arXiv:2603.03020v1 [math.DG] 3 Mar 2026

广义井上–邦比耶里流形的算术结构

BRICE FLAMENCOURT 和 ABDELGHANI ZEGHIB

ABSTRACT. 广义井上–邦比耶（GIB）流形 M 是连通黎曼乘积 $\mathbb{R}^q \times (N,\ g_N)$ 的一个紧致商空间，其商群是 $\mathrm{Sim}(\mathbb{R}^q) \times \mathrm{Isom}(N,\ g_N)$ 的离散子群。平坦因子诱导出一个横截黎曼叶状结构，其叶闭包在一种自然的几何修正意义下确定了一个环面纤维化 $M \to X$。本文的主要目标是研究相关的单值表示 $\rho:\ \pi_1(X) \to \mathrm{GL}(n,\ \mathbb{Z})$。我们证明，$\rho$ 的像是约化群的一个余紧算术格的子群，并讨论哪些群可以实现为 GIB 流形的单值群。

当 $(N,\ g_N)$ 是非紧型对称空间时，单值群本身是算术的。此外，可以用 $(N,\ g_N)$ 的等距变换群的抛物子群来描述该纤维化和单值群。这既带来了新的 GIB 流形实例，也揭示了若干障碍，并为这一特定情形下实现完整分类开辟了道路。

CONTENTS

1. 引言 1
2. 记号与预备知识 5
3. 算术数据 7
4. 自同构群的扎里斯基闭包：定理 1.2 的证明 9
5. 从 GIB 单值化子群到 GIB 流形：定理 1.4 的证明 15
6. GIB 流形与对称空间 16
7. 矩阵群的具体例子 21
参考文献 25

1. INTRODUCTION

1.1. **GIB 流形。** 广义井上–邦比耶（GIB）流形是具有自然黎曼叶状结构的紧流形。它们最初在 [13] 中提出，旨在简化对局部共形乘积流形（LCP）的研究框架。

回顾一下，两个黎曼流形 $(M_1,\ g_1)$ 和 $(M_2,\ g_2)$ 之间的相似变换（也称位似变换）是指一个微分同胚 $\phi:\ M_1 \to M_2$，满足 $\phi^* g_2 = \lambda^2 g_1$，其中 $\lambda > 0$ 是某个实数，称为相似比。从黎曼流形 $(M,\ g)$ 到其自身的相似变换群记作 $\mathrm{Sim}(M)$。严格相似变换是相似比不等于 1 的相似变换。由此得到 GIB 流形的如下定义：

2020 *Mathematics Subject Classification.* 11F06, 22E40,51D25, 53C35,57S20.
Key words and phrases. 李群的格、算术群、黎曼叶状结构、对称空间。

定义 1.1。广义井上–邦比耶（*GIB*）流形是乘积流形 $\mathbb{R}^q \times N$ 的紧致商，其中 $q \geq 1$，且（N， g_N）是连通黎曼流形；该商由 Γ 的离散子群作用得到，其中 Γ 是 $\mathrm{Sim}(\mathbb{R}^q) \times \mathrm{Isom}(N, g_N)$ 的离散子群，该子群作用适当、自由且余紧，并且其在 $\mathrm{Sim}(\mathbb{R}^q)$ 上的投影包含一个严格相似变换。

GIB 流形以 S^0型井上–邦比耶曲面命名，并将其推广。这些复流形是通过离散子群作用于$\mathbb{C} \times \mathbb{H}^2$ 而得到的紧商空间，其中子群属于 $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}) \times \mathrm{Aut}(\mathbb{H}^2) = \mathrm{Sim}^+(\mathbb{R}^2) \times \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^2)$。

请注意，本文中，(N, g_N) 始终表示 GIB 流形万有覆盖中的黎曼因子，基本群在该因子上通过等距变换作用。

1.2. 单值群。本研究最初旨在理解 GIB 流形定义中自然出现的算术数据。为介绍这些数据，我们固定一个形如 $\Gamma\backslash(\mathbb{R}^q \times N)$的 GIB 流形 M，并注意到浸没 $\mathbb{R}^q \times N \to N$ 诱导的叶状结构下降为商空间上的黎曼叶状结构 $\mathcal{F}$。

在 [13, 定理 1。6] 中已证明，经过自然的几何变换后， $\mathcal{F}$ 的叶的闭包是环面纤维化 $M \to X$ 的纤维，该纤维化以紧致底空间 X 为底，而底空间继承了自然的黎曼度量。这导出了一个单值表示 ρ： $\pi_1(X) \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$，其中 n 表示环面的维数（更多详情参见 [11, 13, 15], 及第3.1 节）。其像通常记作 D，称为该 GIB 流形的单值群。

利用 GIB 流形的结构性质，我们证明，作为 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$ 的子群，单值群 D 满足以下几项强约束：

- 存在一个非平凡分解 $\mathbb{R}^n = H \oplus V$，且该分解在$D$作用下保持不变。（按照 GIB 流形的术语，子空间 H 对应于万有覆盖的欧几里得因子 $\mathbb{R}^q$。）
- H 是 $\mathbb{R}^n$的无理子空间，这意味着 $H + \mathbb{Z}^n$ 在 $\mathbb{R}^n$中稠密。
- D 相对于固定内积 b在 H 上作用为相似变换，并且并非所有这些相似变换都是等距变换。

1.3.GIB 算术数据。根据 GIB 流形的单值群 D 所具备的上述性质，我们可以定义一种纯代数结构，称为*GIB* 算术数据。它由一个元组(n, H, V, b)给出，其中 $\mathbb{R}^n = H \oplus V$，子空间 H 是无理的，且 b 是 H上的内积。接着，我们将自同构群 $\mathrm{Aut}(n, H, V, b)$定义为 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$ 中保持 H 和 V，并且相对于 b 在 H上作用为相似变换的元素所组成的群。我们假设（在 GIB 算术数据的定义中），该群 $\mathrm{Aut}(n, H, V, b)$包含在 H上作用为严格相似变换的元素。

关于这一抽象结构，我们的主要结果如下：

定理1.2。*GIB* 算术数据 (n, H, V, b) 的自同构群 $\mathbf{D} = \mathrm{Aut}(n, H, V, b)$ 是一个余紧算术群。更确切地说，令 G 为该扎里斯基闭包。那么， G 是一个 $\mathbb{Q}$-各向异性的约化群。特别地， G是其中心 T与半单群 S的近乎直积，并且 $\mathbf{D}_T := \mathbf{D} \cap T \neq 1$和 $\mathbf{D}_S := \mathbf{D} \cap S$ 分别是 T 和 S 中的余紧格。

注 1.3。事实上，我们证明了一般子群 $D \subset \mathrm{Aut}(n, H, V, b)$ 的扎里斯基闭包是约化的，并且在某些几何背景下，单值化子群是算术群。

一个自然的问题是：哪些约化群的算术群可以通过这种方式得到，也就是说，哪些群等于某个 $\mathrm{Aut}(n, H, V, b)$? 特别是，可以实现哪些 D_S，即半单部分中的算术群?

我们还要问，哪些抽象子群 $D \subset \mathrm{Aut}(n,\ H,\ V,\ b)$ 可以实现为 GIB 流形的单值群？但是，由于单值化并不能决定 N 的几何（ X——环面纤维化 $M \to X$ 的底空间 —— 也不能），那么，给定一个已实现的单值化 D，可以与之关联的最佳几何是什么？特别是，也可以针对完整的单值群 $\mathrm{Aut}(n,\ H,\ V,\ b)$ 提出这个问题。下文将给出部分答案。

1.4. **具有给定单值群的 GIB 流形的拓扑**。 如前所述，GIB 流形为研究 LCP 流形提供了另一种视角。此前，这类流形已在 [10] 共形几何背景下得到研究。其精确定义源于对紧流形上外尔结构的深入分析，这项研究由 Belgun 和 Moroianu 于 [3].

外尔结构是共形流形上的一种无挠联络，它保持共形结构不变。若这种结构在局部上是给定共形类中某个度量的列维-奇维塔联络，但在整体上并非如此，则称其为闭而非恰当的。最初的问题涉及紧流形上外尔联络的约化和乐，人们猜想它应当是平坦的或不可约的。然而，Matveev 和 Nikolayevsky [16], 发现了第三种情形：赋予提升叶状结构后，该流形的万有覆盖是欧几里得空间与一个不可约流形的黎曼直积。Kourganoff 后来在 [15] 中证明，所有可能的情形均已包含在内。本文作者在 [12], 中给出了这一结果的新证明，其中更多地依赖几何论证。

LCP流形是黎曼乘积 $\mathbb{R}^q \times (N,\ g_N)$ 的商空间，其中 $(N,\ g_N)$ 不可约；该商空间由 $\Gamma \subset \mathrm{Sim}(\mathbb{R}^q \times (N,\ g_N)) \cap (\mathrm{Sim}(\mathbb{R}^q) \times \mathrm{Sim}(N,\ g_N))$ 的一个离散子群作用得到，且该子群并非全由等距变换组成。文献 [13], 中指出，在对度量 g_N 作共形改变后，这一情形等价于 $\Gamma \subset \mathrm{Sim}(\mathbb{R}^q) \times \mathrm{Isom}(N,\ g_N)$ 的情形，对应于 GIB 流形。

LCP流形及随后 GIB 流形的分类是研究它们的主要焦点。我们旨在通过分析其结构所产生的不变量来理解它们。因此，一个自然的问题是：如今已纯粹是代数对象的 GIB 算术数据，是否总能来自某个 GIB 流形？答案是肯定的，以下定理将对此作出证明。

定理 1.4。 设 (n, H, V, b) 为 *GIB* 算术数据。我们称 $\mathrm{Aut}(n, H, V, b)$ 的包含一个在 H 上作为严格相似变换作用的元素的有限生成子群 D 为 GIB 单值子群，记作 (n, H, V, b) 的 *GIB* 单值子群。那么，*GIB* 算术数据的 *GIB* 单值群子群恰好是 *GIB* 流形的单值群。

定理 1.4 存在一些缺陷，因为由 GIB 算术数据构造的 GIB 流形的几何性质尚不清楚。然而，显式构造给出了：

命题 1.5。 在定理 *1.4*中，并采用第 *1.2*节的记号， $\tilde{X}$ 的万有覆盖 X 可以取为欧几里得空间与 $\mathbb{H}^2$的直积。

如果定理 $D \subset \mathrm{Aut}(n、\ H、\ V、\ b)$ 中取的有限生成子群 *1.4*˜在其扎里斯基闭包中是余紧的（$\mathrm{Aut}(n、\ H、\ V、\ b)$ 即为此情形， X 则可以取为与该扎里斯基闭包相关联的对称空间。

1.5. **对称空间的情形**。 我们先前提到，GIB 流形是作为井上–邦比耶曲面的推广而引入的。对于这些曲面，采用定义 1.1 中的记号（下文将继续使用），流形 N 是对称空间 $\mathbb{H}^2$。事实上， N 为对称空间的情形，是对这些曲面最自然的推广；全面理解这一情形也是本文的主要目标之一。

在 [13], 中，我们已着重研究这一情形，并证明了一个 Bieberbach型刚性结果。更准确地说，存在一个连通群 L 在 $\mathbb{R}^q \times N$ 上恰当地传递作用，且包含 Γ。特别地， Γ 是 L中的一个余紧格。此外，我们对 N 为秩1对称空间的 GIB 流形进行了分类，并证明在这种情况下， N 必定是双曲空间。

后一个分类中的主要工具，是将 Γ 投影到 Isom(N， g_N) 该群的闭包记为 $\bar{P}$，它的单位连通分支 $\bar{P}^0$是阿贝尔群。该群是阿贝尔群这一事实对 N施加了非常强的限制。因此，我们不禁要问，在这种情形下， $\bar{P}^0$ 可以是什么。

del Barco 和 Moroianu 在[8]中从不同背景研究了这个问题。他们考察了 LCP流形，这类流形等价于 GIB 流形，其万有覆盖 G 带有李群结构，并且 Γ是G的子群。在这种情形下，因子 N 是 G的子群，他们证明了 $\bar{P}^0$ 包含于 N的根基中。特别地，它与某个 $m > 0$对应的 $\mathbb{R}^m$ 同构。根据上文提到的 Bieberbach 刚性结果，我们所研究的 N 对称情形与李群情形很接近：事实上，如果群 L 在 $\mathbb{R}^q \times N$上简单传递地作用，那么万有覆盖本身就会继承李群结构。

当 N 是非紧型对称空间时，其等距变换群是代数的。利用线性代数群理论，我们证明 $\bar{P}^0$ 包含于某个适当群的幺幂根基中；更确切地说，我们得到如下结果。

定理 1.6. 设 $\Gamma\backslash(\mathbb{R}^q \times N)$ 为一个 *GIB* 流形，其中 (N, g_N) 是黎曼¯非紧型对称空间。设 P 为 Γ到 等距变换群(N, g_N) 上的投影的闭包。则 $\bar{P}$的单位连通分支 $\bar{P}^0$ 是介于李群 $\bar{P}$与正规化子 $\mathrm{Nor}_G(\bar{P}^0)$ 之间的、等距变换群$(N, g_N)^0$ 的任意代数子群的幺幂根基。此外，$\mathrm{Nor}_G(\bar{P}^0)$ 是 G的一个 $\mathbb{R}$-抛物子群。

此外，环面纤维化 $M \to X$的基X是一个具有非平凡欧氏（局部）因子的非正曲率局部对称流形。等价地，黎曼商空间 $N/\bar{P}^0$ 是一个非紧型对称空间。

这一结果为借助半单群的抛物子群分类来对可容许非紧对称空间进行分类开辟了道路。它还提示了构造涉及秩大于2的非紧致对称空间的新例子的方法。结合关于单值群的结果，它进一步给出了某些对称空间作为因子出现的障碍 N。参见第7.1 节下文，其中既包含构造，也包含关于与SL($m, \mathbb{R}$)和SO(p, r)相关联的对称空间的障碍。

我们注意到，定理1.6 部分地由Moore在 [17]中的工作所蕴含。在该文中，研究了半单李群中具有阿贝尔¯单位连通分支的闭共紧子群（如群 P 在我们的情形中）。这一设定受到D. Epstein [9] 关于横截双曲叶状结构的工作的启发。在后一篇文章中，所考虑的叶状结构是一维的，但GIB流形的框架提供了任意维数的横截黎曼叶状结构的例子，其中叶的闭包是平坦环面。这解释了Moore的结果与我们的结果之间的相似之处。

定理 1.6 的情形下，GIB 流形的单值化具有以下重要性质：

定理 1.7。 在定理*1.6*的情形下，单值群在其扎里斯基闭包中是余紧的，因此是算术的。此外，如果 $(N,\ g_N)$ 不可约，那么单值表示是单射的。

1.6. **论文结构**。 在第2节中，我们介绍相关记号，并回顾算术群的一些基本事实。特别是，我们讨论标量限制

，这在全文中都发挥着重要作用。第3 节专门介绍我们研究对象的精确定义，即单值群和 GIB 算术数据。在第 4节中，我们证明定理 1.2 ，并研究单值群的扎里斯基闭包的半单部分所受到的约束。

定理 1.4将在第 5节证明。该节将明确描述具有指定单值群的 GIB 流形。第 $\Gamma\backslash(\mathbb{R}^q \times N)$ 形式的 GIB 流形（其中 N 为对称的）将在第 6节研究，并在那里证明定理 1.6 和1.7 。最后，我们将讨论若干可导出 GIB 流形的对称空间实例，并在第 7节从矩阵视角对 GIB 算术数据进行分类。

2. Notations and preliminaries

2.1. 记号。 设 G 为一个李群。我们用 G^0 表示 G的单位连通分支。若 H 是 G 的一个子群，则 H 在 G 中的正规化子记为 $\mathrm{Nor}_G(H)$。 G 的中心记为 $C(G)$，而 H 在 G 中的中心化子记为$C_G(H)$。

G 的根基是 G的最大连通正规可解子群，记作 $R(G)$。如果 G 是一个矩阵群，我们用 $R_u(G)$表示其幺幂根基，也就是 G的最大连通正规幺幂子群。它包含于$R(G)$中。

回顾一下，若域 k 上的线性代数群 k 在其代数闭包上的幺幂根基平凡，则称其为约化群。

全文中，我们考虑两种拓扑：通常拓扑和¯扎里斯基拓扑。如果 H 是 G的子群，我们用 H 表示 H 在 G中相对于通常拓扑的闭包。 H 在 G中的扎里斯基闭包记作H^{Zar}。

在不致混淆的情况下，我们用哥特体表示李代数。例如， $\mathfrak{g}$ 表示 G的李代数。

设 G 是定义在域 k上的线性代数群。我们用 $G(k)$表示 G的k-有理点，即 G 中元素取值于 k的那些元素。

2.2. 算术群与格。 在本节中，我们回顾关于格与算术群的一些基本事实，因为这些概念将在我们的分析中发挥重要作用。我们主要遵循 [18]。

设 G 为线性李群，即某个向量空间 V上 $\mathrm{GL}(V)$ 的一个子群，该向量空间的维数为 n，此后我们将其固定。对 $\mathbb{R}$的任意子环 R ，我们用$G(R)$表示 G 中各项属于 R的元素。

非正式地说，算术群是线性李群的整数点集。然而，我们在同构与紧因子的意义下定义算术性。

定义 2.1. G 的子群 Γ 是算术子群，如果存在线性李群 G'、分别为 G 与 G' 的两个紧正规子群 K 与 K' ，以及一个同构

$$\phi : G/K \to G'/K'$$

使得 $\phi(\pi(\Gamma))$与 $\pi'(G'(\mathbb{Z}))$可公度，其中 $\pi : G \to G/K$ 与$\pi' : G' \to G'/K'$ 为典范投影。

定义 2.1 在我们的研究中并无用处，因此我们需要一种不那么抽象的观点。我们先定义代数数域 k上的有限维向量空间 V 的 k-形式。

定义 2.2. V 的一个 k-形式是 V 的一个 k-向量子空间 V_k ，使得自然映射 $V_k \otimes_k \mathbb{R} \to V$ 是一个同构。

我们固定 V 的一个 k-形式 V_k。它在自同态空间 $\mathrm{End}(V)$ 上诱导一个 k-形式 $\mathrm{End}(V)_k$，其定义如下：

$$\mathrm{End}(V)_k := \{A \in \mathrm{End}(V) \mid A(V_k) \subset V_k\}. \tag{1}$$

若对任意同构 $f\colon \mathbb{R}^n \to V$，$P \circ f$ 都是多项式函数，则称函数 $P\colon V \to \mathbb{R}$ 到 V 上是多项式函数。此外，若 $P(V_k) \subset k$，则称 P 定义在 k 上。

回顾一下，我们假设 $G \subset \mathrm{GL}(V) \subset \mathrm{End}(V)$。我们需要精确定义表达式 的整数点 的含义。

定义 2.3。若存在一个由定义在 k 上的多项式函数构成的子集 $\mathcal{Q}$，其定义域为 $\mathrm{End}(V)$，则称群 G 定义在 k 上，并且

$$G = \{g \in \mathrm{End}(V) \mid \forall P \in \mathcal{Q},\ P(g) = 0\}.$$

现在我们在 V_k 中引入整数点的概念。利用 V_k 中的一个 $\mathbb{Z}$-格即可对此作出良定义。

定义 2.4。V_k 中的一个 $\mathbb{Z}$-格是 V_k 的一个有限生成子群 $\mathcal{L}$，使得自然映射 $\mathcal{L} \otimes_{\mathbb{Z}} k \to V_k$ 是一个同构。

我们现在假设 $k = \mathbb{Q}$。我们在 V_k中固定一个 $\mathbb{Z}$-格 $\mathcal{L}$，并定义

$$G_{\mathcal{L}} = \{g \in G \mid g\mathcal{L} \subset \mathcal{L}\}. \tag{2}$$

所有这些定义都给出了一种构造算术群的方法，这要归功于以下命题：

命题 2.5. 群 $G_{\mathcal{L}}$ 是 G的一个算术子群。

我们用 μ 表示 G的哈尔测度。

定义 2.6. G 的格是一个离散子群 Γ，使得 $\Gamma\backslash G$ 关于由 μ诱导的测度具有有限体积。若 $\Gamma\backslash G$是紧致的，则格 Γ称为 G中的余紧格。

Borel–Harish-Chandra定理 [5, 定理1与 3] 建立了算术群与 $\mathbb{Q}$-群的格之间的联系。

定理 2.7 (Borel–Harish-Chandra)。设 G 是一个定义在 $\mathbb{Q}$上的复代数线性群。如果其单位连通分支的所有有理特征都是平凡的，那么 $G(\mathbb{Z})$ 是 $G(\mathbb{R})$中的一个格。此外，如果 $G(\mathbb{Z})$ 的每个幺幂元都属于 $R_u(G(\mathbb{Q}))$，那么 $G(\mathbb{Z})$是余紧的（这一性质称为 *Godement* 判据）。

2.3. 标量限制。我们将经常利用标量限制来构造算术格。因此，我们回顾这一构造的基本事实。

设 G 是一个定义在代数数域 k上的半单线性代数群，即存在一组定义在 k 上的多项式 $\mathcal{Q}$，使得

$$G = \{g \in \mathrm{End}(V) \mid \forall P \in \mathcal{Q},\ P(g) = 0\}.$$

我们假设 k 有 s 个实嵌入和 t 个复嵌入。如果 σ_1 和 σ_2是 k 到 $\mathbb{C}$的两个嵌入，我们称 σ_1 和 σ_2 等价，当且仅当 $\sigma_1 = \sigma_2$。设 S^∞ 是 k的嵌入的等价类的一组完备代表。对于任意 $\sigma \in S^\infty$，我们用 k^σ 表示 $\sigma(k)$的完备化，即 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$。我们还用 $\mathcal{O}_k$ 表示 k的代数整数环。

对于任意 $\sigma \in S^\infty$，我们考虑定义在 $\sigma(k)$ 上、由下式给出的线性代数 G^σ 群

$$G^\sigma := \{g \in \mathrm{End}(V) \mid \forall P \in \mathcal{Q},\ \sigma(P)(g) = 0\}. \tag{3}$$

标量限制背后的主要思想令人联想到狄利克雷单位定理。后者指出，映射 $\mathcal{O}_k \to \mathbb{R}^{s+2t}, \quad a \mapsto \{\sigma(a)\}_{\sigma\in S^\infty}$ 的像是 $\mathbb{R}^s \times \mathbb{C}^t \simeq \mathbb{R}^{s+2t}$ 中的一个格。特别地，如果我们考虑由下式的像给出的 $\mathbb{R}^{(s+2t)n}$ 的 $\mathbb{Q}$-形式

$$\Delta : k^n \to \mathbb{R}^{(s+2t)n}, \ (x_1,\dots,x_n) \mapsto \{(\sigma(x_1),\dots,\sigma(x_n))\}_{\sigma\in S^\infty}, \tag{4}$$

那么，它具有 $\Delta(\mathcal{O}_k^n)$ 作为 $\mathbb{Z}$-格。

同样的思路也适用于群，从而得到：

命题 2.8（标量限制）。 [18, 命题 5.4。8] 设 G 是定义在 k上的半单线性代数群。该群

$$\mathrm{Res}_{k/\mathbb{Q}}(G) := \prod_{\sigma\in S^\infty} G^\sigma$$

是定义在 $\mathbb{Q}$ 上的（关于在 $\mathbb{R}^{s+2t}$ 上按上述方式构造的 $\mathbb{Q}$-形式），其整数点集是映射的像

$$\Delta : G(\mathcal{O}_k) \to \mathrm{Res}_{k/\mathbb{Q}}(G), \ g \mapsto \{\sigma(g)\}_{\sigma\in S^\infty}.$$

代数群的紧因子将在本文中发挥关键作用。因此，如果命题 G^σ 2.8 中至少有一个因子 是紧致的，那么根据 Godement 判据，$\mathrm{Res}^{k/\mathbb{Q}}(G)$ 的整数点在 $\mathrm{Res}_{k/\mathbb{Q}}(G)$ 中构成一个余紧格。

3. Arithmetic data

本节旨在准确表述我们关于 GIB 流形的问题。我们引入 GIB 流形的单值群，由此自然引出 GIB 算术数据的定义。从 GIB 流形中提取纯代数数据，使我们能够独立于这些流形的几何结构来理解其单值群。

3.1. GIB 结构的单值群。设 $M := \Gamma\backslash(\mathbb{R}^q \times N)$ 是一个 GIB 流形（见定义 1.1）。记 P 为 Γ 到 $\mathrm{Isom}(N, g_N)$ 的投影。P 的闭包 $\bar{P}$ 的单位连通分支 $\bar{P}^0$ 是一个阿贝尔连通李群[13, 推论 2.6]。此外，由于该投影将 Γ 同构地映至 P，正规子群 $\Gamma_0 := \Gamma \cap (\mathrm{Sim}(\mathbb{R}^q) \times \bar{P}^0) \subset \Gamma$ 是阿贝尔群，且是 $\mathbb{R}^q \times \bar{P}^0$中的一个格（见 [13]中推论 2.6 后的段落）。

在取 Γ_0 是 $\mathbb{R}^q \times \bar{P}^0$ 的有有限覆盖群 $\mathbb{Z}^n$。Γ 通过共轭作用于 Γ_0，并保持 Γ_0，因此它诱导出一个保持分解 $\mathbb{R}^q \times \bar{P}^0$ 的表示 $\rho\colon \Gamma \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$。

定义 3.1。 我们称 $\rho(\Gamma)$ 为 *GIB* 流形的单值群，并称 ρ 为单值表示。

定义3.1 中的“单值化”一词有如下依据。由浸没 $\mathbb{R}^q \times N \to N$ 诱导的自然叶状结构下降为商空间 $\Gamma\backslash(\mathbb{R}^q \times N$上的叶状结构。该叶状结构的叶的闭包，是经典范投影映射后，集合 $\mathbb{R}^q \times \bar{P}^0 x$ （其中 $x \in N$ [15, 引理 4。11]）的像。可能需要将 M 替换为一个有限覆盖，并将 N 替换为其正交标架丛；此后，该叶状结构成为一个以紧流形为底空间的纤维化，其纤维为环面 [13,定理 1。6]。

由于 Γ 是 $\mathrm{Sim}(\mathbb{R}^q) \times \mathrm{Isom}(N, g_N)$ 的子群，因此流形 M 上有良定义的正交性概念。因此，令 $x \in M$，并令 F 为包含 x 的纤维化 $M \to X$ 的纤维。那么，$(T_xF)^\perp$ 在 x 处定义了一个水平空间。

所有水平空间的并集在 M 上定义了一个水平分布，因此也定义了一个 Ehresmann 联络。

该联络可提升到万有覆盖 $\mathbb{R}^q \times N$。在当前情形下， $\bar{P}^0$在 N上自由作用；由于它是 Isom(N, g_N) 的闭子群，因此也适当地作用。由此得到一个纤维化 $\mathbb{R}^q \times N \to N/\bar{P}^0$，它是纤维化 $M \to X$的自然提升。此前构造的水平分布的提升由与纤维正交的分布给出。

设 $\bar{x} \in X$，并令 $\bar{c}\colon S^1 \to X$ 为一条以 $\bar{x}$为基点的闭连续环路。该曲线可提升为 M 中的一条水平曲线 $\bar{c}'\colon [0,1] \to M$。继而， $\bar{c}'$可提升为 $\mathbb{R}^q \times N$中的一条水平曲线 c。由于 $x := c(0)$ 和 $y := c(1)$ 在 M中投影到同一个纤维，因此存在 $\gamma \in \Gamma$和 $t_0 \in \mathbb{R}^q \times \bar{P}^0$使得 $y = \gamma t_0 \cdot x$。对于任意 $t \in \mathbb{R}^q \times \bar{P}$，曲线 $t \cdot c$仍为水平曲线，并连接 $t \cdot x$与

$$t \cdot y = \gamma((\gamma^{-1} t \gamma) t_0 \cdot x).$$

将环面$(\mathbb{R}^q \times \bar{P}^0)/\Gamma_0$与 M中 $\bar{x}$上的纤维等同，我们看到 M 上联络的整体单值化通过如下形式的变换作用

$$(\mathbb{R}^q \times \bar{P}^0)/\Gamma_0 \to (\mathbb{R}^q \times \bar{P}^0)/\Gamma_0,\ t \mapsto (\gamma^{-1} t \gamma) t_0 \tag{5}$$

对某个 $\gamma \in \Gamma$ 和 $t_0 \in (\mathbb{R}^q \times \bar{P}^0)/\Gamma_0$。这些映射是良定义的，因为 Γ 通过共轭作用在$(\mathbb{R}^q \times \bar{P}^0)$上保持 Γ_0。选取 Γ_0 的一个基，以将环面$(\mathbb{R}^q \times \bar{P}^0)/\Gamma_0$ 与 $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$等同，映射(5)可以改写为

$$\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \to \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n,\ t \mapsto \rho(\gamma) t + t_0. \tag{6}$$

因此， ρ 的像是 M上联络的整体单值化变换之线性部分所成的群，而这恰好是该联络的单值化。注意，平移部分 t_0 给出了水平分布可积性的信息。事实上，若平移部分子群是离散的，则该分布是可积的。

3.2. **GIB 流形的算术数据**。我们沿用上一节的记号。我们将 $\mathbb{R}^q \times \bar{P}^0$ 与其万有覆盖 $\mathbb{R}^n$ 等同，并把 GIB 流形 M 的单值群视为 GL$(n, \mathbb{Z})$ 的一个子群。

命题 4.9 于 [11] 蕴含 $\mathbb{R}^q$ 是一个 无理子空间 之于 $\mathbb{R}^n$ ，其意义如下:

定义 3.2. 向量子空间 V （ $\mathbb{R}^n$ 的）相对于格$\mathcal{O}$ 是无理的，如果 $V + \mathcal{O}$ 在 $\mathbb{R}^n$中稠密。若不致歧义，我们省略该格，并简单地说 V 是 $\mathbb{R}^n$的无理子空间。

我们令 $H := \mathbb{R}^q$。我们还将 V 定义为 $\bar{P}^0$的万有覆盖，并将 b 定义为在 $\mathbb{R}^q$ 上由其欧几里得度量诱导的双线性形式。于是，下列性质成立:

(a) $\mathbb{R}^n = H \oplus V$；(b) 单值群 $\rho(\Gamma)$保持分解 $H \oplus V$；(c) $\rho(\Gamma)$到 H 的限制落在内积 b 的相似群中： $H \times H \to \mathbb{R}$；(d) $\rho(\Gamma)$到 H 的限制包含一个非等距相似。

注记 3.3. 最后一个性质意味着 H具有强无理性，即 $H \cap \mathbb{Z}^n = \{0\}$。事实上， $H \cap \mathbb{Z}^n$ 在 D作用下保持不变；特别地，它在 (H, b) 的一个非等距相似变换γ 作用下保持不变，而该相似变换是 D中某个元素的限制。必要时，将 γ 替换为 γ^{-1} 后，该相似变换是压缩变换，因此不可能保持一个由整数点构成的离散集，除非该集合是平凡的。

定义 3.4. 我们称元组 (n, H, V, b) 为 *GIB* 流形 M的算术数据 。反过来，设 $n \geq 2$，并假设给定 $\mathbb{R}^n$ 的两个子空间 H 和 V，满足 $\mathbb{R}^n = H \oplus V$，且 H 相对于格 $\mathbb{Z}^n$是无理的，同时在 H上给定一个内积 b 。如果存在 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$ 中的一个元素保持分解 $H \oplus V$不变，并且在 (H, b)上的限制是严格相似变换，我们就称(n, H, V, b) 为 GIB 算术数据。

鉴于上述讨论，我们赋予 GIB 算术数据一个自然的变换群。

定义*3.5.* 设 (n, H, V, b) 为 *GIB* 算术数据。*GL*$(n, \mathbb{Z})$ 中保持分解 $H \oplus V$ 且在 (H, b) 上的限制为相似变换的所有矩阵所构成的子群，称为 *GIB* 算术数据 (n, H, V, b) 的自同构群，记作 *Aut*(n, H, V, b)。*Aut*(n, H, V, b) 的有限生成子群，若其在 H 上的限制包含 b 的一个非等距相似变换，则称为 (n, H, V, b) 的 *GIB* 单值子群。注意，定理*1.2*蕴含 *Aut*(n, H, V, b) 本身就是 (n, H, V, b) 的一个 *GIB* 单值子群。

调用塞尔伯格引理，通过取有限指数子群，可以假定GIB算术数据的自同构群无挠。迄今为止，尚未构造出此类自同构群的非阿贝尔子群（见 [10, 11]）。我们在此利用标量限制给出一个自同构群非阿贝尔的例子。

例3.6. 我们考虑 $\mathbb{R}^3$ 上的二次型 $q := x^2 + y^2 - \sqrt{5}z^2$ 及其共轭 q^*: $= x^2 + y^2 + \sqrt{5}z^2$。有SO($q$) $\simeq$SO(1, 2) $\simeq$PSL(2, $\mathbb{R}$)，且G :=SO(q^*) $\simeq$SO(3)是紧致的。群SO(q)定义在 $k := \mathbb{Q}[\sqrt{5}]$上。应用标量限制，Res$_{k/\mathbb{Q}}(G)$ = SO(q^*) $\times$ SO(q)定义在 $\mathbb{Q}$上。此外，按第2.3节的记号， $\mathbb{R}^6$ 的 $\mathbb{Q}$-形式为 $\Delta(k^3)$，而 $\mathbb{Z}$-格为 $\mathcal{L} := \Delta(\mathcal{O}_k^3)$。因此，Res$_{k/\mathbb{Q}}(G)$的整数点集 Γ_1 是一个余紧格，且它到SO(q)上的投影是PSL(2, $\mathbb{R}$)的一个余紧格。特别地， Γ_1 是非阿贝尔的。

群 Γ_1 保持 $H \oplus V$对 $\mathbb{R}^6$的分解，其中 H 的维数为 3，对应于分裂 $\simeq$ SO(q^*) $\times$SO(q)。由于代数整数环 $\mathcal{O}_k$ of k 在 $\mathbb{R}$中稠密， $\mathcal{O}_k^3$ 在 $\mathbb{R}^3$中稠密，并且相对于 $\mathcal{L}$， H 是 $\mathbb{R}^6$ 的无理子空间。

令 $\lambda := \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$ ，它是 $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$的一个单位，并令 A 为如下自同态的矩阵：在 H 上通过乘以 λ 作用，在 V上通过乘以 λ^{-1}作用。矩阵 A 还保持 $\mathbb{Z}$-格 $\mathcal{L}$ 以及分解 $H \oplus V$。此外， A 在 H上作为比率为 $\lambda \neq \pm 1$ 的相似变换发挥作用。

总而言之，(6， H， V， q^*) 是 GIB代数数据，并且 $\langle A \rangle \rtimes \Gamma_1$ 在 Aut(6， H， V， q^*) 中具有有限指数，因此后者是非阿贝尔的。

4. The Zariski closure of the automorphism group: proof of Theorem 1.2

在本节中，我们证明定理1.2 ，并讨论其推论。更确切地说，我们研究定理中引入的半单部分 S 所受的约束。

4.1. **自同构群的分解。** 设 (n, H, V, b) 是定义 3.4 中所定义的 GIB 算术数据。设 D 是 Aut(n, H, V, b) 的一个子群。我们旨在描述群 $D \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$。为此，我们将 D 视为较大李群的一个离散子群，即其在 GL$(n, \mathbb{R})$ 中的扎里斯基闭包，并利用关于算术群的结果证明定理 1.2。

我们考虑多项式集合

$$I(D) := \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \forall A \in D,\ P(A) = 0\}. \tag{7}$$

空间 $I(D)$ 是 $\mathbb{R}[X]$ 的一个向量子空间，我们声称存在一个有限集的元素属于 $\mathbb{Q}[X]$，可生成 $I(D)$。事实上，对于任意 $k \in \mathbb{N}$，令

$$I_k(D) := \{P \in I(D) \mid \deg(P) \leq k\}. \tag{8}$$

那么，空间 $I_k(D)$ 恰好是 $\mathbb{R}_k[X]$（由实系数且次数小于 k 的多项式构成的空间）中满足方程 $P(A) = 0$ 对所有 $A \in D$ 均成立的子空间。因此，$P \in I_k(D)$ 的系数受一组整数系数的线性方程约束，所以可以在 $\mathbb{Q}[X]$ 中求解。现在，$I_k(D) \cap \mathbb{Q}[X]$ 的 $\mathbb{Q}$ 维数等于 $I_k(D)$ 的 $\mathbb{R}$ 维数，由此我们得出，$I_k(D) \cap \mathbb{Q}[X]$ 是 $I_k(D)$ 的一个 $\mathbb{Q}$-形式。

现在我们考察 D 在 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ 中的扎里斯基闭包，即

$$G := \{A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \mid \forall P \in I(D),\ P(A) = 0\}. \tag{9}$$

集合 G 是一个线性代数群，因此它是 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ 的李子群。此外，根据前面的讨论，G 定义在 $\mathbb{Q}$ 上。将 D 换成其一个有限指数子群后，我们可以假设 G 在扎里斯基拓扑下是连通的。

我们断言 G 是一个约化群。为证明这一点，我们考虑 G 的幺幂根基 $R_u(G)$，并试图证明该群是平凡的。由于 G 定义在 $\mathbb{Q}$ 上，且 $\mathbb{Q}$ 是完美域，$R_u(G)$ 定义在 $\mathbb{Q}$ 上，因为它是 $\mathbb{Q}$-闭的。根据定义，$R_u(G)$ 是连通的，因此我们可以将推论 18.3]应用于完美域 $\mathbb{Q}$ 和连通线性代数群 $R_u(G)$，从而得出 $R_u(G)(\mathbb{Q})$（即 G 的幺幂根基的有理点）在 $R_u(G)$ 中扎里斯基稠密。因此，要证明 $R_u(G)$ 是平凡的，只需证明 $R_u(G)(\mathbb{Q})$ 是平凡的。

稳定 $\mathbb{R}^n$ 等价于满足多项式方程。因此，群 $G(\mathbb{Q})$ 包含于 D 在 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ 中的扎里斯基闭包内，并且仍保持分解 $H \oplus V$。此外，限制在 (H, b) 上是相似变换也是一个多项式条件，因此 G 在 V 上的限制由 b-相似变换组成。对于 $R_u(G)(\mathbb{Q})$ 的任意元素 A，由于 A 是幺幂的，其在 H 上的限制是 (H, b) 的幺幂相似变换，因而是单位元。结论由下述引理推出：

引理 4.1。设 A 是一个系数属于 $\mathbb{Q}$ 且保持分解 $H \oplus V$ 的 $n \times n$ 矩阵。如果 A 在 H 上的限制是单位元，则 $A = I_n$。

证明。设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Q})$，其在 H 上的限制是单位元。存在 $p \in \mathbb{N}^*$ 使得 $pA \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Z})$，且 $B := p(A - I_n)$ 在 H 上的限制是零同态。由于 B 的系数属于 $\mathbb{Z}$，它诱导出一个群同态 $B_T\colon T^n \to T^n$，其中 $T^n := \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$。但是，在 T^n 中，B_T 与 pI_n 在 H 的像上重合；该像在 T^n 中稠密，因为 H 是无理的。这意味着 $B = pI_n$，从而得到 $A = I_n$。□

作为该引理的推论，$A = I_n$ 和 $R_u(G)(\mathbb{Q})$是平凡的，因此 G 是约化的。特别地，G 是其中心的连通分支 T 与其换位子子群 S 的几乎直积：$= [G, G]$ [6, 命题 2.2]。此外，S 是半单的，且第 2.3] 节中的第一个推论表明，S是 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ 中定义在 $\mathbb{Q}$上的扎里斯基连通闭子群，因为 G 是扎里斯基连通的。现在可以应用 Borel–Harish-Chandra 定理 2.7。由于$G(\mathbb{Q})$（因而 $S(\mathbb{Q})$）没有非平凡的幺幂元，且 S 是半单的，我们得出：$= S(\mathbb{Z})$ 是 S的余紧格。

注4.2。 S有几种可能。首先，如果 G 是阿贝尔的，那么 S是平凡的。群 S 也可能是紧致的。在这种情况下， D_S 的元素都是扭元；借助塞尔伯格引理，我们可以取 D的一个有限指数子群来避免这种情况。剩下的情形是 S 非紧致。在后一种情况下，格 D_S 是无限且非阿贝尔的，因为 S 是半单的。

我们首先回顾， G 与 $T \times S$同源。 S 中元素在 H 上的限制是 b-等距变换，因为 S 是由交换子构成的群。因此，如果 D 包含一个矩阵，其在（H, b）上的限制是严格相似变换，那么群 T不可能是紧致的。

我们断言：

引理4.3。 在 S 中， $G(\mathbb{Z})$ 的正规化子$\mathrm{Nor}_S(G(\mathbb{Z}))$ 是离散的。

证明。 设（$\gamma_1, \dots, \gamma_\ell$）是 D中的元素，使得 $\overline{\langle \gamma_1, \dots, \gamma_\ell \rangle}^{\mathrm{Zar}} = G$。这样的元组存在，因为 G 是有限维的，而且线性代数群只有有限个连通分支。

对于任意 $1 \le i \le \ell$ ，存在 S中单位元的一个小邻域 U_i ，使得对所有 $s' \in U_i$， $s'\gamma_i s'^{-1} = \gamma_i$ ，这是因为 D_S 是离散的，且共轭作用连续。取 $U := \bigcap_{1 \le i \le \ell} U_i$，开集 U 是 S中单位元的一个小邻域，使得 $\mathrm{Nor}_S(G(\mathbb{Z})) \cap U$中心化 $\langle \gamma_1, \dots, \gamma_\ell \rangle$，从而 G。适当缩小 U后，我们可以假设 U 与S 的中心的交集仅包含单位元，因此 $\mathrm{Nor}_S(G(\mathbb{Z})) \cap U$ 仅包含单位元。这就证明了引理。□

应用引理4.3，并利用 S/D_S 是紧致的这一事实，$\mathrm{Nor}_S(G(\mathbb{Z}))$在 S/D_S 中的像是有限的。因此，存在 $k > 0$ ，使得对于任意 $a \in G(\mathbb{Z}) \subset \mathrm{Nor}_S(G(\mathbb{Z}))$，将 $a = st$ 写成 $s \in S$ 和 $t \in T$，都有 $s^k \in D_S$。由此得到 $a^k = s^k t^k$，且 $s^k \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$，因此 $t^k \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$。我们推得$D_T D_S$ 在 $G(\mathbb{Z})$中具有有限指数。由于 D_S 是半单李群中的一个格，因此它是有限表现的。群 D_T 是阿贝尔李群的离散子群，因此也是有限表现的。因此， $\Gamma := D_T D_S$ 是有限表现的，从而 $G(\mathbb{Z})$也是有限表现的。

现在我们证明 D_T 是 T中的一个格。我们先证明 D_T 在 T中扎里斯基稠密。由于群 $D_T D_S$ 在 Γ中具有有限指数， $D_T D_S$的扎里斯基闭包在 G中也具有有限指数。此外，根据假设， G 是扎里斯基连通的，因此 $D_T D_S$ 在 G中扎里斯基稠密。我们还知道， D_S 是半单群 S中的一个格，因此 D_S 在 S中扎里斯基稠密。李群 G 与直积 $T \times S$同源，且 $D_T D_S$在 G中扎里斯基稠密。由此可得， D_T在 T中扎里斯基稠密。

现在我们可以证明 T 是 $\mathbb{Q}$-各向异性的，即它不具有任何定义在 $\mathbb{Q}$上的非平凡有理特征。这将使我们能够应用 Borel–Harish-Chandra定理。设 χ 是定义在 $\mathbb{Q}$ 上的 T有理特征。根据[4, 8.2 (c) 和 8.5]， T 在 $\mathbb{C}$上共轭于一个对角群，并且在此对角化基下，特征 χ 具有如下形式

$$\chi = \prod_{i=1}^{n} \chi_i^{m_i}, \tag{10}$$

其中 χ_i 是第 i个对角元，且 $m_i \in \mathbb{Z}$。对于任意 $g \in D_T$，矩阵 g具有整数系数，因此 $\chi(g)$ 属于 $\mathbb{Q}$ ，并且是 g 的特征值及其逆元的乘积。由于 g 的特征值都是代数单位， $\chi(g)$ 是一个属于 $\mathbb{Q}$的代数单位，因此它是 ± 1。由此可知 χ^2 是平凡的。根据 [4, 8.2 (c)], ，并且由于 D_T 在 T中扎里斯基稠密，代数环面 T 是所有在 D_T上消失的 T特征标的核的交集。特别地， $T \subset \ker(\chi^2)$，且 χ^2

是平凡的。因此， χ 在 T上的取值为 ± 1 。由于 χ 关于扎里斯基拓扑连续，且在单位矩阵处取值为 1，因此它在扎里斯基连通群 T上恒等于 1。由此我们得出， T 是 $\mathbb{Q}$-各向异性的，并且根据 Borel–Harish-Chandra定理 2.7， $T(\mathbb{Z}) = D_T$是 T中的一个格。

我们证明了以下定理：

定理4.4。 设(n, H, V, b) 为 *GIB* 算术数据，且 D 是自同构群(n, H, V, b)的一个子群。那么，

(1) D 的扎里斯基闭包与一个约化的 $\mathbb{Q}$-群 G 可公度，且 G 与 $T \times S$ 同源，其中 T 是 G 的中心，而 S 是其换位子群。*(2)* 若 D 包含一个矩阵，该矩阵在 (H, b) 上的限制是非等距相似变换，则 T 非紧致。*(3)* 群 T 是一个各向异性环面，且 $D_T := T(\mathbb{Z})$ 是 T 中的一个格。*(4)* 集合 $D_S := S(\mathbb{Z})$ 是半单线性代数 $\mathbb{Q}$-群 S 中的余紧算术子群。*(5)* 群 $\Gamma := D_T \times D_S$ 在 $G(\mathbb{Z})$ 中具有有限指数。特别地， Γ 和 $G(\mathbb{Z})$ 是有限表现的。

定理 1.2 因此直接由定理4.4得出。

4.2. 对半单部分的约束。设 (n, H, V, b) 是 GIB 算术数据。设 D 是 (n, H, V, b) 的一个 GIB 单值子群。若 G 表示 D 的扎里斯基闭包，则定理4.4蕴含， $G(\mathbb{Z})$ 也是 (n, H, V, b) 的一个 GIB 单值子群。此外， G 是一个约化群，而 $[G, G]$ 是一个半单代数群。

因此，自然会问，SL($S\, m, \mathbb{R})(m \geq 1)$ 中一个定义在 $\mathbb{Q}$ 上的给定半单子群，能否对于某些 GIB 算术数据作为 $[G, G]$ 出现。我们回顾一下，SL$(m, \mathbb{R})$ 的任何半单李子群都是几乎扎里斯基闭的 [18,定理 A4。9]。

在本节中，我们证明：在至多添加一个紧因子的意义下，任意半单子群 S 都可以实现为 G的换位子子群。额外的紧因子是必需的，因为 S 应当保持分解 $H \oplus V$，并且它到GL(H)上的投影是紧致的。此外， H 是无理的，因此该投影限制到 $S(\mathbb{Z})$上实际上是单射的。

我们使用酉群（如 [18, 例6.3.2], 所述）来证明我们的论断。

我们固定一个全实数域 k ，并用 S^∞ 表示其阿基米德位的集合。设 $a > 0$、$b > 0$ 为 k 中的元素，使得对所有非平凡的 $\sigma \in S^\infty$，有 $\sigma(a) < 0$ 以及 $\sigma(b) < 0$ 。设 K 为由 $K := k[\sqrt{a}]$定义的 k 的二次扩张，并设 τ 为Gal(K/k)的非平凡元素。我们用 $\mathcal{O}_K$ 表示 K的整数环，并考虑 $m \times m$ 矩阵

$$A := \mathrm{Diag}(b, \ldots, b, -1). \tag{11}$$

半单群 S 通过该映射嵌入到SL$(2m, \mathbb{R})$中

$$\phi : \mathrm{SL}(m, \mathbb{R}) \to \mathrm{SL}(m, \mathbb{R}) \times \mathrm{SL}(m, \mathbb{R}), g \mapsto (g, (g^T)^{-1}). \tag{12}$$

我们考虑酉群

$$\mathrm{SU}(A, \tau; \mathcal{O}_K) := \{g \in \mathrm{SL}(m, \mathcal{O}_K) \mid \tau(g^T) A g = A\}. \tag{13}$$

我们通过设定 $W := \{(s,\ A\tau(s))\ \ s \in K^m\}$，定义 k-形式的 $\mathbb{R}^{2m}$。可以验证， W 是一个 k-向量空间，并且自然映射 $W \otimes_k \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{2m}$ 是一个同构。

我们断言， $\phi(S)$ 关于由 W 在 $\mathrm{End}(\mathbb{R}^m)\times\mathrm{End}(\mathbb{R}^m)$ 上诱导的 k-形式 E_k ，是定义在 k 上的。为证明这一点，首先注意到

$$\begin{aligned} E_k &= \{(B,C)\in \mathrm{End}(\mathbb{R}^m)\times \mathrm{End}(\mathbb{R}^m) \mid \ B(V)\subset V\} \\ &= \{(B, A\tau(B)A^{-1}) \mid \ B\in \mathrm{Mat}(m,K)\}. \end{aligned} \tag{14}$$

令 $\mathcal{Q}$ 为 $\mathbb{Q}[x_1,\dots,x_m]$ 的子集，用以定义代数群 S；该群存在，因为 S 定义在 $\mathbb{Q}$ 上。$\mathrm{SL}(m, K)$ 中的任意元素 B 都可写为 $B =: M+\sqrt{a}N$，其中 M 和 N 是系数属于 k 的矩阵。因此，对于任意多项式 $P\in\mathcal{Q}$，方程

$$0 = P(B) = P(M+\sqrt{a}N)$$

可拆解为一个多项式方程组，其系数属于 k，其中各项是 M 和 N 的系数。此外，如果 $(B, C) := (B, A\tau(B)A^{-1}) \in E_k$，且 $B = M+\sqrt{a}N$ 如上所述，则有

$$2M = B + A^{-1}CA \qquad \text{and} \qquad 2\sqrt{a}N = B - A^{-1}CA,$$

因此， M 和 N 的各项都是 (B, C) 各项的多项式。总之，$\mathcal{Q}$ 在 E_k 上诱导出一组系数属于 k 的多项式方程。我们将方程 $CB^T = I_m$ 加入这组方程，并将由此得到的所有多项式方程的集合记为 $\mathcal{Q}'$ 。

考虑代数簇

$$\mathrm{Var}(\mathcal{Q}') = \{(g,g')\in \mathrm{SL}(m,\mathbb{R})\times \mathrm{SL}(m,\mathbb{R}) \mid P(g,g') = 0 \text{ for all } P\in\mathcal{Q}'\}. \tag{15}$$

由构造可知，$\mathrm{Var}(\mathcal{Q}') = \phi(S)$，因此我们得出 $\phi(S)$ 是定义在 k 上的。

我们考虑由 $\mathcal{L} := \{(s, A\tau(s)) \ s\in\mathcal{O}_K^m\}$ 定义的 V 的子群。这是 V 的 $\mathcal{O}_k$-点集；回顾一下， $\mathcal{O}_k$ 是k的代数整数环。由下式定义的 $\phi(S)$ 的子群

$$G := \{\phi(g) \mid \ g\in S,\ \phi(g)\mathcal{L}\subset\mathcal{L}\} \tag{16}$$

是 $\mathcal{O}_K$-点群 $\phi(S)$。根据方程（14）， $\phi(S)$ 中满足 $g\in\mathrm{SL}(m, \mathcal{O}_K)$ 的任意元素 $(g, (g^T)^{-1}$ 满足 $\tau((g^T)^{-1}) = A^{-1}gA$，因此 $\tau(g^T)Ag = A$。因此，

$$G = \phi(S\cap \mathrm{SU}(A,\tau;\mathcal{O}_K)).$$

现在我们利用标量限制得出

$$D_S := \prod_{\sigma\in S^\infty} \sigma(\phi(S\cap \mathrm{SU}(A,\tau;\mathcal{O}_K)))$$

是一个算术子群

$$S' := \mathrm{Res}_{k/\mathbb{Q}}(\phi(S)) = \prod_{\sigma\in S^\infty} \phi(S)^\sigma.$$

设 $\sigma\in S^\infty$ 是一个非平凡赋值。由于 $\sigma(a) < 0$ 且 $\sigma(b) < 0$，因此有

$$\sigma(\phi(S\cap \mathrm{SU}(A,\tau;\mathcal{O}_K)))\subset \phi(\mathrm{SU}(m)),$$

而最后这个群是紧致的。因此，根据 Godement 判据， D_S 在 S' 中是余紧的，并且与 $\mathrm{GL}(n := |S^\infty|2m, \mathbb{Z})$ 的一个子群共轭。此外，博雷尔稠密性定理表明， D_S 的扎里斯基闭包除一个紧因子外与 S 同构。

群 D_S 自然作用于 $\mathbb{R}^n \simeq \prod_{\sigma\in S^\infty}(k^\sigma)^{2m}$ （回忆一下， k^σ 是 $\sigma(k)$的完备化），其中各因子 $(k^\sigma)^{2m}$ 都同构于 $\mathbb{R}^{2m}$。我们将 $\mathbb{R}^n$ 中对应于某个非平凡赋值的一个因子定义为子空间 H ，而V是所有其他因子的直积。特别地， D_S 限制为一个相对

紧致子群，在 H上作用于 GL(H)。因此，该限制保持一个内积 b。

剩下的工作是找出一个与 D_S 对易、且在 H上作为严格相似变换作用的矩阵。只需选取一个非平凡单位 $\alpha \in k$，并考虑矩阵 A_0 ：对所有 $\sigma \in S^\infty$，它在每个 $(k^\sigma)^{2m}$上都通过乘以 $\sigma(\alpha)$作用。该矩阵及其逆保持 $\mathbb{Z}$-格 $\{\{\sigma(x)\}_{\sigma\in S^\infty} \mid x \in \mathcal{L}\}$，并且它们在 (H, b)上的限制是相似变换。由于 k 是全实的，这种相似变换不是等距变换。

群 $\langle A_0\rangle \times D_S$ 是 (n, H, V, b)的 GIB 单值子群，其扎里斯基闭包是直积 $T \times S'$，其中 T（$\langle A_0\rangle$的扎里斯基闭包）是一个环面。

4.3. **对算术群的限制**。上一节的讨论表明，任意半单子群 S of $\mathrm{SL}(m, \mathbb{R})$ 均可在定理 4.4中出现，只需再添上一个紧因子。接下来自然会问：半单群的任意算术子群，是否都能作为适当 GIB 算术数据的 GIB 单值子群的 D_S 分量（采用定理 4.4中的记号）出现?

设 S 是定义在 $\mathbb{Q}$上的 SL($n, \mathbb{R}$) 的半单代数子群。根据 [18,命题 5.5.12] 及其中的证明（另见 [6, 6.21 (ii)]），S 与半单群的直积 $S_1 \times \ldots \times S_m$同源，其中每个 S_i 都定义在 $\mathbb{Q}$上，并且 $S_i(\mathbb{Z})$ 在 S_i中是不可约格。设 $S_{i,1} \times \ldots \times S_{i,r_i}$ 是 S_i 分解为单群后的结果。存在一个次数为 r_i的代数数域 k_i，以及一组阿基米德位 $(S^\infty)_i$，使得 $S_{i,1}$ 是定义在 k_i上的 SL(n_i, k^σ) 的代数子群，并且 S_i 与.....同源

$$\prod_{\sigma\in(S^\infty)_i} (S_{i,1})^\sigma. \tag{17}$$

在这种情况下，算术群 $S_i(\mathbb{Z})$ 是 S_i 的 $\mathcal{O}_{k_i}$-点在映射下的像

$$\Delta_i : g \mapsto \{\sigma(g)\}_{\sigma\in(S^\infty)_i}. \tag{18}$$

群 $S(\mathbb{Z})$ 应保持分解 $H \oplus V$以及 H上的内积 b。因此，它单射地映入 GL(H) 的一个紧子群。由此，每个 S_i 都必须含有一个紧因子，我们可以假设该因子为 $S_{i,1}$。根据构造，$S_i(\mathbb{Z})$ 单射且稠密地映入$S_{i,1}$。

总结而言，S 与.....同源

$$\prod_{i=1}^{m} \prod_{\sigma\in(S^\infty)_i} (S_{i,1})^\sigma. \tag{19}$$

我们可以舍去此分解中的单群 S_i 。事实上，假设S_i 是单群。由于 S_i 保持分解 $H \oplus V$，且单射地映入 GL(H) 的某个紧子群，因此整个群 S_i 是紧致的。由此可知，$S_i(\mathbb{Z})$ 是有限的，我们可以利用塞尔伯格引理将其消去。

现在我们要探讨 S 能否实现为 GIB 算术数据的一个 GIB 单值化子群的半单部分。首先注意到，每个半单群 S_i 在向量空间上都有一个自然的忠实表示 ρ_i

$$E_i := \bigoplus_{\sigma\in(S^\infty)_i} (k_i^\sigma)^{n_i}. \tag{20}$$

因此，我们通过取外张量积来定义 S 的一个表示

$$\rho := \rho_1 \boxtimes \ldots \boxtimes \rho_m. \tag{21}$$

我们通过以下方式定义 $\bigotimes_{i=1}^m E_i$ 的两个子空间

$$H := \bigotimes_{i=1}^{m} (k_i^{\mathrm{id}})^{n_i} \qquad \text{and} \qquad V := \bigoplus_{\substack{(\sigma_1,\dots,\sigma_m)\in\prod_{i=1}^m (S^\infty)_i \\ (\sigma_1,\dots,\sigma_m)\neq(\mathrm{id},\dots,\mathrm{id})}} \bigotimes_{i=1}^{m} (k_i^{\sigma_i})^{n_i}. \tag{22}$$

由于 S 在 GL(H) 中的投影是一个紧子群，因此存在一个定义在 H 上且在该投影作用下保持不变的内积 b。

还需找到一个矩阵，使其在 (H, b) 上的限制是一个非等距相似变换。各因子 S_i 都不是单的，因此我们可以应用以下引理:

引理 4.5. 设 k 是一个代数数域， S^∞ 是其阿基米德位集。若 $|S^\infty| \geq 2$，则存在 k 的一个单位 α，使得 $|\alpha| \neq 1$。

证明. 设 σ_1，……，σ_s 是 k 的实赋值， σ_{s+1}，……，σ_{s+t} 是复赋值。我们假设 k 的所有单位的复模都等于 1，并通过逆否命题证明该引理。

根据狄利克雷单位定理，包含关系

$$\Delta : \mathcal{O}_k^\times \to \mathbb{R}^{s+t},\ u \mapsto (\ln|\sigma_1(u)|, \dots, \ln|\sigma_{s+t}(u)|)$$

是在由典范坐标中的 $\mathbb{R}^{s+t}$ 定义的超平面内的一个格

$$x_1 + \ldots + x_s + 2x_{s+1} + \ldots + 2x_{s+t} = 0.$$

特别地， $\Delta(\mathcal{O}_k^\times)$的秩为 $s+t-1$。函数 $\ln|\cdot|$ 在 $\mathcal{O}_k^\times$ 上为零，并且我们可以假设 $\sigma_1 = \mathrm{id}$（复数情形的处理方式相同）。于是，$\Delta(\mathcal{O}_k^\times)$是由方程定义的空间中的一个离散子群

$$x_2 + \ldots + x_s + 2x_{s+1} + \ldots + 2x_{s+t} = 0,$$

其秩至多为 $s+t-2$。这只有在 $s+t=1$时才可能，即 $s=1$ 或$t=1$，这相当于说 $|S^\infty| = 1$。□

该引理意味着存在 $\alpha \in k_1$ 使得 $|\alpha| \neq 1$。现在考虑$E_1 = \bigoplus_{\sigma\in(S^\infty)_1}(k_1^\sigma)^{n_1}$ 上的自同态 A_0，它在$(k_1^\sigma)^{n_1}$上对所有 $\sigma \in (S^\infty)_1$均通过乘以 $\sigma(\alpha)$来作用。群 $\langle A_0\rangle$ 保留第2.3节中定义的典范 $\mathbb{Z}$-格。此外， A_0 通过在张量积的第一个因子上作乘法，自然地作用于$\bigotimes_{i=1}^m E_i$。因此，对于适当的整数 n， $\langle A_0\rangle \times S(\mathbb{Z})$是$(n, H, V, b)$的一个 GIB 单值子群，其扎里斯基闭包为 $T \times S$，其中 T 是 $\langle A_0\rangle$的扎里斯基闭包。

本节的讨论总结为如下命题。

命题 4.6. 群 D_S 出现在定理 *4.4*中；在取有限指数子群的意义下，它们恰好是形如 $\mathrm{Res}^{k/\mathbb{Q}}(G)(\mathbb{Z})$的算术群的直积，其中 $G \subset \mathrm{SL}(m,\mathbb{R})$ 定义在代数数域 k上，并且 $\mathrm{Res}^{k/\mathbb{Q}}(G)(\mathbb{Z})$ （见命题 *2.8*）的某个因子是紧致的。

5. From GIB monodromy subgroups to GIB manifolds: proof of Theorem 1.4

我们回到最初的动机，即寻找具有大单值群的 GIB 流形，并证明定理 1.4。为构造例子，我们首先回顾：GIB 流形等价于 LCP流形 [13, 定理 1.9]。这一等价使我们能够使用 [11],中所描述的 LCP流形构造；为方便读者，我们在下文加以概述。

令 (n， H， V， b) 为 GIB 算术数据，并令 D 为 (n， H， V， b) 的一个 GIB 单值子群。设 X 为一个紧流形，并配备一个满射群同态 φ: $\pi_1(X) \to D$。我们用 X 表示 X 的万有覆盖。

~考虑由下式定义的 $\mathbb{R}^n \times X$ 的微分同胚群

$$\Gamma := \mathbb{Z}^n \rtimes \{\mathbb{R}^n \times X \ni (a,x) \mapsto (\varphi(\gamma)a, \gamma(x)) \mid \gamma \in \pi_1(X)\}. \tag{23}$$

~那么，商流形 $\Gamma\backslash(\mathbb{R}^n \times X)$ 是紧致的，并且具有 GIB 结构。此外，该 GIB 流形的单值群为 D。

例5.1。 我们回到例 *3.6*。在这种情况下，群 $D := \langle A\rangle \times\Gamma_1$ 可以在有限指数范围内实现为 $S^1 \times C$ 的基本群，其中C 是一个紧双曲曲面。事实上， $\Gamma_1 \subset \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ (*$\mathbb{H}^2$*的等距变换群），且 Γ_1 是 $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$中的一个格。只需去除Γ中的扭元，使其在 $\mathbb{H}^2$上自由作用。这可以通过塞尔伯格引理实现。

因此，寻找单值群为 D 的 GIB 流形，等价于寻找一个紧流形 X 以及一个满态射 $\rho_0 : \pi_1(X) \to D$。由于D 是有限生成的（见定义3.5），它是一个有限生成自由群 F的商。因此得到一个满态射 $\varphi : F \to D$。最后，由于任何有限表示群都可以实现为某个紧四维流形的基本群，这就证明了定理 1.4。

读者或许希望对紧流形 X有更明确的描述。因此，我们给出一个具体构造，并证明命题1.5。设 X是亏格为 g的闭曲面，并假设 D 由 g 个元素生成。存在一个满群态射，从 $\pi_1(X$映到由 g 个生成元生成的自由群，因此也存在一个满同态，从 $\pi_1(X$映到 D。

根据定理4.4， D^{Zar} 是一个几乎直积 $T \times S$ ，其中 T 是一个环面， S 是半单的。若 D 在其扎里斯基闭包中余紧（对于~$\mathrm{Aut}(n,H,V,b)$而言，情况确实如此），我们将 X定义为与 $T \times S$关联的对称空间，它是 $T \times S$ 除以 S的极大紧因子所得的商空间~，并令 $X := X/D$。利用塞尔伯格引理，我们可以假设 D 没有扭元，因此 X 是真正的流形，且 $\pi_1(X) = D$。

本讨论证明命题1.5。

6. GIB manifolds and symmetric spaces

本节致力于研究 GIB 流形 $\Gamma\backslash(\mathbb{R}^q \times N)$，其中 N 是非紧型对称空间。在这种情况下，我们描述群 $\bar{P}$在等距变换群(N)中的扎里斯基闭包（见第3.1节），并证明 $\bar{P}^0$ 是该群的幺幂根基。这使我们能够确定该 GIB 流形的单值子群，并构造新的 GIB 流形实例。

6.1. 极小紧商代数子群。我们需要一些关于半单李群余紧子群的预备结果。本节的大部分内容广为人知，但由于我们未能找到完整的参考文献，因此在此给出自成一体的讨论。

若一个实李群是定义在 $\mathbb{R}$上的复代数群的实点的有限指数子群，则称其为代数群。

在本节中， G 是一个具有有限中心的半单连通实李群， $\mathfrak{g}$ 是其李代数。特别地，通过伴随表示， G 与 $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ 的一个线性代数子群同源。设 H 是 G的一个连通、余紧代数子群。

设 θ 是 G上的一个嘉当对合，并令 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ 为其诱导的嘉当分解。这些数据也使我们能够定义岩泽分解 $G = KAN$，或等价地， $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$，其中 $\mathfrak{n} = \bigoplus_{\alpha\in\Sigma^+} \mathfrak{g}_\alpha$，且 Σ^+ 是 $\mathfrak{a}$在 $\mathfrak{g}$上的作用所对应的一个正根系。

我们称 $G\mathfrak{a}$ 的闭子群为极小代数余紧子群，如果它是余紧的，且不包含更小的代数余紧子群

G。极小代数余紧子群可以通过 G的岩泽分解来描述。这直接源于 [2, 引理 3 的证明2]„ 但为方便读者，我们在此给出一些细节。

引理 6.1。 群 H 包含 AN的一个共轭子群。

证明。 群 A 是 G的极大 $\mathbb{R}$-分裂环面，而 N 是其李代数由 A作用下 G 的正根空间生成的子群。因此， AN 是 G的一个连通、可解、代数的 $\mathbb{R}$-分裂子群。由于 G/H 是紧致的，且 AN 在 G/H上代数地作用，我们可以应用 [2, 引理 3.1]来证明该作用具有一个不动点。由此可知， AN 共轭于 H的一个子群。□

引理 6.1 具有如下推论：

推论 6.2。 G 中的中心化子 $C_G(H)$ 是 $C(G)$与 G的一个紧因子之间的几乎直积。

证明。 根据引理6.1，不妨设在共轭意义下， H 包含 AN G的子群，其中 KAN 是 G的岩泽分解。在 $C_G(H)$ 中的元素特别地都与 AN交换。因此，根据半单李群中根空间的一般理论，它们必然包含于K 。

我们断言， $C_K(AN)$ 恰好是关于右作用在$K\backslash G$ 上平凡作用的元素 $k \in K$ 所构成的集合。事实上，若 $k \in K$ 与 AN交换，则对任意 $(a, n) \in A \times N$，有

$$Kank = Kkan = Kan,$$

因此， k 在 $K\backslash G$上平凡地作用。反之，若 $k \in K$ 在 $K\backslash G$上平凡地作用，则对任意 $a \in A$ ，有 $Kak = Ka$，以及 $aka^{-1} \in K$。但我们有 $[\mathfrak{a}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{p}$，故取 a足够小，可见 $aka^{-1} = k$，且这对任意 $a \in A$仍然成立。因此，k 与 A交换。特别地，由 k 给出的共轭作用保持正根空间，并且保持群 N。由与上文相同的论证，对任意 $n \in N$，有 $nkn^{-1} \in K$，故 $nkn^{-1}k^{-1} \in K$，但我们还有 $nkn^{-1}k^{-1} \in N$ 以及$N \cap K = \{\mathrm{id}\}$。由此推出， k 与 N交换。

现在，对于任意的 $g \in G$ 和 $k \in C_K(AN)$，以及任意的 $h \in G$:

$$Khgkg^{-1} = Khgg^{-1} = Kh,$$

因此， $C_K(AN)$ 是 G 的紧正规子群。根据定义，它也是闭的。由于 G 具有有限中心，证明至此完成。□

现在我们证明， AN 是 $\mathbb{R}$-分裂可解代数子群中的极大者。

引理 6.3. 设 Q 是 G的一个代数、连通、余紧、可解的 $\mathbb{R}$-分裂子群。那么， Q 与 AN共轭。

证明。 根据引理 6.1，不妨在共轭作用下假设 Q 包含 AN。此外，由于 Q 是代数且可解的，因此可写为 $Q = R_u(Q) \rtimes T$，其中 T 是 Q [4, 定理 10.6 (4)]的极大环面。根据假设，该环面是 $\mathbb{R}$-分裂的，并且是 G 的极大 $\mathbb{R}$-分裂环面，因为 A 也是如此。在共轭作用下，不妨假设 $T = A$。

我们还知道 $N \subset R_u(Q)$，而 $R_u(Q)$ 在 A 的作用下分解为根空间。因此， $R_u(Q)$ 的李代数包含一组正根空间，即 N，且不能包含负根空间，否则它将包含一个与 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ 同构的子代数，而该子代数并非可解。由此我们推出 $N = R_u(Q)$，定理得证。□

我们后续分析所需的最后一个结果涉及幺模性。

命题 6.4. 环面 A 中存在一个元素，它在 $\mathfrak{n}$的任意子空间上都以压缩的方式作用。特别地，该元素在 N的任意 A-不变子群及其任意商空间上都以压缩的方式作用。

证明。令 $a \in \mathfrak{a} \setminus \{0\}$ 满足：对所有根 $\alpha \in \Sigma^+$，都有 $\alpha(a) < 0$。根据正根的定义，这样的 a 存在。此外，a 在 N 上的作用是一个系数为负数的对角矩阵。取指数映射后，$\exp(a)$ 在 $\mathfrak{n}$ 的任意子空间上都表现为压缩，因此它是一个压缩。□

6.2. **具有对称部分的 GIB 流形** N。我们考虑一个 GIB 流形$\Gamma\backslash(\mathbb{R}^q \times N)$，并假设 (N, g_N) 是非紧型对称空间。这种情形已在 [13], 中研究过，并且在秩一情形下得出了一些分类结果。这里，我们证明定理 1.6。

我们回顾一下，$\Gamma \subset \mathsf{Sim}(\mathbb{R}^q) \times \mathsf{Isom}(N, g_N)$，而 $\lrcorner\Gamma$ 在 $\mathsf{Isom}(N, g_N)$ 上的投影的闭包记为 P。

群 $I := \mathsf{Isom}(N, g_N)^0$ 与 $\mathsf{Isom}(N, g_N)$ 可公度。必要时，用有限指数子群替换 Γ后，我们可以假设 $P \subset I$。应用伴随表示 $\mathsf{Ad} : I \mapsto \mathsf{GL}(\mathfrak{I})$，其中 $\mathfrak{I}$ 是 I 的李代数，我们将I 与其像等同。事实上，Ad 是单射，因为 I 是半单的且中心平凡。此外，$\mathsf{Ad}(I)$ 是 $\mathsf{GL}(\mathfrak{g})$ 的代数子群。

我们还回顾一下，$\bar{P}^0$ 是 $\bar{P}$的单位连通分支。它是一个阿贝尔李群，我们用 $\mathfrak{p}$ 表示其李代数。我们考虑 G中 $\bar{P}^0$ 的正规化子：

$$\mathrm{Nor}_G(\bar{P}^0) := \{g \in G \mid g\bar{P}^0 g^{-1} = \bar{P}^0\} = \{g \in G \mid g\mathfrak{p}g^{-1} \subset \mathfrak{p}\}. \tag{24}$$

由于稳定 $\mathfrak{p}$ 等价于满足多项式方程，我们推得 $\mathsf{Nor}_G(\bar{P}^0)$ 在 G中是扎里斯基闭的。我们还注意到 $\bar{P} \subset \mathsf{Nor}_G(\bar{P}^0)$。由于 $\bar{P}$在 N上余紧作用，因此 $\mathsf{Nor}_G(\bar{P}^0)$ 在 G中余紧。

我们的目标是将群 $\bar{P}^0$ 识别为 $\mathsf{Nor}_G(\bar{P}^0)$ 的幺幂根基。我们先证明：

命题 6.5。设 H 是 G的阿贝尔连通子群。设 Q 是 G的代数余紧子群，且正规化 H。那么，H 包含于 Q的幺幂根基中。

证明。令 $R_u(Q) \rtimes U$ 为 Q 的 Le维分解（参见 [19] 和 [4, §11。22]）。那么，存在一个同源 $U \simeq S \times T$，其中 T是一个环面，S是半单的，并且有以下同源关系

$$Q \simeq R_u(Q) \rtimes U \simeq R_u(Q) \rtimes (T \times S) \simeq (R_u(Q) \rtimes T) \rtimes S \simeq R(Q) \rtimes S, \tag{25}$$

其中 $R(Q)$ 是 Q的根基。H 在 G中的扎里斯基闭包$\overline{H}^{\mathrm{Zar}}$ 是阿贝尔群，因为 H 是阿贝尔的 [4, §2.4，推论 2]。特别地，它是一个直积$R_0 \times T_0$，其中 T_0 是一个环面，R_0 是 $\overline{H}^{\mathrm{Zar}}$ [4, 的幂零根（定理 10.6 (3)）]。

我们断言 $R_0 \subset R_u(Q)$。首先注意到，$\overline{H}^{\mathrm{Zar}}$ 到S 的投影是 S 的正规阿贝尔子群，因为 $\overline{H}^{\mathrm{Zar}}$ 在 Q中是正规的，因此该投影包含于 S的中心，而该中心是有限的。由此可知，$\overline{H}^{\mathrm{Zar}}$ 包含于 $R_u(Q) \rtimes T$，因为该群是闭的，且$\overline{H}^{\mathrm{Zar}}$ 是连通的。由 $R_u(Q)$恰好是$R(Q)$的幺幂元素集合这一事实，即可得出该断言。

环面 T_0 包含于 $R(Q)$的一个极大环面中，且该极大环面通过元素 $u \in R_u(Q)$与 T 共轭（见 [14, 定理34.4] 与 [4, 定理19.2]），即 $uT_0u^{-1} \subset T$。此外，$\overline{H}^{\mathrm{Zar}}$ 在 Q 中正规，因此 uT_0u^{-1} 是 $\overline{H}^{\mathrm{Zar}}$的一个极大环面。由于 $\overline{H}^{\mathrm{Zar}}$ 是阿贝尔的，它具有唯一的极大环面，且 $T_0 = uT_0u^{-1} \subset T$。

设 $t \in T_0$ 与 $u \in R_u(Q)$。群 T_0 在 Q 中正规，并且正规化 $R_u(Q)$，因此交换子

$$[t,u] := tut^{-1}u^{-1}$$

属于 T_0 和 $R_u(Q)$。由于 $T_0 \cap R_u(Q) = \{\mathrm{id}\}$，可得 $[t,u] = \mathrm{id}$。因此，T_0 中心化 $R_u(Q)$，从而中心化 Q。根据推论 6.2，T_0 与整个群 G交换，因为 G 没有紧因子。由此可知，T_0 是有限的，因为 G 是半单的；又因为 $\bar{P}^0$ 是连通的，所以它包含于 $R_0 \subset R_u(Q)$ 中。□

令 L 为 G 的一个代数子群，满足 $\bar{P} \subset L \subset$ 正规化子$_G(\bar{P}^0)$。将命题 6.5 应用于我们的特定情形，可得 $\bar{P}^0 \subset R_u(L)$。

由于 $\bar{P}^0$ 是连通的，在下文中我们可以假设所有群在通常拓扑下都是连通的。

到目前为止，我们知道 $\bar{P}^0 \subset R_u(L)$。我们希望证明两者相等。注意到，等式（25）中的分解适用于 L，因此我们写作

$$\mathrm{Nor}_G(\bar{P}^0) = R_u(L) \rtimes (S \times T). \tag{26}$$

我们引入群

$$R' := R_u(\mathrm{Nor}_G(\bar{P}^0))/\bar{P}^0, \tag{27}$$

并考虑

$$L' := L/\bar{P}^0 = R' \rtimes (S \times T). \tag{28}$$

群 $\Gamma_1 := \bar{P}/\bar{P}^0$ 是 L' 的离散子群。此外，它是余紧的，因此是 L' 中的一个格。

设 S_K 是 S的极大连通紧正规子群。根据 Mostow 证明的定理 [20, 引理 3。9]，并由 Auslander 在 [1, 定理 2], 中给出，群

$$\Gamma' := \Gamma_1 \cap (R' \rtimes S_K) \tag{29}$$

是 $R' \rtimes S_K$ 中的一个余紧格。

群 P通过共轭作用于 $R' \rtimes S_K$，并保持格 Γ'。因此，P在 $R' \rtimes S_K$上幺模地作用。由于 P在 L中余紧，模函数 Δ 的核是余紧的，其中 $\Delta\colon L \to \mathbb{R}_+^*$（对应于 L 在 R_u（L）$/\bar{P}^0$上的作用）；而且 Δ 可经由此核分解为从紧群到 $\mathbb{R}_+^*$的群同态。后一个同态因此为常值，且 L 在$R' \rtimes S_K$上幺模地作用。特别地，T在 $R' \rtimes S_K$上幺模地作用，因此也在 R' 上幺模地作用，因为它与 S_K可交换。

令 $S = K_S A_S N_S$ 为 S 的一个岩泽分解，并令 T_s 为 T的极大$\mathbb{R}$-分裂子环面。考虑群

$$\mathbf{P} := R_u(L) \rtimes ((N_S \rtimes A_S) \times T_s) = (R_u(L) \rtimes N_S) \rtimes (A_S \times T_s). \tag{30}$$

它是一个余紧、可解的 $\mathbb{R}$-分裂代数子群，且包含于 G中。因此，若 $G = K_G A_G N_G$是 G的岩泽分解，应用定理 6.3可知 $\mathbf{P}$ 在共轭作用下等于 $A_G N_G$，其中 $A_G = A_S \times T$且 $N_G = R_u(L) \rtimes N_S$。

根据前面的讨论，T_s 在 $R_u(L') = R_u(L)/\bar{P}^0$ 上幺模地作用，并且 A_S在 $R_u(L)$上幺模地作用。因此，极大 $\mathbb{R}$-分裂环面 A_G 在 $R_u(L)$上幺模地作用。然而，命题 6.4为我们提供了一个通过压缩作用于 $R_u(L')$的元素 $a \in A_G$。因此，$R_u(L')$必为平凡群，即 $R_u(L) = \bar{P}^0$。

$\bar{P}^0$ 是介于 $\bar{P}^0$ 与 $\mathrm{Nor}_G(\bar{P}^0)$之间任意代数群的幺幂根基。特别地，根据 [7, 推论 3。2], $\mathrm{Nor}_G(\bar{P}^0)$ 是 G的抛物子群。至此，定理1.6的证明结束。

根据前面的讨论，我们可以推 deduce 出

注 6.6。撰写本文时，我们注意到，定理*1.6*或许可以部分地视为 [17, 定理 1]的推论。此外，我们的证明与后者文章中的证明确实非常接近。*Calvin C. Moore* 声称，存在一份明确列出所有具有阿贝尔幺幂根基的半单李群的抛物子群的清单。这份清单或可完整分类我们所研究情形中出现的对称空间。然而， [17] 所引文章似乎并未包含这份清单。

GIB 流形的单值子群包含于约化部分 $S \times T$中。接下来需要确定 $\Gamma_1 = \bar{P}/\bar{P}^0$ 中通过共轭作用平凡作用于 $\bar{P}^0$的元素。首先注意到， Γ_1 嵌入 L的一个 Levi 子群中，即$S \times T$。设 t是 T_s中对 $\bar{P}^0$作用平凡的一个元素。在这种情况下， t与 $A_G N_G$可交换，并且根据推论 6.2，它包含于 G的一个紧因子中。

引理 6.7。 T 中对 $\bar{P}^0$ 作用平凡的元素构成一个紧群。

现在我们证明定理 1.7。

引理 6.8。 设 (n, H, V, b) 为 *GIB* 算术数据。则自同构群 $\mathrm{Aut}(n, H, V, b)$ 在 $\mathrm{GL}(V)$ 上的投影是离散的。

证明。 设 $(h_n, v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in$ 是 $\mathrm{Aut}(n, H, V, b)$ 中的一列元素，且 $(v_n)_{\mathbb{N}}$ 收敛于单位元。于是，$(\det(v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛于 1，由于 $\mathrm{Aut}(n, H, V, b) \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$，$(\det(h_n))_{n\in\mathbb{N}}$ 也收敛于 1。因此，$(\det(h_n))_{n\in\mathbb{N}}$ 有界，而 $(h_n)_{\mathbb{N}}$ 包含在 $\mathrm{GL}(H)$ 的一个紧子集中，因为它是 $\mathrm{O}(b)$ 的子列。

数列 $(v_n)_{\mathbb{N}}$ 也包含在单位元的一个紧邻域中，因此可得 $(h_n, v_n)_{\mathbb{N}}$ 包含在 I_n 的一个紧邻域中。但这样的邻域中，$\mathrm{Aut}(n, H, V, b)$ 中只有有限个元素。因此，$(h_n, v_n)_{\mathbb{N}}$ 在某个秩之后为常数，等于 I_n，从而得到该引理。□

令 ρ为 GIB 流形的单值表示。令 $S = S_1 \times \ldots \times S_r$ 为 S 的单因子分解。根据引理 6.7， $T \times S$ 通过共轭作用在 $\bar{P}^0$ 上的作用之核，是由其中若干因子与一个紧因子 T_K组成的，且该紧因子属于 T。为简便起见，假设此核为 $S_2 \times \ldots \times S_r \times T_K$。群 $\rho(\Gamma)$ 可视为 $\mathrm{Sim}(\mathbb{R}^q)$ 的一个子群 $\times S_1 \times T$。

根据引理 6.8， $\rho(\Gamma)$ 在 $S_1 \times T$ 上的投影是离散的。此外，它与 Γ 在 $S_1 \times T$ 上的投影重合，因此是余紧的。群 $\rho(\Gamma)^{\mathrm{Zar}}$是 $\mathrm{Sim}(\mathbb{R}^q) \times S_1 \times T$ 的一个子群。再次应用引理 6.8，$\rho(\Gamma)^{\mathrm{Zar}}$ 的整数点在 $S_1 \times T$中投影为一个离散子群，其中包含 $\rho(\Gamma)$ 的投影。由于 Γ 同构于其在 $\mathrm{Isom}(N, g_N)$ 上的投影（见 [13] 中命题 2.1 之前的讨论），这表明 $\rho(\Gamma)$ 在 $\rho(\Gamma)^{\mathrm{Zar}}(\mathbb{Z})$中的指数有限。后一群在 $\rho(\Gamma)^{\mathrm{Zar}}$中余紧，因此 $\rho(\Gamma)$ 也余紧。

接下来需要证明当（N， g_N）不可约时，单值化是单射的。在这种情况下，等距变换群 $\mathrm{Isom}(N, g_N)$ 是单群。我们记 $S_1 \times \ldots \times S_r$为 S 的单因子分解。若 S_i 的一个非紧因子 S，$1 \leq i \leq r$在 $\bar{P}^0$上的作用平凡，则 G 的根系可分解，因而 G 不是单群。因此， S 中在 $\bar{P}^0$ 上作用平凡的子群是一个紧因子。根据推论6.2 ，它是 G的一个紧因子；但 G 没有这样的因子，因为它是平凡的。因此，GIB 流形的单值表示是单射的。

这就证明了定理 1.7。

7. Explicit examples of matrix groups

本节中，我们给出一些显式构造的 GIB 流形，其中因子N是一个对称空间。我们使用矩阵群来构造这些流形。我们还从矩阵的角度讨论 GIB 算术数据的分类。

7.1. **适当对称空间的例子。** 根据定理1.6，当 GIB 流形万有覆盖的因子 N 是非紧型对称空间时， $\bar{P}^0$的正规化子是 Isom$(N)^0$,，且 $\bar{P}^0$是其幺幂根基。因此，我们应寻找具有有限中心且包含此类抛物子群的半单李群。本节将介绍几个例子。

例7.1。 设 $m > 0$ 为整数。群 SL$(m+1,\mathbb{R})$ 包含抛物子群

$$\mathbf{P} := \mathbb{R}^m \rtimes (\mathbb{R}^* \times \mathrm{SL}(m,\mathbb{R})). \tag{31}$$

若 $(e_1,\dots,e_{m+1})$ 是 $\mathbb{R}^{m+1}$的一组基，$\mathbf{P}$ 可视为旗 (Span$(e_1,\dots,e_m)$, Span$(e_1,\dots,e_{m+1})$) 的稳定子。它可通过以下嵌入显式给出

$$\begin{aligned} &\mathbb{R}^m \longrightarrow \mathrm{SL}(m+1,\mathbb{R}) && \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathrm{SL}(m+1,\mathbb{R}) && \mathrm{SL}(m,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{SL}(m+1,\mathbb{R}) \\ &v \longmapsto \begin{pmatrix} I_m & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, && \lambda \longmapsto \begin{pmatrix} |\lambda|^{-1/m} I_m & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, && A \longmapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

在这种情况下，对称空间 N将是 SL$(m+1,\mathbb{R})$/SO$(m+1,\mathbb{R})$，而$\bar{P}^0$ 将是 $\mathbb{R}^m$。然而，我们证明，除非满足 $m > 1$，否则这不会产生 GIB 流形。我们通过反证法证明这一断言：假设存在一个 GIB 流形 M，其万有覆盖为 $\mathbb{R}^q \times N\,(q > 1)$，并且 $\bar{P}^0 = \mathbb{R}^m$。

抛物群 P 是 P 中唯一以 $\mathbb{R}^m$ 为幺幂根基的代数连通余紧子群。因此，根据定理 1.6，它等于 P 的扎里斯基闭包¯。我们还注意到， $\mathbb{R}^* \times$ SL$(m,\mathbb{R})$ 中没有元素能中心化 $\mathbb{R}^m$，所以单值化映射是单射的。特别地， $\Gamma := \bar{P}/\bar{P}^0$ 的扎里斯基闭包同构于 $\mathbb{R}^* \times$SL$(m,\mathbb{R})$，并且与 M 的单值群的扎里斯基闭包重合。因此，定理 4.4蕴含存在一个 SL$(m,\mathbb{R})$ 的余紧算术子群 D，它作用于 $\mathbb{R}^q \oplus \mathbb{R}^m$，保持该分解，且其在 $\mathbb{R}^q$ 上的限制是相对紧的。根据[18, 命题 5.5，12], 这个算术群是通过标量限制得到的（见命题 2.8）。

由于 SL$(m,\mathbb{R})$ 在 $\mathbb{R}^m$ 上唯一的忠实表示是典范表示，我们推得 D 的扎里斯基闭包同源于一个直积

$$\prod_{\sigma \in S^\infty} (\mathrm{SL}(m,\mathbb{R}))^\sigma,$$

其中 S^∞ 是某个代数数域 k 的阿基米德位集合。但这个直积的各项要么是 SL$(m,\mathbb{R})$，要么是 SL$(m,\mathbb{C})$。只有当 $k = \mathbb{Q}$ 时，这才有可能，这意味着 $S \simeq$ SL$(m,\mathbb{Z})$。若 $m > 1$，这个算术子群就不是余紧的，这与此矛盾。

例 7.2. 设 p、r 为两个整数。群 SO$(p+1,r+1)$ 包含抛物子群

$$\mathbf{P} := \mathbb{R}^{p,r} \rtimes (\mathbb{R}^* \times \mathrm{SO}(p,r)). \tag{32}$$

这是 $\mathbb{R}^{p+1,r+1}$ 中一条类光直线的稳定子，并且我们有以下嵌入

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^{p,r} &\longrightarrow \mathrm{SO}(p+1,r+1) \\ v &\longmapsto \begin{pmatrix}1 & -v^T\eta & -\frac{1}{2}\|v\|_{p,r} \\ 0 & I_{p+r} & v \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\mathbb{R}^* &\longrightarrow \mathrm{SO}(p+1,r+1) \\ \lambda &\longmapsto \begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0 \\ 0 & I_{p+r} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{-1}\end{pmatrix},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{SO}(p,r) &\longrightarrow \mathrm{SO}(p+1,r+1) \\ A &\longmapsto \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\end{aligned},$$

其中，我们赋予 $\mathbb{R}^{p+1,r+1}$ 二次型，其对应的矩阵为

$$\eta := \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & I_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I_r & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}. \tag{33}$$

这里，对称空间为 $N := \mathrm{SO}(p+1,r+1)/\mathrm{S}(\mathrm{O}(p+1)\times\mathrm{O}(r+1))$，利用这些数据可以定义一个 GIB 流形。事实上，令 b 为定义在 $\mathbb{R}^{p+r}$ 上的二次型，其定义为

$$b := x_1^2 + \ldots + x_p^2 - \sqrt{2}(x_{p+1}^2 + \ldots + x_{p+r}^2). \tag{34}$$

取代数域 $k := \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$，并以 σ 表示其非平凡嵌入，考虑以下对象即可得到 $\mathrm{SO}(p,r)$ 的一个算术子群

$$\Gamma' := \{(\sigma(A), A) \mid A \in \mathrm{SO}(b, \mathbb{Z}[\sqrt{2}])\}. \tag{35}$$

群 Γ' 自然作用于 $\mathbb{R}^{p+r}\oplus\mathbb{R}^{p,r}$，且它在此分解的第一因子上的限制包含于 $\mathrm{SO}(\sigma(b),\mathbb{R}) \simeq \mathrm{SO}(p+r,\mathbb{R})$。此外，$\Gamma'$ 与 $\mathrm{GL}(2(p+r),\mathbb{Z})$ 的一个子群共轭，因此它保持 $\mathbb{R}^{p+r}\oplus\mathbb{R}^{p,r}$中的一个格 Γ_0。取 $\lambda := \frac{2+\sqrt{2}}{2}$，属于 $\mathbf{P}$ 的子群 $\mathbb{R}^*$，并注意到它在 $\mathbf{P}$ 的幺幂根基 $\mathbb{R}^{p,r}$ 上通过乘以 λ 作用。令 A_0 为在 $\mathbb{R}^{p+r}\oplus\mathbb{R}^{p+r}$上作用为 $(x,y)\mapsto\lambda^{-1}(x,\lambda y)$ 的矩阵。最后，我们定义群

$$\Gamma := \Gamma_0 \rtimes (\langle A_0\rangle \times \Gamma'), \tag{36}$$

以如下方式作用于 $\mathbb{R}^{p+r}\times N$：

$$\begin{aligned}(\Gamma_0\times\langle A_0\rangle\times\Gamma')\times(\mathbb{R}^{p+r}\times N) &\longrightarrow \mathbb{R}^{p+r}\times N \\ ((v,w),A_0^m,(\sigma(A),A)),(x,y) &\longmapsto (\lambda^{-m}\sigma(A)x + v, w\lambda^m A\cdot y)\end{aligned}, \tag{37}$$

其中，我们将 Γ_0 视为 $\mathbb{R}^{p+r}\oplus\mathbb{R}^{p,\,r}$的子集。

根据定义，Γ 是 $\mathrm{Sim}(\mathbb{R}^{p+r})\times\mathrm{Isom}(N)$ 的离散子群，适当且余紧地作用于 $\mathbb{R}^{p+r}\times N$。然而，它的作用未必是自由的；若作用不自由，则意味着其在 N 上的限制也不自由。等价地说，存在一个 Γ' 中的矩阵，其在 N 上的限制是一个挠元。塞尔伯格引理允许我们从 Γ'中去掉这类元素。

总之，$\Gamma\backslash(\mathbb{R}^{p+r}\times N)$ 是一个 GIB 流形。

7.2. 矩阵的显式描述。本节将介绍一种显式构造 GIB 算术数据的方法。我们还将说明如何求出定义自同构群扎里斯基闭包的多项式。这些结果可直接由定义推出，但我们认为有必要将其明确写出。

7.2.1. *GIB* 数据的分类。设 (n, H, V, b) 是定义 3.4中给出的 GIB 算术数据。设 A 是 $\mathrm{Aut}(n, H, V, b)$ 中的一个矩阵，其在H 上的限制不是一个 b-等距变换。

第 5 节中已证明 [11, 2] 存在格 $\mathbb{Z}^n$ 的一组基，使得 A 为分块对角矩阵，且这些块的特征多项式在 $\mathbb{Q}$上不可约。记 $A = \mathrm{Diag}(A_1, \dots, A_m)$，其中 A_i 是适配基下的各个块。

由于 A 在 H上的限制是一个相似变换，且 H 是 $\mathbb{R}^n$的无理子空间，因此存在一个正实数 $\lambda \neq 1$，使得每个块都有一个模为 λ 的特征值（否则 H 就不是无理的），并且 H 是 A 中模为 λ的特征值所对应的特征子空间的直和的子空间。

由于各块 A_i 的特征多项式不可约，它们要么具有完全相同的特征值，要么没有共同的特征值。我们可以假设这些块按以下方式排列：存在指标 $1 = i_1 < \ldots < i_{\ell+1} = m+1$，使得 A_i 和 A_j 具有相同的特征多项式，当且仅当存在 $1 \leq r \leq \ell$ 满足 $i_r \leq i,\ j < i_{r+1}$。现在将矩阵 A 视为分块矩阵 $\mathrm{Diag}(A'_1, \dots, A'_\ell)$，其中 $A'_r = \mathrm{Diag}(A_{i_r}, \dots, A_{i_{r+1}-1})$。因此，以下内容中我们可以假设所有块 A_i 都具有相同的不可约特征多项式。

我们回顾一下，A 在 H 上的限制是比率为 $\lambda \neq 1$的相似变换。设 $a_1, \dots, a_s$ 为 A_1 的实特征值，$a_{s+1}, a_{s+1}, \dots, a_{s+t}, a_{s+t}$ 为其复特征值。将复数 $ae^{i\theta}$ $(a, \theta \in \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi])$，$\theta \neq 0$，对应到实矩阵

$$a \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \tag{38}$$

所有块 A_i 都与 A_0 相似：在 $\mathbb{C}$上，$= \mathrm{Diag}(a_1, \dots, a_{s+t})$。因此，$A$ 可视为作用于 $\mathbb{R}^{s+2t} \otimes \mathbb{R}^m$上的线性变换 $A_0 \otimes I_m$。设

$$\Lambda := \{a_j \mid 1 \leq j \leq s+t,\ |a_j| = \lambda\}, \tag{39}$$

对于任意 $a \in \Lambda$，令 E_a 为 A_0 对应于特征值 a的特征子空间（若 a 是复数，则它是一个复直线，并与 $\mathbb{R}^2$对应）。那么，存在 $\mathbb{R}^m$ 的子空间 F_a（可能是平凡子空间）和 $a \in \Lambda$，使得

$$H = \bigoplus_{a \in \Lambda} E_a \otimes F_a. \tag{40}$$

子空间 H 在 $\mathbb{R}^{s+2t} \otimes \mathbb{R}^m$ 中是无理的，当且仅当 $\bigoplus_{a\in\Lambda} F_a + \mathbb{Z}^m$ 在 $\mathbb{R}^m$ 中稠密。对于任意 $a \in \Lambda$，存在一个在 $\mathbb{R}^m$ 中与 F_a 对应的补空间 F'_a，使得

$$V = \bigoplus_{a \in \Lambda} E_a \otimes F'_a \oplus \bigoplus_{a \notin \Lambda} E_a. \tag{41}$$

反过来，设 $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$ 是分块对角矩阵，且所有块都具有不可约特征多项式。此外，假设存在 $\lambda > 1$，使得每个块至少有一个模为 λ的特征值。现在，我们像之前一样对 A 的各块进行分组，并为简单起见，假设所有块都具有相同的不可约特征多项式。然后，我们按照方程（40）和（41）定义 H 和 V，其中子空间 F_a 的选取满足 $\bigoplus_{a\in\Lambda} F_a + \mathbb{Z}^m$ 在 $\mathbb{R}^m$中稠密。

于是，H 在 $\mathbb{R}^{s+2t} \otimes \mathbb{R}^m$中是无理的，$A$ 保持分解 $H \oplus V$，且 A在 H 上的限制可对角化，其所有特征值的模均为λ。因此，可以在 H 上找到一个内积 b，使得 A 在(H, b)上作为比例为 λ的相似变换作用。由此可知，对于适当的整数 n，(n, H, V, b)是 GIB 算术数据。

所有 GIB 算术数据均可通过上述构造得到，因此我们完整地描述了这些结构。

7.2.2. 自同构群的扎里斯基闭包。设 $(n,\ H,\ V,\ b)$ 是 GIB 算术数据。正如我们之前所见，自同构群 $\mathrm{Aut}(n,\ H,\ V,\ b)$ 的扎里斯基闭包定义在$\mathbb{Q}$上，其换位子子群也是如此。下面说明如何明确求出一个矩阵必须满足的多项式方程，从而属于 $\mathrm{Aut}(n,\ H,\ V,\ b)$。

设 $A \in \mathrm{Aut}(n,\ H,\ V,\ b)$。那么，$A$必须保持分解 $H \oplus V$。记 p 为在 V平行于 H 的投影算子，则此条件等价于

$$pA = Ap. \tag{42}$$

此外，A 在 H 上的限制必须保持内积 b。等价地，

$$b(A|_H \cdot, A|_H \cdot) = \det(A|_H)^2 b. \tag{43}$$

因此，矩阵 $A \in \mathrm{GL}(n,\ \mathbb{Z})$ 属于自同构群 $\mathrm{Aut}(n,\ H,\ V,\ b$当且仅当它满足方程（42）和（43）。

令 E 为 $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{Q})$ 中包含 $E \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ contains$p$ 的最小 $\mathbb{Q}$-向量子空间。设 $(A_1, \ldots, A_m)$ 是 E 的一个 $\mathbb{Q}$- 基。那么，存在实数 $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ 使得

$$p = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i A_i.$$

E 上的极小性条件意味着 α_i 在 $\mathbb{Q}$ 上线性无关。事实上，若

$$\alpha_1 = \lambda_2 \alpha_2 + \ldots + \lambda_m \alpha_m$$

其中 $\lambda_i \in \mathbb{Q}$，则

$$p = \sum_{i=2}^{m} \alpha_i (\lambda_i A_1 + A_i),$$

且 $\lambda_i A_1 + A_i \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{Q})$。因此，对于 $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$，条件 $pA = Ap$ 等价于

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i (A_i A - A A_i) = 0, \tag{44}$$

而这又等价于

$$[A_i, A] = 0 \text{ for all } 1 \leq i \leq m. \tag{45}$$

对于限制为 (H, b) 的等距变换的矩阵，第二个条件可以用同样的方法处理。首先，我们将 b 视为定义在 $H \oplus V$ 上并在 V 上消失的二次型。因此，b 可由一个对称矩阵 q 表示，且条件 (43) 等价于 $A|_H^T q A = \det(A|_H)^2 q$。令 F 为 $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{Q})$ 中包含 $F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ contains q 的最小 $\mathbb{Q}$-向量子空间。我们固定 F 的一个 $\mathbb{Q}$-基 $(Q_1, \ldots, Q_r)$，并完全照前述方法进行推导，得到条件 $A^T q A = q$ 等价于

$$A^T Q_i A = Q_i \text{ for all } 1 \leq i \leq r. \tag{46}$$

由此我们得出，$A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$ 属于$n, H, V, b)$ 的自同构群，且其在 (H, b) 上的限制是等距变换，当且仅当 A 同时满足条件 (45) 和 (46)。由此可得，矩阵要属于自同构群且其在 H上的限制是等距变换，必须满足的精确有理多项式方程。

References

[1] L. Auslander, *On radicals of discrete subgroups of Lie groups*。《美国数学杂志》85 (2)，第 145–150 页（1963）。[2] U. Bader, A. Nevos, *Conformal actions of simple lie groups on compact pseudo-Riemannian manifolds* **60** 3 355 387 2002 。

《微分几何杂志》（），第 – 页（）。[3] F. Belgun, A. Moroianu, *On the irreducibility of locally metric connections.*《纯粹与应用数学杂志》714，123–150（2016）。[4] A. Borel, *Linear Algebraic Groups*。《数学研究生教材》，Springer New York（1991）。[5] A. Borel, Harish-Chandra, *Arithmetic subgroups of algebraic groups*。《数学年刊》75 (3)，第 485–535 页（1962）。[6] A. Borel, J. Tits, *Groupes réductifs*。《高等科学研究所数学出版物》27，第 55–150 页（1965）。[7] A. Borel, J. Tits, *Éléments unipotents et sous-groupes paraboliques de groupes réductifs . I*。《数学创刊》12，第 95–104 页（1971）。[8] V. del Barco, A. Moroianu *The characteristic group of Lie LCP manifolds*。arXiv:2511.23107。[9] D. B. A. Epstein, *Transversely hyperbolic 1-dimensional foliations*。《Ast´erisque》116，第 53–69 页（1984）。[10] B. Flamencourt, *Locally conformally product structures*。《国际数学杂志》35 (5)，2450013（2024）。[11] B. Flamencourt, *The characteristic group of conformally product structures*。《纯粹与应用数学年刊》204，第 189–211 页（2025）。[12] B. Flamencourt, A. Zeghib, *On foliations admitting a transverse similarity structure*。arxiv:2501.04814。[13]B. Flamencourt, A. Zeghib, *Similarity manifolds and Inoue–Bombieri construction*。arxiv:2505.03389。[14] J. E. Humphreys, *Linear Algebraic Groups*。《数学研究生教材》，Springer New York（1975）。[15] M. Kourganoff, *Similarity structures and de Rham decomposition*。《数学年刊》373，1075–1101（2019）。[16] V. Matveev, Y. Nikolayevsky, *A counterexample to Belgun–Moroianu conjecture*。《巴黎科学院数学报告》353，455–457（2015）。[17] C. C. Moore, *Cocompact subgroups of semi-simple Lie groups*。《纯粹与应用数学杂志》350，第 173–177 页（1984）。[18] D. Witte Morris, *Introduction to arithmetic groups*。arXiv:math/0106063。[19] G. D. Mostow, *Fully reducible subgroups of algebraic groups*。《美国数学杂志》78 (1)，第 200–221 页（1956）。[20] G. D. Mostow, *Arithmetic subgroups of groups with radical*。《数学年刊》93 (2)，第 409–438 页（1971）。[21] K. Oeljeklaus, M. Toma, *Non-Kähler compact complex manifolds associated to number fields*。《傅里叶研究所年刊》55，161–171（2005）。

UMPA, CNRS, École Normale Supérieure de Lyon, France
Email address: brice.flamencourt@ens-lyon.fr

UMPA, CNRS, École Normale Supérieure de Lyon, France
Email address: abdelghani.zeghib@ens-lyon.fr
http://www.umpa.ens-lyon.fr/~zeghib/