我们可以将问题归约到泛情形

$$\varinjlim_k \mathrm{Spec}\, \mathbb{Z}[X]/X^n \to \widehat{\mathbb{A}}^1_{\mathbb{Z}}$$

其中 $\widehat{\mathbb{A}}^1_{\mathbb{Z}}$ 是仿射直线在 0 处的形式完备化。只需证明映射 $\varinjlim_k \mathrm{Spec}\, \mathbb{Z}[X]/X^n \to \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[X])$ 是预栈的浸入。取对角态射后，需要证明映射

$$\varinjlim_n \mathrm{Spec}\, \mathbb{Z}[X]/X^n \to \varinjlim_n \mathbb{Z}[X, Y]/^{\mathbb{L}}(X^n, Y^n, X - Y)$$

是预栈的等价。这将问题归结为证明环的逆系的映射

$$(\mathbb{Z}[X, Y]/^{\mathbb{L}}(X^n, Y^n, X - Y))_n \to (\mathbb{Z}[X]/X^n)_n \tag{6.4.5}$$

是原等价。动画环 $\mathbb{Z}[X,Y]/^{\mathbb{L}}(X^n,\ Y^n,\ X-Y)$，视为一个 $\mathbb{Z}[X]$-代数，是一个平方零扩张

$$\mathbb{Z}[X]/X^n \oplus X^n\mathbb{Z}[X]/X^{2n}[1],$$

其中我们将 $X^n\mathbb{Z}[X]/X^{2n}$ 视为 Spec $\mathbb{Z}[X]/X^n \to$ Spec $\mathbb{Z}[X]$ 的余法丛。因此，映射 $\mathbb{Z}[X,Y]/^{\mathbb{L}}(X^{2n},\ Y^{2n},\ X-Y) \to \mathbb{Z}[X,Y]/^{\mathbb{L}}(X^n,\ Y^n,\ X-Y)$ 由平方零扩张的映射给出

$$\mathbb{Z}[X]/X^{2n} \oplus X^{2n}\mathbb{Z}[X]/X^{4n}[1] \to \mathbb{Z}[X]/X^n \oplus X^n\mathbb{Z}[X]/X^{2n}[1] \tag{6.4.6}$$

它将 $X^{2n}\mathbb{Z}[X]/X^{4n}$ 在 π_1-群中映射为 $X^n\mathbb{Z}[X]/X^{2n}$ 中的零点。因此，映射 (6.4.6) 经由以下映射分解

$$\mathbb{Z}[X]/X^{2n} \oplus X^{2n}\mathbb{Z}[X]/X^{4n}[1] \to \mathbb{Z}[X]/X^{2n} \to \mathbb{Z}[X]/X^n \to \mathbb{Z}[X]/X^n \oplus X^n\mathbb{Z}[X]/X^{2n}[1],$$

由此证明 (6.4.5) 是所需的原等价。 □

下面的引理描述了在什么情况下，从闭子概形到形式完备化的映射是 !-拓扑中的满态射。

引理 6.4.13. 设 $A \to B$ 是动画环之间的满射，使得 $I = \ker(\pi_0(A) \to \pi_0(A))$ 由元素 $f_1, \dots, f_n$ 有限生成。记 $X = \mathrm{Spec}(A)$ 与 $Z = \mathrm{Spec}(B)$。考虑复合映射 $A \to A/^{\mathbb{L}}(f_1, \dots, f_n) \to B$。则 $Z \to X^{\wedge_Z}$ 在!-拓扑中是满态射，当且仅当 $A/^{\mathbb{L}}(f_1, \dots, f_n) \to B$ 是可下降的。

证明. 由命题 6.4.12，映射 Spec$(A/^{\mathbb{L}}(f_1, \dots, f_n)) \to X^{\wedge_Z}$ 对于 !-拓扑是满态射。于是映射 Spec$(B) \to$ Spec$(A/^{\mathbb{L}}(f_1, \dots, f_n)) \to X^{\wedge_Z}$ 是满态射，当且仅当存在可下降映射 $B \to C$，使得 $A/^{\mathbb{L}}(f_1, \dots, f_n) \to B \to C$ 是可下降的，而这成立当且仅当 $A/^{\mathbb{L}}(f_1, \dots, f_n) \to B$ 本身是可下降的。□

推论 6.4.14。 设 A 为一个静态环，$A \to B$ 为静态环关于有限生成理想 I 的商映射，设 $Z \to X$ 为相应的仿射概形之间的扎里斯基闭映射。则 $Z \to X^{\wedge_Z}$ 是代数栈的满态射。

证明。 设 $f_1, \dots, f_n \in I$ 为 I 的一组生成元，则有一个 A-代数的自然映射 $F\colon A/^{\mathbb{L}}(f_1, \dots, f_n) \to B$，它在 π_0 上是同构。由于 $A/^{\mathbb{L}}(f_1, \dots, f_n)$ 具有有限多个同伦群，根据 [Mat16，命题 3.34]，F 是可下降的。由引理 6.4.13，映射 $Z \to X^{\wedge_I}$ 是满态射。□

引理 6.4.15。 设 X 为一个概形，设 $Z \subset |X|$ 为一个扎里斯基闭子空间，并且在扎里斯基拓扑中局部由有限生成理想 I 生成。则 $j\colon X^{\wedge_Z} \to X$ 是 !-***able***，并且它是代数（或解析）栈的开浸入（见定义 *6.2.16*）。此外，全忠实函子 $j_*\colon \mathrm{D}(X^{\wedge_Z}) \to \mathrm{D}(Z)$ 的本质像是 $\mathrm{D}(X)$ 上那些导出的 I-进完备层。此外，若 $X = \mathrm{Spec}\ A$ 且 $Z = \mathrm{Spec}\ A/^{\mathbb{L}}(f_1, \dots, f_n)$，则映射 $Z \to X^{\wedge_Z}$ 是一个 ***suave*** 覆盖。

证明。 这些陈述在 X 的扎里斯基拓扑下是局部的（由拟凝聚层的扎里斯基下降可知）。因此，我们可以不失一般性地假设 $X =$ Spec A，且 $I = (f_1, \dots, f_n)$，其中 $f_i \in \pi_0(A)$。通过取交集，我们甚至可以假设 $I = (f)$ 由单个元素生成，并且 $Z =$ Spec $A/^{\mathbb{L}}(f)$。要证明 $X^{\wedge_Z} \to X$ 是可取例外拉回的，只需证明 $Z \to X^{\wedge_Z}$ 是一个 suave 覆盖（[HM24，引理 4.7.1]）。为此，由于根据命题 6.4.12，$Z \to X^{\wedge_Z}$ 是满态射，只需证明 $Z \times_{X^{\wedge_Z}} Z \to Z$ 是一个 suave 覆盖（[HM24，引理 4.5.7]）。由于 $X^{\wedge_Z} \to X$ 是浸入，可知

$$Z \times_{X^{\wedge_Z}} Z = Z \times_X Z \cong \mathrm{Spec}(A/^{\mathbb{L}}(f) \oplus (A/^{\mathbb{L}}(f))[1]).$$

特别地，投影 $\mathrm{pr}_i\colon Z \times_{X^{\wedge_Z}} Z \to Z$ 由环态射 $B \to C$ 余表示，使得 C 是一个完美 B-模。由引理 6.3.5 可知，投影 pr_i 是 suave,

从而 $Z \to X^{\wedge_Z}$ 亦然；由于这最后一个映射是满态射，它还是一个 suave 覆盖。由 [HM24，引理 4.5.7]，，映射 $Z \to X^{\wedge_Z}$ 满足普遍 D^* 与 $\mathrm{D}^!$-下降，并且由于复合映射 $Z \to X$ 是可取例外拉回，映射 $j\colon X^{\wedge_Z} \to X$ 也是可取例外拉回且为 suave。由于 j 也是浸入，j 的对角态射是同构，并且由 [HM24，定义 4.6.1]，j 甚至是上同调 étale 的，而 [HM24，引理 4.6.4] 表明 $j_!$ 是 j^*的左伴随。于是，由于 j 是浸入，适当基变换表明 $j_!\colon \mathrm{D}(X^{\wedge_Z}) \to \mathrm{D}(X)$ 是全忠实的，从而证明 j 是代数栈的开浸入。剩下要证明的是，j_* 的本质像是 A上的导出 f-进完备模。这可由沿 $Z \to X^{\wedge_Z}$ 的拉回是保守的这一事实轻易得出：给定 M 一个 A-模，前述结论表明 j_*j^*M 是 f-进完备的，并且自然映射 $M^{\wedge_f} \to j_*j^*M$在模去 f之后是同构。由导出 Nakayama 引理可知 $M^{\wedge_f} = j_*j^*M$，从而得到

$$j_*\colon \mathrm{D}(X^{\wedge_Z}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{D}(A)^{\wedge_f} \subset \mathrm{D}(A)$$

正如所需。 □

借助命题 6.4.12，在定义理想满足适当有限性条件的情况下，我们可以为形式概形之间的态射构造六函子。作为之后会用到的一个特殊情形，我们证明仿射直线具有如下光滑性：

引理 6.4.16。令 $f\colon \widehat{\mathbb{A}}^1_{\mathbb{Z}} \to \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ 为 $\mathbb{Z}$ 上仿射直线在零点处的形式完备化。则 f 是 *suave*，并且存在等价 $f^!\mathbb{Z} \cong \mathscr{O}[1]$，其中 $\mathscr{O}$ 是 $\widehat{\mathbb{A}}^1_{\mathbb{Z}}$的结构层。

证明。由引理 6.4.15，映射 $\iota\colon \operatorname{Spec}\mathbb{Z} \to \widehat{\mathbb{A}}^1_{\mathbb{Z}}$是一个 suave 覆盖。由于 $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ 在自身上是 suave 的，根据 [HM24, 引理 4.5.8 (i)]，可知 f 是 suave 的。为了计算对偶化层，注意到

$$\mathbb{Z} = \iota^!f^!\mathbb{Z} = \iota^!\mathbb{Z} \otimes \iota^*f^!\mathbb{Z}.$$

因此，$\iota^*f^!\mathbb{Z} = (\iota^!\mathbb{Z})^{-1}$ 并且，根据导出 Nakayama 引理，只需证明 $\iota^!\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}[-1]$。由于 $\widehat{\mathbb{A}}^1_{\mathbb{Z}} \subset \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}$ 是一个开浸入，故有

$$\iota^!\mathbb{Z} = \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}[T]}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}[T]) \cong \mathbb{Z}[-1]$$

这就证明了我们想要的结论。 □

6.5. **Betti叠**。我们以通过所谓的*Betti*叠将（轻型）凝聚 anima 实现为解析叠，来结束本节。这个实现经过第 6.4 节中的实现，其六函子形式体系由沿 $\mathrm{D}(\mathbb{Z}) \to \mathrm{D}(\mathbb{Z}^{\mathrm{cond}})$对 [HM24] with $\mathbb{Z}$-系数的凝聚 anima 的六函子形式体系作（层化的）基变换构成（或者等价地，$\mathrm{D}^{\mathrm{cond}} = \mathrm{Fun}^{\mathrm{D}(\mathbb{Z})}(\mathrm{D}_!, \mathrm{D}(\mathbb{Z}^{\mathrm{cond}}))$，见注 6.4.1）。

令 $\mathrm{Prof}^{\mathrm{light}}$ 为轻型赋形集的位点。$\mathrm{Prof}^{\mathrm{light}}$ 中的任意满射 $S' \to S$ 都会给出一个局部常值函数环之间的忠实平坦环态射 $C(S, \mathbb{Z}) \to C(S', \mathbb{Z})$（等式可通过将$S' \to S$ 写成有限集之间满射的余滤极限得到）。因此，包含映射

$$\mathrm{Prof}^{\mathrm{light}} \to \mathrm{Sch}^{\mathrm{aff}}$$

将超覆盖映射到 ω_1 -fpqc超覆盖，并且它扩展为拓扑斯态射中的一个左伴随

$$(-)_{\mathrm{Betti}}\colon \mathrm{CondAni} = \widehat{\mathrm{Shv}}(\mathrm{Prof}^{\mathrm{light}}) \to \widehat{\mathrm{Shv}}_{\omega_1-\mathrm{fpqc}}(\mathrm{Sch}^{\mathrm{aff}})$$

我们或许可以称之为*Betti*实现。滥用记号，我们用相同的方式表示 Betti实现与推论 6.4.6 的函子 $(-)^{\mathrm{alg}}$ 的复合映射

$$(-)_{\mathrm{Betti}}\colon \mathrm{CondAni} \to \widehat{\mathrm{Shv}}_{\omega_1-\mathrm{fpqc}}(\mathrm{Sch}^{\mathrm{aff}}) \to \mathrm{AnStk}\,.$$

将 Betti实现与经典代数几何中拟凝聚层的函子 $\mathrm{D}\colon \widehat{\mathrm{Shv}}_{\omega_1-\mathrm{fpqc}}(\mathrm{Sch}^{\mathrm{aff}}) \to \mathrm{Cat}_\infty$复合，我们便得到 [HM24] 的（轻）凝聚 anima 的六函子形式体系，其系数取自 $\mathbb{Z}$。如果改为将 Betti实现与函子

$\mathrm{D}:\mathrm{AnStk}\to\mathrm{Cat}_\infty$ 复合，该函子将解析叠映至拟凝聚层，我们便得到 [HM24]的六函子的 $\mathrm{D}(\mathbb{Z}^{\mathrm{cond}})$-线性变体。

7. 立体几何与 Serre 对偶

在最后这一节中，我们将解析叠理论特化到一个合适的*solid Huber* 叠 范畴，其构建模块是 Huber 对的推广，即所谓的固体 *Huber* 环。在这一框架下，我们将讨论 Huber 空间理论的若干变体、solid 范畴中有限表示态射的适当概念、solid 框架下的 étale 态射与光滑态射，最后还将给出 Serre 对偶的一般性陈述，将其推广经典代数几何中真光滑概形的 Serre 对偶。

7.1. 固体 Huber 环。

在 [Hub94], Huber 引入了 adic 空间理论，其构建模块是所谓的*Huber* 对。在 [And21, 命题 3.34] Andreychev 证明了完备 Huber 对全忠实地嵌入解析环范畴。在 [Man22b, 定义 2.9.3] Mann 引入了（动画化的）离散 Huber 对范畴，并在 [Man22b, 命题 2.9.6] 中证明该范畴全忠实地嵌入解析环范畴。本节将把这两种 Huber 对理论推广为统一的固体 *Huber* 环理论。

定义 7.1.1. (1) 凝固预解析Huber对是一个对 $(A^\triangleright,\ S)$，由一个凝固动画环 $A^\triangleright\in\mathrm{Ring}_{\mathbb{Z}_\square}$ 和一个 anima 态射 $S\to A^\triangleright(*)$ 构成。

(2) 给定一个预解析Huber对 $(A^\triangleright,\ S)$，我们定义预解析环 $(A^\triangleright,\ S)^{\mathrm{pre}}_\square$ 为 $A^\triangleright$ 上的预解析环结构，使得一个 $A^\triangleright$-模 M 完备，当且仅当它是$\mathbb{Z}$-凝固的；并且对于所有 $s\in\pi_0(S)$，M 作为 $\mathbb{Z}[T]$-模的限制（其中 T 的作用由沿着 $S\to A^\triangleright(*)$ 的 s 的像的乘法给出）是 $\mathbb{Z}[T]_\square$-完备的。我们用 $(A^\triangleright,\ S)_\square$ 表示将 $(A^\triangleright,\ S)^{\mathrm{pre}}_\square$ 完备化为解析环所得的结果。

(3) 令 $\mathbb{G}_a=\mathrm{AnSpec}(\mathbb{Z}[T])$ 为带有平凡解析环结构的代数仿射直线。设 A 是 $\mathbb{Z}_\square$上的解析环，我们将 A 的凝固元素环定义为 $A^\triangleright(*)=\mathbb{G}_a(A)$ 的子环，由下式给出

$$A^+:=\mathbb{G}_{a,\square}(A)$$

其中 $\mathbb{G}_{a,\square}=\mathrm{AnSpec}(\mathbb{Z}[T]_\square)$。

(4) 我们称一个固态解析环 $A\in\mathrm{AnRing}_{\mathbb{Z}_\square/}$ 为 *solid Huber* 环，如果自然映射

$$(A^\triangleright,A^+)_\square\to A$$

是解析环的同构。我们令 $\mathrm{Ring}^{\mathrm{Hub}}_{\mathbb{Z}_\square}\subset\mathrm{AnRing}_{\mathbb{Z}_\square/}$ 为固体 Huber 环的全子范畴。

(5) 最后，一个凝固预解析Huber对 $(A\quad{}^\triangleright S)$（连同其关联的凝固环 $A=(A\quad{}^\triangleright S)_\square$）被称为 固态*Huber*对，如果 $A^\triangleright$ 是 $A^+_\square$-完备的，且自然映射 $S\to A^+$ 是 anima 的同构。

备注 7.1.2。令 Ring 为离散动画环范畴，并考虑函子 $\mathrm{Ring}^{\mathrm{op}}\to\mathrm{AnStk}_{\mathbb{Z}_\square}$，将 $R\mapsto$ 映射到 $\mathrm{Spec}(R_\square)$。该函子保极限，因此定义了 $\mathrm{AnStk}_{\mathbb{Z}_\square}$ 中的环栈 $\mathbb{G}_{a,\ \square}$，其底层代数叠为 $\mathrm{AnSpec}\ \mathbb{Z}_\square[T]$。因此，给定一个固态解析栈 $X\in\mathrm{AnStk}_{\mathbb{Z}_\square}$，映射 $\mathbb{G}_{a,\ \square}(X)$ 的 anima 具有自然的动画环结构。特别地，若 $X=\mathrm{AnSpec}\,A$, $\mathbb{G}_{a,\ \square}(A)=A^+$，则其具有自然的动画环结构。

备注 7.1.3。令 $(A^\triangleright,\ S)$ 为一个预解析Huber对。固态解析环 $(A^\triangleright,\ S)^{\mathrm{pre}}_\square$ 仅取决于 $A^\triangleright$，且属于 $\pi_0(S)\to\pi_0(A^\triangleright(*))$ 的像。使用 anima S，而非仅使用 $\pi_0(A^\triangleright(*))$ 的子集，原因仅仅是为了让记号更加灵活。

例 7.1.4. 令 $\mathrm{Ring}^{\mathrm{Hub}}_{\mathbb{Z}}$为离散 Huber 对的范畴 [Man22b，定义 2.9。3],全忠实函子 $\mathrm{Ring}^{\mathrm{Hub}}_{\mathbb{Z}}\to\mathrm{AnRing}$，将 $(A,A^+)\mapsto$ 映射为 $(A,A^+)_\square$，可经由 $\mathrm{Ring}^{\mathrm{Hub}}_{\mathbb{Z}_\square}$分解。

类似地，若 $\mathrm{Ring}^{\mathrm{Hub},\wedge}$ 是完备 Huber 对的范畴，则到 AnRing 的自然函子，由 $(A, A^+) \mapsto$ 映射为 $(A, A^+)_\square$ 给出，可经由 $\mathrm{Ring}^{\mathrm{Hub}}_{\mathbb{Z}_\square}$分解（[And21，命题 3.34]）。

下述命题证明了凝聚 Huber 环范畴的一些基本范畴性质。

命题 7.1.5. 全忠实函子 $\mathrm{Ring}^{\mathrm{Hub}}_{\mathbb{Z}_\square} \to \mathrm{AnRing}_{\mathbb{Z}_\square}$ 有一个右伴随，它将固态解析环 A 映到 *Huber* 环 $(A^\triangleright, A^+)_\square$。特别地，$\mathrm{Ring}^{\mathrm{Hub}}_{\mathbb{Z}_\square}$ 在 $\mathrm{AnRing}_{\mathbb{Z}_\square}$ 的所有余极限下封闭。此外，以下结论成立：

(1) 设 S 为一个轻射有限集，并考虑由 $R = \mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}_\square}\mathbb{Z}_\square[S]$ 赋予从 $\mathbb{Z}_\square$诱导结构所得的 *Huber* 环。则 R 是$\mathrm{AnRing}_{\mathbb{Z}_\square}$ 中的紧射影对象，因此也是$\mathrm{Ring}^{\mathrm{Hub}}_{\mathbb{Z}_\square}$中的紧射影对象。*(2)* 环 $\mathbb{Z}[T]_\square$ 和 $\mathbb{Z}[[T]]$ 在$\mathrm{AnRing}_{\mathbb{Z}_\square}$ 中是紧对象（但不是投射对象！），且属于$\mathrm{Ring}^{\mathrm{Hub}}_{\mathbb{Z}_\square}$。*(3)* *(1)* 中的环与 $\mathbb{Z}[T]_\square$ 的有限余极限构成$\mathrm{Ring}^{\mathrm{Hub}}_{\mathbb{Z}_\square}$的一族紧生成元。特别地，$\mathrm{Ring}^{\mathrm{Hub}}_{\mathbb{Z}_\square}$是一个可呈范畴。

证明。 函子 $\mathrm{Ring}^{\mathrm{Hub}}_{\mathbb{Z}} \to \mathrm{AnRing}_{\mathbb{Z}_\square}$ 有一个由函子给出的 retract，该函子将解析环 A 映至解析环 $(A^\triangleright, A^+)_\square$；一个简单的计算表明，此函子是包含映射的右伴随。

$\mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}_\square}\mathbb{Z}_\square[S]$ 在固态解析环中是紧射影，这一事实源于它余表出函子 $A \mapsto A^\triangleright(S)$（其中 S 为轻型赋形），而此函子与筛余极限交换，因为 $\mathbb{Z}_\square[S]$ 是紧射影凝固模，见推论 4.1.12。

接下来，我们证明 $\mathbb{Z}_\square[T]$ 和 $\mathbb{Z}[[T]]$ 在动画环中是紧对象。为此，根据命题 5.2.2，固态解析环之间的映射 $(\mathbb{Z}[T],\mathbb{Z})_\square \to A$经由 $\mathbb{Z}[T]_\square$（分别经由$\mathbb{Z}[[T]]$）分解，当且仅当 $\mathbb{Z}((T^{-1})) \otimes_{(\mathbb{Z}[T],\mathbb{Z})_\square} A = 0$（分别为 $(\mathbb{Z}[T^{\pm 1}],\mathbb{Z}[T^{-1}])_\square \otimes_{(\mathbb{Z}[T],\mathbb{Z})_\square} A = 0$）。事实上，这源于如下事实：$\mathrm{D}(\mathbb{Z}[T]_\square)$ 是幂等代数的态射 $\mathbb{Z}[T] \to \mathbb{Z}((T^{-1}))$ 在 $\mathrm{D}((\mathbb{Z}[T],\mathbb{Z})_\square)$ 中的开补（分别地，$\mathrm{D}((\mathbb{Z}[T^{\pm 1}],\mathbb{Z}[T^{-1}])_\square)$ 是 $\mathbb{Z}[T] \to \mathbb{Z}[[T]]$ 的开补）。现在，设 $A = \varinjlim_i A_i$ 是解析环在 $\mathbb{Z}_\square$ 上的一个滤过余极限，并设 $\mathbb{Z}[T] \to A$，那么存在某个 i，使得存在一个提升 $\mathbb{Z}[T] \to A_i$。考虑基变换$\mathbb{Z}((T^{-1})) \otimes_{(\mathbb{Z}[T],\mathbb{Z})_\square} A = \varinjlim_{j \geq i} \mathbb{Z}((T^{-1})) \otimes_{(\mathbb{Z}[T],\mathbb{Z})_\square} A_j$，则余极限为零当且仅当存在某个 $j \geq i$，使得 $1 \in \mathbb{Z}((T^{-1})) \otimes_{(\mathbb{Z}[T],\mathbb{Z})_\square} A_j$ 为零；这当且仅当 $\mathbb{Z}((T^{-1})) \otimes_{(\mathbb{Z}[T],\mathbb{Z})_\square} A_j = 0$；又当且仅当我们有一个延拓 $\mathbb{Z}[T]_\square \to A_j$。对 $\mathbb{Z}[[T]]$ 也有相同的论证。注意，根据注 5.5.3， $\mathbb{Z}_\square[T]$ 和 $\mathbb{Z}[[T]]$ 都不是投射的。

最后，要证明 (1) 中的环与 $\mathbb{Z}[T]_\square$ 生成 $\mathrm{Ring}^{\mathrm{Hub}}_{\mathbb{Z}_\square}$，只需证明将 Huber 环 A 映射到对偶 $(A^\triangleright, A^+)$ 的函子是保守的。其中， $A^\triangleright$ 是凝聚环，其 S-点由 $\mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}_\square}\mathbb{Z}_\square[S]$ 余表示； A^+ 是由 $\mathbb{Z}[T]_\square$ 余表示的 solid 元素子环。这由 solid Huber 环的定义显然可得。□

定义 7.1.6。 设 $A \in \mathrm{AnRing}_{\mathbb{Z}_\square}$。我们将 A 的拓扑幂零元素之 anima 定义为全子动画 $A^{\circ\circ}(*) \subset A^\triangleright(*)$，其元素为满足映射 $\mathbb{Z}[T] \to A$ 可延拓至 $\mathbb{Z}[[T]] \to A$ 的 $a \in A^\triangleright$。

引理 7.1.7。 设 $A \in \mathrm{AnRing}_{\mathbb{Z}_\square}$，则 $A^{\circ\circ}(*) \subset A^+$ 是一个 A^+-子模。

证明。 映射 $\mathbb{Z}[T] \to \mathbb{Z}[[T]]$ 是幂等的，因此 $A^{\circ\circ}(*) \subset A^\triangleright$ 是一个全子动画。因此，我们只需证明该引理对两个对象的连通分支成立。由于解析环存在分解（$\mathbb{Z}[T]$， $\mathbb{Z}$）$_\square \to \mathbb{Z}[T]_\square \to \mathbb{Z}[[T]]$，包含映射 $A^{\circ\circ}(*) \subset A^+$显然。$A^{\circ\circ}(*)$ 是一个 A^+-模这一事实可由以下环态射推出：

$$\mathbb{Z}[[X]] \to \mathbb{Z}[[T_1, T_2]],\ X \mapsto T_1 + T_2 \text{ and } \mathbb{Z}[[X]] \to \mathbb{Z}[T][[X]],\ X \mapsto TX.$$

事实上，第二个态射表明 $A^{\circ\circ}(*)$ 在乘以 A^+ 后仍保持不变，第一个态射表明它在加法下封闭。□

备注 7.1.8。 在 [RC24 的定义 2.6.1 (2)] 中，构造了一个凝聚 anima $A^{\circ\circ} \subset A^{\triangleright}$，其在一点处的取值恰好就是定义 7.1.6。根据 [RC24 的备注 2.6.3] $A^{\circ\circ}$，它是一个 solidA^+-模。

定义 7.1.9。 设 A 是一个 solid Huber 环。我们将含 n个变量的 ***solid Tate*** 代数 定义为 solid Huber 环

$$A[T_1, \dots, T_n]_\square := A \otimes_{\mathbb{Z}_\square} \mathbb{Z}[T_1, \dots, T_n]_\square.$$

例 7.1.10。 设 A 是一个 solid Huber 环。$A[T]_\square$ 的形态在很大程度上取决于 A的凝聚结构：

- 假设 $A = (R, R^+)_\square$来自一个离散 Huber 环，那么 $A[T]_\square = (R[T], R^+[T])_\square$是 R 上的多项式代数，其 solid 结构由 $R^+[T]$诱导。
- 假设 $A = (R, \mathbb{Z})_\square$ 具有诱导结构，并且对于 $I \subset \pi_0(R)$ 这个有限生成理想，R 是一个 I-进完备环。那么，$R[T]_\square = ((R[T])^{\wedge_I}, \mathbb{Z}[T])_\square$是 $R[I]$ 的 I-进完备化，并赋予从 $\mathbb{Z}[T]_\square$诱导的结构。事实上，这是因为 $\mathbb{Z}[T]_\square \otimes_{\mathbb{Z}_\square} -$ 与极限可交换，因而也与 I-进完备化可交换。
- 假设 $A = (R, R^+)$ 是一个 Tate Huber 对，也就是说，R 是一个带有伪一致化元 π的 Banach 代数。那么，$A[T]_\square = A\langle T\rangle_\square = (R\langle T\rangle, R^+\langle T\rangle)_\square$是 (R, R^+) 上单变量的经典 Tate 代数。这由 And21，命题 3.14] 得出，因为 R 是原离散 solid 阿贝尔群的滤过余极限。

为准备证明 Serre 对偶，我们先给出 solid Tate 代数的关键局部计算。

命题 7.1.11。 凝固环的映射 $f\colon \mathbb{Z}_\square \to \mathbb{Z}[T]_\square$ 是上同调光滑的，其对偶化层同构于 $\mathbb{Z}[T][1]$。

证明。 设 $\mathbb{G}_{a,\square} :=$ AnSpec $\mathbb{Z}[T]_\square$，并记 $S =$ AnSpec $\mathbb{Z}_\square$。根据定义，我们要证明核 $\mathbb{Z}[T] \in$ D($\mathbb{Z}[T]_\square$) $=$ Fun$^{\kappa_s}(S, \mathbb{G}_{a,\square})$ 是一个右伴随。由引理 6.3.6 的全忠实性，只需证明拉回映射 $f^*\colon$ D($\mathbb{Z}_\square$) $\to$ D($\mathbb{Z}[T]_\square$) 有一个 $\mathbb{Z}_\square$-线性左伴随 $f_\natural$。我们断言，存在函子 D($\mathbb{Z}_\square$) $\to$ D($\mathbb{Z}[T]_\square$) 的自然同构

$$f^* = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{Z}_\square}(\mathbb{Z}[T]^\vee, -)$$

其中 $\mathbb{Z}[T]^\vee =$ Hom函子$_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[T], \mathbb{Z})$。事实上，单位 $\mathbb{Z}[T]^\vee \to \mathbb{Z}$ 的对偶给出一个自然变换 $M \to$ Hom函子$_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[T]^\vee, M)$，适用于 $M \in$ D($\mathbb{Z}_\square$)。我们断言，Hom函子$_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[T]^\vee, M)$ 是 $\mathbb{Z}[T]$-solid，且自然映射

$$f^*M \to \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{Z}_\square}(\mathbb{Z}[T]^\vee, M)$$

是一个同构。为证明该断言，注意到 $\mathbb{Z}[T]^\vee \cong \prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}$ 是一个紧射影 solid 阿贝尔群，因此函子 Hom函子$_{\mathbb{Z}_\square}(\mathbb{Z}[T]^\vee, -)$ 与极限和余极限相交换。因此，只需考虑 $M = \mathbb{Z}$ 的情形；此时我们有

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{Z}_\square}(\mathbb{Z}[T]^\vee, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[T]$$

正如所需。

现在，已知 $f^* =$ Hom函子$_{\mathbb{Z}_\square}(\mathbb{Z}[T]^\vee, -)$，我们看到它有一个左伴随，由 $f_\natural N = \mathbb{Z}[T]^\vee \otimes_{(\mathbb{Z}[T], \mathbb{Z})_\square} N$ 给出，适用于 $N \in$ D($\mathbb{Z}[T]_\square$)，从而证明了 f 的光滑性。

最后，为了计算对偶化层，我们来回顾一下 $f_!$的显式描述。我们有一个分解

$$\mathbb{G}_{a,\square} \xrightarrow{j} \mathbb{G}_a \xrightarrow{p} S$$

其中 $\mathbb{G}_a = \mathbf{AnSpec}(\mathbb{Z}[T], \mathbb{Z})_{\square}$。因此， $f_! = p_* j_!$，函子 p_* 是一个遗忘函子；又由于 j 是一个开浸入，其补元是幂等代数 $\mathbb{Z}((T^{-1}))$，函子 $j_!$ 由下式给出

$$j_! N = \mathrm{fib}(\mathbb{Z}[T] \to \mathbb{Z}((T^{-1}))) \otimes_{(\mathbb{Z}[T],\mathbb{Z})_{\square}} N$$

对于 $N \in \mathrm{D}(\mathbb{Z}[T]_{\square})$。注意，作为 $\mathbb{Z}[T]$-模，我们有一个同构 $\mathrm{fib}(\mathbb{Z}[T] \to \mathbb{Z}((T^{-1}))) \cong \mathbb{Z}[T]^{\vee}[-1]$。因此，我们有一个函子同构 $f_! \cong f_!\mathbb{Z}[-1]$，从 $\mathrm{D}(\mathbb{Z}[T]_{\square})$ 到 $\to \mathrm{D}(\mathbb{Z}_{\square})$。取右伴随后，这意味着 $f^*[1] \cong f^!$ 从而证明 $f^!\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}[T][1]$，正如所需。□

7.2. **凝固谱**。每个 solid Huber 环都可以构造一个凝固谱。一般来说，其定义相当不显式，其存在也仅仅得益于形式上的理由。事实上，adic 谱将定义为由 solid Huber 环的有理局部化生成的 locale 所对应的谱空间，这通过 Stone 对偶定理 5.1.13 得出。稍后在命题 7.2.12 和例 7.3.4 中，我们将通过考察一些具体例子，了解这个凝固谱与代数几何、形式几何和 adic 几何中出现的拓扑谱之间的关系。

定义 7.2.1。 固体 Huber 环 $A \to B$ 的态射称为标准有理局部化，如果存在生成单位理想的元素 f_1、……、f_n，$g \in A$，以及一个 A-代数同构

$$B \cong A\left(\frac{f_1, \ldots, f_n}{g}\right)_{\square} := A[\frac{1}{g}] \otimes_{A[T_1,\ldots,T_n]} A[T_1, \ldots, T_n]_{\square}$$

其中 $T_i \mapsto \frac{f_i}{g} \in A[\frac{1}{g}]$。固体 Huber 环 $A \to B$ 的态射称为有理局部化，如果它是有限个迭代标准有理局部化的复合。

备注 7.2.2。 我们强调，与经典理论不同，固体 Huber 环的两个标准有理局部化的复合并不会显然地成为标准有理局部化。例如，若 $A = \left(\mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}_{\square}} \mathbb{Z}_{\square}[S]\right)[T]$，其中 S 是一个无限轻射有限集，给定任意一个在 T 上次数无界的元素 $f \in \mathbb{Z}[T]_{\square}[S] \in A\left(\begin{smallmatrix} T \\ 1 \end{smallmatrix}\right)_{\square} =: A'$，那么有理局部化 $A \to A' \to A'\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ f \end{smallmatrix}\right)_{\square}$ 的复合不应是标准的（其背后的启发式理由是，不可能用越来越拓扑幂零的元素逼近 f，而这些元素来自 A）。尽管如此，在一些合理条件下，例如 A 是离散的、是经典 Tate Huber 环，或是 [ABLB+25]意义下的*Gelfand* 环，有理局部化与标准有理局部化是一致的，见命题 7.2.12 和注 7.2.13。

引理 7.2.3。 设 $f\colon A \to B$ 是一个有理局部化，则 f 给出一个解析叠之间的开映射。此外，有理局部化在基变换和复合下稳定。

证明。 只需证明标准有理局部化在固体 Huber 环中给出开映射。映射 f 显然是幂等的，因为它是幂等映射的复合，即 Zariski 局部化 $A \to A[\frac{1}{g}]$ 和对元素 $\frac{f}{g}$ 进行的 solid 化。特别地，$f^*\colon \mathrm{D}(A) \to \mathrm{D}(B)$ 是一个局部化。因此，要证明 f 是开浸入，只需证明 f^* 存在一个 $\mathrm{D}(A)$-线性左伴随 $f_!$。为此，我们断言自然映射

$$C := A \otimes_{\mathbb{Z}_{\square}} \mathbb{Z}[T_1, \ldots, T_n]_{\square} /^{\mathbb{L}} (gT_i - f_i) \to B \tag{7.2.1}$$

是一个同构。事实上，得益于命题 7.1.11 和引理 6.3.5，环 C 是由 suave 映射在 A 上的复合，而同构 $C \cong B$ 表明 f^*存在线性左伴随。接下来证明该断言。由于 $(f_1、\ldots\ldots、f_n、g)$ 生成单位理想，因此存在一个线性组合 $\sum_i a_i f_i + bg = 1$。于是，在环 C中有等式 $\sum_i a_i g T_i + bg = 1$，由此得到 $g(\sum_i a_i T_i + b) = 1$。特别地，$g \in C$是可逆的，因此 $C = C[\frac{1}{g}] = B$。

有理局部化的稳定性从定义中显而易见。 □

引理 7.2.4。 设 $A \to B$ 是固体 *Huber* 环的有理局部化，$D \in \mathrm{D}(A)$ 是 A 在 B 的补元上的幂等代数。那么，D 作为 $\mathrm{D}(A)$-模是紧对象。

证明。 这是因为遗忘函子 $\mathsf{D}(B) \to \mathsf{D}(A)$ 与余极限可交换，而且 $\mathsf{D}(A)$ 的单位是紧对象。□

引理 7.2.5. 设 $A \to B \to C$ 是一个解析环三角形。以下结论成立：

(1) 解析环的紧态射在有限余极限和基变换下稳定。*(2)* 设 B 是一个紧 A-代数。那么， C 是一个紧 A-代数，当且仅当它是一个紧 B-代数。

证明. 解析环的紧态射在基变换和有限余极限下稳定，这一点显而易见，留给读者验证。设 B 作为 A-代数是紧的，并设 C 作为 B-代数是紧的。令 $D = \varinjlim_i D_i$ 为 A-代数的一个滤过余极限，我们希望证明自然映射.....

$$\varinjlim_i \mathrm{Map}_{\mathrm{AnRing}_{A/}}(C, D_i) \to \mathrm{Map}_{\mathrm{AnRing}_{A/}}(C, D)$$

是一个等价。考虑函子映射 $f\colon \mathsf{Map}^{\mathrm{AnRing}_{A/}}(C, -) \to \mathsf{Map}^{\mathrm{AnRing}_{A/}}(B, -)$，目标与滤过余极限交换。因此，要证明源与滤过余极限交换，只需证明纤维与之交换。因此，不失一般性，我们可以假设 D_i 是 B-代数；此时， f 在点 $B \to D$ 处的纤维恰为 $\mathsf{Map}^{\mathrm{AnRing}_{B/}}(C, -)$，根据假设，它与余极限交换。

反之，假设 C 作为 A-代数是紧对象，并设 $D = \varinjlim_i D_i$ 是 B-代数的滤过余极限。我们有一个笛卡尔方块

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Map}_{\mathrm{AnRing}_{B/}}(C, D_i) & \longrightarrow & \mathrm{Map}_{\mathrm{AnRing}_{A/}}(C, D_i) \\ \downarrow & & \downarrow \\ * & \longrightarrow & \mathrm{Map}_{\mathrm{AnRing}_{A/}}(B, D_i) \end{array}$$

其中下方的水平映射是 D_i 的 B-代数结构。由于滤过余极限与拉回可交换，且 C 与 B 作为 A-代数是紧对象，我们推出 $\varinjlim_i \mathsf{Map}^{\mathrm{AnRing}_{B/}}(C, D_i) = \mathsf{Map}^{\mathrm{AnRing}_{B/}}(C, D)$，从而证明 C 作为 B 代数是紧对象，即为所求。□

引理 7.2.6. 设 $A \to B$ 是固体 *Huber* 环的有理局部化，则 B 是紧对象A-代数。

证明. 由引理 7.2.5，只需证明 A 的标准有理局部化是一个紧对象 A-代数。这由标准有理 A-代数的表示 (7.2.1)、命题 7.1.5 (2) 中凝固环 $\mathbb{Z}[T]_\square$ 的紧性，以及多项式代数$\mathbb{Z}[T]$的紧性得出。□

定义 7.2.7。 设 A 是一个凝固 Huber 环，$\mathsf{Sm}(\mathsf{D}(A))$ 是其 smashing 谱。考虑由有理局部化在有限极限与余极限下生成的全子范畴 $\mathscr{C}_A \subset \mathsf{Sm}(\mathsf{D}(A))$。那么 $\mathscr{C}_A$ 是定义 5.1.11 中的分配格，并且根据 Stone 对偶（定理 5.1.13）， $\mathscr{C}_A$ 是某个谱空间 $\mathsf{Spec}^\square(A)$ 的拟紧开子空间所构成的范畴（在唯一的谱同构意义下唯一），我们称其为 A 的凝固谱。令 $X = \mathsf{Spec}^\square(A)$；给定一个生成单位理想的序列 $(f_1, \dots, f_n, g)$，我们将 $X(\frac{f_1, \dots,}{g} \frac{f_n}{})$ 或 $\{|f_i| \leq |g| \neq 0\}$ ~~记~~作与标准有理局部化 $A \to A\big(\frac{f_1, \dots,}{g} \frac{f_n}{}\big)$ 相对应的 X 的拟紧开子空间。

备注 7.2.8. 给定 $A \to B$ 固体环的一个态射，存在一个从 smashing 谱 $\mathsf{Sm}(\mathsf{D}(B)) \to \mathsf{Sm}(\mathsf{D}(A))$ 出发的自然态射。由于基变换保持有理局部化，Stone 对偶

产生一个自然的谱空间交换方形

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Sm}(\mathrm{D}(B)) & \longrightarrow & \mathrm{Spec}^{\square} B \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Sm}(\mathrm{D}(A)) & \longrightarrow & \mathrm{Spec}^{\square} A. \end{array}$$

此外，由于沿 $F\colon \mathrm{Sm}(\mathrm{D}(B)) \to \mathrm{Spec}^{\square} B$ 的拉回保留并诱导拟紧开子空间的单态射，映射 F 是 locale 的满射。

凝固谱的构造与滤过余极限相容。

引理 7.2.9. 设 $A = \varinjlim_i A_i$ 是固体 ***Huber*** 环的一个滤过余极限。那么自然映射 $\mathrm{Spec}^{\square}(A) \to \varprojlim_i \mathrm{Spec}^{\square}(A_i)$ 是谱空间之间的同胚。此外，如果 $A \to B$ 是一个有理局部化，则存在某个指标 i 以及一个有理局部化 $A_i \to B_i$，使得$B = B_i \otimes_{A_i} A$。

证明。令 $\mathrm{Op}^{\mathrm{rat}}(A_i)$ 为 $\mathrm{Spec}^{\square}(A_i)$ 的有理开子空间所成的偏序集。利用 Stone 对偶，只需证明我们有一个等价

$$\varinjlim_i \mathrm{Op}^{\mathrm{rat}}(A_i) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Op}^{\mathrm{rat}}(A)$$

该偏序集等价由基变换给出。为此，只需证明任意有理局部化 $A \to B$ 都来自某个 A_i 的有理局部化（如引理中所述）；并且，给定一个环 A_i 和两个有理局部化 $A_i \to B_{i,1}$，$B_{i,2}$，使得 $B_{i,1} \otimes_{A_i} A = B_{i,2} \otimes_{A_i} A$，存在某个 $j \geq i$，使得 $B_{i,1} \otimes_{A_i} A_j = B_{i,2} \otimes_{A_i} A_j$。

根据归纳论证，只需证明标准有理局部化情形下的第一个断言：若 $A \to A(\frac{f_1,\dots,f_n}{g})$ 是一个标准有理局部化，那么存在某个指标 i，以及 A_i 中的元素 $(f_1',\dots,f_n',g')$ 映射到 $(f_1,\dots,f_n,g)$，且它们生成单位理想，那么 $A_i \to A_i(\frac{f_1',\dots,f_n'}{g})$ 就满足要求。

另一方面，根据引理 7.2.6，有理局部化是紧态射。假设 $A_i \to B_{i,1}, B_{i,2}$ 是两个有理局部化，它们在对 A 作基变换后相同。那么我们有一个同构

$$\varinjlim_{j \geq i} B_{i,1} \otimes_{A_i} A_j = \varinjlim_{j \geq i} B_{j,2} \otimes_{A_i} A_j.$$

由 $B_{i,k}$ 的紧性，存在某个 $j \geq i$，以及 A_i-代数的映射 $B_{i,1} \to B_{i,2} \otimes_{A_i} A_j$ 和 $B_{i,2} \to B_{i,1} \otimes_{A_i} A_j$。由于 $B_{i,k}$ 是幂等解析 A_i-代数，因此有 $B_{i,1} \otimes_{A_i} A_j = B_{i,2} \otimes_{A_i} A_j$，这就证明了我们想要的结论。□

凝固谱不依赖于环的动画结构和幂零理想。

引理 7.2.10。设 $A \to A'$ 是固体 ***Huber*** 环的一个态射，使得 $\pi_0(A) \to \pi_0(A')$ 具有幂零核。那么自然映射 $\mathrm{Spec}^{\square}(A') \to \mathrm{Spec}^{\square}(A)$ 是一个同胚，并将（标准）有理子空间对应起来。

证明。有理局部化 $A \to B$ 由 $A^{\triangleright}$上的未完备解析环结构诱导。根据未完备解析环结构对高阶同伦群（定理 4.4.1）和幂零理想（命题4.4.5）的独立性，即得此引理。□

在满足某些进完备条件时，凝固谱仅依赖于特殊纤维。

引理 7.2.11。设 A 是一个固态解析环，且 $I \subset \pi_0(A)$ 是一个有限生成理想，使得 A 是 I-进完备，并且下列条件之一成立：

(a) 存在一个有限子集 $S \subset A^+$，使得 $A = (A^{\triangleright}, S)_{\square}$。***(b)*** 商 $\pi_0(A)/I$ 是离散的。

设 $(f_1, \dots, f_n)$ 是 I 的一组生成元。那么凝固谱的自然映射

$$\mathrm{Spec}^{\square}(A/^{\mathbb{L}}(f_1, \dots, f_n)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Spec}^{\square}(A)$$

是一个识别有理局部化的等价。

证明。 通过一步归纳，我们可以不失一般性地假设 $I = (f)$ 由单个元素生成。设 $B = A/^{\mathbb{L}}(f)$，并记 $F\colon A \to B$。对于 solid Huber 环 C，令 $\mathrm{Op}^{\mathrm{rat}}(C)$ 为 $\mathrm{Spec}^{\square}(C)$ 的有理局部化的偏序集。我们想要证明自然映射

$$F^{-1}\colon \mathrm{Op}^{\mathrm{rat}}(A) \to \mathrm{Op}^{\mathrm{rat}}(B)$$

是一个等价。我们首先证明 F^{-1} 是满射。通过一步归纳，并且由于有理局部化作为开浸入保持 I-进完备模，只需证明它保持标准有理局部化。设 $(f_1, \dots, f_n, g)$ 为 B 中生成单位理想的元素，并设 $(f_1, \dots, f_n, \widetilde{g})$ 为到 A 的任意提升。由于 A 是 f- 进完备的，元组 $(f_1, \dots, f_n, \widetilde{g})$ 在 A 中生成单位理想，且 $A \to A\big(\frac{\widetilde{f}_1, \dots, \widetilde{f}_n}{\widetilde{g}}\big)$ 是一个有理局部化，其到 $\overline{B}$ 的基变换为 $B\big(\frac{f_1, \dots, f_n}{g}\big)$，从而证明了满射性。

现在，为了证明 F^{-1} 是单射，通过对标准有理局部化进行分层归约，只需证明以下事实：

i. 元素 $g \in A$ 可逆，当且仅当它在 B 中的像可逆。
ii. 元素 $g \in A$ 是 Solid，当且仅当它在 B 中的像是 Solid。

由于 A 是 f-进完备的，性质 (i) 显然成立。现在我们证明条件 (ii)。设$g \in A$，且它在 B 中的像是 Solid。我们要证明 $g \in A^+$，或者等价地，证明$\mathbb{Z}((T^{-1})) \otimes_{(Z[T],\mathbb{Z})_{\square}} A = 0$，其中 $T \mapsto g$。注意，我们有 $A \otimes_{(\mathbb{Z}[T],\mathbb{Z})_{\square}} \mathbb{Z}((T^{-1})) = (A \otimes_{\mathbb{Z}_{\square}} \mathbb{Z}[[T]])/^{\mathbb{L}}(gT - 1)$，并且根据假设， $B \otimes_{(\mathbb{Z}[T],\mathbb{Z})_{\square}} \mathbb{Z}((T^{-1})) = (B \otimes_{\mathbb{Z}_{\square}} \mathbb{Z}[[T]])/^{\mathbb{L}}(gT - 1) = 0$。

假设条件 (a) 成立，则由 [Man22b 引理 2.12.9] 可知，张量 $A \otimes_{\mathbb{Z}_{\square}} \mathbb{Z}[[T]]/^{\mathbb{L}}(gT - 1)$ 是 I-进完备的，并且由中山引理可得 $A \otimes_{\mathbb{Z}_{\square}} \mathbb{Z}[[T]]/^{\mathbb{L}}(gT - 1)$ 如所期望为零。若条件 (b) 成立，则由 [Man22b 命题 2.12.10 (ii)] 可知 $A \otimes_{\mathbb{Z}_{\square}} \mathbb{Z}[[T]]/^{\mathbb{L}}(gT - 1)$ 是 I-进完备的，从而由中山引理可知其为零。□

在某些特殊情形下，凝固谱可以用更经典的环的谱来理解：

命题 7.2.12. 以下成立：

(1) 设 (A, A^+) 为离散动画 *Huber* 对。则我们有谱空间的自然满射 $\mathrm{Spa}(A, A^+)^{\mathrm{mod}} \to \mathrm{Spec}^{\square}((A, A^+)_{\square})$，它与推论 *5.6.11* 中 *smashing* 谱上的映射相容。*(2)* 设 (A, A^+) 为层化 *Tate Huber* 环。则存在自然同胚 $\mathrm{Spec}^{\square}((A, A^+)_{\square}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Spa}(A, A^+)$。

证明。 对于 (1)，只需注意，定义 7.2.1 中的 $(A, A^+)_{\square}$ 的有理局部化，是通常意义下离散 adic 空间的有理局部化的特例。

对于第 (2) 部分，由于 (A, A^+) 是 Tate 的， [And21 命题 4.3] 表明，$\mathrm{Spa}(A, A^+)$ 的良好有理子空间族（在 [And21 定义 4.2] 的意义下）构成该拓扑的一个基。另一方面，对 [And21 命题 4.4] 的迭代蕴含：若 $U \subset \mathrm{Spa}(A, A^+)$ 是具有函数环 (A_U, A_U^+) 的良好有理子空间，则 $(A, A^+)_{\square} \to (A_U, A_U^+)_{\square}$是定义 7.2.1 中的有理局部化；具体而言，该命题表明，若 f、g 生成单位理想且 U 是轨迹 $\{|f| \leq |g| \neq 0\}$，则作为解析环有 $(A_U, A_U^+)_{\square} = (A, A^+)_{\square}(\frac{f}{g})_{\square\circ}$。因此，若 $U \subset \mathrm{Spa}(A, A^+)$ 是具有函数环 (A_U, A_U^+) 的一般开仿射空间，则映射 $(A, A^+)_{\square} \to (A_U, A_U^+)_{\square}$是解析环的开浸入，因为它沿开的良好有理局部化局部如此。借助 [And21 定理 4.1]，，将开仿射刚性空间 $U \subset \mathrm{Spa}(A, A^+)$ 送到 $\mathrm{D}((A_U, A_U^+)_{\square})$ 的函子满足解析下降，并且具有如下性质：对于

$U \subset \mathrm{Spa}(A, A^+)$ 任意开集，映射 $\mathrm{D}(A, A^+)_\square \to \mathrm{D}(U)$ 是开局部化（正如它对开仿射之基所成立的那样）。这定义了 locale 的一个态射 $\mathrm{Sm}(\mathrm{D}(A, A^+)_\square) \to \mathrm{Spa}(A, A^+)$。由构造以及凝固谱的定义，该函子通过一个映射分解

$$\mathrm{Sm}(\mathrm{D}(A, A^+)_\square) \to \mathrm{Spec}^\square((A, A^+)_\square) \to \mathrm{Spa}(A, A^+).$$

剩下要证明的是，映射 $\mathrm{Spec}^\square((A, A^+)_\square) \to \mathrm{Spa}(A, A^+)$ 是一个同胚，并且对应于有理局部化。但这由 Stone 对偶、完备 Huber 对到 [And21 的解析环中的全忠实嵌入（命题 3.34], ），以及如下事实可得：凝固环 $(A, A^+)_\square$ 的有理局部化来自 Tate Huber 对 (A, A^+) 的标准有理局部化，因为后者在复合下稳定。□

备注 7.2.13。在 [RC24] 中，我们引入了一个合适的子范畴，称为 $\mathbb{Z}((\pi))$ 上的有界环。有界环 A 有一个 †-幂零根基 $\mathrm{Nil}^\dagger(A)$，由范数为 0 的元素构成；商环 $A^{\dagger-\mathrm{red}} = A/\mathrm{Nil}^\dagger(A)$ 称为 A 的 †-约化。于是，自然映射 $\mathrm{Spec}^\square(A^{\dagger-\mathrm{red}}) \to \mathrm{Spec}^\square(A)$ 是一个同胚，并且对应于有理局部化。有界环也允许一致完备化 A^u。此外，若环 A 还是 Gelfand 环（定义见 [ABLB+25]），则 A^u 是一致 Tate Huber 环，并且存在自然同胚 $\mathrm{Spa}(A^u, A^{u,+}) = \mathrm{Spec}^\square(A^u) = \mathrm{Spec}^\square(A)$，对应于有理局部化。证明这些事实超出了本笔记的范围，我们将留待未来更新 [RC24] 时再作讨论。

引理 7.2.14. 设 $A \to B$ 是带有诱导解析环结构的固体 *Huber* 环的态射，使得 $\pi_0(A) \to \pi_0(B)$ 在底层环上是满射。设 $B \to B'$ 是 B 的有理局部化，则存在有理局部化 $A \to A'$ 使得 $B' = A' \otimes_A B$。此外，若 $B \to B'$ 是标准有理局部化，则我们可以选取 $A \to A'$ 为两个标准有理局部化的复合映射。

证明. 由归纳，只需对标准有理局部化证明该断言。设 $f_1, \ldots, f_n, g \in B$ 是生成单位理想的元素，并考虑有理局部化 $B' = B\left(\frac{f_1,\ldots,f_n}{g}\right)_\square^\sim$。考虑线性组合 $\sum_i a_i f_i + bg = 1$，并取 $\widetilde{a_i}$、f_i、b 和 $\widetilde{g}$ 到 A 的提升。设 $c = \sum_i \widetilde{a}_i f_i + b\widetilde{g}$。我们断言有理局部化的复合映射

$$A \to A\left(\frac{c^2, 1}{c}\right)_\square \to A\left(\frac{c^2, 1}{c}\right)_\square \left(\frac{\widetilde{f_1}, \ldots, \widetilde{f_n}}{\widetilde{g}}\right)_\square =: A'$$

成立。事实上，有理局部化 $A \to A\left(\frac{c^2,1}{c}\right)_\square$ 恰好是沿着 $\mathbb{Z}[T] \to \mathbb{Z}[T^{\pm 1}]_\square$ 对由 c 描绘的映射 $\mathbb{Z}[T] \to B$ 作基变换。由于 c 在 B 上可逆，我们有一个在 π_0 上满射且带有诱导结构的自然映射

$$A(\frac{c^2, 1}{c})_\square \to B.$$

由此映射可清楚看出，$A' \otimes_A B = B'$ 正如所需。 □

我们以几个稍后会派上用场的引理结束本节。

引理 7.2.15. 设 A 是一个 *solid Huber* 环，且 $(f_1, \ldots, f_n) \in A$ 是生成单位理想的元素。那么标准有理局部化

$$A \to A\left(\frac{f_1, \ldots, f_n}{f_i}\right)_\square$$

对于 $i = 1, \ldots, n$ 构成 $\mathrm{Spec}^\square(A)$ 的开覆盖。

证明。考虑一个线性组合 $\sum_{i=1}^n a_i f_i = 1$，并令 $R = \mathbb{Z}[X_1, \dots X_m, T_1, \dots, T_n]/(\sum_i X_i T_i - 1)$ 带有从 $\mathbb{Z}_\square$ 诱导的解析环结构。我们有一个 solid Huber 环的态射

$$R \to A$$

发送 $X_i \mapsto a_i$ 和 $T_i \mapsto f_i$。然后，通过基变换，我们可以不失一般性地假设 $A = R$。定理由以下事实推出：形如 $R\left(\frac{f_1,\dots,f_n}{f_i}\right)$ 的有理局部化覆盖 adic 谱 $\mathrm{Spa}(R, \mathbb{Z})$（见 [CS19，引理 10.4]），以及离散 adic 空间上的拟凝聚层范畴满足下降（[CS19，定理 9.8]）。□

7.3. **Solid Huber 叠**。本节介绍 solid Huber 叠和 solid adic 空间的范畴。我们还构造了从概形、形式概形、离散 adic 空间和 Tate adic 空间到这些范畴的一些函子。

定义 7.3.1。令 $\mathrm{Aff}^{\mathrm{Hub}} \subset \mathrm{AnStk}^{\mathrm{aff}}_{\mathbb{Z}_\square}$ 为 $\mathbb{Z}_\square$ 上由 solid Huber 环的解析谱生成的仿射解析叠的全子范畴。令 $\mathrm{SolHubStk} := \mathrm{AnStk}(\mathrm{Aff}^{\mathrm{Hub}})$ 为定义 6.3.16 中由 $\mathrm{Aff}^{\mathrm{Hub}}$ 生成的解析叠范畴。我们称 SolHubStk 为*solid Huber* 叠范畴。给定一个固体 Huber 环 $A \in \mathrm{Ring}^{\mathrm{Hub}}_{\mathbb{Z}_\square}$，令 $\mathrm{AnSpec}(A) \in \mathrm{SolHubStk}$ 为由 A 表示的对象。

在 solid Huber 叠中，我们发现了固体赋值空间范畴。

定义 7.3.2. 令 $\mathrm{Aff}^{\mathrm{Hub}}$ 赋予由有理局部化 $\{\mathrm{AnSpec}(B_i) \to \mathrm{AnSpec}(A)\}_i$ 构成覆盖的格罗滕迪克拓扑，其中 $\{\mathrm{Spec}^\square B_i \to \mathrm{Spec}^\square A\}$ 联合满射。我们称此格罗滕迪克拓扑为 $\mathrm{Aff}^{\mathrm{Hub}}$上的固体阿迪克拓扑。令 $\widetilde{\mathcal{X}}$ 为由此格罗滕迪克拓扑定义的∞-拓扑斯。

(1) 根据构造，函子 $\mathrm{Spec}^\square(-) : \mathrm{Ring}^{\mathrm{Hub}}_{\mathbb{Z}_\square} \to \mathrm{Top}$ 将 solid Huber 环映至拓扑空间，并将有理覆盖映至 Top 中的开覆盖。因此，我们有一个自然的左 Kan 延拓 $|-|^\square : \mathcal{X} \to \mathrm{Top}$，称为 solid Huber 叠的底层凝聚谱。具体而言，若 $X \in \mathcal{X}$ 可写为余极限 $X = \varinjlim_i \mathrm{AnSpec}(A_i)$，其中 A_i 是 solid Huber 环，则 $|X|^\square = \varinjlim_i \mathrm{Spec}^\square(A_i)$，这里最后一个余极限是在拓扑空间中取的。(2) 令 $X \in \widetilde{\mathcal{X}}$，并令 $U \subset |X|^{\mathrm{solid}}$ 为一个开子空间。我们定义子叠 $X_U \subset X$ 为这样的浸入：对于 solid Huber 环 A，其 A-点是满足 $\mathrm{Spec}^\square(A) \to |X|^\square$ 经由 U分解的映射 $\mathrm{AnSpec}(A) \to X$。若一个态射 $Y \to X$ 等价于一个映射 $X_U \to X$，其中 $U \subset |X|^\square$ 为开，则称其为开浸入。(3) 若对象 $X \in X$ 存在一个开覆盖 $U_i \to X$，使得 U_i 由 solid Huber 环余表示，则称之为固体赋值空间。令 $\mathrm{SolAdic} \subset X$ 为固体赋值空间的全子范畴。

备注 7.3.3。启发式地，我们可以将一个固态adic空间看作一组数据 $X = (|X|^\square, \mathscr{O}_X)$，其中 $|X|^\square$ 是一个拓扑空间，而 $\mathscr{O}_X$ 是取值于固态Huber解析环的层，并且存在 X 的一个开覆盖 $\{U_i\}$，使得 $U_i = \mathrm{Spec}^\square(\mathscr{O}_X(U_i))$。

例 7.3.4. 下面列出一些实际中会出现的固态 Huber 叠示例：

(1) 考虑离散环（即：Ring[16]）。函子 $R \mapsto R_\square$ 发送为 solid Huber 环的函子。该函子保持余极限，并将 Zariski开局部化发送为 solid Huber 环的有理局部化。特别地，对于 A 一个离散环，我们有一个

[16]为了使下面的构造严谨，我们需要取固态Huber解析环的一个小子范畴。例如，我们可以固定一个不可数正则基数 κ，并处理 κ-紧对象固态 Huber 环。在本文其余部分，我们将忽略这些集合论问题。

谱空间的商映射 $\mathrm{Spec}^{\square}(A_{\square}) \to \mathrm{Spec}(A)$。因此，它自然提升为一个函子

$$(-)_{\square} \colon \mathrm{Sch} \to \mathrm{SolidAdic}$$

从概形到我们称为凝固化函子的 solid adic 空间。

(2) 设 $A \in \mathrm{Ring}^{\delta}$ 是一个离散动画环，它对于由有限生成理想 $I \subset \pi_0(A)$ 给出的 I-进拓扑是完备的。设 $\mathrm{Ring}_A^{\wedge_I}$ 为 I-进完备动画 A-$\widehat{}$代数的范畴。设 A 为离散凝聚环 $A(*)$ 的 I-进完备化所得到的凝固环。我们有一个自然函子 $\frown(-)\square \colon \mathrm{Ring}_A^{\wedge_I} \to \mathrm{Ring}^{\mathrm{Hub}}_{\widehat{A}_{\square}}$，它将 B 映至 $B(*)^{\wedge_I}_{\square}$，也就是说，映至由离散凝聚环 $B(*)\frown$ 的 I-进完备化所给出的凝固环，并赋予由 $B(*)_{\square}$ 诱导的 solid 结构。然后，函子 $(-)\square$ 保持余极限，并将形式谱 $\mathrm{Spf}(B) = \mathrm{Spec}(B/I)$ 的 Zariski 局部化映至 $B_{\square}$ 的有理局部化。由引理 7.2.11 (b)，我们甚至有一个谱空间之间的商映射

$$\mathrm{Spec}^{\square}(\widehat{B}_{\square}) \to \mathrm{Spf}(B).$$

此函子产生一个映射

$$\widehat{(-)}_{\square} \colon \mathrm{FSch}^I_A \to \mathrm{SolAdic}_{\widehat{A}_{\square}}$$

$\widehat{}$从 A 上的 I-adic 形式概形到 $\mathrm{AnSpec}(A_{\square})$上的 solid 赋值空间。

（3）设（A，A^+）是一个 Tate层化Huber环。根据命题 7.2.12（2），（A，A^+）的有理局部化产生 solid Huber 环（A，A^+）$_{\square}$的有理局部化。根据命题 7.2.12，我们甚至有一个等价

$$\mathrm{Spec}^{\square}(A, A^+) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Spa}(A, A^+)$$

识别有理局部化。这产生了一个函子

$$\mathrm{TateAdic} \to \mathrm{SolAdic}$$

从层化Tate赋值空间的经典范畴到 solid 赋值空间的范畴。

（4）最后，设 $\mathrm{Ring}^{\mathrm{Hub},\,\delta} \subset \mathrm{Ring}^{\mathrm{Hub}}$ 为离散 Huber 环的全子范畴，即由满足 $A^{\triangleright}$ 离散的 solid Huber 环 A 构成的全子范畴。根据 Man22b 的命题 2.9，[$\mathrm{Ring}^{\mathrm{Hub},\,\delta}$ 等价于定义 5.5.1 中的离散 Huber 对范畴。根据定理 5.6.8，通常意义下 Huber 的开子空间 $U \subset \mathrm{Spa}(A, A^+)$ 所对应的任意经典有理局部化（A，A^+）$\to$（A_U，A_U^+）都是解析环意义下一个闭局部化和一个开局部化的复合。因此，定理 5.6.8 证明了：如果 $\{U_i \to \mathrm{Spa}(A, A^+)\}$ 是 Huber 意义下的有理覆盖，那么 solid Huber 环的映射 $\{(A, A^+)_{\square} \to (A_{U_i}, A_{U_i}^+)_{\square}\}_i$ 构成一个 !-覆盖，并且可由闭覆盖与开覆盖的复合加以细化。这表明，自离散仿射Huber空间到 solid Huber 叠的自然函子 $\mathrm{Aff}^{\mathrm{Hub},\,\delta} \to$SolHubStk 可延拓为一个函子

$$\mathrm{Adic}^{\delta} \to \mathrm{SolHubStk}$$

从离散 adic 空间范畴到 solid Huber 叠范畴。注意，这个函子并不经由 solid 赋值空间分解，因为在解析环层面，Huber 意义下并非所有有理局部化都是开浸入，例如，局部化 $(\mathbb{Z}[T], \mathbb{Z}) \to (\mathbb{Z}[T^{\pm 1}], \mathbb{Z})$ 就不是。

7.4. 解析环的余切复形。 正如预期，解析环也有余切复形的类似理论，其本质上与动画化或连通交换代数的理论完全相同，例如见 [Lur04，第 3.2 节和第 3.3], [Lur17，第 7.3 节和第 7.4] and[Lur18，第 17 章和第 25] 章。本节将简要回顾解析环的余切复形理论，仅陈述对后续各节至关重要的主要特征。

定义 7.4.1。设 $f\colon A \to B$ 是解析环态射，并设 $M \in \mathrm{D}_{\geq 0}(B)$ 是一个连通的 B-模。考虑平方零扩张 $B \oplus M$，将其视为一个动画化的 B-代数（由静态情形动画化得到），并赋予其从 B 诱导的解析环结构。我们将 A-线性导子 B，其取值于 M，组成的 anima 记作 $\mathrm{Der}_A(B, M)$；它是 A-代数态射 $B \to B \oplus M$ 组成的 anima，其中每个态射与增广映射$B \oplus M \to B$ 复合后均为恒等映射。

f 的余切复形 是 B-模 $\mathbb{L}_{B/A} \in \mathrm{D}_{\geq 0}(B)$，它对应的函子将$M \in \mathrm{D}_{\geq 0}(B)$映至 $\mathrm{Der}_A(B, M)$。我们用 $(\mathrm{id}\ d)\colon B \to B \oplus \mathbb{L}_{B/A}$表示取值于 $\mathbb{L}_{B/A}$的 B 的泛 A-线性导子。

备注 7.4.2。(1) 设 $A \to B$ 是解析环态射。函子 $M \mapsto \mathrm{Der}_A(B, M)$ 保持极限且可及，因此根据伴随函子定理 [Lur09, Corollary 5.5.2.9]，它由 $\mathrm{D}_{\geq 0}(B)$ 中的一个对象所对应。这说明定义 7.4.1 中余切复形的存在性。

(2) 令 $\mathrm{Mod}_{\geq 0} \to \mathrm{AnRing}$ 为与如下函子相关联的余笛卡尔纤维化：该函子将解析环 A 映至其连通 A-模的范畴 $\mathrm{D}_{\geq 0}(A)$。利用 [Lur17, 第7.3节.2] 的相对伴随形式体系，可以函子性地构造相对余切复形，作为一个函子 $\mathrm{Fun}(\Delta^1, \mathrm{AnRing}) \to \text{Mod over } \mathrm{Fun}(\{1\}, \mathrm{AnRing}) = \mathrm{AnRing}$，它将态射 $A \to B$ 映至对 $(B, \mathbb{L}_{B/A})$。

余切复形满足预期的稳定性性质：

引理 7.4.3。*(1)* 设 $A \to B$ 和 $A \to A'$ 是带有推出 $B \to B'$ 的解析环态射。则自然映射

$$B' \otimes_B \mathbb{L}_{B/A} \xrightarrow{\sim} \mathbb{L}_{B'/A'}$$

是一个等价。

(2) 若 $A \to B$ 是 AnRing 中由态射 $\{A_i \to B_i\}$ 构成的图表的余极限，则自然映射

$$\varinjlim_i B \otimes_{B_i} \mathbb{L}_{B_i/A_i} \to \mathbb{L}_{B/A}$$

由备注 *7.4.2 (2)* 给出的映射是一个等价。

(3) 设 $A \to B \to C$ 是解析环的一个三角形。则存在一个自然的 C-模纤维序列

$$C \otimes_B \mathbb{L}_{B/A} \to \mathbb{L}_{C/A} \to \mathbb{L}_{C/B}$$

(4) 设 $A \to A'$ 是解析环的幂等映射。那么 $\mathbb{L}_{A'/A} = 0$。

证明。(1)–(3) 的证明由余切复形的定义可直接得出，留给读者完成。对于 (4)，注意到 $A' = A' \otimes_A A'$，因此

$$\mathbb{L}_{A'/A} = (A' \otimes_A A') \otimes_{A'} \mathbb{L}_{A'/A} = \mathbb{L}_{(A' \otimes_A A')/A'} = \mathbb{L}_{A'/A'} = 0.$$

□

例 7.4.4。下面我们给出一些解析环态射的余切复形的例子。我们将看到，在许多情况下，我们得到的正是经典上所谓的拓扑环态射的连续余切复形。

(1) 设 $A^{\mathrm{cond}} \to B^{\mathrm{cond}}$ 是赋予平凡解析环结构的离散动画环的态射。则 $\mathbb{L}_{B^{\mathrm{cond}}/A^{\mathrm{cond}}} = \mathbb{L}_{B/A}$ 也是离散的，并且与将 $A \to B$ 视为离散凝聚 B-模时的经典余切复形一致。事实上，若 M 是连通的 B-模，则凝聚 A-代数态射的 anima $B \to B \oplus M$与离散 A-代数态射的 anima $B \to B \oplus M$(∗)一致。

(2) 设 $A \to B$ 是解析环的态射，并考虑分解 $A \to B_{A/} \to B$，其中 $B_{A/}$ 具有由 A诱导的结构。由于 $B_{A/} \to B$ 是幂等的，我们有

$$\mathbb{L}_{B/A} = B \otimes_{B_{A/}} \mathbb{L}_{B_{A/}/A}.$$

类似的论证表明 $\mathbb{L}_{B/A} = \mathbb{L}_{B/A^{\triangleright,\ \mathrm{cond}\blacksquare}}$

(3) 有 $\mathbb{L}_{\mathbb{Z}[T]_\square/\mathbb{Z}_\square} \cong \mathbb{Z}[T]$，也就是说，这是由基变换以及上面的 (1) 和 (2) 得出的，因为$\mathbb{L}_{(\mathbb{Z}[T],\mathbb{Z})_\square/\mathbb{Z}_\square} \cong \mathbb{Z}[T]$并且 $(\mathbb{Z}[T], \mathbb{Z})_\square \to \mathbb{Z}[T]_\square$是幂等的。特别地，若 A是一个 solid Huber 环且 $A[T]_\square = A \otimes_{\mathbb{Z}_\square} \mathbb{Z}[T]_\square$，则有 $\mathbb{L}_{A[T]_\square/A} \cong A[T]^{\triangleright}_{\square\blacksquare}$

(4) 设 R 是一个带有从 $\mathbb{Z}_\square$诱导的解析环结构的凝固动画环。假设对于 $I \subset \pi_0$， R 是导出 I- 进完备的，其中 R 是一个有限生成理想。设 $R\langle T\rangle$ 是 $R[T]$ 的导出 I- 完备化。由于凝固张量积保持 I-进完备模，因此 $R[T] \to R\langle T\rangle$ 是一个幂等态射，从而有 $\mathbb{L}_{R\langle T\rangle/R} \cong R\langle T\rangle$。这就恢复了 I-完备化余切丛。

具有标准的 解析环余切复形的连通性估计 s.

引理 7.4.5。 设 A 是一个解析环， M 是一个 n-连通的 A-模，定义在 $n \geq 1$上。若 $n \geq 1$，则 $\mathrm{Sym}_A^m M$是$(m+n-1)$-连通的。若 $n \geq 2$，则 $\mathrm{Sym}_A^m M$是$(n+2m-2)$-连通的。若 A定义在 $\mathbf{Q}$ 上，且 $n \geq 0$ ，则 $\mathrm{Sym}_A^m M$ 是 nm-连通的。

证明。根据 [Lur18，命题 25.2.4， 1] 我们知道，该断言对离散动画环成立。因此，它对凝聚 anima 的拓扑斯中的动画环也显然成立。由于 Sym_A^m 是 $\mathrm{Sym}_{A^\triangleright}^m$的 A-完备化，而 A-完备化保持连通模，因此可推出引理的第一和第二个断言。若进一步假设 A 定义在 $\mathbf{Q}$上，则 Sym_A^m 是 m 重张量积 $M^{\otimes_A m}$ 在 Σ_n 作用下的商，而该张量积是 nm-连通的。由于余极限保持连通对象，我们由此推出第三个断言。□

推论 7.4.6。 设 A 为解析环， M 为 $n \geq 0$上的 n-连通 A-模。则对于 $m \geq 1$， $\bigwedge_A^m M$ 是（$n+m-1$）-连通的。若 A 定义在**有理数域** 上，则它是 nm-连通的。

证明。 由引理 7.4.5 可知，$(\bigwedge^m M)[m] = \mathrm{Sym}_A^m(M[1])$ 是 $(n+1+2m-2)$-连通的，因此 $\bigwedge^m M$是 $(n+m-1)$-连通的。若 A定义在**有理数域** 上，则由 $(\bigwedge^m M)[m] = \mathrm{Sym}_A^m M[1]$ 是 $(n+1)m$-连通这一事实可得该估计。□

命题 7.4.7。 设 $f\colon\ A \to B$ 是带有诱导解析环结构的解析环态射。设 $d\colon\ B \to \mathbb{L}_{B/A}$ 为万有导子，复合映射 $A \to B \to \mathbb{L}_{B/A}$ 为零，因此我们得到一个诱导映射 $\varphi_f\colon\ B \otimes_A \mathrm{cofib}(f) \to \mathbb{L}_{B/A}$。映射 φ_f在 π_0上是满射的；若$\mathrm{fib}(f)$是连通的，则$\mathrm{fib}(\varphi_f)$是2-连通的；若$\mathrm{fib}(f)$对于 $n > 0$是 n-连通的，则$\mathrm{fib}(\varphi_f)$ 是（$n+3$）-连通的。

如果 A 定义在**有理数域** 上，它甚至是 $2n$-连通的。

证明。 关于经典动画环的陈述见 [Lur18, 命题 25.3.6.1], ，而关于**有理数域**-代数的陈述则由 [Lur17, 定理 7.4.3.1] 得出（因为动画环与交换代数一致）。这一结论自动推广到凝聚 anima 的拓扑斯中，并由例 7.4.4 (2) 推广到解析环。□

推论 7.4.8。 设 $f\colon\ A \to B$ 是解析环的一个态射。那么， f 是同构，当且仅当 $\pi_0(A) \to \pi_0(B)$ 是同构（特别地， f 具有诱导解析环结构），且 $\mathbb{L}_{B/A} = 0$。

证明。 这直接由 [Lur18, 25.3.6.6] 得出。 □

解析环的平方零扩张与经典导出代数几何中的情形相同，参见 [Lur04，第 3 节。3] 以及 [Lur18，第 17.1 节。3]。我们有如下有用的引理。

引理 7.4.9. 设 $A \to B$ 为带有诱导解析环结构的解析环态射。假设 $\mathrm{fib}\ A^\triangleright \to B^\triangleright$ 对 $k > 0$ 是 k-连通的，并考虑万有导子 $d\colon B \to_\sim B \oplus \mathbb{L}_{B/A}$，并令 $\widetilde{B}$ 为作为拉回得到的相应平方零扩张

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{B} & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle d} \\ B & \xrightarrow{0} & B \oplus \mathbb{L}_{B/A}. \end{array}$$

$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$于是，映射 $f\colon A \to B$ 的纤维是$(k+1)$-连通的。

证明。 这由 [Lur04, 命题 3.3.6] 得出。 □

完备模的对称幂仍然完备。

引理 7.4.10。 设 A 是一个凝固环，$I \subset \pi_0(A)$ 是一个有限生成理想，并且 A 是导出的 I-进完备的。设 $M \in \mathrm{D}^{\geq 0}(A)^\wedge_I$ 是一个连通的导出 I-进完备模。那么对所有 $k \in \mathbb{N}$，$\mathrm{Sym}^k_A M$ 都是导出的 I-进完备的。

证明。 由于 M 是连通的，它可以表示为有限投射模的直和 $M = |P^\bullet|$ 的几何实现，其中 $S_{i,n}$ 是轻型赋形。由于 M 是导出的 I- 进完备的，并且取 I- 进完备化与连通对象的几何实现可交换（根据 [Lur17, 命题 1.2.4.5]，因为可以在上同调群层面检验 I-进完备化），因此有 $M = |P^\bullet{}^\wedge_I|$。于是，我们得到 $\mathrm{Sym}^k_A M = |\mathrm{Sym}^k P^\bullet{}^\wedge_I|$，因此只需证明 $\mathrm{Sym}^k P^\bullet{}^\wedge_I$ 是导出的 I-进完备的。由于导出的 I-进完备化与 $\aleph_1$-滤过余极限可交换，我们可以不失一般性地假设 $P = \bigoplus_{n\in N} A[S_n]$ 是有限投射模的可数直和。通过扩大 S（例如扩大到康托尔集），我们甚至可以假设 $P = A[S]^{\oplus_{\mathbb{N}}}$。因此，我们归结为以下情形

$$M = A[S]^{\widehat{\oplus}_{\mathbb{N},I}}.$$

考虑一个映射 $\mathbb{Z}[[X_1, \ldots, X_n]] \to A$，使得 I由 X_i的像生成，那么一个A-模是 I-进完备的，当且仅当其对 $\mathbb{Z}[[X_1, \ldots, X_n]]$ 的限制是 (X_i)-进完备的。由于 solid 张量积保持完备连通模（[Man22b, 命题 2.12.10]），我们有 $M = A \otimes_{\mathbb{Z}[[X_1,\ldots,X_n]]} N$，其中 N 是 $\mathbb{Z}[[X_1, \ldots, X_n]][S]$的若干副本的完备直和。由对称幂的函子性可知，$\mathrm{Sym}^k_A M = A \otimes_{\mathbb{Z}[[X_1,\ldots,X_n]]} \mathrm{Sym}^k_{\mathbb{Z}[[X_1,\ldots,X_n]]} N$。因此，再次使用 [Man22b, 命题 2.12.10]，不失一般性，我们可以假设 $A = \mathbb{Z}[[X_1, \ldots, X_n]]$，且 I 由 X_1、.....、 X_n 生成。此外，通过归纳论证，我们还可以将问题归结为 $A = \mathbb{Z}[[X]]$ 和 $I = (X)$的情形。

现在我们沿用标准论证来证明 solid 张量积的 I-进完备性。令 $P = \bigoplus_J \prod_{\mathbb{N}} A$ 和 X-进完备的、由可数个 $\prod_{\mathbb{N}} A$ 副本构成的直和。我们可以假设 $J \cong \mathbb{N}$ 是全序集。我们可以写成

$$P = \varinjlim_{f\colon J \to \mathbb{N}} \prod_J X^{f(j)} \prod_N A$$

其中 $f(j) \to \infty$ 为 $j \to \infty$且 $f \leq g$ 当且仅当对所有 $j \in J$，$f(j) \geq g(j)$。因此，我们有

$$\mathrm{Sym}^k_A P = \varinjlim_{f\colon J \to \mathbb{N}} X^{kf(j)} (\mathrm{Sym}^k_A \left(\prod_J \prod_{\mathbb{N}} A) \right),$$

并可直接计算得出

$$\mathrm{Sym}^k_A \left(\prod_K A \right) = \prod_{K^k/\Sigma_k} A.$$

因此，我们得到

$$\mathrm{Sym}_A^k P = \varinjlim_{f\colon J\to\mathbb{N}} X^{kf(j)} \prod_{(J\times\mathbb{N})^k/\Sigma_k} A.$$

从这个表示可以通过直接计算得出，$\mathrm{Sym}_A^k P$ 是 X-进完备的。下面给出一个更形式化的论证：从前述表示可以推得 $\mathrm{Sym}_A^k P$ 是静态的，因此必然等于 $P^{\otimes_A k}$ 在对称群 Σ_k作用下的阿贝尔商。由于根据 [Man22b 的命题 2.12， $P^{\otimes_A k}$ 是导出的 X-进完备的，所以它对 Σ_k 的商也同样如此（因为它是导出的 X-进完备模之间某个映射的余核）。□

备注 7.4.11。 设 R 是一个经典的 I-进完备环，并将其视为凝固环，且 $I \subset \pi_0(R)$是一个有限生成理想。从例 7.4.4 (4) 可以推得，几乎有限表示的经典 I-完备动画环之间的态射 $R \to A$ 的余切复形是导出的 I-完备的（也就是说，对所有 n，模 I 后的 n次截断作为离散的 n-截断动画环是紧对象）。应用引理 7.4.10 可得，对所有 m， $\bigwedge_A^m \mathbb{L}_{A/R}$ 也都是导出的 I-进完备的。我们不知道如何在一般情况下证明，一个 I-完备的凝固 R-代数 A具有 I-进完备的余切复形。Akhil Mathew 和 Peter Scholze 指出，可以尝试利用 $A \to R$ 的 Hochschild 同调关于余切复形的滤过来论证（参见 [Rak20，定理 1.2.1]）。

7.5. **固体有限表示态射**。 在经典导出代数几何中，实践中至少会遇到两种重要的环态射有限性概念（参见 [Lur04，第 3.1] 节，以及 [Lur18，第 4] 节）：

定义 7.5.1。 设 $f\colon A \to B$ 是离散动画环的一个态射。

(1) 若 B 作为动画 A-代数是紧对象，我们称 f 具有有限表示（在 [Lur18，第 4.1.1] 节中称为有限生成）。等价地， B 属于 Ring 的全子范畴的幂等完备化；该全子范畴由多项式代数 $A[T]$ 在有限余极限下生成。 (2) 若 $\tau_{\leq n}B$ 是 n-截断 A-代数范畴中的紧对象，我们称 f 具有阶数为 的有限表示。等价地（ [Lur04，命题 3.1.5]），存在一个有限表示态射 $f\colon A \to B'$，以及一个 A-代数映射 $B' \to B$，使其在 n-截断后诱导一个同构。(3) 若 f 对所有 $n \in \mathbb{N}$ 都具有阶数为 n 的有限表示，我们称其具有几乎有限表示。

备注 7.5.2. 离散动画环的态射 $f\colon A \to B$ 为 0 阶有限表示，当且仅当 $\pi_0(A) \to \pi_0(B)$ 是静态环的有限表示经典态射。0 阶有限表示态射也称为有限型态射。注意，这与经典非导出代数几何中有限型态射的标准约定不同。

备注 7.5.3. 由 [Lur18，命题 4.1.2.1] （或更精确地说，其动画类比 [Lur04，命题 3.2.18]），离散动画环的映射 $f\colon A \to B$ 为（几乎）有限表示，当且仅当 $\pi_0(A) \to \pi_0(B)$ 是静态环的有限表示经典态射，且 $\mathbb{L}_{B/A}$ 是（几乎）完美模。

在固体 Huber 环的设定中，有限表示这一概念的正确候选并不那么清楚，例如存在紧对象使得 $\mathrm{Sym}_{\square}\mathbb{Z}_{\square}[S]$ （其中 S 为轻射有限集），我们希望避免这些环，因为它们太大。事实表明，（几乎）有限表示态射的微分刻画提供了一种合理的推广。

定义 7.5.4. 设 $f\colon A \to B$ 为固体 Huber 环的一个态射。

(1) 我们称 f 若存在一个静态凝聚 Huber 环的表示，则称其为实有限型

$$\pi_0(B) = \pi_0(A[T_1,\dots,T_n]_{\square})/(f_1,\dots,f_m)$$

并带有诱导解析结构。等价地，若存在一个 solid Huber 环的态射 $A[T_1,\ldots,T_n]_\square/^{\mathbb{L}}(f_1,\ \ldots\ldots,\ f_m)\to B$，它在 π_0 上诱导出一个同构。

（2）我们称 f 具有固体有限表示，如果它是实有限型的，并且 $\mathbb{L}_{B/A}$ 来自一个完美的 $B^{\triangleright}(*)$-模。我们称 f 具有凝聚几乎有限表示，如果它是实有限型的，并且 $\mathbb{L}_{B/A}$ 来自一个几乎有限表示的 $B^{\triangleright}(*)$-模。

例 7.5.5. 下面我们给出与拓扑有限型态射相关的固体有限表示态射的若干不同例子。

（1）为离散静态环范畴，并考虑将最基本的例子是概形。设 Ring^δ 是 $R\mapsto R_\square$ 映出的函子 $\mathrm{Ring}^\delta\to\mathrm{Ring}^{\mathrm{Hub}}$。于是，$A\to B$ 是 Ring^δ 中（几乎）有限表示的态射，当且仅当 $A_\square\to B_\square$ 是固体（几乎）有限表示的态射。（2）另一个例子来自形式几何。设 A 是关于有限生成理想 $I\subset A$完备的离散静态环，例如取 $A=\mathbb{Z}_p$。为简单起见，假设A 是诺特的。称 I-完备静态环的一个态射为拓扑有限型，如果B是（诺特！）环 $A\langle T_1,\ \ldots\ldots,\ T_n\rangle$ 的一个商，该环由 A上多项式代数的 I-进完备化给出。由此可知，$A\to B$ 是拓扑有限型的，当且仅当赋予 I-阿迪克拓扑的固体环的态射 $A_\square\to B_\square$ 是实有限型的。由于 A 是诺特的，还可以证明：若 $A\to B$ 是拓扑有限的，则 $A_\square\to B_\square$ 具有凝聚几乎有限表示，即存在满射 $A\langle T_1,\ \ldots\ldots,\ T_n\rangle\to B$，使得 B成为一个凝聚的 $A\langle T_1,\ \ldots\ldots,\ T_n\rangle$-模。由此得到 $B_\square=A\langle T_1,\ \ldots\ldots,\ T_n\rangle_\square\otimes_{A\langle T_1,\ \ldots\ldots,\ T_n\rangle}(*)B(*)$，从而 $A\langle T_1,\ \ldots\ldots,\ T_n\rangle\to B$的固体余切复形是几乎完美的代数余切复形的基变换。（3）最后，我们有来自刚性几何的例子。设 K 是完备非阿基米德域，A 是 K 上的有限型 Tate 代数。则 $(K,\mathcal{O}_K)_\square\to(A,A^\circ)_\square$ 是实有限型的态射。由于 Tate 代数 $K\langle T_1,\ \ldots\ldots,\ T_n\rangle$ 是诺特的，可以像上文（2）中那样证明 $(K,\mathcal{O}_K)_\square\to(A,A^\circ)_\square$ 是凝聚几乎有限表示的态射。

备注 7.5.6. 对于固体 Huber 环的态射而言，固体有限表示这一性质对凝固谱的解析拓扑是否局部，尚不完全清楚。对于固体概形，固体（几乎）有限表示在解析拓扑中是局部的，这是由离散环的（几乎）有限表示态射的标准忠实平坦下降得到的。我们预期，（几乎）固体有限表示在 Gelfand Tate 代数的解析 adic 谱中是局部的，也就是说，对于有界仿射刚性环 A，使得 $A^{\triangleright}/A^{\triangleright,\leq 1}$ 是离散的（关于 Gelfand 环的概念，见 [ABLB$^+$25]）。

下一条引理证明了固体有限表示态射的一些基本保持性质。

引理 7.5.7. 下列结论成立：

（*1*）设 $A\to B$ 是固体 *Huber* 环的实有限型态射，$A\to A'$ 是固体 *Huber* 环的态射，其基变换为 $B'=B\otimes_A A'$。则 $A'\to B'$ 是实有限型的。（*2*）设 $A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C$ 是固体 *Huber* 环的态射。假设 f 是实有限型的，则 g 是实有限型的当且仅当 $g\circ f$ 是实有限型的。特别地，实有限型态射在复合下是稳定的。（*3*）设 A 是一个固体 *Huber* 环，且 $\mathrm{Ring}^{\square-\mathrm{ft}}_{A/}$ 是实有限型 A-代数的范畴。则 $\mathrm{Ring}^{\square-\mathrm{ft}}_{A/}$ 在有限余极限和收缩下是稳定的。（*4*）设 $f\colon A\to B$ 是固体 *Huber* 环的有理局部化，则 f 是固体有限表示的。

此外，对于固体有限呈示态射和固体几乎有限呈示态射，类似的陈述 *(1)–(3)* 也成立。

证明。(1) 根据定义，$A \to B$ 是有限型的，当且仅当 $\pi_0(B)$ 是环 $\pi_0(A[T_1,\dots,T_n]_\square)$ 关于一个有限生成理想的商；这一条件在基变换下显然保持不变。固体有限表示和凝聚几乎有限表示的情形，则源于余切复形满足基变换这一事实。

(2) 设 $f\colon A \to B$ 是实有限型态射。假设 $g\colon B \to C$ 是实有限型的，我们要证明 $g \circ f$ 是实有限型的。事实上，我们有如下固体 Huber 环的态射

$$A[T_1,\dots,T_n]_\square/^{\mathbb{L}}(a_1,\dots,a_k) \to B \tag{7.5.1}$$

and

$$B[X_1,\dots,X_n]_\square/^{\mathbb{L}}(b_1,\dots,b_l) \to C$$

它们在连通分支上诱导同构。因此，将元素 $\widetilde{b_i}$ 提升为元素 $b_i \in A[T_1,\dots,T_n]_\square$ 后，我们得到一个映射

$$A[T_1,\dots,T_n,X_1,\dots,X_n]_\square/^{\mathbb{L}}(a_1,\dots,a_k,\widetilde{b}_1,\dots,\widetilde{b}_l) \to C$$

它在连通分支上是同构，从而证明 $g \circ f$ 是有限型的。反过来，假设 $g \circ f$ 是有限型的，那么由上文的 (1)，映射 $B \to B \otimes_A C$ 是有限型的；由前一点，只需证明乘法映射 $B \otimes_A C \to C$ 是有限型的。

该命题只涉及这些环的连通分支，因此在此推论的其余部分中，我们假设这些环都是静态的，并且所有基变换和商环也都是静态凝聚 Huber 环。我们有表示 $B = A[T_1,\dots,T_n]_\square/I$ 和 $C = A[X_1,\dots,X_m]_\square/J$，其中 I 和 J 是有限生成理想。将 T_i 在 C 中的像提升为元素 $T_i \in A[X_1,\dots,X_m]_\square$。由下文的第 (4) 点，有理局部化 $A[X_1,\dots,X_m]_\square \to A[X_1,\dots,X_m]_\square \otimes_{A[\widetilde{T_1},\dots,\widetilde{T_n}]} A[T_1,\dots,T_n]_\square$ 是有限表示态射。由于映射 $A[X_1,\dots,X_n]_\square \to C$ 经由元素 T_i 的 solid 化分解，且由本点的第一部分，有限型态射在复合下稳定，因此替换 C 的给定表示后，不失一般性，我们可以假设 $\widetilde{\ }$ 中的元素 T_i 在 $A[X_1,\dots,X_m]_\square$ 中是 solid 的。因此，我们有一个交换图

$$\begin{array}{ccc} A[T_1,\dots,T_n]_\square & \longrightarrow & A[X_1,\dots,X_m]_\square \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \longrightarrow & C. \end{array}$$

其中垂直映射是对有限生成理想取商。我们看到，（静态）推出 $B \otimes_A C$ 由 $A[T_1,\dots,T_n,X_1,\dots,X_m]_\square/(I,\ J)$ 给出，并且映射 $B \otimes_A C \to C$ 是通过对 $B \otimes_A C$ 取由元素 $T_i - T_i \in A[T_1,\dots,T_n,X_1,\dots,X_m]_\square$ 生成的理想的商得到的，这证明了它是有限型的。

最后，关于（几乎）有限表示态射的类似陈述，可由有限型的情形以及余切复形的纤维序列推出

$$B \otimes_A \mathbb{L}_{B/A} \to \mathbb{L}_{C/A} \to \mathbb{L}_{C/B}.$$

(3) 现在证明，环 A 上实有限型的态射在有限余极限和收缩下稳定。设 B 是实有限型的 A-代数，且 $B' \to B \to B'$ 是一个 retract，则 B' 是与幂等态射 $r\colon B \to B$ 相关联的 retract。因此，$\pi_0(B')$ 同构于图表 D 的推出的 π_0

$$\begin{array}{ccc} B \otimes_A B & \xrightarrow{m} & B \\ \downarrow{\scriptstyle r\otimes \mathrm{id}} & & \downarrow \\ B & \longrightarrow & D \end{array}$$

其中 m 是乘法映射。因此，只需证明 D 是 A 上的有限型代数。根据上文第 (1) 和 (2) 部分，代数 $B \otimes_A B$ 和 B 都是 A 上的有限型代数，因此只需证明实有限型态射在有限余极限下稳定。

现在证明其在有限余极限下的稳定性。只需证明实有限型的态射在推出下保持稳定。考虑如下形式的、在 A 上的实有限型态射图表 $C \leftarrow B \to D$，我们要证明 $C \otimes_B D$ 是实有限型的。根据上文的 (2)，我们知道 $B \to C$ 和 $B \to D$ 都是实有限型态射。根据 (1) 的基变换，我们进而知道 $C \to C \otimes_B D$ 是实有限型的；再根据 (2) 中关于复合的稳定性，我们得到 $A \to C \to C \otimes_B D$ 是实有限型的，从而证明了所需结论。

关于实（几乎）有限表示态射的结论，可由实有限型的情形以及（几乎）完美模在收缩和有限余极限下保持稳定这一事实推出。

(4) 根据第 (2) 部分中的蕴含关系“g 有限表示蕴含 $g \circ f$ 有限表示”，只需证明标准有理局部化是有限表示的。设 $f_1, \ldots\ldots, f_n, g \in A$ 是 A 中生成单位理想的元素。根据定义，

$$A\left(\frac{f_1, \ldots, f_n}{g}\right)_{\square} = A[T_1, \ldots, T_n]_{\square}/^{\mathbb{L}}(gT_i - f_i)$$

这显然是有限表示的。

□

7.6. **固 étale 映射与光滑映射**。 在本节中，我们定义固体 Huber 环的态射的固体光滑映射与 étale 映射的概念。我们的定义将受到导出代数几何中相应定义的启发。

定义 7.6.1. 设 $f\colon A \to B$ 是固体 Huber 环的一个固体有限表示态射。我们称 f 为固体光滑，如果 $\mathbb{L}_{B/A}$ 是有限投射 B-模。类似地，我们称 f为固体 ***étale***，如果 $\mathbb{L}_{B/A} = 0$。

更一般地，固体 Huber 环之间的态射 $f\colon A \to B$ 称为局部凝聚光滑（相应地，局部固 ***étale***），如果在 A 与 B的某个有理覆盖上局部地，它是固体有限表示且固体光滑的（相应地，固体 étale）。 f 的相对维数是$\mathbb{L}_{B/A}$的局部常值秩。

备注 7.6.2. 在定义 7.6.1 中，由于固体几乎表示的态射缺乏下降，见备注 7.5.6，人们不得不对固体光滑与 étale态射施加局部条件。如果我们所处的情形中，具有固体有限表示这一性质对于解析拓扑是局部的，那么一个态射是固体光滑的（相应地，étale）当且仅当它是局部凝聚光滑的（相应地，étale）。特别地，由经典的考虑，这对离散 Huber 环以及非阿基米德域 K 上有限型的 Tate 代数成立，并且预期对 Gelfand 环也成立。

在处理概形的光滑态射和 étale 态射时，有时使用精确坐标会比较方便。以下定义将标准图推广到了凝聚情形：

定义 7.6.3。 固体 Huber 环的态射 $f\colon A \to B$ 称为凝聚标准光滑，若其具有如下形式

$$B = A[T_1, \ldots, T_n]_{\square}/^{\mathbb{L}}(a_1, \ldots, a_k)$$

其中 $k \leq n$和 $d = \det(\frac{\partial a_i}{\partial T_j})_{1 \leq i,\ j \leq k}$在 B上可逆。若$k = n$，则称 f为凝聚标准 ***étale***。

备注 7.6.4. 设 $f\colon A \to B$ 是固体 Huber 环之间的凝聚标准光滑映射。那么 f 是固体光滑的。事实上，根据固体有限表示的定义，这一点显然成立；而显式表示

B 作为 A-代数表明，$\mathbb{L}_{B/A}$ 是由变量 T_j 的微分生成的有限秩自由 B-模，其中 $j > k$。此外，若 f 是凝聚标准 étale 的，则同一表示表明 $\mathbb{L}_{B/A} = 0$。

我们的下一个目标是刻画固体 Huber 环的局部凝聚光滑（相应地，étale）映射，即那些在有理局部化之后局部上为凝聚标准光滑（相应地，étale）的映射。

命题 7.6.5。下述结论成立：

（*1*）设 $f\colon A \to B$ 为固体 *Huber* 环的标准有理局部化。则 f 是凝聚标准 *étale*。（*2*）设 $f\colon A \to B$ 为固体 *Huber* 环的凝聚标准光滑（相应地，*étale*）态射。设$A \to A'$ 为固体 *Huber* 环的态射，则基变换 $A' \to B' = B \otimes_A B'$ 是凝聚标准光滑（相应地，*étale*）。对（局部）凝聚光滑（*étale*）映射同样成立。（*3*）设 $A \to B$ 与 $B \to C$ 为固体 *Huber* 环的凝聚光滑映射（相应地，局部凝聚光滑，相应地，凝聚标准光滑），则复合映射 $A \to C$亦然。将“光滑”换为“*étale*”时同样成立。特别地，有理局部化是凝聚标准 *étale*。（*4*）设 $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ 为固体 *Huber* 环的态射，且 f 与 $g \circ f$ 为（局部）固体 *étale*，则 g 是（局部）固体 *étale*。

(5) 设 $f\colon A \to B$ 是固体 *Huber* 环之间的局部凝固 *étale* 态射，在π_0 上满射，且具有诱导解析环结构。则存在幂等元 $f \in A$，使得 $B = A/(1-f) = A(\frac{1}{f})_\square$。特别地，若 $A \to B$是局部凝固 *étale* 映射，则乘法映射 $B \otimes_A B \to B$ 是 $B \otimes_A B$中某个幂等元所对应的商。

(6) 设 $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ 是固体 *Huber* 环之间的态射，其中 f 和 $g \circ f$ 局部固体光滑。假设 g 具有诱导结构，且在 π_0上满射。那么，C 在 B的解析拓扑下局部是一个完全交，即形如以下形式的态射

$$C = B\langle f_1, \ldots, f_k \rangle$$

对于适当的元素 $f_1, \ldots, f_k \in B$。特别地，C 是一个可对偶的 B-模，且 g 是 *suave*。 ▷

证明。(1) 设 $f\colon A \to B$ 是一个标准有理局部化。根据定义，存在生成单位理想的元素 $(f_1, \ldots, f_n, g) \in A$，使得 $B = A[T_1, \ldots, T_n]_\square/\mathbb{L}(gT_i - f_i)$。该表示的 Jacobian 矩阵是对角矩阵，其对角值为 g。由于 g 在 B中可逆，我们推得 f 是标准固体 étale。

(2) 标准固体 étale 映射与光滑映射在基变换下的稳定性由定义显然可得。局部固体光滑（étale）映射的情形也很清楚。(3) 设 $A \to B$ 和 $B \to C$ 是标准固体光滑映射。我们有如下表示

$$B = A[T_1, \ldots, T_n]_\square/\mathbb{L}(f_1, \ldots, f_k)$$

and

$$C = B[X_1, \ldots, X_m]_\square/\mathbb{L}(g_1, \ldots, g_l)$$

使得 Jacobian $b = \det((\frac{\partial f_i}{\partial T_j})_{1\le i,j\le k})$ 和 $c = \det((\frac{\partial g_i}{\partial X_j})_{1\le i,j\le l})$ 分别在 B和 C上可逆。取 g_j从 C到 $A[T_1, \ldots, T_n, X_1, \ldots, X_m]_\square$的一个提升 $\widetilde{g}_j$，我们看到

$$C = A[T_1, \ldots, T_n, X_1, \ldots, X_m]_\square/\mathbb{L}(f_1, \ldots, f_k, \widetilde{g}_1, \ldots, \widetilde{g}_l). \tag{7.6.1}$$

令 $\widetilde{c}$为与 $(\frac{\partial \widetilde{g}_i}{\partial X_j})_{1\le i,j\le l}$ 相关的雅可比式，则表示 (7.6.1) 的雅可比式为 $a\widetilde{c}$，它在 C 上变为可逆，这证明 $A \to C$ 也是凝聚标准光滑的。由构造可知，若 $A \to B$ 和 $B \to C$ 都是凝聚标准 étale 的，那么 $A \to C$ 也是。

凝聚光滑映射的情形由引理 7.5.7 (2) 以及余切复形的纤维序列（固体 étale 的情形相应地）推出。局部凝聚光滑（相应地，局部

固体 étale）的情形则是在 A、B 和 C 中均进行有理局部化后，由凝聚光滑（相应地，固体 étale）的情形推出。

(4) 该断言在 A、B 和 C 的解析拓扑下是局部的。因此，我们不妨假设 f 和 $g \circ f$ 都是固体 étale。由引理 7.5.7 可知，g 是实有限型；余切复形的纤维序列表明 $\mathbb{L}_{C/B} = 0$，从而证明 g 是实有限 étale。

(5) 设 $f\colon A \to B$ 是一个具有诱导结构且在 π_0 上满射的局部固 étale 态射。由上文的 (1)–(3) 可知，乘法映射 $B \otimes_A B \to B$ 是局部固 étale，特别是 $\mathbb{L}_{B/B\otimes_A B} = 0$。由于该映射在 π_0 上诱导同构，推论 7.4.8 表明它是同构，因此 $A \to B$ 是一个幂等映射。我们断言 B 作为 A-模是可对偶的；由下文的引理 7.6.6，这意味着 $A \to B$ 也是开浸入，因此 $A = B \times$作为代数同构于 fib($A \to B$)。特别地，取 $f =$ (1，0) 即得所需结果。为证明 B 作为 A-模是可对偶的，我们可以等价地证明态射 $A \to B$ 是 suave。suave 性可沿 A 的有理覆盖局部证明（由引理 7.2.14，因而也可沿 B 局部证明）。特别地，我们不妨假设 f 是固体 étale。于是，存在一个如下形式的态射

$$A[T_1, \dots, T_n]_\square/^{\mathbb{L}}(f_1, \dots, f_n) \to B$$

它在 π_0 上是一个同构。因此，基变换

$$A[T_1, \dots, T_n]_\square/^{\mathbb{L}}(f_1, \dots, f_n) \to B[T_1, \dots, T_n]_\square/^{\mathbb{L}}(f_1, \dots, f_n) \tag{7.6.2}$$

是固体 étale 的，并且在 π_0 上是同构（因为 $A \to B$ 是满射）。由于 $A \to B$ 的相对余切复形消失，(7.6.2) 也同样如此，因此根据推论 7.4.8，它是一个同构。另一方面，复合映射

$$A \to A[T_1, \dots, T_n]_\square/^{\mathbb{L}}(f_1, \dots, f_n) = B[T_1, \dots, T_n]_\square/^{\mathbb{L}}(f_1, \dots, f_n)$$

是 suave 的，因为它是实多项式代数与导出完备交的复合。令 $b_1, \dots, b_n$ 为 B 中 T_i 的像，则有

$$\Big(B[T_1, \dots, T_n]_\square/^{\mathbb{L}}(f_1, \dots, f_n)\Big)/^{\mathbb{L}}(T_i - b_i) = B/^{\mathbb{L}}(0, \dots, 0)$$

仍然是 A 上的 suave，其中右项中有 n 次出现的 0。因此，由于 B 具有 A 上的诱导结构，$B/^{\mathbb{L}}(0, \dots, 0)$ 是一个可对偶的 A-模；又由于 B 是 $B/^{\mathbb{L}}(0, \dots, 0)$ 的 retract，B 也如此，断言的证明至此完成。

关于局部固 étale 态射的乘法映射 $B \otimes_A B \to B$ $A \to B$ 的断言，源于以下事实：由 (4) 可知 $B \otimes_A B \to B$ 是局部固 étale 的，且它具有诱导结构，并且它在 π_0 上满射。

(6) 根据假设，f 和 $g \circ f$ 都是局部凝聚光滑的。注意，由于 $B \to C$ 在 π_0 上满射，引理 7.2.14 表明，C 的任意有理局部化都来自 B 的某个有理局部化的基变换。因此，在分别对 A 和 B 局部化之后，不失一般性，我们可以假设 f 和 $g \circ f$ 都是实有限型的。由引理 7.5.7 (2)，映射 $B \to C$ 也为实有限型。考察余切复形，我们有一个纤维序列

$$C \otimes_B \mathbb{L}_{B/A} \to \mathbb{L}_{C/A} \to \mathbb{L}_{C/B}.$$

由于 f 和 $g \circ f$ 是固体光滑的，$\mathbb{L}_{B/A}$ 和 $\mathbb{L}_{C/A}$ 是有限投射的，因此$\mathbb{L}_{C/B}$ 是完美复形，这证明 g 具有固体有限表示。此外，由于 g满射到 π_0，根据命题 7.4.7，模 $\mathbb{L}_{B/A}$ 是 1- 连通的，因此 $C \otimes_B \mathbb{L}_{B/A} \to \mathbb{L}_{C/A}$ 满射到 π_0。由于 $\mathbb{L}_{C/A}$ 是 C 上的向量丛，它是有限投射的，因此我们可以找到一个截面 $s\colon \mathbb{L}_{C/A} \to C \otimes_B \mathbb{L}_{B/A}$；又因为 $C \otimes_B \mathbb{L}_{B/A}$ 也是一个 C-向量丛，我们可推得 $\mathbb{L}_{C/B}[-1] =$fib($C \otimes_B \mathbb{L}_{B/A} \to \mathbb{L}_{C/A}$)是 C上的向量丛。

我们可以找到 C的一个有限扎里斯基覆盖$\{C \to C[\frac{1}{g_i}]\}_{i=1}^n$，使得 $\mathbb{L}_{C/B}[-1]$ 具有一个基。根据引理 7.2.15，有理局部化族 $\{C \to C\left(\begin{smallmatrix} g_1,\dots,g_n \\ g_i \end{smallmatrix}\right)\}_{i=1}^n$ 构成 Spec□(C)的一个覆盖。因此，根据引理 7.2.14，将 C 的覆盖提升为 B 的有理局部化后，不失一般性，我们可以假设 $\mathbb{L}_{C/B}[-1]$ 具有一个 C-基，记为 v_1、.....、v_k。对命题 7.4.7 取环路，可得一个满射映射

$$\mathrm{fib}(B \to C) \otimes_B C \to \mathbb{L}_{C/B}[-1].$$

若 $I = \ker(\pi_0(B) \to \pi_0(C))$，则得到一个右正合列

$$I/I^2 \xrightarrow{d} \pi_0(C \otimes_B \mathbb{L}_{B/A}) \to \pi_0(\mathbb{L}_{C/A}) \to 0.$$

其中第一个映射就是 B在 I上的微分。设 $f_1, \dots, f_k \in I$为满足 $df_i = v_i \in \pi_0(\mathbb{L}_{C/B}[-1])$ 的元素。我们有一个诱导的 A-代数映射

$$g\colon \widetilde{B} := B/^{\mathbb{L}}(f_1, \dots, f_k) \to C.$$

映射 g 具有诱导结构，且在 π_0上满射；它也是实有限型的（引理 7.5.7 (2)），并且根据构造，g 的相对余切复形消失。特别地，g 是一个凝固 étale 态射，并且由第 (5) 部分可知，存在一个幂等元素 $\widetilde{h} \in \widetilde{B}$，使得 $C = B/^{\mathbb{L}}(1-h)$。将 h 提升为 B中的元素 h，我们看到

$$C = B/^{\mathbb{L}}(f_1, \dots, f_k, 1-h)$$

证明了我们想要的结论。

□

下面的引理此前已用到。

引理 7.6.6. 设 $\mathcal{C}$ 是一个对称幺半稳定范畴，$1 \to A$ 是一个幂等态射，且 A 在 $\mathcal{C}$中是可对偶的。则 A 自然地自对偶，而单位映射$1 \to A$ 的对偶 $A \to 1$ 赋予 A 余幂等余代数结构。特别地 $\mathrm{fib}(1 \to A) = \mathrm{cofib}(A \to 1)$ 具有幂等代数结构，并且 $1 = A \times \mathrm{fib}(1 \to A)$ 作为代数亦然。

证明。给定一个可对偶对象 $P \in \mathcal{C}$，记其对偶为 $P^\vee$。考虑拉回 $\iota^*\colon \mathcal{C} \to$模范畴$_A(\mathcal{C})$，映射 ι^* 有一个由遗忘函子 ι_*给出的全忠实线性右伴随。由于A 是可对偶的，ι^* 也有一个由 $A^\vee \otimes - =$ Hom函子$_{\mathcal{C}}(A, -)$给出的全忠实左伴随 $\iota_!$。但 A 的幂等性意味着

$$A^\vee \otimes A = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}(A, A) = \underline{\mathrm{Hom}}_A(A, A) = A.$$

因此，我们看到，对于 M an A-模，有

$$\iota_! M = A^\vee \otimes M = A^\vee \otimes A \otimes M = M.$$

换言之，存在自然等价 $\iota_! = \iota_*$，这证明了 A 是自然自对偶的。特别地，由于 A 是幂等代数，单位 $1 \to A$ 的对偶便导出迹映射$A \to 1$，它赋予 A 余幂等余代数结构。根据先前的计算可知，A 的模范畴与余模范畴一致，且它们是 $\mathcal{C}$的全子范畴：

$$\mathrm{Mod}_A(\mathcal{C}) = \mathrm{cMod}_A(\mathcal{C}).$$

转到余纤维 $B =$cofib$(A \to 1)$，可以看出 B 是可对偶化幂等代数。由与先前相同的论证，它是自对偶的；单位映射 $1 \to B$ 的对偶赋予 B 自然的余幂等余代数结构，从而 $\mathrm{Mod}_B(\mathcal{C}) = \mathrm{cMod}_B(\mathcal{C})$。由 $\mathcal{C}$ 关于 $\mathrm{cMod}_A(\mathcal{C})$ 和 $\mathrm{Mod}_B(\mathcal{C})$ 的正交分解，可推出一个直积分解

$$\mathcal{C} = \mathrm{Mod}_A(\mathcal{C}) \times \mathrm{Mod}_B(\mathcal{C})$$

这尤其表明 $1 = A \times B$ 作为代数。从这个分解可以清楚地看出，$B = \mathrm{fib}(1 \to A) =$cofib$(A \to 1)$，从而证明了我们想要的结论。□

定理 7.6.7. 设 $f\colon A \to B$ 是固体 *Huber* 环之间的一个态射。以下条件等价：

(1) f 是局部凝聚光滑的。*(2)* 在 A 和 B 的解析拓扑中局部地，f 是凝聚标准光滑的。将“光滑”替换为“*étale*”后，也有相应的陈述。

证明。 由定义和命题 7.6.5 (1) 可知，定理中的 (2) 蕴含 (1)，这显而易见。反过来，设 $f\colon A \to B$ 是固体 Huber 环之间的局部固体光滑态射。对 A 和 B 作有理局部化后，不失一般性地，我们可以假设 f 是固体光滑映射。特别地，存在一个 A-代数态射

$$A[T_1, \dots, T_n]_\square \to B$$

它带有诱导结构，且满射到 π_0。由命题 7.6.5 (3)，$A[T_1, \dots, T_n]_\square$ 的有理局部化在 A 上是标准光滑的。由命题 7.6.5 (6)，对 $A[T_1, \dots, T_n]$ 和 B 作有理覆盖后，可以找到一个标准光滑代数 $A \to C$ 及一个表示 $B = C/^{\mathbb{L}}(f_1, \dots, f_k)$。我们将证明，可以修改 C 和序列 $(f_1, \dots, f_k)$，使得 B 在 A 上成为标准 étale。为此，写出一个标准光滑表示 $C = A[T_1, \dots, T_n]_\square/^{\mathbb{L}}(g_1, \dots, g_l)$，并将 $(f_1, \dots, f_k)$ 提升到 $A[T_1, \dots, T_n]_\square$，得到提升 $f_1, \dots, f_k$。我们有

$$B = A[T_1, \dots, T_n]_\square/^{\mathbb{L}}(g_1, \dots, g_l, f_1, \dots, f_k). \tag{7.6.3}$$

考虑余切复形的纤维序列

$$\bigoplus_{i=1}^{l} B dg_i \oplus \bigoplus_{j=1}^{k} B df_j \to \bigoplus_{i=1}^{n} B dT_i \to \mathbb{L}_{B/A}.$$

由于 $A \to B$ 是固体光滑的，$\mathbb{L}_{B/A}$ 是一个向量丛，这迫使 $l + k \leq n$成立。我们可以找到 B 的一个扎里斯基覆盖，其形式为 $\{B \to B[\frac{1}{h_s}]\}_s$，使得其中一部分 $\{dT_i\}_{i=1}^n$ 构成 $\mathbb{L}_{B/A}$的一组基。按照引理 7.2.15，利用元素 h_s取一个有理覆盖，并将其提升为 $A[T_1, \dots, T_n]_\square$的有理覆盖，再重新排列变量的指标，我们可以假设元素 dT_{k+l+1}、.....、dT_n 生成 $\mathbb{L}_{B/A}$的一组基。因此，复合映射 $\bigoplus_{i=1}^{l} B dg_i \oplus \bigoplus_{j=1}^{k} B df_j \to \bigoplus_{i=1}^{l+k} B dT_i$ 必定是同构，并且表示 (7.6.3) 的 Jacobian 矩阵在 B上可逆，由此证明 B 在 A 上是凝聚标准光滑的，正如所需。注意，若 B 在 A上是固体 étale 的，通过计算余切复形中的秩，可得 $k + l = n$，从而证明 B 是凝聚标准 étale 的。□

备注 7.6.8。 第 7.5 节和第 7.6 节中的讨论可以通过沿 solid Huber 环的有理局部化进行粘合，显然地推广到 solid 赋值空间。更确切地说，给定 $f\colon Y \to X$ 为 solid 赋值空间之间的态射，我们称 f 是局部有限型（分别为有限表示 或几乎有限表示），如果在经过 Y 和 X 的有理局部化后，它局部地在仿射拟紧空间上具有此性质。引理 7.5.7 中这些态射的稳定性性质表明，这是一个定义良好的概念，并且在基变换和复合下稳定。于是，如果 f 在 Y 和 X 中经过有理覆盖后局部地由 solid Huber 环之间的固体光滑（分别为 étale）态射表示，我们就称 f 是局部凝聚光滑 （分别为固体 *étale*）。

若 f 是 solid 赋值空间之间的态射，则存在定义良好的余切复形 $\mathbb{L}_f \in \mathrm{D}(X)$，它在仿射拟紧空间上局部地是定义 7.4.1 中的余切复形。事实上，这形式上可由以下事实推出：根据命题 7.6.5 (1)-(3)，有理局部化是形式 étale 的；以及余切复形的基变换性质。然而，$\mathbb{L}_f$ 是否满足某种全局变形理论描述，先验而言并不清楚；问题之一在于，解析叠上的拟凝聚层没有定义良好的 t- 结构。尽管如此，局部有限型的映射 f 是局部凝聚光滑（分别为局部固 étale ）的，当且仅当 $\mathbb{L}_f$ 在固解析拓扑中局部地是一个向量丛（分别为 0）。

最后，

7.7. **Serre 对偶**。在这最后一节中，我们依照 Clausen and Scholze [CS19, CS22] 的论证，给出固体 Huber 环的凝实光滑态射的 Serre 对偶证明（特别地，所有相关的想法与构造均归功于他们）。当然，该定理在作如注记 7.6.8 中那样的显然修改之后，可推广至 solid 赋值空间的局部固光滑态射。

该定理分为两个陈述：固体光滑态射是上同调光滑这一事实，以及对偶化层的计算。由于两者需要不同的技巧，将陈述拆分为两个不同的定理是很自然的。

定理 7.7.1. 设 $f\colon A \to B$ 是固体 ***Huber*** 环的局部固体光滑态射。那么，f 上同调光滑，且对偶化层 $f^!1$ 在解析拓扑下局部是一个集中于同调次数 $\dim(f)$ 的线丛。此外，若 f 是局部固 ***étale*** 的，则它是上同调 ***étale*** 的。

证明。由于有理局部化构成解析叠的一个开覆盖，该陈述对于 A 和 B 的固体 adic 谱的拓扑而言是局部的。由定理 7.6.7 可设 B 是 A 上的标准固光滑态射：

$$B = A[T_1, \dots, T_n]_{\square}/^{\mathbb{L}}(f_1, \dots, f_k).$$

于是，由基变换可知，$A \to B$ 上同调光滑且具有位于所需次数的可逆层这一事实，源于命题 7.1.11 中映射 $\mathbb{Z}_{\square} \to \mathbb{Z}[T]_{\square}$ 的 suave 性，其对偶化层同构于 $\mathbb{Z}[T][1]$；以及引理 6.3.5 中映射 $\mathbb{Z}[T] \to \mathbb{Z}[T]/T = \mathbb{Z}$ 的 suave 性，其对偶化层同构于 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[T]}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}[T]) \cong \mathbb{Z}[-1]$。

此外，若 f 是局部固 étale 的，根据命题 7.6.5 (5)，我们知道 $\mathrm{AnSpec}(B) \to \mathrm{AnSpec}(A)$ 的对角态射是开浸入，因而是上同调 étale 的，因此根据 [HM24，定义 4.6.1]，f 是上同调 étale 的。□

为了计算对偶化层，我们将仿照 Clausen and Scholze [CS22]，使用法锥变形。这样一来，对偶化层的计算便归结为向量丛的情形，我们将在命题 7.7.2 中对其进行显式处理。

首先，我们来计算向量丛的对偶化层（或者说，其零截面的对偶化层）。令 $\mathbf{Vect}_n$ 为分类秩为 n的向量丛的代数栈。令 $\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z} \to \mathbf{Vect}_n$ 为与向量丛 $\mathbb{A}^n_{\mathbb{Z}} \to \mathbb{Z}$相关联的映射，$\mathbf{GL}_n$ 在 $\mathbb{A}^n_{\mathbb{Z}}$ 上的标准作用给出一个同一化 $\mathbf{Vect}_n \cong B\mathbf{GL}_n$。

命题 7.7.2. 设 V 是代数叠 $S := \mathrm{Vect}_n$ 上秩为 n 的万有向量丛，零截面为 $\iota_0\colon S \to V$。那么 ι_0 是上同调光滑的，并且 $\iota_0^!1[n]$ 是 Vect_n 上的线丛，由此得到一个代数栈映射

$$\delta\colon \mathrm{Vect}_n \to \mathrm{Vect}_1.$$

此外，一个交换三角形的数据

$$\begin{array}{ccc} & \mathrm{Spec}\,\mathbb{Z} & \\ \swarrow & & \searrow \\ \mathrm{Vect}_n & \xrightarrow{\quad\delta\quad} & \mathrm{Vect}_1 \end{array} \tag{7.7.1}$$

填充固定映射 $\mathrm{Spec}\ \mathbb{Z} \to \mathrm{Vect}_n$ 和 $\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z} \to \mathrm{Vect}_1$ 的，是 $\widetilde{\iota}_0^!1[n]$的平凡化所构成的 ***anima***，其中 $\widetilde{\iota}_0\colon \mathrm{Spec}\ \mathbb{Z} \to \mathbb{A}^n_{\mathbb{Z}}$ 是零截面。特别地，这类三角形所构成的 ***anima*** 是一个 $\mathbb{Z}^\times = \{\pm 1\}$- 扭子（因此是一个集合）。固定三角形 (7.7.1) 后，映射 δ 导出一个带基点分类栈的态射

$$B\mathbf{GL}_n \to B\mathbb{G}_m$$

该态射通过去环化等价于由行列式给出的群态射 $\det\colon \mathbf{GL}_n \to \mathbb{G}_m$。特别地，若 V 是 Vect_n的万有向量丛，则存在一个典范同构

$$\iota_0^! 1[n] = \det V = \bigwedge^n V,$$

这仅取决于三角形 (7.7.1) 的选择（即相差一个符号）。

证明。 映射 ι_0 的光滑性显然：沿映射 $\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z} \to \mathbf{Vect}_n$ 拉回后即可证明，此时问题归结为完全交 $0 \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{Z}}$ 的上同调光滑性，而这由引理 6.3.5 得出。 $\iota_0^! 1[n]$ 是一个线丛这一事实可通过拉回到 $\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}$ 后证明；这可由以下事实得出：$\widetilde{\iota_0}_{,\,*} = \widetilde{\iota_0}_{,\,!}$ 是一个仿射映射，并且可通过 Koszul 复形计算 $\underline{\mathrm{Hom}}^{\mathbb{Z}[T_1,\dots,T_n]}(\mathbb{Z},\ \mathbb{Z}[T_1,\dots,T_n]) \cong \mathbb{Z}[-n]$。

现在，对象 $\iota_0^! 1[n]$ 导出一个代数栈之间的映射

$$\delta\colon \mathrm{Vect}_n \to \mathrm{Vect}_1.$$

由于 $\mathbf{Vect}_n \cong B\mathbf{GL}_n$ 和 $\mathbf{Vect}_1 \cong B\mathbb{G}_m$ 是群的分类栈，态射 $\mathbf{Vect}_n \to \mathbf{Vect}_1$ 的 anima 等价于三角形 (7.7.1) 的 anima，模去 $\mathbb{G}_m(\mathbb{Z}) = \{\pm 1\}$ 的共轭。另一方面，根据去环化，带点映射 $B\mathbf{GL}_n \to B\mathbb{G}_m$ 的 anima 等价于群同态 $\mathbf{GL}_n \to \mathbb{G}_m$ 的 anima。由于 $\mathbb{G}_m$ 由一个静态环余表示，群同态 $\mathbf{GL}_n \to \mathbb{G}_m$ 的 anima 是一个集合，并且恰好由群 $(\det)^{\mathbb{Z}}$ 给出，其中 $\det\colon \mathbf{GL}_n \to \mathbb{G}_m$ 是行列式映射。由此可知，映射 $\mathbf{Vect}_n \to \mathbf{Vect}_1$ 的 anima 同构于群胚 $(\det)^{\mathbb{Z}}/\{\pm 1\}$；特别地，三角形 (7.7.1) 的选择是一个所需的 $\{\pm 1\}$-扭子。

固定一个三角形 (7.7.1)，则映射 δ 来自一个群态射 $(\det)^k\colon \mathbf{GL}_n \to \mathbb{G}_m$，因此我们只需证明 $k = 1$。令 $\mathbf{T} \subset \mathbf{GL}_n$ 为对角环面，只需证明复合映射 $\mathbf{T} \to \mathbf{GL}_n \to \mathbb{G}_m$ 由行列式给出。此外，将 $\mathbf{T} = \prod_{i=1}^n \mathbb{G}_m$ 通过对角矩阵元素写成乘法群的乘积后，在 $B\mathbf{T} = \prod_{i=1}^n B\mathbb{G}_m$ 上，我们有万有向量丛 $V = \prod_{i=1}^n L_i$ 的分解，其中 L_i 是与第 i 个分量相关联的万有线丛。由于对偶化层的构造关于纤维积是自然的（这正是核范畴中取伴随后对称幺半结构的函子性），所以我们归结为情形 $n = 1$，并希望证明映射

$$\delta\colon B\mathbb{G}_m \to B\mathbb{G}_m$$

是恒等映射。

现在我们进行显式计算： $B\mathbb{G}_m$ 上的万有线丛是商 $\mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}/\mathbb{G}_m \to B\mathbb{G}_m$，其中 $\mathbb{G}_m$ 通过乘法作用。范畴 $\mathbf{D}(B\mathbb{G}_m)$自然等价于分次 $\mathbb{Z}$-模的范畴，而 $\mathbf{D}(\mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}/\mathbb{G}_m)$ 是 $\mathbf{D}(B\mathbb{G}_m)$ 上的 $\mathbb{Z}[t]$-模范畴，其中 t 是一个次数为 -1 的变量（见备注 7.7.6）。接着，利用 Koszul 分辨

$$0 \to t\mathbb{Z}[t] \to \mathbb{Z}[t] \to \mathbb{Z} \to 0,$$

我们有

$$\iota_0^! 1 = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{Z}[t]}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}[t]) = t^{-1}\mathbb{Z}[-1]$$

证明 $\iota_0^! 1[1]$ 由 $B\mathbb{G}_m$ 上的次数为 1 的线丛给出，这恰好对应于恒等态射 $B\mathbb{G}_m \xrightarrow{\mathrm{id}} B\mathbb{G}_m$，从而完成命题的证明。□

备注 7.7.3. 命题 7.7.2 有两个主要内容：第一，向量丛的零截面的（移位后的）对偶化层由该向量丛的行列式给出；第二，这一等同在相差一个符号的意义下是典范的（或等价地，取决于三角形 (7.7.1) 的选取）。自然可以期望，命题 7.7.2 的函子 δ 可以提升为交换幺半群之间的映射 $\delta\colon \mathbf{Vect} \to \mathbf{Vect}_1$，其中 $\mathbf{Vect}$ 是向量丛的代数栈，并带有

由直和给出的幺半群结构，并且在固定一个符号之后，映射 δ 可以自然地等同于行列式映射。

我们继续证明 Serre 对偶。为此，我们回顾 Mao21 第 3], 节中关于对偶和I-进滤过的讨论，并将其调整到解析环的情形。

定义 7.7.4. 令 Ring^{δ} 为离散动画环范畴。对 的范畴是全子范畴 $\mathrm{Pair} \subset \mathrm{Fun}(\Delta^1, \mathrm{Ring}^{\delta})$，由那些在 π_0 上满射的态射 $A \to B$ 组成。给定一个对 $f\colon A \to B$，我们令 $I = \mathrm{fib}(A \to B)$ 为 f 的理想。

我们回顾滤过动画环的定义；关于滤过范畴和分次范畴的讨论，请参阅 Bha22 第 2.2] 节及其中的参考文献。

定义 7.7.5. 设 X 为一个 fpqc 代数栈。非正式地说， X 上的动画环范畴，记为 Ring_X，定义为以下极限

$$\mathrm{Ring}_X = \varprojlim_{\mathrm{Spec}\, R \to X} \mathrm{Ring}^{\delta}_{R/}$$

离散动画 R-代数范畴，其中指标图表是 X上的仿射概形范畴。形式上，将 $\mathrm{Spec}\, R \mapsto \mathrm{Ring}^{\delta}_{R/}$ 发送到相应对象的函子满足 fqpc 下降，而 Ring_{-}是将其右 Kan 延拓为代数栈上的 fpqc 层。等价地，Ring_X 是 fpqc 代数栈在 X 上的态射 $Y \to X$ 所成全子范畴的反范畴，其中这些态射由仿射概形表示；也就是说，对任意来自仿射概形的映射 $\mathrm{Spec}\, R \to X$ ，沿其作拉回后得到的都是仿射概形。给定 $\mathscr{R} \in \mathrm{Ring}_X$，我们令 $\mathrm{Spec}_X(\mathscr{R}) \to X$ 为其在 X上的关联代数栈，并称之为的相对谱。

我们将滤过动画环（带递减滤过）范畴定义为 $\mathrm{Fil}(\mathrm{Ring}) := \mathrm{Ring}^{\mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}/\mathbb{G}_m}$，其中在 $\mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}/\mathbb{G}_m$ 中，$\mathbb{G}_m$ 的作用是乘法。类似地，我们将分次导出环范畴定义为 $\mathrm{Gr}(\mathrm{Ring}) := \mathrm{Ring}^{B\mathbb{G}_m}$。

备注 7.7.6。 设 $\mathbb{Z}[t]$ 是 $B\mathbb{G}_m$ 上的多项式代数，其中 t 是一个次数为 -1 的变量，那么存在一个自然等价

$$\mathrm{Spec}_{B\mathbb{G}_m}(\mathbb{Z}[t]) = \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}/\mathbb{G}_m.$$

特别地，我们有一个对称幺半等价

$$\mathrm{D}(\mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}/\mathbb{G}_m) = \mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}[t]}(\mathrm{D}(B\mathbb{G}_m)).$$

备注 7.7.7。 设 X 是一个 fpqc 代数栈，并令 $\mathrm{D}^{\geq 0}(X)$ 为连通拟凝聚层的范畴。存在一个遗忘函子 $G\colon \mathrm{Ring}_X \to \mathrm{D}^{\geq 0}(X)$。由仿射情形的下降可知，函子 G 有一个左伴随，记作 $\mathrm{Sym}^{\bullet}_X$；它不过是仿射情形下对称幂的下降。由于 G 保持余极限且是保守的（同样由仿射情形的下降可知），由单子性定理可得

$$\mathrm{Ring}_X = \mathrm{LMod}_{\mathrm{Sym}^{\bullet}_X}(\mathrm{D}_{\geq 0}(X)).$$

例 7.7.8。 我们来用代数栈的语言解释 Bha22，命题 2.2 中的 Rees 构造。给定一个过滤的 $\mathbb{Z}$-模 $\mathrm{Fil}^{\bullet}M \in \mathrm{D}(\mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}/\mathbb{G}_m)$，$\mathrm{Fil}^{\bullet}M$ 的 ***Rees*** 模是沿着 $\mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}} \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}/\mathbb{G}_m$ 的拉回。直观地说，Rees 模由下式给出

$$\mathrm{Rees}(\mathrm{Fil}^{\bullet}M) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathrm{Fil}^n M t^{-n}$$

其中 t 是$\mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}$ 的坐标函数，其次数为 -1。

离散动画环范畴具有由全子范畴 $\mathrm{Poly}^{\mathrm{ft}} \subset \mathrm{Ring}^{\delta}$ 给出的紧投射生成元，即 $\mathbb{Z}$ 上由有限个变量生成的多项式。Pair 上的余极限逐点计算，而对 $\mathbb{Z}[X] \xrightarrow{X \mapsto 0} \mathbb{Z}$ 与 $\mathbb{Z}[X] \xrightarrow{\text{恒等}} \mathbb{Z}[X]$ 余表示

将 $A \to B$ 分别映至 I 与 A 的函子。因此，Pair 是紧投射生成范畴，其一族紧投射生成元由全子范畴 $\mathsf{Pair}^{\mathrm{pol}} \subset \mathsf{Pair}$ 给出，该全子范畴由对 $\mathbb{Z}[X,Y] \xrightarrow{X\mapsto 0} \mathbb{Z}[Y]$组成。其中 X 与 Y 是有限变量集。

给定一对 $f\colon A \to B$ 以及理想 I，可以如下构造 I-进滤过 f。若 f 满足以下条件，我们称其为 *Koszul*正则：A 和 B 是静态的，并且 $I = \ker(A \to B)$ 由有限个 Koszul 正则序列生成。$\mathsf{Pair}^{\mathrm{pol}}$ 中的所有对都是 Koszul正则的。给定一个理想为 I的 Koszul 正则对$A \to B$，可以构造其 I-进滤过，定义为 $(I^n)_{n\in\mathbb{N}}$。从 Koszul 正则对的态射到I-进滤过的构造具有函子性，并由此得到一个函子

$$\mathrm{Fil}^{\bullet}_{\mathrm{ad}}\colon \mathsf{Pair}^{\mathrm{pol}} \to \mathrm{Fil}(\mathrm{Ring}^{\delta})$$

作用于滤过动画环。简单计算可知，$\mathsf{Fil}^{\bullet}$ 进保推出。通过筛余极限延拓，也就是进行动画化，我们构造出了 I阿蒂亚滤过函子

$$\mathrm{Fil}^{\bullet}_{\mathrm{ad}}\colon \mathsf{Pair} \to \mathrm{Fil}(\mathrm{Ring}^{\delta}).$$

根据构造，函子 $\mathsf{Fil}^{\bullet}$ 进与筛余极限可交换；此外，依据 [Lur09，命题5.5.8.15 (3)]，它也与所有余极限可交换。

例7.7.9. 设 R 为离散环。映射 $f\colon \operatorname{Spec} R \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}/\mathbb{G}_m$ 的数据等同于一个虚拟卡蒂埃除子，也就是说，一个态射 $I \to R$，其中 I 是 R上的线丛。映射 f由仿射概形表示，因此产生一个滤过动画环，也就是 $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} I^n t^{-n}$（其中 t 是 $\mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}$ 的坐标，次数为 -1）。

引理7.7.10. 令 $\mathrm{Fil}^{\geq 0}(\mathrm{Ring}^{\delta}) \subset \mathrm{Fil}(\mathrm{Ring}^{\delta})$ 为正滤过动画环的全子范畴，即由满足以下条件的滤过动画环 $\mathrm{Fil}^{\bullet}A$ 构成：对于 $n \geq 0$，映射 $\mathrm{Fil}^0 A \to \mathrm{Fil}^{-n} A$ 是同构。那么，包含映射 $\mathrm{Fil}^{\geq 0}(\mathrm{Ring}^{\delta})$ $\subset\mathrm{Fil}(\mathrm{Ring}^{\delta})$ 有一个右伴随，它将滤过动画环 $\mathrm{Fil}^{\bullet}A$ 映射到其正截断$\mathrm{Fil}^{\geq 0}A$。

证明。 </style}令 $\mathsf{D}^{\geq 0}(\mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}/\mathbb{G}_m)$ 表示连通滤过 $\mathbb{Z}$-模的范畴，将其视为分次 $\mathbb{Z}[t]$-模，其中 t 的次数为 -1。范畴 $\mathsf{D}^{\geq 0}(\mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}/\mathbb{G}_m)$ 由对象 $\bigoplus_{i=1}^{s} \mathbb{Z}[t]t^{k_i}$ 紧投射生成，其中 $k_i \in \mathbb{Z}$。因此，$\mathsf{Fil}(\mathsf{Ring}^{\delta})$ 也由分次 $\mathbb{Z}[t]$-代数 $\mathbb{Z}[t][X_1,\dots,X_s]$ 紧投射生成，其中 X_i 的次数为 $k_i \in \mathbb{Z}$。类似地，模 M 满足条件 $\mathsf{Fil}^0 M = \mathsf{Fil}^{-n} M$（对 $n \geq 0$）的全子范畴 $\mathsf{Fil}^{\geq 0}(\mathsf{D}^{\geq 0}(\mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}/\mathbb{G}_m))$，由生成元 $\bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}[t]t^{k_i}$ 紧投射生成，其中 $k_i \leq 0$。因此，$\mathsf{Fil}^{\geq 0}(\mathsf{Ring}^{\delta})$ 也由生成元构成的分次 $\mathbb{Z}[t]$-代数 $\mathbb{Z}[t][X_1,\dots,X_s]$ 紧生成，如上所述，其中 $|X_i| = k_i \leq 0$。包含映射 $\mathsf{Fil}^{\geq 0}(\mathsf{Ring}^{\delta})$ $\subset\mathsf{Fil}(\mathsf{Ring}^{\delta})$ 的右伴随的描述可由动画化得到，细节留给读者。□

例 7.7.11. 下面我们以更几何的方式来诠释线丛情形下的 I-进滤过。设 $f\colon \operatorname{Spec} R \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}/\mathbb{G}_m$ 是由卡蒂埃除子 $I \to R$ 关联的代数栈之间的映射。设 $I^{\bullet}$ 是如例7.7.9中与映射 f 关联的滤环。那么，$I \to R$ 的 I-进滤过是正截断

$$\mathrm{Fil}^{\bullet}_{\mathrm{ad}}(R \to R/^{\mathbb{L}}I) = \mathrm{Fil}^{\geq 0}(I^{\bullet}).$$

给定一个带有进滤过 $\mathsf{Fil}^{\bullet}_{\mathrm{ad}}(A \to B) = (I^n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的 Koszul 正则对 $f\colon A \to B$，其伴随分次环为 $\mathsf{gr}^{\bullet}_{\mathrm{ad}}(A \to B) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} I^n/I^{n+1}$。$f$ 的 Koszul 正则性推出

$$\mathrm{gr}^{\bullet}_{\mathrm{ad}}(A \to B) = \mathrm{Sym}_B(I/I^2).$$

此外，由于 I 由 Koszul 正则序列生成，对余切复形的标准计算表明，自然映射 $I \to \mathbb{L}_{B/A}[-1]$ 诱导出 B- 模之间的等价 $I/I^2 \xrightarrow{\sim}\mathbb{L}_{B/A}[-1]$。将这一构造 anima 化，我们得到以下结果。

命题 7.7.12 ([Mao21, 推论 3.61])。复合函子 $\mathsf{Pair} \to \mathrm{Fil}(\mathrm{Ring}^{\delta}) \xrightarrow{\mathrm{gr}} \mathrm{Gr}(\mathrm{Ring}^{\delta})$ 将一对 $A \to B$ 映为分次动画环 $\mathrm{Sym}^{\bullet}_B(\mathbb{L}_{B/A}[-1])$。

备注 7.7.13。 设 $A \to B$ 是一对离散动画环。存在滤过动画环的自然态射 $A \to \mathbf{Fil}_{\mathrm{ad}}(A \to B)$，其中 A 赋予平凡滤过，该滤过由 $\mathbf{Fil}^n(A) = A$ （当 $n \leq 0$ 时）和 $\mathbf{0}$（当 $n > 0$时）给出。事实上，可以通过动画化证明这一点，依据是 $\mathbf{Pair}^{\mathrm{pol}}$的进滤过构造。类似地，存在滤过 A-代数之间的映射 $\mathbf{Fil}_{\mathrm{ad}}(A \to B) \to B$。

在法锥变形的构造中，我们需要计算进滤过函子的右伴随。

引理 7.7.14。 考虑函子 $\mathrm{Fil}^\bullet{}_{\mathrm{ad}} \colon \mathsf{Pair} \to \mathrm{Fil}(\mathrm{Ring}^\delta)$，它将对映到滤过动画环，并由进滤过给出。则$\mathrm{Fil}^\bullet{}_{\mathrm{ad}}$ 经由$\mathrm{Fil}^{\geq 0}(\mathrm{Ring}^\delta)$分解，其限制是一个函子

$$\Psi \colon \mathsf{Pair} \to \mathrm{Fil}^{\geq 0}(\mathrm{Ring}^\delta)$$

是全忠实的，并且它有一个右伴随，该右伴随将正滤过动画环$\mathrm{Fil}^{\geq 0}A$ 映到对 $\mathrm{Fil}^0 A \to \mathrm{gr}^0(A)$。

证明。 在本证明中，我们将 $\mathbf{Fil}(\mathbf{Ring}^\delta)$ 视为带有 $|t| = -1$ 的分次 $\mathbb{Z}[t]$-代数。回忆一下，$\mathbf{Pair}$ 是由对 $\mathbb{Z}[x,y] \to \mathbb{Z}[y]$ 紧投射生成的，其中 x 和 y是有限变量集。函子 Ψ 将 $\mathbb{Z}[x,y] \to \mathbb{Z}[y]$ 映到分次 $\mathbb{Z}[t]$-代数 $\mathbb{Z}[t][x, \frac{y}{t}]$，即由 $Y = \frac{y}{t}$ （次数为 -1 ）和 $\bar{X} = x$ （次数为 $\mathbf{0}$）这些元素生成的自由动画 $\mathbb{Z}[t]$-代数。然后，根据 $\mathbf{Fil}^{\geq 0}(\mathbf{Ring}^\delta)$ 是带有$|X_i| \leq 0$ 的分次 $\mathbb{Z}[t]$-代数 $\mathbb{Z}[t][X_1, \ldots, X_n]$ 的动画化这一描述可知，函子 Ψ 的右伴随是将正滤过动画环 $\mathbf{Fil}^{\geq 0}A$ 映到对 $\mathbf{Fil}^0 A \to \mathbf{gr}^0(A)$ 的函子。于是函子 Ψ 是全忠实的，因为对于一个对 $A \to B$，有 $\mathbf{Fil}^0{}_{\mathrm{ad}}(A \to B) = A$，且 $\mathbf{gr}^0_{\mathrm{ad}}(A \to B) = B$ （它们之间显然的映射就是原来的 $A \to B$）。□

构造 7.7.15. 设 $f \colon A \to B$ 是一对离散动画环，$\mathbf{Fil}_{\mathrm{ad}}(A \to B)$ 是与 f 相关联的滤过动画环，其中 f 被视为代数叠 $\mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}/\mathbb{G}_m$ 上的动画环。$\widetilde{\ }$ 的法锥变形记作 $\mathcal{N}_f$，是相对谱 $\mathbf{Spec}^{\mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}/\mathbb{G}_m}(\mathbf{Fil}_{\mathrm{ad}}(A \to_{\sim} B)) \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}/\mathbb{G}_m$。根据构造，$\mathcal{N}_f$ 在 $\mathbf{Spec}\,\mathbb{Z} = \mathbb{G}_m/\mathbb{G}_m \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}/\mathbb{G}_m$ 处的纤维为 $\mathbf{Spec}(A)$，而在 $B\mathbb{G}_m$ 处的纤维为正规锥，即分次环$\mathcal{N}_f = \mathbf{Spec}^{B\mathbb{G}_m}(\mathbf{Sym}^\bullet_B(\mathbb{L}_{B/A}[-1])) \to B\mathbb{G}_m$的谱。

存在滤环的自然映射 $A \to \mathbf{Fil}_{\mathrm{ad}}(A \to B) \to B$，由此得到叠在 $\mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}/\mathbb{G}_m$ 上的映射

$$\mathrm{Spec}(B) \times \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}/\mathbb{G}_m \to \widetilde{\mathcal{N}}_f \to \mathrm{Spec}(A) \times \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}/\mathbb{G}_m$$

关于 $\mathbf{Pair}$ f 的函子性。

备注 7.7.16。 下面说明一种更具几何性的法锥变形构造。设 X 是一个代数栈。f 的锥 是如下代数叠

$$X^{\mathrm{cone}} \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}/\mathbb{G}_m$$

其在带有卡蒂埃除子 $I \to R$ 的 $\mathbf{Ring}$ R 上的取值为 $\mathbf{anima}$

$$X^{\mathrm{cone}}(R, I) = X(R/I).$$

自然映射 $R \to R/I$ 给出一个在 $\mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}/\mathbb{G}_m$ 上的代数叠之间的自然变换

$$X \times \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}/\mathbb{G}_m \to X^{\mathrm{cone}}.$$

Given $f \colon Y \to X$ 一个代数栈的态射，f 的锥 是拉回 k

$$Y^{\mathrm{cone}/X} := Y^{\mathrm{cone}} \times_{X^{\mathrm{cone}}} (X \times \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}/\mathbb{G}_m).$$

$Y^{\mathrm{cone}/X}$ 沿 $\mathbb{G}_m/\mathbb{G}_m$ 的拉回将映射 $\mathbf{Spec}(R) \to X$ 发送到 $\mathbf{anima}$ $Y(R/0) = Y(\mathbf{0}) = *$。因此，

$$Y^{\mathrm{cone}/X} \times_{\mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}/\mathbb{G}_m} \mathbb{G}_m/\mathbb{G}_m = X.$$

另一方面，沿 $B\mathbb{G}_m \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}/\mathbb{G}_m$ 的拉回是一个代数叠，它将带有线丛 $\mathcal{L}$（定义在 R之上）的映射 $\mathrm{Spec}(R) \to X \times B\mathbb{G}_m$ 发送到映射的 anima $Y^{锥/X}(R) = Y(R \oplus \mathcal{L}[1])$。特别地，如果 f 存在余切复形，则有

$$Y(R \oplus \mathcal{L}[1]) = \tau_{\geq 0}(\mathrm{Hom}_Y(\mathbb{L}_f, \mathcal{L}[1]).$$

特别地，若 $f\colon Y \to X$ 是概形的扎里斯基闭浸入，则有

$$Y^{\mathrm{cone}/X} \times_{\mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}/\mathbb{G}_m} B\mathbb{G}_m = \mathrm{Spec}_Y(\mathrm{Sym}_Y(\mathcal{L}^{-1} \otimes \mathbb{L}_{Y/X}[-1]))$$

Y 在 X上的正规锥。

备注 7.7.17。我们来比较注 7.7.16 的构造与构造 7.7.15。令 $Y \to X$ 为与一对 $A \to B$相关联的扎里斯基闭浸入。给定 $\mathrm{Spec}(R) \to X \times \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}/\mathbb{G}_m$，空间 $Y(R/I)$ 是动画环交换方形的 anima

$$\begin{array}{ccc} R & \longrightarrow & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ R/I & \longrightarrow & B. \end{array}$$

由引理 7.7.14 的全忠实性，该空间等同于滤过动画环之间映射 $\mathrm{Fil}^{\bullet}_I R \to \mathrm{Fil}_{\mathrm{ad}}(A \to B)$ 的 anima，其中 $\mathrm{Fil}^{\bullet}_I R$ 是 R 的 I-进滤过。这证明了

$$Y^{\mathrm{cone}/X} = \mathrm{Spec}_{\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m}(\mathrm{Fil}_{\mathrm{ad}}(A \to B))$$

如我们所需。

备注 7.7.18。最后，我们来说明构造 7.7.15 如何自然地推广到解析环。设 $\mathcal{X}$ 是一个 ∞-拓扑斯，$\mathcal{C}$ 是一个可呈示的 ∞-范畴。根据 [Lur17，命题 4.8.1，17] Lurie 张量积 $\mathcal{X} \otimes \mathcal{C}$ 自然等价于取值于 $\mathcal{C}$ 的层范畴 $\mathrm{Shv}(\mathcal{X}, \mathcal{C})$。将其应用于 $\mathcal{C}$（分别取离散动画环、对、滤过环等范畴），即可得到 $\mathcal{X}$ 上的动画环范畴、$\mathcal{X}$ 上的对范畴、$\mathcal{X}$ 上的滤过动画环范畴等。此外，函子 $\mathrm{Fil}_{\mathrm{ad}}\colon \mathrm{Pair} \to \mathrm{Fil}(\mathrm{Ring}^{\delta})$ 保持余极限，因此它定义了一个保余极限函子

$$\mathrm{Fil}_{\mathrm{ad}}\colon \mathrm{Shv}(\mathcal{X}, \mathrm{Pair}) \to \mathrm{Shv}(\mathcal{X}, \mathrm{Fil}(\mathrm{Ring}^{\delta}))$$

它就是从对范畴到 $\mathcal{X}$ 上的滤过动画环范畴的进滤过。由于取分次环也与余极限相交换，我们还得到一个诱导函子

$$\mathrm{gr}\colon \mathrm{Shv}(\mathcal{X}, \mathrm{Fil}(\mathrm{Ring}^{\delta})) \to \mathrm{Shv}(\mathcal{X}, \mathrm{Gr}(\mathrm{Ring}^{\delta}))$$

其与 $\mathrm{Fil}_{\mathrm{ad}}$ 的复合映射将一对 $\mathscr{A} \to \mathscr{B}$ 的动画环 $\mathcal{X}$ 映射到对称代数 $\mathrm{Sym}_{\mathscr{B}}(\mathbb{L}_{\mathscr{B}/\mathscr{A}}[-1])$，其中 $\mathbb{L}_{\mathscr{B}/\mathscr{A}}[-1])$ 的定义方式与 Lur18 [第 17 节中的余切复形的动画变体相同1]。

将此构造应用于凝聚 anima 的拓扑斯 CondAni，我们得到进滤过的凝聚变体。现在，解析环对是一个解析环态射 $A \to B$，其带有诱导解析环结构，且在 π_0 上满射。相应的凝聚环态射 $A^{\triangleright} \to B^{\triangleright}$ 是一对动画凝聚环，因此它带有进滤过 $\mathrm{Fil}_{\mathrm{ad}}(A^{\triangleright} \to B^{\triangleright})$，以及一个过滤凝聚环态射 $A^{\triangleright} \to \mathrm{Fil}_{\mathrm{ad}}(A^{\triangleright} \to B^{\triangleright})$，其中 $A^{\triangleright}$ 带有平凡滤过，如构造 7.7.15 中所述。取 A-完备化，我们得到解析环的进完备化，它是过滤动画 A-代数之间的态射（带有从 A 诱导的结构）$A \to \mathrm{Fil}_{\mathrm{ad}}(A \to B)$。$\mathrm{Fil}_{\mathrm{ad}}(A \to B)$ 的分次随后同构于动画分次B-代数 $\mathrm{Sym}^{\bullet}_B(\mathbb{L}_{B/A}[-1])$，其中 $\mathbb{L}_{B/A}$ 是动画环的余切复形。给定解析环对$f\colon A \to B$，进滤过导出一个解析叠态射

$$\widetilde{\mathcal{N}}_f\colon = \mathrm{AnSpec}(\mathrm{Fil}_{\mathrm{ad}}(A \to B)) \to \mathrm{AnSpec}(A) \times \mathbb{A}^{1,\mathrm{cond}}_{\mathbb{Z}}/\mathbb{G}^{\mathrm{cond}}_m$$

其中左边是相对解析谱，而 $\mathbb{A}^{1,\mathrm{cond}}_{\mathbb{Z}}/\mathbb{G}_m^{\mathrm{cond}}$ 是由 fpqc 代数栈按第 6.4 节中的方式得到的解析叠 $\widetilde{\ }$。我们称 $\mathcal{N}_f$ 为 f的正规锥变形。总之，我们有一个位于 $\mathbb{A}^{1,\mathrm{cond}}_{\mathbb{Z}}/\mathbb{G}_m^{\mathrm{cond}}$ 上的解析叠图表

$$\mathrm{AnSpec}(B)\times\mathbb{A}^{1,\mathrm{cond}}_{\mathbb{Z}}/\mathbb{G}_m^{\mathrm{cond}}\to\widetilde{\mathcal{N}}_f\to\mathrm{AnSpec}(A)\times\mathbb{A}^{1,\mathrm{cond}}_{\mathbb{Z}}/\mathbb{G}_m^{\mathrm{cond}}.$$

还可以像备注 7.7.16 中那样，为解析叠定义一般的锥构造；该构造在仿射情形下与前面的定义一致。

在接下来的引理中，我们研究法锥变形的一些基本几何性质。为简化记号，给定一个代数栈 S，我们将简单地把它作为解析叠的实现 S^{cond} 记作 S。

引理 7.7.19。以下结论成立：

(1) 将解析叠 X 映射到锥 X^{cone} 的函子（即对其进行 !-层化）与拉回相容。*(2)* 考虑解析环的一个推出图

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ A' & \longrightarrow & B' \end{array}$$

使得 $A\to B$ 是一个 ***Pair***（因此它是 $A'\to B'$）。记 $X=\mathrm{AnSpec}\,A$、$Y=\mathrm{AnSpec}\,B$（A' 和 B' 也类似）。则下图具有笛卡尔方块

$$\begin{array}{ccccc} Y'\times\mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}/\mathbb{G}_m & \longrightarrow & Y'^{,\mathrm{cone}/X'} & \longrightarrow & X'\times\mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}/\mathbb{G}_m \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ Y\times\mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}/\mathbb{G}_m & \longrightarrow & Y^{\mathrm{cone}/X} & \longrightarrow & X\times\mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}/\mathbb{G}_m \end{array}$$

(3) 考虑一个解析环的图表 $A\to B\to C$，及其对应的解析叠图表 $Z\to Y\to X$。设 $A\to B$ 和 $B\to C$ 是对，且 $\mathbb{L}_{C/B}=0$。那么映射 $B\to C$ 是幂等的，且下图是解析叠的拉回图

$$\begin{array}{ccc} Z^{\mathrm{cone}/Y} & \longrightarrow & Z^{\mathrm{cone}/X} \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y\times\mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}/\mathbb{G}_m & \longrightarrow & Y^{\mathrm{cone}/X}, \end{array}$$

并且映射 $Z\times\mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}/\mathbb{G}_m\xrightarrow{\sim}Z^{\mathrm{cone}/Y}\times_{Y\times\mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}/\mathbb{G}_m}(Z\times\mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}/\mathbb{G}_m)$ 是一个等价。特别地，$Z\times\mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}/\mathbb{G}_m\to Z^{\mathrm{cone}/Y}$ 是一个解析叠的闭浸入（定义 *6.2.16*）；若 C是一个可对偶的 B-模，则它是一个开闭浸入。

(4) 令 $\mathbb{G}_a^n=\mathrm{AnSpec}\ \mathbb{Z}[T_1,\dots,T_n]$ 视为一个向量丛，并考虑零截面 $\iota_0\colon\mathrm{AnSpec}\ \mathbb{Z}\to\mathbb{G}_a^n$。令 t 为 $S:=\mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}/\mathbb{G}_m$ 中次数为 -1的坐标。那么，我们有以下表示：

(a)$\widetilde{\mathbb{G}_a^{\mathrm{cone}}}=\mathbb{G}_{a,\,S}/t\mathbb{G}_{a,\,S}$ 其中 $t\in\mathbb{G}_{a,\,S}(S)$ 被视为环栈$\mathbb{G}_{a,\,S}$的卡蒂埃除子。

(b) $\widetilde{\mathcal{N}_{\iota_0}}=t\mathbb{G}^n_{a,\,S}$ 并且映射 $\widetilde{\iota_0}\colon S\to\mathcal{N}_{\iota_0}=t\mathbb{G}^n_{a,\,S}$ 是 $t\mathbb{G}^n_{a,\,S}$的零截面。此外，我们有一个自然的同一性（相差一个如命题 *7.7.2* 中所述的普适符号）

$$\widetilde{\iota_0}^!1[n]=\det(t\mathbb{G}^n_{a,S})=t^n\mathbb{G}_a=\mathscr{O}(-n).$$

是次数为 $-n$ 的线丛（等价地，是 S 的泛卡蒂埃除子的 n 次幂）。

Proof. (1) 这可由 $X \mapsto X^{\mathrm{con}}$ 的点函子描述得出[e].

(2) 这由注 7.7.17，以及根据 $\mathrm{Fil}_{\mathrm{ad}}$ 的保余极限性质，$\mathrm{Fil}_{\mathrm{ad}}(A \to B) \otimes_A A' = \mathrm{Fil}_{\mathrm{ad}}(A' \to B')$ 这一事实得出。

(3) $B \to C$ 是幂等的这一事实，源于 $C \otimes_B C \to C$ 是连通环之间的形式 étale 态射，并且该态射在连通分支上诱导同构（见推论 7.4.8）。要证明第二个断言，与 (2) 类似，将问题转化为滤过动画环的语言后，我们需要证明自然映射

$$\mathrm{Fil}_{\mathrm{ad}}(A \to C) \otimes_{\mathrm{Fil}_{\mathrm{ad}}(A \to B)} B \to C$$

是同构。借助引理 7.7.14 的全忠实嵌入，将问题转化为关于 Pair 的问题后，我们需要证明对之间的自然映射

$$(A \to C) \otimes_{(A \to B)} (B \xrightarrow{\mathrm{id}} B) \to (B \to C)$$

是同构；这是由 Pair 中的推出按点计算这一事实得出的。

要证明 $Z \times \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}/\mathbb{G}_m \xrightarrow{\sim} Z^{\mathrm{cone}/Y} \times_{Y \times \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}/\mathbb{G}_m} (Z \times \mathbb{A}^1_m/\mathbb{G}_m)$ 是等价，只需验证对的层面上的类似陈述。这意味着 $(B \to C) \otimes_{(B \to B)} (C \to C) = (C \to C)$，因为 $B \to C$ 是幂等的。此外，若 C 是可对偶的 B-模，则根据引理 7.6.6，$Z \to Y$ 是开闭浸入；由基变换可知，$Z \times \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}/\mathbb{G}_m \to Z^{\mathrm{cone}/Y}$ 也如此。

(4) $\mathbb{G}_a^{\mathrm{cone}}$ 的描述由定义可知：它是将带有卡蒂埃除子 $I \to R$ 的环 R 映到商 R/I 的代数叠的 ! 层化。显然，由对的映射 $(\mathbb{Z}[t] \to \mathbb{Z}) \to (\mathbb{Z} \to \mathbb{Z})$ 得到的映射 $S \to \mathbb{G}_a^{\mathrm{cone}}$ 给出环栈 $\mathbb{G}_a^{\mathrm{cone}}$ 的零截面。因此，$\mathcal{N}_{\iota_0} = \mathrm{fib}(\mathbb{G}^n_{a,\,S} \to \mathbb{G}^{\mathrm{cone}}_{,\,a}{}^{n}) = t\mathbb{G}^n_{a,\,S}$，正如所需。$\iota_0^! 1$ 的计算由命题 7.7.2 得出。

□

引理 7.7.20. 设 $A \to B$ 为一对解析环，使得 B 具有形式 $B = A/^{\mathbb{L}}(a_1, \ldots, a_n)$，其中 $a_i \in \pi_0(A)$ 为某些元素。设 $f\colon Y \to X$ 为相应的解析叠映射。则下列结论成立：

(1) 映射 $f\colon Y \times \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}/\mathbb{G}_m \to \mathcal{N}_f$ 是余维为 n 的完全交。特别地，它是上同调光滑的。*(2)* 考虑映射 $g\colon \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}/\mathbb{G}_m \to \mathrm{AnSpec}\,\mathbb{Z}$。则 g 为 ***prim***，且自然映射 $\mathbb{Z} \to g_* 1$ 是一个等价。特别地，g^* 是全忠实的，并且沿任意解析叠态射 $S \to \mathrm{AnSpec}\,\mathbb{Z}$ 作基变换后同样成立。*(3)* 对 $k \in \mathbb{Z}$，设 $\mathscr{O}(k)$ 为 $B\mathbb{G}_m$ 上次数为 k 的线丛。则 $\widetilde{f}^! 1 \otimes \mathscr{O}(n)$ 属于沿 $g\colon Y \times \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}/\mathbb{G}_m \to Y$ 的拉回的本质像。特别地，若 ι_0 与 ι_1 分别表示 $\mathrm{AnSpec}\,\mathbb{Z} \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}/\mathbb{G}_m$ 在 0 与 1 处的截面，则在 Y 上存在层的自然等价

$$\iota_0^*(\widetilde{f}^! 1 \otimes \mathscr{O}(n)) = \iota_1^*(\widetilde{f}^! 1 \otimes \mathscr{O}(n)).$$

（*4*）在（*3*）的情形下，我们有一个自然等价（相差一个普适符号）

$$\iota_0^*(\widetilde{f}^! 1 \otimes \mathscr{O}(n)) = \det(N_f)[-n]$$

其中 $\mathcal{N}_f = (\mathbb{L}_{Y/X}[-1])^\vee$ 是 f 的正规锥。

证明。(1) 我们可以找到一个解析环态射 $\mathbb{Z}[T_1, \ldots, T_n] \to A$，将 $T_i \mapsto a_i$ 发送到 $B = A \otimes_{\mathbb{Z}[T_1, \ldots, T_n]} \mathbb{Z}$。由此得到一个解析叠的笛卡尔方块

$$\begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Spec}\ \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{A}^n_{\mathbb{Z}}. \end{array}$$

根据引理 7.7.19 (2)，我们在相应的到法锥的形变中得到一个笛卡尔方块；由基变换，只需考虑零截面ι: Spec $\mathbb{Z} \to \mathbb{A}^n_{\mathbb{Z}}$的情形。此情形可由引理 7.7.19 (4.b) 的显式计算得到。

(2) 让我们来看 g 是可取例外拉回且为prim。我们将 g 写成复合映射 $\mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}/\mathbb{G}_m \to B\mathbb{G}_m \to$ Spec$\mathbb{Z}$，第一个映射是prim，因为它由仿射概形表示，剩下要证明 $B\mathbb{G}_m \to$Spec $\mathbb{Z}$ 是prim。为此，根据 [HM24，引理4.7.4] 只需证明 h: Spec $\mathbb{Z} \to B\mathbb{G}_m$是prim且可下降；它是prim，因为它在仿射概形中被表示，它是可下降的，因为 $h_*1 = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{O}(n)$且 $B\mathbb{G}_m$ 的单位是它的一个retract。最后， $\mathbb{Z} \to g_*1$是一个等价这一事实源于 g_* 是将一个 $\mathbb{Z}$-分次模送到其0次部分的函子。 g^* 的全忠实性（即使在基变换之后）源于对基的线性性以及前面的计算。

(3) 由引理 7.7.19 (2) 以及上文 (1) 的讨论，只需对零截面 Spec$\mathbb{Z} \to \mathbb{A}^n_{\mathbb{Z}}$ 的情形证明该陈述。该陈述随后由引理 7.7.19 (4.b) 得出。沿 ι_0 与 ι_1 的拉回所得到的等价，源于它们与 $Y \times \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}/\mathbb{G}_m \to Y$ 的复合映射一致这一事实。

(4) 剩下要计算的是 $\iota_0^*(\widetilde{f}^!1 \otimes \mathscr{O}(n))$。为此，考虑沿零截面~Spec $\mathbb{Z} \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}/\mathbb{G}_m$ 的拉回。于是 $\mathcal{N}_f \times_{\mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}/\mathbb{G}_m}$ AnSpec $\mathbb{Z} = \mathcal{N}_f =$AnSpec(Sym$_B(\mathbb{L}_{B/A}[-1])$) 是 f 的正规锥。特别地， $\mathcal{N}_f \to$ AnSpec B是一个向量丛，而 f 的拉回$\sim h$: AnSpec $B \to \mathcal{N}_f$是零截面。由 suave 基变换，我们有

$$\iota_0^*(\widetilde{f}^!1 \otimes \mathscr{O}(n)) = h^!1$$

其中，我们在沿 AnSpec$\mathbb{Z} \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}/\mathbb{G}_m$ 拉回后使用了 $\mathscr{O}(n)$ 的一个固定平凡化（仅取决于 n）。这个识别

$$h^!1 = \det(\mathcal{N}_f)[-n]$$

由命题 7.7.2 得出。

□

定理 7.7.21。 设 f: $A \to B$ 是维数为 n 的固体 *Huber* 环之间的局部固体光滑态射。那么， f 的法锥变形给出一个同构 $f^!1 =\det(\mathbb{L}_{B/A})[$维数 $f]$（除符号外自然，且该符号仅取决于 f 的维数）。

证明。 设 $X =$AnSpec B、 $S =$AnSpec A，且 f: $X \to S$。考虑对角映射 $X \xrightarrow{\Delta_S} X \times_S X$，并令 pr$_i$: $X \times_S X \to X$ 为第 i 个投影映射。由 suave 基变换可得

$$f^!1 = \Delta^*(\mathrm{pr}_1^* f^!1) = \Delta^* \mathrm{pr}_2^! 1.$$

因此，借助对角技巧，不失一般性，我们可以假设映射 f: $X \to S$ 有一个截面 s: $S \to X$，并且我们希望构造一个自然同构

$$s^* f^!1 = s^*(\det \mathbb{L}_{X/S})[n].$$

由于 s: $S \to X$ 是 S 上局部固光滑仿射刚性空间之间的扎里斯基闭浸入，根据命题 7.6.5 (6)，映射 s 在 X 的固解析拓扑下局部是余维为 n的完全交。特别地， s 是 suave，并且我们有

$$1 = s^! f^!1 = s^!1 \otimes s^* f^!1.$$

因此，只需给出一个自然等价

$$s^!1 = s^*(\det \mathbb{L}^\vee_{X/S})[-n]$$

其中 $\mathbb{L}_{X/S}^{\vee} = N_s = \mathbb{L}_{S/X}[-1]$ 是 s的正规锥。为此，考虑纳入该图表的法锥变形

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\mathcal{N}}_f & \xrightarrow{\widetilde{f}} & X \times \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}/\mathbb{G}_m \\ & \nwarrow^{\widetilde{s}} & \downarrow \\ & & S \times \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}/\mathbb{G}_m. \end{array}$$

由于 $s\colon\ S \to X$ 在 X 的固解析拓扑中局部地是余维为 n的完全交，并且正如引理 7.7.19（2）和（3）所述，法锥变形的构造在拉回下保持稳定，因此由引理 7.7.20 可知，映射 $\widetilde{s}$ 在 X的解析拓扑中局部地是余维为 n的完全交，因而是 suave。另一方面，令 ι_0, ι_1分别表示在 0 和 1 处的截面，根据引理 7.7.20（3），层 $\widetilde{s}^!1 \otimes \mathscr{O}(n)$ 属于全忠实函子 $\mathrm{D}(S) \to \mathrm{D}(S \times \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}/\mathbb{G}_m)$ 的本质像，因此我们有自然等价

$$\iota_0^*(\widetilde{s}^!1 \otimes \mathscr{O}(n)) = \iota_1^*(\widetilde{s}^!1 \otimes \mathscr{O}(n)).$$

$\widetilde{\ }\quad\widetilde{\ } f$ 的拉回：$N_f \to X \times \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}/\mathbb{G}_m$ 沿截面 1 的拉回是一个同构，由此得到一个自然等价

$$\iota_1^*(\widetilde{s}^!1 \otimes \mathscr{O}(n)) = s^!1.$$

另一方面，引理 7.7.20 (4) 给出一个自然等价 $\iota_0^*(\widetilde{s}^!1 \otimes \mathscr{O}(n)) = \det(N_s)[-n]$，从而得到一个自然等价

$$s^!1 = \det(N_s)[-n]$$

正如所需。 □

备注 7.7.22。 借助锥构造的函子性（如备注 7.7.16 和引理 7.7.19 所述），定理 7.7.1 和 7.7.21 都可通过沿解析拓扑进行下降，自然地推广到 solid 赋值空间。此外，由于引理 7.7.19 和 7.7.20 对一般解析环映射都成立，要在其他背景下证明 Serre 对偶（例如复解析几何中的气态理论），只需具备命题 7.6.5 和定理 7.7.1 的类似结果。

供日后参考 ，我们明确说明概形和刚性簇情形下的 Serre 对偶 .

推论 7.7.23。 *(1)* 设 $f\colon\ Y \to X$ 是相对维数为 n的概形 *adic* 空间之间的光滑态射，并设 $Y_{\square} \to X_{\square}$ 是其关联的固栈态射。则， f 上同调光滑，并且存在自然同一化 $\omega_f = \det\Omega^1_{Y/X}[n]$。 *(2)* 设 $f\colon\ Y \to X$ 是完备非阿基米德域K上的刚性簇之间的光滑态射。则 f 上同调光滑，并且存在自然同一化 $\omega_d = \det\Omega^1_{Y/X}[n]$。

证明。 为证明上同调光滑性，我们可以在 Y和 X上的阿迪克拓扑中进行局部化，并不失一般性地假设 Y 和 X 是仿射拟紧的，且映射 $Y \to X$ 是光滑的。进一步局部化后，可以假设 f 经由一个 étale 映射 $Y \to \mathbb{A}^n_X \to X$分解，其中在 (b) 的情形下我们考虑解析仿射直线。在 (a) 的情形下，仿射直线由命题 7.1.11 可知是上同调光滑的；在 (b) 的情形下，它是光滑的，因为它是开仿射拟紧圆盘的并集，并且 $(K, K^+)_{\square} \otimes_{\mathbb{Z}_{\square}} \mathbb{Z}[T]_{\square} = (K\langle T\rangle, K^+\langle T\rangle)_{\square}$在 $(K, K^+)_{\square}$上光滑。于是，由于Y在 X上光滑，映射$Y \to \mathbb{A}^n_X$ 是局部完全交，因此根据引理 6.3.5，它是上同调光滑的。

对偶化层的计算可由法锥变形论证得出，如定理 7.7.21 所示。□

备注 7.7.24。 设 X 是环 A上的真光滑概形。推论 7.7.23 表明，代数叠 $f\colon\ X \to \mathrm{Spec}\, A$ 之间的映射对于拟凝聚层的经典六函子形式体系是上同调光滑的。事实上，我们希望证明 f_* 自然地是 $\omega_f \otimes f^*$的左伴随

，其中 $\omega_f = \det\Omega_{X/A}[\dim\ f]$，并且与沿 Spec $A' \to$ Spec A的拉回相容。由推论 7.7.23 可知，这对于凝固六函子形式体系成立。记 $f_\square$: $X_\square \to$ AnSpec $A_\square$，由于 f是真概形，函子 $f_{\square,\ *} = f_{\square,\ !}$ 保持离散对象。因此，伴随 $f_{\square,\ *} \rightleftharpoons \omega_f \otimes f_\square^*$限制为经典拟凝聚层层面的伴随。由于沿概形映射对凝固层的拉回保持离散对象，伴随 $f_* \rightleftharpoons \omega_f \otimes f^*$ 在沿 Spec $A' \to$ Spec A对经典拟凝聚层进行基变换时仍然成立，从而证明 f是上同调光滑的，正如所需。

参考文献

[ABFJ22] Mathieu Anel、Georg Biedermann、Eric Finster 和 André Joyal。拓扑斯的左正合局部化 I：高阶层。《数学进展》，400：108268，2022年5月。[ABLB+25] J. Anschütz、G. Bosco、A-C. Le Bras、J.E. Rodríguez Camargo 和 P. Scholze。Fargues-Fontaine 曲线的解析德拉姆栈。https://arxiv.org/abs/2510.15196，2025年。[And21] Grigory Andreychev。解析 adic 空间上的伪凝聚与完美复形及向量丛。https://arxiv.org/abs/2105.12591，2021年。[Aok23] Ko Aoki。层-谱伴随。https://arxiv.org/abs/2302.04069，2023年。[Aok24] Ko Aoki。层的 smashing 谱。https://arxiv.org/abs/2406.03969，2024年。[Bha22] Bhargav Bhatt。棱柱 F-规范。https://www.math.ias.edu/~bhatt/teaching/mat549f22/ lectures.pdf，2022年。[BHL17] Bhargav Bhatt 和 Daniel Halpern-Leistner。重新探讨 Tannaka 对偶。《数学进展》，316：576–612，2017年。[BK25] Christopher Brav 和 Grigorii Konovalov。通过凝固代数几何构造 Beilinson-Parshin 阿代尔，2025年。[BS14] Bhargav Bhatt 和 Peter Scholze。概形的 pro-étale 拓扑，2014年。[BS17] Bhargav Bhatt 和 Peter Scholze。Witt 向量仿射格拉斯曼量的射影性。《数学发明》，209(2)：329–423，2017年。[CLL25] Bastiaan Cnossen、Tobias Lenz 和 Sil Linskens。跨度 2-范畴的泛性质与六函子形式体系的构造，2025年。[CS19] Dustin Clausen 和 Peter Scholze。《凝聚数学讲义》。https://www.math.uni-bonn.de/people/scholze/Condensed.pdf，2019年。[CS20] Dustin Clausen 和 Peter Scholze。《解析几何讲义》。https://www.math.uni-bonn.de/ people/scholze/Analytic.pdf，2020年。[CS22] Dustin Clausen 和 Peter Scholze。《凝聚数学与复几何》。https://people. mpim-bonn.mpg.de/scholze/Complex.pdf，2022年。[CS24] Dustin Clausen 和 Peter Scholze。《解析叠讲座》。https://www.youtube.com/watch?v=YxSZ1mTIpaA&list=PLx5f8IelFRgGmu6gmL-Kf_Rl_6Mm7juZO，2024年。[GvG24] Mai Gehrke 和 Sam van Gool。分配格的拓扑对偶：理论与应用。剑桥大学出版社，剑桥理论与计算机科学丛书第61卷，2024年。[HM24] Claudius Heyer 和 Lucas Mann。六函子形式体系与光滑表示。https://arxiv. org/abs/2410.13038，2024年。[Hub93] Roland Huber。连续赋值。《数学杂志》，212(3)：455–477，1993年。[Hub94] Roland Huber。形式概形与刚性解析簇的推广。《数学杂志》，217(4)：513–551，1994年。[Hub96] Roland Huber。刚性解析簇与 adic 空间的 étale 上同调。《数学论丛》E30。Friedr. Vieweg & Sohn，布伦瑞克，1996年。[Kes25] Youshua Kesting。解析叠的范畴论 Künneth 公式，2025年。[Lur04] Jacob Lurie。导出代数几何。ProQuest LLC，密歇根州安娜堡，2004年。博士论文——麻省理工学院。[Lur09] Jacob Lurie。《高阶 topos 理论》，《数学年刊研究》丛书第170卷。新泽西州普林斯顿：普林斯顿大学出版社，2009年。[Lur17] Jacob Lurie。高阶代数，2017年。[Lur18] Jacob Lurie。谱代数几何。https://www.math.ias.edu/~lurie/papers/ SAG-rootfile.pdf，2018年。[MA24] Sofía Marlasca Aparicio。超凝固同伦代数。https://arxiv.org/abs/2406.04063，2024年。[Man22a] Lucas Mann。钻石上的 $\mathbb{Z}_\ell$-层与 $\mathbb{Q}_\ell$-层的六函子形式体系。https://arxiv.org/abs/ 2209.08135，2022年。[Man22b] Lucas Mann。刚性解析几何中的 p-adic 六函子形式体系。https://arxiv.org/abs/ 2206.02022，2022年。

[Mao21] Zhouhang Mao。重新探讨导出晶体上同调。https://arxiv.org/abs/2107.02921，2021年。[Mat16] Akhil Mathew。稳定同伦论的伽罗瓦群。《数学进展》，291：403–541，2016年。[NS18] Thomas Nikolaus 和 Peter Scholze。论拓扑循环同调。《数学学报》，221(2)：203–409，2018年。[Rak20] Arpon Raksit。重新探讨霍赫希尔德同调与导出德拉姆复形。*arXiv* 预印本 *arXiv:2007.02576*，2020年。[RC24] Juan Esteban Rodríguez Camargo。刚性几何中的解析德拉姆栈。https://arxiv.org/ abs/2401.07738，2024年。[RJRC22] Joaquín Rodrigues Jacinto 和 Juan Esteban Rodríguez Camargo。有理数域-adic 李群的固体局部解析表示。《表示论》，26：962–1024，2022年。[RS22] Shaul Ragimov 和 Tomer M. Schlank。 ∞-范畴反射定理及其应用，2022年。[Sch26a] Peter Scholze。几何与高阶范畴论。https://people.mpim-bonn.mpg.de/scholze/ Gestalten.pdf，2026年。[Sch26b] Peter Scholze。六函子形式体系。https://arxiv.org/abs/2510.26269，2026年。[Sta22] Stacks 计划作者。Stacks计划。https://stacks.math.columbia.edu，2022年。[Sto37] M. H. Stone。分配格与布劳威尔逻辑的拓扑表示。《捷克数学与物理杂志》，67：1–25，1937年。[Toe14] Bertrand Toen。导出代数几何。《*EMS* 数学科学综述》，1(2)：153–240，2014年。[Wed19] Torsten Wedhorn。Adic 空间，2019年。