Grace M.X. Li

数学与数据科学学院,
中国陕西省西安市陕西科技大学，邮编 710021

电子邮箱： grace li@sust.edu.cn

摘要。

1987 年，Alavi、Malde、Schwenk 和 Erd˝os 猜想树的独立多项式是单峰的。随后，许多研究者提出将这一猜想加强为对数凹性。2023年，Kadrawi、Levit、Yosef 和 Mizrachi 发现了阶为 26 的树的独立多项式并非对数凹，由此构造了两个这样的多项式无穷族，记为 $T_{3,\ m,\ n}$ 和 $T^*_{3,\ m,\ n}$。本文证明，这两个无穷族也满足 Alavi、Malde、Schwenk 和 Erd˝os 提出的单峰猜想。

2020 年 *AMS* 数学主题分类：05C69, 05E05, 05C05, 05C15关键词：独立多项式；单峰性；色对称函数；Schur 正性

arXiv:2603.03025v1 [math.CO] 3 Mar 2026

1 引言

设 G 是一个顶点集 V（G）有限、边集 E（G）的简单图。独立集 I（或稳定集）是 V（G）的一个子集，其中任意两个顶点都不相邻。最大独立集的大小称为独立数，记作 α（G）。令 i_k 表示 G 中大小为 k 的独立集数量，按约定， $i_0 = 1$ 。生成函数:

$$I_G(t) = \sum_{k=0}^{\alpha(G)} i_k t^k,$$

称为独立多项式，其对应的 G [10]。

若存在一个指标 j （$0 \le j \le n$）使得：实数序列 a_0， a_1，……， a_n 称为单峰。

$$a_0 \le a_1 \le \cdots \le a_{j-1} \le a_j \ge a_{j+1} \ge \cdots \ge a_n;$$

若对所有 j 均有 $a_j^2 \ge a_{j-1}a_{j+1}$ ，则称其为对数凹。已知对于正数序列，对数凹性蕴含单峰性。若一个多项式的系数序列是单峰的（分别为对数凹的），则称该多项式是单峰的（分别为对数凹的）。

1987 年，Alavi、Malde、Schwenk 和 Erd˝os [1] 猜想，每棵树或森林的独立多项式都是单峰的。

猜想 1.1 ([1, 问题 3])。 对于任意森林 F，其独立多项式 $I_F(t)$是单峰的。

这一著名猜想受到了广泛关注。关于该猜想的近期研究，参见 [2, 4, 6, 7, 11, 17, 23, 25] 及其中的参考文献。

具体而言，Brown、Dilcher 和 Nowakowski [8]猜想，每个良覆盖图（即所有极大独立集的基数都相同的图）的独立多项式都是单峰的。尽管 Michael 和 Traves [18] 后来给出了反例，推翻了这一单峰性猜想，但对于极良覆盖图这一子类，该问题仍未解决。Levit 和 Mandrescu [14] 证明，对于任意整数 α，存在一棵极良覆盖树 T，使得 $\alpha(T) = \alpha$，且其独立多项式是对数凹的。基于此，他们猜想每个森林的独立多项式都是对数凹的。后来，Yosef、Mizrachi 和 Kadrawi [24] 验证了该猜想对顶点数不超过 20 的情形成立，Radcliffe（见 [3]）则验证了顶点数不超过 25 的情形。Kadrawi、Levit、Yosef 和 Mizrachi [13] 使用动态规划算法检查了所有顶点数不超过 26 的树，发现两棵阶为 26 的树的独立多项式不是对数凹的，具体为 T_3,4,4 和 T_3^*, 3,4。为方便起见，我们定义两族树 $T_{3,m,n}$和 $T^*_{3,m,n}$，其中 m, n 为非负整数。$T_{3,m,n}$ 和 $T^*_{3,m,n}$ 都以顶点 v_0 为根，且该根有三个子节点 v_1, v_2, v_3。在 $T_{3,m,n}$ 中， v_1 有三个子节点 v_{11}, v_{12}, v_{13}； v_2 有 m 个子节点$v_{21}, v_{22}, \ldots, v_{2m}$； v_3有 n 个子节点 $v_{31}, v_{32}, \ldots, v_{3n}$; 之后每个 v_{ij}都有一个子节点 v'_{ij}。示例见图 1.1。若将边 $v_{13}v'_{13}$ 替换为路径 P_4，我们

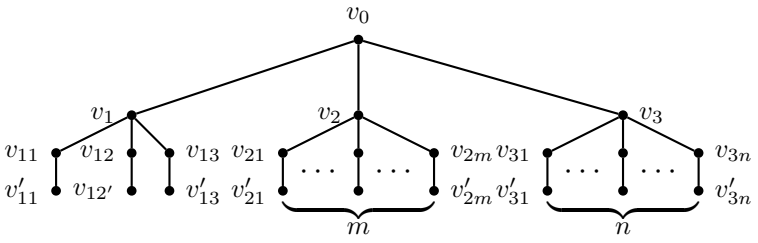


图 1.1：图 $T_{3,\ m,\ n}$。

标记为 v_{13}， v'_{13}， x， y，然后得到树$T^*_{3,\ m,\ n}$。示意见图1.2。

Kadrawi、Levit、Yosef 和 Mizrachi [13] 给出了以下结果。

定理 1.2. *[13]* 对于任意 $k \geq 3$，$T_{3、\ k+1、\ k+1}$ 以及 $T^*_{3、\ k、\ k+1}$ 的独立多项式均非对数凹。

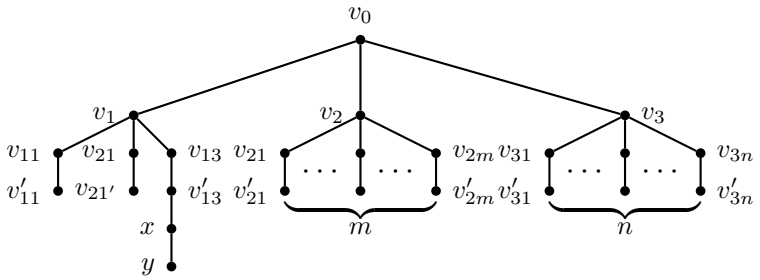


图 1.2：图 $T^*_{3、m、n}$。

Kadrawi 和 Levit [12] 还发现了更多类型的 $T_{3、m、n}$ 以及 $T^*_{3、m、n}$，它们的独立多项式均非对数凹。具体而言，他们证明了以下结果。

定理 1.3 （[12]）。对于任意的 $k \geq 4$、$T_{3、k、k+1}$、$T_{3、k、k+2}$、$T^*_{3、k-1、k+1}$、$T^*_{3、k、k+3}$ 以及 $T^*_{3、k、k}$，它们的独立多项式均非对数凹。

此外，Ramos 和 Sun [19] 利用人工智能找到了更多反例，而 Galvin [9]和 Bautista-Ramos [5] 研究了树的独立多项式系数可能无法保持对数凹性的具体位置（称为断点）。

本文的主要结果是证明 $T_{3、m、n}$ 和 $T^*_{3、m、n}$具有单峰性，从而进一步为猜想 1.1提供支持。具体而言，我们证明以下定理。

定理 1.4。对于任意的 m、$n \geq 1$，$T_{3、m、n}$ 的独立多项式均为单峰。

定理 1.5. 对于任意的 $m, n \geq 1$，$T^*_{3、m、n}$ 的独立多项式是单峰的。

定理1.4 和定理1.5 的证明依赖于色对称函数理论。最近，Li、Yang、Zhang 与作者 [16] 建立了 $I_G(t)$的对数凹性与s-正性之间的联系 Y_G （详细定义见第2节）。利用这一联系，他们证明了任意蜘蛛图的独立多项式都是单峰的。

本文结构安排如下。第2节回顾与色对称函数相关的一些必要结果。第3节介绍本文中将频繁用到的记号与性质。定理1.4 的证明将在第4节给出，定理1.5的证明则见第5节。

2 预备知识

本节首先回顾对称函数的一些基本定义，然后介绍与色对称函数相关的基本概念。

本节首先回顾对称函数的一些基本定义，然后介绍与色对称函数相关的基本概念。对称函数代数 $\Lambda_{\mathbb{Q}}(\mathbf{x})$ 被定义为由满足以下条件的有界次数形式幂级数 $f(\mathbf{x})$ 构成的 $\mathbb{Q}[[\mathbf{x}]]$ 的子代数：

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \ldots) = f(x_{\omega(1)}, x_{\omega(2)}, \ldots)$$

对于每个正整数的置换 ω。

$\Lambda_{\mathbb{Q}}(\mathbf{x})$ 的基自然地由（整数）划分索引。n 的划分 是一个序列 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell)$，满足

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_\ell > 0 \quad \text{and} \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_\ell = n.$$

数 $\ell = \ell(\lambda)$ 称为 λ 的长度。将 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell)$ 视为无限序列 $(\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell, 0, 0, \ldots)$ 后，可通过对偶雅可比-特鲁迪恒等式定义舒尔函数 $s_\lambda(\mathbf{x})$

$$s_{\lambda'}(\mathbf{x}) = \det(e_{\lambda_i - i + j}(\mathbf{x}))_{1 \leq i,j \leq \ell},$$

其中，$e_\lambda(\mathbf{x})$ 表示初等对称函数，λ' 是 λ 的共轭分拆，更多详情参见 [21]。众所周知，$\{s_\lambda(\mathbf{x})\}$ 是 $\Lambda_{\mathbb{Q}}(\mathbf{x})$ 的一组基。若对称函数 $f(\mathbf{x})$ 可表示为舒尔函数的非负线性组合，则称其为舒尔正的，或简称为 s-正。与通常做法一样，我们用 $[s_\lambda] f(\mathbf{x})$ 表示将 $f(\mathbf{x})$ 按 $\{s_\lambda(\mathbf{x})\}$ 展开时 $s_\lambda(\mathbf{x})$ 的系数。

接下来我们介绍多重着色和族图的概念。设 G 是一个顶点集为 $V(G)$ 的图。给定映射 $\alpha: V(G) \to \mathbb{N}$，类型为多重着色 α 是一个映射$\kappa: V(G) \to 2^{\mathbb{N}_+}$，满足 $|\kappa(v)| = \alpha(v)$，其中 $2^{\mathbb{N}_+}$ 表示所有正整数有限子集构成的集合。如果对所有 $uv \in E(G)$，$\kappa(u) \cap \kappa(v) = \emptyset$，则称多重着色为正常。Stanley [20] 定义了

$$X_G^\alpha = \sum x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots,$$

其中求和遍历所有类型为 α 的正常多重着色 κ，而 a_i 是满足 $i \in \kappa(v)$ 的顶点 v 的数量。在特殊情形下，如果对所有 $v \in V(G)$ 都有 $\alpha(v) = 1$，则 X_G^α 化简为 X_G，即 Stanley 于 [22] 引入的 G 的色对称函数。

如上所述，α 族图 G^α 由 G 通过将每个顶点 v替换为一个完全图 $K_{\alpha(v)}$得到，同时保留邻接关系：当 $K_{\alpha(u)}$ 与 $K_{\alpha(v)}$ 相邻时，$uv \in E(G$中的每个顶点都与中的每个顶点相邻；示例见图2.1。Stanley [20] 指出

$$X_{G^\alpha} = X_G^\alpha \prod_{v \in V(G)} \alpha(v)!, \tag{2.1}$$

并且我们我们将 X_G^{α} 称为 $X_{G^{\alpha}}$的规范化色对称函数。

设 $P(t)$ 是一个实系数多项式，满足 $P(0) = 1$，即

$$P(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_d t^d.$$

Stanley [20] 定义了一个非齐次对称函数

$$F_P(\mathbf{x}) = \prod_{i \geq 1} P(x_i)$$

并建立了 $P(t)$ 的实根性与 $F_P(\mathbf{x})$ 的正性之间的关系。

定理2.1 ([20, 定理2.11]). 设 $P(t)$ 和 $F_P(\mathbf{x})$ 如上定义。那么以下条件等价:

- $F_P(\mathbf{x})$ 中 $s_\lambda(\mathbf{x})$ 的系数对每个整数分拆 λ 均非负。
- $e_\lambda(\mathbf{x})$ 在 $F_P(\mathbf{x})$ 中的系数对每个整数分拆 λ 都是非负的。
- $P(t)$ 的所有零点都是负实数。

最近，李、Yang、Zhang 和作者 [16] 得到了定理 2.1的一个类似结果，现回顾如下。

定理 2.2 ([16])。设 $P(t)$ 和 $F_P(\mathbf{x})$ 按上述方式定义，且 a_0、.....、a_d 均为正数。则以下条件等价:

(i) s_λ 在 $F_P(\mathbf{x})$ 中的系数对于长度至多为 2 的任意划分 λ 均为非负。

(ii) $s_{(k,k)}$ 在 $F_P(\mathbf{x})$ 中的系数对于任意 $k \geq 1$ 均为非负。

(iii) $P(t)$ 是对数凹的。

(iv) $P(t)$ 是强对数凹的。

事实上，以下结果已隐含在定理 2.2 的证明中。为清晰起见，我们在此明确陈述。

引理 2.3. 设 $P(t)$ 与 $F_P(\mathbf{x})$ 如上定义，且 $a_0, \ldots, a_d$ 为正。我们有

$$[s_{(k,k)}]F_P(\mathbf{x}) = a_k^2 - a_{k-1}a_{k+1}. \tag{2.2}$$

证明. 假设 $P(t) = \prod_{j=1}^{d}(1+\theta_j t)$，其中 $0 \neq \theta_j \in \mathbb{C}$。令 $\mathbf{y} = \{y_1, y_2, \ldots\}$ 与 $\theta = \{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_d\}$。由柯西恒等式

$$\prod_{i,j}(1+y_j x_i) = \sum_{\lambda} s_{\lambda'}(\mathbf{y}) s_{\lambda}(\mathbf{x})$$

我们有

$$F_P(\mathbf{x}) = \sum_{\lambda} s_{\lambda'}(\theta) s_{\lambda}(\mathbf{x}), \tag{2.3}$$

其中 $s_{\lambda'}(\theta)$ 表示将 $s_{\lambda'}(\mathbf{y})$ 通过令 $y_1 = \theta_1$，……，$y_d = \theta_d$ 以及$y_l = 0$ 而得到的特殊化，其中 $l \geq d+1$。注意，系数 $a_i = [t^i]P(t)$ 等于 $e_i(\theta)$。由（2.3），可得

$$[s_{(k,k)}]F_P(\mathbf{x}) = s_{(k,k)'}(\theta) = \begin{vmatrix} e_k(\theta) & e_{k+1}(\theta) \\ e_{k-1}(\theta) & e_k(\theta) \end{vmatrix} = a_k^2 - a_{k-1}a_{k+1}.$$

□

我们采用 2-Schur正性这一概念，该概念最早由 Li、Yang、Zhang 和作者 [16]引入。回顾一下，若一个对称函数 f 满足：对于所有满足 $\ell(\lambda) \leq 2$的 λ，都有 $[s_\lambda]f \geq 0$，则称其为 *2-Schur*正的 （或简称为 *2- s*-正的）。为方便起见，我们记作$f \geq_{2s} 0$，表示 f 是 2-s-正的。此外，我们将这些记号扩展到差：若 $f - g = 2s0$，则记作 $f = 2sg$；若 $f - g \geq_{2s} 0$，则记作 $f \geq_{2s} g$。另外，若 $f - g =_{2s} 0$，我们也记作 $f =_{2s} g$；若 $f - g \geq_{2s} 0$，我们也记作 $f \geq_{2s} g$。此外，$f <_{2s} g$ 表示 $g \geq_{2s} f$ 和 $f \neq_{2s} g$。

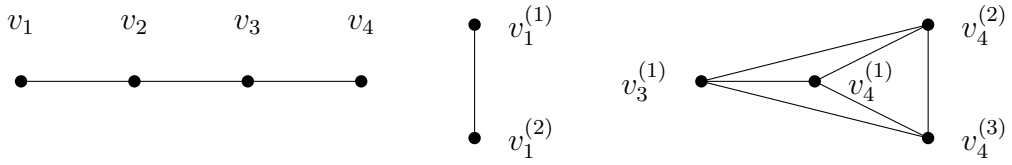


图 2.1：路径 P_4 与族图 $P_4^{(2,0,1,3)}$

Stanley [20, 推论 2.12]直接给出了如下恒等式

$$\sum_{\alpha: V \to \mathbb{N}} X_G^{\alpha} = \prod_i I_G(x_i).$$

定义$Y_G = \sum_{\alpha:\ V\to\mathbb{N}} X_G^{\alpha}$，则定理2.2 蕴含如下结果

推论 2.4 ([16])。 设 G 为一个图。则下列条件等价：

- $[s_\lambda]Y_G \geq 0$ 对于所有满足 $\ell(\lambda) \leq 2$ 的分拆。

- $[s_{(k,k)}]Y_G \geq 0$ 对于所有 $k \geq 1$。
- 独立多项式 $I_G(t)$ 是对数凹的。
- 独立多项式 $I_G(t)$ 是强对数凹的。

此外，引理 2.3 推出以下结果，它在定理 1.4和定理 1.5的证明中起着关键作用。

推论 2.5。设 G为一个图，且 $I_G(t) = \sum_{j=0}^{\alpha(G)} i_j t^j$。那么，对于任意 $1 \leq k \leq \alpha(G) - 1$，以下两个条件等价：

- $[s_{(k,\ k)}]Y_G \geq_{2s} 0$;
- $i_k^2 \geq i_{k-1} i_{k+1}$。

我们还需要以下两个结果，它们陈述于 [16] 中。

命题 2.6 ([16]). 设 G 是一个满足 $|V(G)| = n$的图。设 (k,l) 是 n的一个划分，且满足 $k \geq l \geq 1$；令 $\tilde{a}_{(k,l)}$ 表示 G 中类型为 (k,l)的半有序稳定划分的数量。那么

$$[s_{(k,l)}]X_G = \tilde{a}_{(k,l)} - \tilde{a}_{(k+1,l-1)},\ [s_{(n)}]X_G = \tilde{a}_{(n)} = \begin{cases} 1, & \text{if } G \text{ consists of } n \text{ isolated vertices;} \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

推论 2.7 ([16]). 对于连通二分图 G，X_G 是 *2-s*-正的，当且仅当其唯一的二分划分是平衡的，即其类型为 (k,l) 且满足 $l \leq k \leq l+1$。等价地，X_G 不是 *2-s*-正的，当且仅当其二分划分的类型为 (k,l) 且满足 $k \geq l+2$。此外，对于所有非二分图 G，$X_G =_{2s} 0$ 。

显然，推论 2.7可推出以下结果。

推论 2.8. 设 G 为一个图，并设 α 为从 $V(G)$ 到 $\mathbb{N}$的映射。若存在一条边 $uv \in E(G)$ 使得 $\alpha(u) + \alpha(v) \geq 3$，则 $X_G^{\alpha} =_{2s} 0$。

推论 2.8直接蕴含下述命题。

命题 2.9. 对任意图 G 及任意映射 $\alpha\colon V(G) \to \mathbb{N}$，若 T 是 G^{α} 的一个连通ˆ分量且 $X_G^{\alpha} \neq_{2s} 0$，则对任意 $v \in V(T)$，我们有 $\alpha(v) = 1$，除非$\alpha(v) = 2 = \#V(T)$。

最后，我们需要回顾 Levit 和 Mandrescu [15]提出的以下结果。他们证明，对于任意二分图，$I_G(t)$中最后三分之一的系数单调不增。

定理 2.10 ([15, 推论 3。3])。 对于一棵固定的树 T，令 t 表示 T中的最大稳定集的大小，令 c_k 表示 x^k 在T的独立多项式中的系数。那么

$$c_{\lceil (2t-1)/3 \rceil} \geq \cdots \geq c_{t-1} \geq c_t.$$

3 符号与性质

本节将介绍一些符号，并建立若干辅助性质，这些性质将在定理1.4和1.5的证明中频繁使用。我们先给出两个定义。

定义 3.1。给定一个图 G、 G的一个诱导子图 H 以及一个映射 α： $V(G) \to \mathbb{N}$，我们引入由 α导出的以下两个映射。

- 映射 $\alpha|^H$： $V(G) \to \mathbb{N}$ 定义如下：

$$\alpha\,|^H\,(v) = \begin{cases} \alpha(v), & if\ v \in V(H); \\ 0, & if\ v \notin V(H). \end{cases} \tag{3.1}$$

- α 在 $V(H)$ 上的限制记作 $\alpha|_H$： $V(H) \to \mathbb{N}$，其定义如下：

$$\alpha\,|_H\,(v) = \alpha(v)\ for\ any\ v \in V(H).$$

注 3.2。为方便起见，在本文余下部分中，我们用 H^α 表示$H^{\alpha|_H}$。类似地，我们用 X_H^α 表示 $X_H^{\alpha|_H}$ 。此外，根据定义， $G^{\alpha|^H}$ 和H^α 均与 G^α的一个诱导子图同构，因此我们将它们视为这样的子图。

回顾一下，Stanley [22, 命题 2.3] 指出 $X_{G+H} = X_G X_H$，其中 $G + H$ 是 G 和 H 的不交并。因此，下面的结果显而易见。

命题 3.3. 给定一个图 G 及其诱导子图 H。令 $G \setminus H$ 表示顶点集为 $V(G) \setminus V(H)$的诱导子图。对于任意映射 α: $V(G) \to \mathbb{N}$，如果 $G^{\alpha|^H}$ 和 $G^{\alpha|^{G\setminus H}}$之间没有边，则有

$$X_G^\alpha = X_H^\alpha X_{G\setminus H}^\alpha = X_G^{\alpha|^H} X_G^{\alpha|^{G\setminus H}}. \tag{3.2}$$

令 $S(2^n)$ 表示一个有 n 条长度为 2 的腿的蜘蛛图，如图 3.1 所示。现在定义 α 的两个特定映射族： $V(S(2^n)) \to \mathbb{N}$，分别记作 $x^t_{S,\ n}$ 和 $\mathcal{A}_k$。

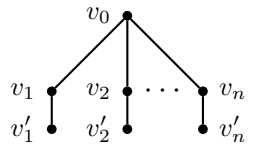


图 3.1：蜘蛛图 $S(2^n)$。

定义 3.4。 设 $S \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$，并令 t 为满足 $n \geq t \geq \max S$ 的整数。若映射 $\alpha\colon V(S(2^n)) \to \mathbb{N}$ 满足以下三个条件，则称其属于 $x^t_{S,\ n}$：

(1) $\alpha(v_0) = 0$;

(2) $\alpha(v_i) + \alpha(v_i') \leq 2$ 对于 $1 \leq i \leq n$;

(3) 定义

$$T = \{j\colon \alpha(v_j) \geq 1,\ \alpha(v_j') = 0\}. \tag{3.3}$$

那么 $\#T = t$。用 $T = \{k_1, k_2, \ldots, k_t\}$ 表示 $k_1 < k_2 < \cdots < k_t$。我们要求

$$\alpha(v_{k_i}) = \begin{cases} 2, & \text{if } i \in S; \\ 1, & \text{if } i \notin S. \end{cases}$$

定义 3.5。 对于 $0 \leq k \leq n$，令 $\mathcal{A}_k$ 表示映射集合 $\alpha\colon V(S(2^n)) \to \mathbb{N}$，它们满足以下条件：

(1) $\alpha(v_0) = 1$;

(2) 对每个 $1 \leq i \leq n$, $\alpha(v_i) \leq 1$ 和 $\alpha(v_i) + \alpha(v_i') \leq 2$;

(3) $\#\{j\colon \alpha(v_j) = 1, \quad \alpha(v_j') = 0\} = k$。

现在我们定义一个映射 $\phi_S\colon \mathcal{A}_k \to x^k_{S,n}$ 对任意 $S \subseteq \{1, 2, \ldots, k\}$，该映射将在本文余下部分频繁使用。

定义 3.6. 设 $\alpha\colon V(S(2^n)) \to \mathbb{N}$ 且 $\alpha \in \mathcal{A}_k$。定义

$$T' = \{j\colon \alpha(v_j) = 1,\ \alpha(v_j') = 0\}.$$

根据 $\mathcal{A}_k$ 的定义，我们看到 $\#T' = k$ 并记作 $T' = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$，其中 $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$。注意到 $S \subseteq \{1, 2, \ldots, k\}$，我们将 ψ_S（α）定义如下

$$\phi_S(\alpha)(v) = \begin{cases} 2, & \text{if } v = v_{i_j} \text{ and } j \in S; \\ 0, & \text{if } v = v_0; \\ \alpha(v), & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{3.4}$$

为简便起见，我们将 $\phi_j(\alpha)$记作 $\phi_{\{j\}}(\alpha)$。

下面的结果涉及 ϕ_S。

命题 3.7. 对于任意 $n \geq k \geq 0$ 和 $S \subseteq \{1, 2, \ldots, k\}$，$\phi_S$ 是 $\mathcal{A}_k$ 与 $x^k_{S,n}$ 之间的双射。

证明。对于任意 $\alpha \in \mathcal{A}_k$，我们首先证明 $\phi_S(\alpha) \in x^k_{S,\ n}$。根据定义，我们有

$$\#\{j \colon \alpha(v_j) = 1, \alpha(v'_j) = 0\} = k. \tag{3.5}$$

记 $\{j\colon\ \alpha(v_j) = 1,\ \alpha(v'_j) = 0\} = \{r_1, r_2, \ldots, r_k\}$ 其中 $1 \leq r_1 < r_2 < \cdots < r_k \leq n$。因此，根据的构造$(\alpha)$（3.4），我们有

$$\phi_S(\alpha)(v) = \begin{cases} 2, & \text{if } v = v_{r_i} \text{ and } i \in S; \\ 1, & \text{if } v = v_{r_i} \text{ and } i \notin S; \\ 0, & \text{if } v = v_0; \\ \alpha(v), & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{3.6}$$

注意，对于任意 $1 \leq h \leq n$ 和 $h \notin \{j\colon\ \alpha(v_j) \geq 1,\ \alpha(v'_j) = 0\}$，我们有$\alpha(v'_h) \neq 0$ 或 $\alpha(v_h) = 0$。由于 $\phi_S(\alpha)(v_h) = \alpha(v_h)$ 且 $\phi_S(\alpha)(v'_h) = \alpha(v'_h)$，因此我们有$\phi_S(\alpha)(v'_h) \neq 0$ 或 $\phi_S(\alpha)(v_h) = 0$。这意味着，对于 $\phi_S(\alpha)$，集合 T （定义见 (3.3)）为 $\{r_1, r_2, \ldots, r_k\}$。经例行验证可知，$\phi_S(\alpha) \in x^k_{S,\ n}$。

为证明 ϕ_S 是双射，我们构造其逆映射。对于任意$\beta \in x^k_{S,\ n}$，按如下方式定义 ϕ_S^{-1}。令 T为(3.3)中针对 β定义的集合，并记 $T = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$，其中$k \geq \max S$。根据$x^k_S$ 的定义，可知对于 $i \in S$，$\beta(v_{a_i}) = 2$；对于$i \notin S$，$\beta(v_{a_i}) = 1$；对于 $1 \leq i \leq k$，$\beta(v'_{a_i}) = 0$。此外，根据 T的定义，若 $j \notin T$，则要么 $\beta(v_j) = 0$，要么 $\beta(v_j) = \beta(v'_j) = 1$。定义

$$\phi_S^{-1}(\beta)(v) = \begin{cases} 1, & \text{if } v = v_i \text{ and } \beta(v_i) = 2 \text{ or } v = v_0; \\ \beta(v), & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{3.7}$$

显然，对于所有 $1 \leq i \leq n$，$\phi_S^{-1}(\beta)(v_0) = 1$ 且 $\phi_S^{-1}(\beta)(v_i) \leq 1$。此外，由于 $\phi_S^{-1}(\beta)(v_i) \leq \beta(v_i)$ 且 $\beta(v_i) + \beta(v'_i) \leq 2$，我们得到 $\phi_S^{-1}(\beta)(v_i) + \phi_S^{-1}(\beta)(v'_i) \leq 2$。进一步，对于任意 $1 \leq i \leq k$，$\phi_S^{-1}(\beta)(v_{a_i}) = 1$ 且 $\phi_S^{-1}(\beta)(v'_{a_i}) = 0$；对于任意 $j \notin T$，要么 $\phi_S^{-1}(\beta)(v_j) = 0$，要么 $\phi_S^{-1}(\beta)(v_j) = \phi_S^{-1}(\beta)(v'_j) = 1$。因此

$$\{j \colon \phi_S^{-1}(\beta)(v_j) = 1, \phi_S^{-1}(\beta)(v'_j) = 0\} = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}.$$

因此 $\phi_S^{-1}(\beta) \in \mathcal{A}_k$。显然，$\phi_S(\phi_S^{-1}(\beta)) = \beta$ 且 $\phi_S^{-1}(\phi_S(\alpha)) = \alpha$。由此可得，$\phi_S$是一个双射。 □

注 3.8。 请注意，在 ϕ_S^{-1} (3.7) 的构造中，并不涉及 S 或 k。因此我们可以写作 ϕ^{-1} 而不是 ϕ_S^{-1} ，这将在本文余下部分中频繁使用。

下面的推论是命题 3.7 的直接推论。

推论 3.9。 对于任意 $S_1, S_2 \subseteq 1, 2, \ldots, n$ 以及任意映射 $\alpha_1, \alpha_2 \colon V(S(2^n)) \to \mathbb{N}$，若$\phi_{S_1}(\alpha_1) = \phi_{S_2}(\alpha_2)$ 则 $\alpha_1 = \alpha_2$ 且 $S_1 = S_2$。

证明。 由于 $\phi_{S_1}(\alpha_1) = \phi_{S_2}(\alpha_2)$，我们有

$$\alpha_1 = \phi^{-1}(\phi_{S_1}(\alpha_1)) = \phi^{-1}(\phi_{S_2}(\alpha_2)) = \alpha_2.$$

此外，根据 ϕ_{S_1} 和 ϕ_{S_2}的构造，容易看出，只要 $S_1 \neq S_2$，就有 $\phi_{S_1}(\alpha) \neq \phi_{S_2}(\alpha)$。因此 $S_1 = S_2$。 □

接下来引入另一个定义 $X^t_{S,\,n}$，它与 $x^t_{S,\,n}$ 密切相关，并且将在定理 1.4 和定理 1.5 的证明中频繁使用。

定义 3.10. 设

$$X^t_{S,n} = \{S(2^n)^\alpha \colon \alpha \in x^t_{S,n}\}, \quad X_{S,n} = \bigcup_{t=\max S}^{n} X^t_{S,n}.$$

我们还将$X_{\{j\},n}$ 简记为$X_{j,n}$。此外，我们令

$$X_{0,n} = \{S(2^n)^\alpha \colon S(2^n)^\alpha \ \textit{is 2-s-positive}\} \setminus \bigcup_{j=1}^{n} X_{j,n}. \tag{3.8}$$

下述推论可由推论 3.9 推出，并将用于集合 α 的分类： $V(T_{3,m,n}) \to \mathbb{N}$。

推论 3.11. 对任意 S_1、 $S_2 \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$，若 $S_1 \neq S_2$，则 $X_{S_1,n} \cap X_{S_2,n} = \emptyset$。

证明。 反设，若存在 β 使得 $S(2^n)^\beta \in X_{S_1,n} \cap X_{S_2,n}$，则由定义，存在 t_1, t_2 使得 $\beta \in x^{t_1}_{S_1,n}$ 且 $\beta \in x^{t_2}_{S_2,n}$。由命题 3.7，存在 $\alpha_1 \in \mathcal{A}_{t_1}$ 与 $\alpha_2 \in \mathcal{A}_{t_2}$ 使得

$$\phi_{S_1}(\alpha_1) = \beta = \phi_{S_2}(\alpha_2).$$

由推论 3.9 可得 $S_1 = S_2$，矛盾。因此 $X_{S_1,\,n} \cap X_{S_2,\,n} = \emptyset$。 □

令 $S(1^k,\ 2^r)$ 为具有 k 条长度为 1 的腿和 r 条长度为 2 的腿的蜘蛛图。该图的标记如图 3.2 所示。关于 $X^{\phi_j(\alpha)}\,S\,(2^n)$ ，我们有如下结果。

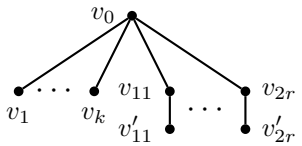


图 3.2：蜘蛛图 $S(1^k,\ 2^r)$。

命题 3.12。设 α：$V(S(2^n)) \to \mathbb{N}$ 满足 $\alpha(v_0) = 1$ 且 $S(2^n)^\alpha \cong S(1^k,\ 2^r)$，其中 $k \geq 3$ 为某个值。则有

$$X^\alpha_{S(2^n)} = X_{S(1^k,2^r)} =_{2s} s_{(r+k,r+1)} - s_{(r+k-1,r+2)}. \tag{3.9}$$

此外，对于任意 $1 \leq j \leq k$,

$$X^{\phi_j(\alpha)}_{S(2^n)} \geq_{2s} s_{(r+k,r+1)} + s_{(r+k-1,r+2)}. \tag{3.10}$$

证明。由于 $S(1^k,\ 2^r)$ 不含 3-团，因此对于每条边 $uv \in E(S(2^n))$，都有 $\alpha(u) + \alpha(v) \leq 2$。此外，由于 $S(2^n)^\alpha \cong S(1^k,\ 2^r)$ 是连通的，我们推知对于所有 $v \in V(S(2^n))$，都有 $\alpha(v) \in \{0, 1\}$，并且由 $\{v \in V(S(2^n)) : \alpha(v) = 1\}$ 诱导的 $S(2^n)$ 的子图同构于 $S(1^k,\ 2^r)$。因此

$$X^\alpha_{S(2^n)} = X_{S(2^n)^\alpha} = X_{S(1^k,2^r)}. \tag{3.11}$$

显然，$S(1^k,\ 2^r)$ 的二分划分为 $(r + k,\ r + 1)$。因此，由命题 2.6 可得

$$X^\alpha_{S(2^n)} = s_{(r+k,r+1)} - s_{(r+k-1,r+2)}. \tag{3.12}$$

另一方面，根据 $\phi_j(\alpha)$ 的构造，图 $S(2^n)^{\phi_j(\alpha)}$ 由 $r+1$ 个 K_2 和 $k-1$ 个孤立顶点组成。因此，根据 Littlewood–Richardson法则,

$$X_{S(2^n)^{\phi_j(\alpha)}} = (2s_{(1,1)})^{r+1} s_1^{k-1} =_{2s} \sum_{a=1}^{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor} 2^{r+1} f^{(k-a,a-1)} s_{(r+1+k-a,r+1+a-1)}, \tag{3.13}$$

其中 $f^{(k-a,a-1)}$ 表示形状为 $(k-a, a-1)$ 的标准杨表的数量。显然，对于每个 a，$\frac{k+1}{2} \geq 2$ 且 $f^{(\underline{k-a},a-1)} \geq 1$，因此

$$X_{S(2^n)^{\phi_j(\alpha)}} \geq_{2s} 2^{r+1} s_{(r+k,r+1)} + 2^{r+1} s_{(r+k-1,r+2)}. \tag{3.14}$$

结合（2.1），我们得到

$$X^{\phi_j(\alpha)}_{S(2^n)} = \frac{1}{2} X_{S(2^n)^{\phi_j(\alpha)}} \geq_{2s} 2^r s_{(r+k,r+1)} + 2^r s_{(r+k-1,r+2)} \geq_{2s} s_{(r+k,r+1)} + s_{(r+k-1,r+2)}. \tag{3.15}$$

□

给定一个图 G 和一个映射 $\alpha\colon\ V(G) \to \mathbb{N}$，设 T 是 G^α 的一个连通分支。ˆ 现在我们通过以下命题定义 G 的两个子图，分别记为 $\overline{T}$ 和 T。

命题 *3.13.* 对任意图 G 和任意映射 $\alpha\colon V(G) \to \mathbb{N}$，设 T 是 G^α 的一个连通分支。那么对于任意 $v \in V(G)$，要么 $V(v^\alpha) \cap V(T) = \emptyset$，要么 $V(v^\alpha) \subseteq V(T)$，其中 v^α 如注 *3.2* 所述。

证明。 反设存在 v_1，$v_2 \in V(v^\alpha)$，满足 $v_1 \in V(T)$ 且 $v_2 \notin V(T)$。由 G^α 的定义可知，$v_1v_2 \in E(G^\alpha)$，这与 T 是 G^α 的一个连通分支相矛盾。

□

命题 3.13 使我们能够给出以下定义。

定义 *3.14.* 对任意图 G 和 $\alpha\colon V(G) \to \mathbb{N}$，设 T 是 G^α 的一个连通分支ˆ。若 $V' = \{v \in V(G)\colon V(v^\alpha) \subseteq V(T)\ \alpha(v) > 0\}$，则令 T 表示诱导子图ˆ $G[V']$。此外，令 T 表示由 $V(G) \setminus V(T)$ 诱导的 G 的子图。

利用命题 3.3，我们得到以下结果。

命题 3.15。 对于任意图 G，$\alpha\colon\ V(G) \to \mathbb{N}$ 和 $\beta\colon\ V(G) \to \mathbb{N}$，设 T 是一个ˆ连通分支 G^α，并设 T 和 T 如定义 *3.14* 所述。那么

$$X_G^\alpha = X_{\hat{T}}^\alpha X_{\overline{T}}^\alpha. \tag{3.16}$$

此外，如果 $\beta(v) = \alpha(v)$ 对于任意 $v \in V(T)$ 都成立，那么

$$X_G^\beta = X_{\hat{T}}^\beta X_{\overline{T}}^\alpha. \tag{3.17}$$

证明。由于 T 是 G^α 的连通分支，命题 3.3 推出 (3.16)。此外，由于对于所有 $v \in V(T)$，$\beta(v) = \alpha(v)$，且 T 是 G^α 的连通分支，因此，如果 $u \in V(T)$、$v \in V(T)$ 和 $uv \in E(G)$，则有ˆ $\alpha(\overline{u}) = 0 = \beta(u)$。因此，ˆ$T^\beta$ 与 T^β 之间没有边，由命题 3.3 可得 (3.17)。

□

接下来我们研究 s 的 2-正性 $X^\alpha_{S(2^n)} + X^{\phi_j(\alpha)}_{S(2^n)}$，这对定理的证明至关重要 1.4 和 1.5。

命题 3.16。 固定 $\alpha\colon\ V(S(2^n)) \to \mathbb{N}$。若 $S(2^n)^\alpha$ 不是 *2-s-*正的，则存在某个 $\alpha \in \mathcal{A}_k$，其中 $k \geq 3$，这里的 $\mathcal{A}_k$ 与命题 *3.7* 中的相同。此外，对任意 $1 \leq j \leq k$，均有

$$X^\alpha_{S(2^n)} + X^{\phi_j(\alpha)}_{S(2^n)} \geq_{2s} 0. \tag{3.18}$$

证明。令 T_0 为包含 v_0^α 的连通分支。由推论 2.8 可知，$S(2^n)^\alpha$ 中除 T_0 以外的每个连通分支要么是孤立顶点，要么是路径。这说明 T_0 必定是非 2-s-正的。因此，由命题 2.9 可得 $\alpha(v_0) = 1$。此外，推论 2.8 蕴含 $\alpha(v_j) \leq 1$ 以及 $\alpha(v_j) + \alpha(v_j') \leq 2$ 对所有j均成立。因此，T_0 是一个蜘蛛图 $S(1^k, 2^r)$，这意味着

$$\#\{i \colon \alpha(v_i) = 1, \alpha(v_i') = 0\} = k.$$

由此可得 $\alpha \in \mathcal{A}_k$。此外，我们看到 T_0 的二分划分为 $(r+k, r+1)$。由推论 2.7，我们看到 $(r+k, r+1)$ 是不平衡的，因此 $k \geq 3$。

设 $\hat{T}_0$ 和 $\overline{T_0}$ 如定义 3.14 中所定义。假设 $T_0 \cong S(1^k, 2^r)$，则 $X_{T_0} =_{2s} s_{(r+k,r+1)} - s_{(r+k-1,r+2)}$。由命题 3.15，我们看到

$$X^\alpha_{S(2^n)} =_{2s} (s_{(k+r,r+1)} - s_{(k+r-1,r+2)}) X^\alpha_{\overline{T_0}}. \tag{3.19}$$

另一方面，我们计算 $X^{\phi_j(\alpha)}_{S(2^n)}$。显然，

$$\{v_j \colon \alpha(v_j) = 1, \alpha(v_j') = 0\} \subseteq V(\hat{T}_0). \tag{3.20}$$

由 ϕ_j 的构造可知 $\alpha(v) = \phi_j(\alpha)(v)$ 对任意 $v \in V(T_0)$ 均成立。因此，由命题 3.15，

$$X^{\phi_j(\alpha)}_{S(2^n)} = X^{\phi_j(\alpha)}_{\hat{T}_0} X^\alpha_{\overline{T_0}}. \tag{3.21}$$

此外，根据 ϕ_j (3.4) 和 (3.20) 的构造，可以验证

$$\phi_j(\alpha\,|^{\hat{T}_0}) = \phi_j(\alpha)\,|^{\hat{T}_0}.$$

因此

$$X^{\phi_j(\alpha)}_{\hat{T}_0} = X^{\phi_j(\alpha)|^{\hat{T}_0}}_{S(2^n)} = X^{\phi_j(\alpha|^{\hat{T}_0})}_{S(2^n)}. \tag{3.22}$$

注意到 $\hat{T}_0^\alpha = T_0 \cong S(1^k, 2^r)$。结合 (3.19)、(3.21)、(3.22) 以及命题 3.12，我们推得

$$\begin{aligned} X^\alpha_{S(2^n)} + X^{\phi_j(\alpha)}_{S(2^n)} &= (X^{\alpha|^{\hat{T}_0}}_{S(2^n)} + X^{\phi_j(\alpha|^{\hat{T}_0})}_{S(2^n)}) \cdot X^\alpha_{\overline{T_0}} \\ &\geq_{2s} 2s_{(r+k,r+1)} X^{\alpha|_{\overline{T_0}}}_{S(2^n)} \geq_{2s} 0. \end{aligned}$$

其中，最后一个不等式是由以下事实得出的：$S(2^n)^\alpha$ 中除 T_0 以外的每个连通分支都是 2-s-正的。 □

我们还需要以下关于 s-正性的结果：$S(1,\ 2^n)$，它与命题 3.16类似。

命题 *3.17*。 $k=1$ 和 $r=n$对应的 $S(1,2^n)$ 的标记如图 *3.2* 所示。令 T 为 $S(1,2^n)$ 中由 $V(S(1,2^n)) \setminus \{v_1\}$ 诱导的子图；注意到 $T \cong S(2^n)$。设 $\alpha: V(S(1,2^n)) \to \mathbb{N}$ 满足：对某个 $k \geq 2$，有 $\alpha|_T \in \mathcal{A}_k$。对任意 $1 \leq j \leq k$，我们定义 $\beta: V(S(1,2^n)) \to \mathbb{N}$ 如下：

$$\beta(v) = \begin{cases} \phi_j(\alpha|_T)(v), & \text{if } v \in V(T); \\ \alpha(v_1), & \text{if } v = v_1. \end{cases} \tag{3.23}$$

于是我们有 $X^{\alpha}_{S(1,2^n)} + X^{\beta}_{S(1,2^n)} \geq_{2s} 0$。

证明。若 $\alpha(v_1) = 0$，则显然$X^{\alpha}_{S(1,2^n)} = X^{\alpha}_T$ 且$X^{\beta}_{S(1,2^n)} = X^{\beta}_T$，所需结论由命题 3.16得出。

现在假设 $\alpha(v_1) \geq 1$。由 $\alpha|_T \in \mathcal{A}_k$ 可知，$\alpha(v_0) = 1$。若 $\alpha(v_1) \geq 2$，则显然 $S(1, 2^n)^{\alpha}$ 是非二分的。由推论 2.7 可得 $X^{\alpha}_{S(1,2^n)} =_{2s} 0$。此外，根据 β 的构造，我们有 $X^{\beta}_{S(1,2^n)} \geq_{2s} 0$，由此得到所需结论。

接下来考虑 $\alpha(v_1) = 1$的情形。令 T_0 为 $S(1, 2^n)^{\alpha}$ 中包含 v_0^{α}的连通分支，并令 T_0 和T_0如定义3.14所述。另一方面，由于 $\alpha|_T \in \mathcal{A}_k$，我们可知存在某个 $T_0 \cong S(1^{k+1}, 2^r)$，使得 $r \geq 0$。因此$X^{\alpha}_{\hat{T}_0} = X_{T_0} = s_{(r+k+1,r+1)} - s_{(r+k,r+2)}$。利用命题3.15，我们得到

$$X^{\alpha}_{S(1,2^n)} =_{2s} (s_{(r+k+1,r+1)} - s_{(r+k,r+2)}) X^{\alpha}_{\overline{T_0}}. \tag{3.24}$$

另一方面，令 T_0' 为从 T_0 中移除 v_1 后得到的子图。根据 β 的构造，我们有

$$X^{\beta}_{\hat{T}_0} = s_1 \cdot X^{\beta}_{T_0'}. \tag{3.25}$$

由于 $T_0^{\alpha} = T_0 \cong S(1^{k+1}, 2^r)$，我们有 $T_0'^{\alpha} \cong S(1^k, 2^r)$。由于 $\beta|_{T_0'} = \phi_j(\alpha|_{T_0'})$,(3.10)可得

$$X^{\beta}_{T_0'} \geq_{2s} s_{(k+r,r+1)} + s_{(k+r-1,r+2)}. \tag{3.26}$$

结合（3.25）和（3.26）可得

$$X^{\beta}_{\hat{T}_0} \geq_{2s} s_1(s_{(k+r,r+1)} + s_{(k+r-1,r+2)}) \geq_{2s} s_{(r+k+1,r+1)} + s_{(r+k,r+2)}. \tag{3.27}$$

由命题 3.15，我们推得

$$X^{\beta}_{S(1,2^n)} \geq_{2s} (s_{(r+k+1,r+1)} + s_{(r+k,r+2)}) X^{\alpha}_{\overline{T_0}}. \tag{3.28}$$

结合（3.24）和（3.28），可得

$$X^{\alpha}_{S(1,2^n)} + X^{\beta}_{S(1,2^n)} \geq_{2s} 2s_{(r+k+1,r+1)} X^{\alpha}_{\overline{T_0}} \geq_{2s} 0. \tag{3.29}$$

□

以下结果是命题3.16的推广，也将在第4节中使用。

命题 3.18. 设 F是一个森林，其连通分支为 $F_1, F_2, \ldots, F_n$，其中每个 $F_i \cong S(2^{n_i})$。设 $\alpha\colon V(F) \to \mathbb{N}$满足 $\alpha\mid_{F_i} \in \mathcal{A}_{k_i}$，其中某个 $k_i \geq 3$。对任意$1 \leq a_i \leq k_i$，定义 $\beta\colon V(F) \to \mathbb{N}$如下

$$\beta(v) = \phi_{a_i}(\alpha\mid_{F_i})(v), \quad \text{if } v \in V(F_i). \tag{3.30}$$

于是我们有 $X_F^{\alpha} + X_F^{\beta} \geq_{2s} 0$。

证明。与命题 3.16 的证明相同，对每个 F_i^{α}，令 T_i 为包含 v_i^{α} 的唯一连通分支^，其中 v_i 是 F_i的躯干，并按照定义 T_i 3.14 中的定义。^ 此外，令 T_i 表示由 F_i 诱导的子图，其顶点集为 $V(F_i) \setminus V(T_i)$。显然，$T_i \cong S(1^{k_i}, 2^{r_i})$ 对某个 $r_i \geq 0$成立。由命题 3.15，我们有

$$X_{F_i}^{\alpha} = X_{T_i} X_{\overline{T_i}}^{\alpha} =_{2s} (s_{(k_i+r_i,r_i+1)} - s_{(k_i+r_i-1,r_i+2)}) X_{\overline{T_i}}^{\alpha}. \tag{3.31}$$

另一方面，根据 β 的定义，我们看到 $\beta(v) = \alpha(v)$，对于任意 $v \in T_i$。再次由命题 3.15，我们推得

$$X_{F_i}^{\phi_{a_i}(\alpha|_{F_i})} = X_{\hat{T}_i}^{\phi_{a_i}(\alpha|_{F_i})} X_{\overline{T_i}}^{\alpha} = X_{F_i}^{\phi_{a_i}(\alpha|_{F_i})|^{\hat{T}_i}} X_{\overline{T_i}}^{\alpha}. \tag{3.32}$$

由（3.10）和 $F_i^{(\alpha|_{F_i}|^{T_i})} = \hat{T}_i^{\alpha} = T_i \cong S(1^{k_i}, 2^{r_i})$，我们看到

$$X_{F_i}^{\phi_{a_i}((\alpha|_{F_i})|^{\hat{T}_i})} \geq_{2s} s_{(k_i+r_i,r_i+1)} + s_{(k_i+r_i-1,r_i+2)}. \tag{3.33}$$

根据定义，容易验证 $\phi_{a_i}((\alpha\mid_{F_i})\mid^{T_i}) = \phi_{a_i}(\alpha\mid_{F_i})\mid^{T_i}$。因此结合（3.32）、（3.33），我们有

$$X_{F_i}^{\phi_{a_i}(\alpha|_{F_i})} \geq_{2s} (s_{(k_i+r_i,r_i+1)} + s_{(k_i+r_i-1,r_i+2)}) X_{\overline{T_i}}^{\alpha}. \tag{3.34}$$

由（3.2），我们有

$$X_F^{\alpha} + X_F^{\beta} = \prod_{i=1}^{n} X_{F_i}^{\alpha} + \prod_{i=1}^{n} X_{F_i}^{\phi_{a_i}(\alpha|_{F_i})}. \tag{3.35}$$

由（3.31）和（3.34），可得

$$\begin{aligned} X_F^{\alpha} + X_F^{\beta} &\geq_{2s} \prod_{i=1}^{n} (s_{(k_i+r_i,r_i+1)} - s_{(k_i+r_i-1,r_i+2)}) X_{\overline{T_i}}^{\alpha} + \prod_{i=1}^{n} (s_{(k_i+r_i,r_i+1)} + s_{(k_i+r_i-1,r_i+2)}) X_{\overline{T_i}}^{\alpha} \\ &= \left(\prod_{i=1}^{n} (s_{(k_i+r_i,r_i+1)} - s_{(k_i+r_i-1,r_i+2)}) + \prod_{i=1}^{n} (s_{(k_i+r_i,r_i+1)} + s_{(k_i+r_i-1,r_i+2)}) \right) \prod_{i=1}^{n} X_{\overline{T_i}}^{\alpha} \\ &\geq_{2s} 0. \end{aligned}$$

□

事实上，命题3.18可推广如下。

推论 3.19. 沿用命题 *3.18*中的记号，假设 $S_i \subseteq\{1,2,\ldots,k_i\}$ 对每个 i 都有 $\sum_{i=1}^{n}\#S_i = n$。定义 $\gamma:\ V(F)\to\mathbb{N}$ 为

$$\gamma(v)=\phi_{S_i}(\alpha)(v), \textit{if } v\in V(F_i). \tag{3.36}$$

换句话说，$\gamma\mid_{F_i}=\phi_{S_i}(\alpha\mid_{F_i})$。于是我们有 $X_F^{\alpha}+X_F^{\gamma}\geq_{2s}0$。

证明。容易看出 $X_F^{\gamma}=X_F^{\beta}$，因此所需结论由命题3.18得出。

□

我们以如下命题结束本节。

命题 3.20. 设 F 是一个森林，且 α 是从 $V(F)$ 到 $\mathbb{N}$的映射。假设X_{F^α} 是非 *2-s*-正的，且 T是 F^α 的唯一连通分支，使得 T是非 *2-s*-正的。如果 T的唯一二分划分为$(r+2,r)$，其中 $r\geq 1$ 为某个元素，那么 F^α 不含孤立顶点。

证明。由于 T的二分划分为（$r+2$，r），对某个 $r\geq 1$，命题2.6 可得

$$X_T =_{2s} s_{(r+2,r)}-s_{(r+1,r+1)}. \tag{3.37}$$

如果 F^α 包含一个孤立顶点 v，则 $X_v=s_1$，并且

$$X_vX_T =_{2s} s_1(s_{(r+2,r)}-s_{(r+1,r+1)}) =_{2s} s_{(r+3,r)} \tag{3.38}$$

它是2-*s*-正的。因此

$$X_{F^\alpha}=X_vX_T\prod_H X_H\geq_{2s}0,$$

其中乘积取遍 F^α 除 T 和 v之外的所有连通分支。这与 X_{F^α}不是2-*s*-正的假设相矛盾。因此 F^α不含孤立顶点。

□

4 独立多项式在$T_{3,m,n}$上的单峰性

本节中，我们给出定理 1.4 的一个证明。首先概述证明的主要思路。对于任意满足 $T_{3,m,n}^{\alpha}$ 非 2-*s*-正的 α，我们关联一个映射 $\psi(\alpha)$，使得

$X^{\alpha}_{T_{3,m,n}} + X^{\psi(\alpha)}_{T_{3\,m\,,,n}} \geq_{2s} 0$，但 $\alpha \in N_{30}$ 除外（N_{30} 的显式定义将在本节稍后给出）。接着我们证明，对于每个 $\alpha \in N_{30}$，$X^{\alpha}_{T_{3,m,n}}$ 中唯一非 2-s-正的项是 $-s_{(m+n+5,m+n+5)}$。因此，$Y_{T_{3,m,n}}$ 是 2-s-正的，但项 $s_{(m+n+5,m+n+5)}$ 除外。另一方面，显然，$T_{3,m,n}$ 的独立数为 $m+n+6$。因此我们可以写成

$$I_{T_{3,m,n}}(t) = i_0 + i_1 t + \cdots + i_{m+n+6} t^{m+n+6},$$

然后由推论 2.5 我们看到序列 $\{i_k\}_{k=0}^{m+n+5}$ 是对数凹的。结合定理 2.10，这意味着 $I_{T_{3,\ m,\ n}}(t)$ 是单峰的。

我们首先描述映射 ψ。为此，我们引入一些记号。我们用G_1（分别为 G_2、G_3）表示以 v_1（分别为 v_2、v_3）为躯干、具有 3（分别为m、n）条长度为 2 的腿的诱导蜘蛛图，示例见图 4.1。显然，$G_1 \cong S(2^3)$、$G_2 \cong S(2^m)$ 和 $G_3 \cong S(2^n)$。给定 $\alpha: V(T_{3,m,n}) \to \mathbb{N}$，令 $k_i = \#\{j: \alpha(v_{ij}) = 1、\alpha(v'_{ij}) = 0\}$。此外，我们用 A^+ 表示使得 X_T 为 2-s-正的树 T 的集合，并用 A^-表示使得 X_T 为非 2-s-正的树 T 的集合。

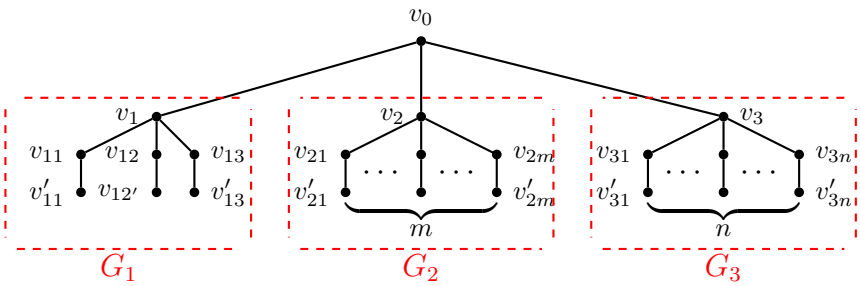


图 4.1：$T_{3,m,n}$

接下来，我们将集合 $N = \{\alpha: X^{\alpha}_{T_{3,m,n}} \text{ is non-2-}s\text{-positive}\}$ 划分为 30 个互不相交的子集。

(1) 令 N_1 表示满足 $\alpha(v_0) = 0$ 且 $G_1^{\alpha} \in A^-, G_2^{\alpha}, G_3^{\alpha} \in A^+$ 的 N 子集。

(2) 令 N_2 表示满足 $\alpha(v_0) = 0$ 且 $G_2^{\alpha} \in A^-, G_1^{\alpha}, G_3^{\alpha} \in A^+$ 和 $k_2 = 3$ 的 N 子集。

(3) 令 N_3 表示满足 $\alpha(v_0) = 0$ 且 $G_3^{\alpha} \in A^-, G_1^{\alpha}, G_2^{\alpha} \in A^+$ 和 $k_3 = 3$ 的 N 子集。

(4) 令 N_4 表示 N 的子集，使得 $\alpha(v_0) = 0$ 且 $G_2^{\alpha} \in A^-, G_1^{\alpha}, G_3^{\alpha} \in A^+$ 和 $k_2 \geq 4$。

(5) 令 N_5 表示 N 的子集，使得 $\alpha(v_0) = 0$ 且 $G_3^\alpha \in A^-, G_1^\alpha, G_2^\alpha \in A^+$ 和 $k_3 \geq 4$。(6) 令 N_6 表示 N 的子集，使得 $\alpha(v_0) = 0$ 且 $G_1^\alpha, G_2^\alpha \in A^-, G_3^\alpha \in A^+$。(7) 令 N_7 表示 N 的子集，使得 $\alpha(v_0) = 0$ 且 $G_1^\alpha, G_3^\alpha \in A^-, G_2^\alpha \in A^+$。(8) 令 N_8 表示 N 的子集，使得 $\alpha(v_0) = 0$ 且 $G_2^\alpha, G_3^\alpha \in A^-, G_1^\alpha \in A^+$。(9) 令 N_9 表示 N 的子集，使得 $\alpha(v_0) = 0$ 且 $G_1^\alpha, G_2^\alpha, G_3^\alpha \in A^-$。(10) 令 N_{10} 表示 N 的子集，使得 $\alpha(v_0) = \alpha(v_1) = 1, \alpha(v_2) = \alpha(v_3) = 0$ 和 $k_1 = 2$。(11) 令 N_{11} 表示 N 的子集，使得 $\alpha(v_0) = \alpha(v_1) = 1, \alpha(v_2) = \alpha(v_3) = 0$ 和 $k_1 = 3$。(12) 令 N_{12} 表示 N 的子集，使得 $\alpha(v_0) = \alpha(v_2) = 1, \alpha(v_1) = \alpha(v_3) = 0$ 和 $k_2 = 2$。(13) 令 N_{13} 表示 N 的子集，使得 $\alpha(v_0) = \alpha(v_2) = 1, \alpha(v_1) = \alpha(v_3) = 0$ 和 $k_2 \geq 3$。(14) 令 N_{14} 表示 N 的子集，使得 $\alpha(v_0) = \alpha(v_3) = 1, \alpha(v_1) = \alpha(v_2) = 0$ 和 $k_3 = 2$。(15) 令 N_{15} 表示 N 的子集，使得 $\alpha(v_0) = \alpha(v_3) = 1, \alpha(v_1) = \alpha(v_2) = 0$ 和 $k_3 \geq 3$。(16) 令 N_{16} 表示 N 的子集，使得 $\alpha(v_0) = \alpha(v_2) = \alpha(v_3) = 1, \alpha(v_1) = 0$。(17) 令 N_{17} 表示 N 的子集，使得 $\alpha(v_0) = \alpha(v_1) = \alpha(v_3) = 1, \alpha(v_2) = 0, G_2^\alpha \notin X_{1,m}$ 和 $k_3 \geq 1$。(18) 令 N_{18} 表示 N 的子集，使得 $\alpha(v_0) = \alpha(v_1) = \alpha(v_3) = 1, \alpha(v_2) = 0, G_2^\alpha \notin X_{1,m}$ 和 $k_3 = 0$。(19) 令 N_{19} 表示 N 的子集，使得 $\alpha(v_0) = \alpha(v_1) = \alpha(v_3) = 1, \alpha(v_2) = 0, G_2^\alpha \in X_{1,m}$ 和 $k_1 \geq 2$。(20) 令 N_{20} 表示 N 的子集，使得 $\alpha(v_0) = \alpha(v_1) = \alpha(v_3) = 1, \alpha(v_2) = 0, G_2^\alpha \in X_{1,m}$ 和 $k_1 \leq 1$。

(21) 令 N_{21} 表示 N 的子集，使得 $\alpha(v_0) = \alpha(v_1) = \alpha(v_2) = 1$, $\alpha(v_3) = 0$,$G_3^\alpha \notin X_1$, $_n$ 和 $k_2 \geq 2$。(22) 令 N_{22} 表示 N 的子集，使得 $\alpha(v_0) = \alpha(v_1) = \alpha(v_2) = 1$, $\alpha(v_3)$ $= 0$,$G_3^\alpha \notin X_{1,n}$, $k_2 \leq 1$ 和 $k_1 = 2$。(23) 令 N_{23} 表示 N 的子集，使得 $\alpha(v_0) = \alpha(v_1)$ $= \alpha(v_2) = 1$, $\alpha(v_3) = 0$,$G_3^\alpha \notin X_{1,n}$, $k_2 \leq 1$ 和 $k_1 = 3$。(24) 令 N_{24} 表示 N 的子集，使得 $\alpha(v_0) = \alpha(v_1) = \alpha(v_2) = 1$, $\alpha(v_3) = 0$,$G_3^\alpha \in X_{1,n}$ 和 $k_2 \geq 1$。(25) 令 N_{25} 表示 N 的子集，使得 $\alpha(v_0) = \alpha(v_1) = \alpha(v_2) = 1$, $\alpha(v_3) = 0$,$G_3^\alpha \in X_{1,n}$ 和 $k_2 = 0$。(26) 令 N_{26} 表示 N 的子集，使得 $\alpha(v_0) = \alpha(v_1) = \alpha(v_2) = \alpha(v_3) = 1$ 和 $k_1 + k_2 + k_3 \geq 4$，且以下三个条件至少有一个成立：(i) $k_1 = 3$；(ii) $k_2 \geq 2$；(iii) $k_3 \geq 2$。(27) 令 N_{27} 表示 N 的子集，使得 $\alpha(v_0) = \alpha(v_1) = \alpha(v_2) = \alpha(v_3) = 1$ 和 $k_1 = 2$, $k_2 = 1$, $k_3 = 1$。

(28) 令 N_{28} 表示 N 的子集，使得 $\alpha(v_0) = \alpha(v_1) = \alpha(v_2) = \alpha(v_3) = 1$, $k_1 + k_2 + k_3 = 0$，存在一个顶点 v_{ij}，满足 $\alpha(v_{ij}) = 1$，且 $\sum_{v \in V(T_{3,m,n})} \alpha(v) < 2m + 2n + 10$。

(29) 令 N_{29} 表示 N 的子集，使得 $\alpha(v_0) = \alpha(v_1) = \alpha(v_2) = \alpha(v_3) = 1$ 且$\alpha(v_{ij}) = 0$ 对所有 v_{ij}均成立。

(30) 令 N_{30} 表示 N 的子集，使得 $\alpha(v_0) = \alpha(v_1) = \alpha(v_2) = \alpha(v_3) = 1$, $k_1 + k_2 + k_3 = 0$，存在一个顶点 v_{ij}，满足 $\alpha(v_{ij}) = 1$，且 $\sum_{v \in V(T_{3,m,n})} \alpha(v) = 2m + 2n + 10$。

利用推论 2.7，可以验证 $\{N_1, N_2, \ldots, N_{30}\}$ 是 N的一个集合划分。接下来列出 $M = \{\alpha$ 的 29 个两两不相交子集： $T_{3,\ m,\ n}^\alpha$是 2-s-正$\}$. 为描述这些子集，我们令 Z 表示所有没有孤立顶点的 2-s-正森林构成的集合。我们还回顾一下，$X_{S,\ n}^t$ 是在定义 3.10 中定义的。

(1) 令 M_1 表示 M 的子集，该子集满足 $\alpha(v_0) = 0$, $G_1^\alpha \in X_{1,3}^3$, $G_2^\alpha, G_3^\alpha \in Z$。(2) 令 M_2 表示 M 的子集，该子集满足 $\alpha(v_0) = 0$, $G_1^\alpha, G_3^\alpha \in Z$ 和 $G_2^\alpha \in X_{1,m}^3$。(3) 令 M_3 表示 M 的子集，该子集满足 $\alpha(v_0) = 0$, $G_1^\alpha, G_2^\alpha \in Z$ 和 $G_3^\alpha \in X_{1,n}^3$。(4) 令 M_4 表示 M 的子集，该子集满足 $\alpha(v_0) = 0$, $G_1^\alpha \in A^+$, $G_2^\alpha \in X_{i,m}^r$ 和 $G_3^\alpha \in X_{j,n}$，其中 $r \geq 4$, $i = 3$ 或 4, $j \geq 0$ 且 $i + j$ 为奇数。(5) 令 M_5 表示 M 的子集，该子集满足 $\alpha(v_0) = 0$, $G_1^\alpha \in A^+$, $G_2^\alpha \in X_{i,m}$ 和 $G_3^\alpha \in X_{j,n}^r$，其中 $r \geq 4$, $j = 3$ 或 4, $i \geq 0$ 且 $i + j$ 为偶数。(6) 令 M_6 表示 M 的子集，该子集满足 $\alpha(v_0) = 0$, $G_1^\alpha \in X_{1,3}^3$, $G_2^\alpha \in X_{i,m}^r$ 和 $G_3^\alpha \in X_{j,n}$，其中 $r \geq 3$, $i = 1$ 或 2, $j \geq 0$ 且 $i + j$ 为奇数。(7) 令 M_7 表示 M 的子集，该子集满足 $\alpha(v_0) = 0$, $G_1^\alpha \in X_{1,3}^3$, $G_2^\alpha \in X_{i,m}$ 和 $G_3^\alpha \in X_{j,n}^r$，其中 $r \geq 3$, $j = 1$ 或 2, $i \geq 0$ 且 $i + j$ 为偶数。(8) 令 M_8 表示 M 的子集，该子集满足 $\alpha(v_0) = 0$, $G_1^\alpha \in A^+$, $G_2^\alpha \in X_{\{1,2\},m}^r$ 和 $G_3^\alpha \in X_{\emptyset,n}^s$，其中 $r \geq 3$, $s \geq 3$。(9) 令 M_9 表示 M 的子集，该子集满足 $\alpha(v_0) = 0$, $G_1^\alpha \in X_{\emptyset,3}^3$, $G_2^\alpha \in X_{\{1,2,3\},m}^r$ 和 $G_3^\alpha \in X_{\emptyset,n}^s$，其中 $r \geq 3$, $s \geq 3$。(10) 令 M_{10} 表示 M 的子集，该子集满足 $\alpha(v_0) = 1$, $G_1^\alpha \in X_{1,3}^2$ 和 $G_2^\alpha, G_3^\alpha \in Z$。(11) 令 M_{11} 表示 M 的子集，该子集满足 $\alpha(v_0) = \alpha(v_1) = \alpha(v_{11}) = \alpha(v'_{11}) = \alpha(v_{12}) = 1$ 和 $\alpha(v'_{12}) = \alpha(v_{13}) = \alpha(v'_{13}) = \alpha(v_2) = \alpha(v_3) = 0$。(12) 令 M_{12} 表示 M 的子集，该子集满足 $\alpha(v_0) = 1$, $\alpha(v_1) = \alpha(v_2) = \alpha(v_3) = 0$, $G_2^\alpha \in X_{1,m}^2$ 和 $G_1^\alpha, G_3^\alpha \in Z$。(13) 令 M_{13} 表示 M 的子集，该子集满足 $\alpha(v_0) = 1$, $\alpha(v_1) = \alpha(v_2) = \alpha(v_3) = 0$, $G_2^\alpha \in X_{i,m}^r$ 和 $G_3^\alpha \in X_{j,n}$，其中 $r \geq 3$, $i = 2$ 或 3 且 $i + j$ 为奇数。(14) 令 M_{14} 表示 M 的子集，该子集满足 $\alpha(v_0) = 1$, $\alpha(v_1) = \alpha(v_2) = \alpha(v_3) = 0$, $G_1^\alpha, G_2^\alpha \in Z$ 和 $G_3^\alpha \in X_{1,n}^2$。(15) 令 M_{15} 表示 M 的子集，该子集满足 $\alpha(v_0) = 1$, $\alpha(v_1) = \alpha(v_2) = \alpha(v_3) = 0$, $G_2^\alpha \in X_{i,m}$ 和 $G_3^\alpha \in X_{j,n}^r$，其中 $r \geq 3$, $j = 2$ 或 3 且 $i + j$ 为偶数。(16) 令 M_{16} 表示 M 的子集，该子集满足 $\alpha(v_0) = 1$, $\alpha(v_1) = \alpha(v_2) = \alpha(v_3) = 0$，或者 $G_2^\alpha \in X_{\{1,2\},m}$ 且 $G_3^\alpha \in X_{\emptyset,n}$，或者 $G_2^\alpha \in X_{\emptyset,m}$ 且 $G_3^\alpha \in X_{\{1,2\},n}$。

(17) 令 M_{17} 表示 M 的子集，使得 $\alpha(v_0)=2$, $\alpha(v_1)=\alpha(v_2)=\alpha(v_3)=0$,$G_1^\alpha \in X_\emptyset$,3, $G_2^\alpha \notin X_{1,m}$ 和 $G_3^\alpha \in X_{1,n}$。此外，$k_1+k_3 \geq 2$。(18) 令 M_{18} 表示 M 的子集，使得 $\alpha(v_0)=\alpha(v_1)=\alpha(v_{11})=\alpha(v'_{11})=\alpha(v_{12})=\alpha(v'_{12})=1$ 和 $\alpha(v_{13})=\alpha(v'_{13})=\alpha(v_2)=0$, $G_2^\alpha \notin X_{1,m}$ 和 $G_3^\alpha \in X_{\emptyset,n}$。(19) 令 M_{19} 表示 M 的子集，使得 $\alpha(v_0)=2$, $\alpha(v_1)=\alpha(v_2)=\alpha(v_3)=0$,$G_1^\alpha \in X_2$,3, $G_2^\alpha \in X_{1,m}$ 和 $G_3^\alpha \in X_{\emptyset,n}$。(20) 令 M_{20} 表示 M 的子集，使得 $\alpha(v_0)=2$, $\alpha(v_1)=\alpha(v_2)=\alpha(v_3)=0$,$G_1^\alpha \in X_\emptyset$,3, $G_2^\alpha \in X_{1,m}$ 和 $G_3^\alpha \in X_2^r$,$_n$，其中 $r \geq 2$。(21) 令 M_{21} 表示 M 的子集，使得 $\alpha(v_0)=2$, $\alpha(v_1)=\alpha(v_2)=\alpha(v_3)=0$,$G_1^\alpha \in X_\emptyset$,3, $G_2^\alpha \in X_{2,m}$ 和 $G_3^\alpha \notin X_{1,n}$。(22) 令 M_{22} 表示 M 的子集，使得 $\alpha(v_0)=2$, $\alpha(v_1)=\alpha(v_2)=\alpha(v_3)=0$,$G_1^\alpha \in X_\emptyset$,3, $G_2^\alpha \in X^1_{1,m}$ 和 $G_3^\alpha \notin X_{1,n} \cup X_{2,n}$。(23) 令 M_{23} 表示 M 的子集，使得 $\alpha(v_0)=\alpha(v_1)=\alpha(v_{11})=\alpha(v'_{11})=\alpha(v'_{12})=\alpha(v_{13})=1$ 和 $\alpha(v_{12})=\alpha(v'_{13})=\alpha(v_2)=\alpha(v_3)=0$。此外，$G_2^\alpha \in X_{\emptyset,m}$ 和 $G_3^\alpha \notin X_{1,n}$。(24) 令 M_{24} 表示 M 的子集，使得 $\alpha(v_0)=2$, $\alpha(v_1)=\alpha(v_2)=\alpha(v_3)=0$,$G_1^\alpha \in X_\emptyset$,3, $G_2^\alpha \in X_{1,m}$ 和 $G_3^\alpha \in X_{1,n}$。(25) 令 M_{25} 表示 M 的子集，使得 $\alpha(v_0)=\alpha(v_1)=\alpha(v_{12})=\alpha(v_{13})=\alpha(v'_{11})=\alpha(v'_{12})=1$ 和 $\alpha(v_{11})=\alpha(v'_{13})=\alpha(v_2)=\alpha(v_3)=0$。此外，$G_2^\alpha \in X_{\emptyset,m}$ 和 $G_3^\alpha \in X_{1,n}$。(26) 令 M_{26} 表示 M 的子集，使得 $\alpha(v_0)=2$, $\alpha(v_1)=\alpha(v_2)=\alpha(v_3)=0$。此外，$G_1^\alpha \in X_{P_1}$,3, $G_2^\alpha \in X_{P_2,m}$, $G_3^\alpha \in X_{P_3,n}$，且满足以下三个限制之一：(i) $G_1^\alpha \in X^3_{\{1,2\}}$,3, $G_2^\alpha \in X_{\emptyset,m}$ 和 $G_3^\alpha \in X_{\emptyset,n}$；(ii) $G_1^\alpha \in X_\emptyset$,3, $G_2^\alpha \in X_{\{1,2\},m}$ 和 $G_3^\alpha \in X_{\emptyset,n}$；(iii) $G_1^\alpha \in X_\emptyset$,3, $G_2^\alpha \in X_{\emptyset,m}$ 和 $G_3^\alpha \in X_{\{1,2\},n}$。

(27) 令 M_{27} 表示 M 的子集，使得 $\alpha(v_0)=2$, $\alpha(v_1)=\alpha(v_2)=\alpha(v_3)=0$。此外，$G_1^\alpha \in X^2_{1,3}$, $G_2^\alpha \in X^1_{\emptyset,m}$, $G_3^\alpha \in X^1_{1,n}$。

(28) 令 M_{28} 表示 M 的子集，使得 $\alpha(v_0)=\alpha(v_1)=\alpha(v_2)=\alpha(v_3)=1$ 且 $k_1+k_2+k_3=1$。此外，存在唯一的(i,j)，其中 $1\le i\le 3$ 使得$\alpha(v_{ij})=0$ 且 $\alpha(v'_{ij})=1$。

(29) 令 M_{29} 表示 M 的子集，使得对于任意 v_{ij}，$\alpha(v_0)=0$，$\alpha(v_1)=2$，$\alpha(v_2)=\alpha(v_3)=1$ 且 $\alpha(v_{ij})=0$。

利用推论 3.11 以及 $Z\cap X^k_{S,n}=\emptyset$（除非 $S=\{1,2,\dots,k\}$）这一事实，不难验证 $\{M_i\}_{i=1}^{29}$ 两两不相交。

接下来，我们构造 29 个单射 $\psi_i\colon N_i\to M_i$ 对于 $1\le i\le 29$。此外，对于 $\alpha\in N_{30}$，我们在引理 4.31 中证明，$X^{\alpha}_{T_{3,m,n}}$ 中唯一非 2-s-正的项是$-s_{(m+n+5,m+n+5)}$。这就证明了定理 1.4。

现在我们逐一描述每个单射 ψ_i。

引理 4.1。存在一个从 N_1 到 M_1 的单射 ψ_1。此外，$X^{\alpha}_{T_{3,m,n}}+X^{\psi_1}_{T_3(\alpha),m,n}$ 是 2-s-正的。

证明。对于 $\alpha\in N_1$，由定义我们有 $G^{\alpha}_1\in A^-$ 和 G^{α}_2，$G^{\alpha}_3\in A^+$。由命题 3.16，$G^{\alpha}_1\in A^-$ 蕴含 $\alpha(v_1)=1$ 和 $k_1=3$。因此 $G^{\alpha}_1\cong S(1^3)$，且 G^{α}_1 的二分划分为 (3, 1)。利用命题 3.20，我们推出在G^{α}_2和 G^{α}_3中没有孤立顶点。因此 G^{α}_2，$G^{\alpha}_3\in Z$。定义 $\psi_1(\alpha)$ 如下:

$$\psi_1(\alpha)(v)=\begin{cases}\phi_1(\alpha\mid_{G_1})(v), & \text{if } v\in V(G_1);\\ \alpha(v), & \text{otherwise.}\end{cases}\tag{4.1}$$

令 $\beta=\psi_1(\alpha)$。显然 $\alpha\mid_{G_1}\in\mathcal{A}_3$。由 ψ_1的构造，我们看到$\beta\mid_{G_1}=\phi_1(\alpha\mid_{G_1})$。由命题 3.7，$\beta\mid_{G_1}\in x^3_{1,3}$，因此 $G^{\beta}_1=G_1^{\beta|_{G_1}}\in X^3_{1,3}$。此外，显然 $G^{\beta}_2=G^{\alpha}_2\in Z$ 和 $G^{\beta}_3=G^{\alpha}_3\in Z$。因此 $\beta\in M_1$。

接下来证明 ψ_1 是一个单射。令 $I_1=\{\psi_1(\alpha)\colon\ \alpha\in N_1\}\subseteq M_1$。对于任意$\beta\in I_1$，定义 $\varphi_1\colon\ I_1\to N_1$ 为

$$\varphi_1(\beta)(v)=\begin{cases}\phi^{-1}(\beta\mid_{G_1})(v), & \text{if } v\in V(G_1);\\ \beta(v), & \text{otherwise.}\end{cases}\tag{4.2}$$

此处 ϕ^{-1} 的定义见（3.7）和注记 3.8。容易验证 $\varphi_1(\psi_1(\alpha))=\alpha$ 对任意 $\alpha\in N_1$均成立。这表明 ψ_1 是一个单射。

接下来我们计算 $X^{\alpha}_{T_{3,m,n}}+X^{\beta}_{T_{3,m,n}}$。注意 $\alpha\mid_{G_1}\in\mathcal{A}_3$ 和 $\beta\mid_{G_1}=\phi_1(\alpha\mid_{G_1})$。根据命题 3.16，

$$X^{\alpha}_{G_1}+X^{\beta}_{G_1}=X^{\alpha|_{G_1}}_{G_1}+X^{\phi_1(\alpha|_{G_1})}_{G_1}\ge_{2s}0.\tag{4.3}$$

由于 $\alpha(v) = \beta(v)$ 对所有 $v \notin G_1$，我们有 $X^{\alpha}_{G_2} = X^{\beta}_{G_2} \geq_{2s} 0$ 和 $X^{\alpha}_{G_3} = X^{\beta}_{G_3} \geq_{2s} 0$。因此，根据命题 3.3，

$$\begin{aligned} X^{\alpha}_{T_{3,m,n}} + X^{\psi_1(\alpha)}_{T_{3,m,n}} &= X^{\alpha}_{G_1} X^{\alpha}_{G_2} X^{\alpha}_{G_3} + X^{\beta}_{G_1} X^{\beta}_{G_2} X^{\beta}_{G_3} \\ &= (X^{\alpha}_{G_1} + X^{\beta}_{G_1}) X^{\alpha}_{G_2} X^{\alpha}_{G_3} \geq_{2s} 0. \end{aligned}$$

最后一个不等式由（4.3）得出。 □

引理 4.2。 存在一个从 ψ_2 到 N_2 的单射 M_2。此外，$X^{\alpha}_{T_{3,\,m,\,n}} + X^{\psi_2}_{T_3\,(\alpha)\,,\,m,\,n}$ 是 2-s-正的。

证明。给定 $\alpha \in N_2$，根据定义可知 $G^{\alpha}_2 \in A^-$、G^{α}_1、$G^{\alpha}_3 \in A^+$ 和 $k_2 = 3$。由命题 3.16，$G^{\alpha}_2 \in A^-$ 蕴含 $\alpha(v_2) = 1$。令 T_2 表示 G^{α}_2 中包含 v^{α}_2的连通分支。由命题 2.9 和 $k_2 = 3$，可知对于某个 $r \geq 0$，有 $T_2 \cong S(1^3, 2^r)$。因此，T_2 的二分划分为（$r+3$，$r+1$）。利用命题 3.20 可推出，G^{α}_1或 G^{α}_3中不存在孤立顶点。因此 G^{α}_1，$G^{\alpha}_3 \in Z$。定义$\psi_2(\alpha)$如下：

$$\psi_2(\alpha)(v) = \begin{cases} \phi_1(\alpha\,|_{G_2})(v), & \text{if } v \in V(G_2); \\ \alpha(v), & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{4.4}$$

令 $\beta = \psi_2(\alpha)$。由于 $G^{\alpha}_2 \in A^-$，由命题 3.16 和 $k_2 = 3$，可知 $\alpha\,|_{G_2} \in \mathcal{A}_3$。由命题3.7，有 $\phi_1(\alpha\,|_{G_2}) \in x^3_{1,\,m}$，这意味着 $G^{\beta}_2 = G^{\phi_1(\alpha|_{G_2})}_{\;2} \in X^3_{1,\,m}$。此外，$G^{\beta}_1 = G^{\alpha}_1 \in Z$ 且 $G^{\beta}_3 = G^{\alpha}_3 \in Z$。由此得到 $\beta \in M_2$。

接下来证明 ψ_2 是一个单射。令 $I_2 = \{\psi_2(\alpha)\colon \alpha \in N_2\} \subseteq M_2$。对于任意$\beta \in I_2$，我们构造映射 $\varphi_2\colon I_2 \to N_2$ 如下：

$$\varphi_2(\beta)(v) = \begin{cases} \phi^{-1}(\beta\,|_{G_2})(v), & \text{if } v \in V(G_2); \\ \beta(v), & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{4.5}$$

这很容易 t 验证，对于任意 $\alpha \in N_2$，$\varphi_2(\psi_2(\alpha)) = \alpha$。这意味着 ψ_2 是一个单 on.

此外，请注意 $G^{\alpha|_{G_2}}_2 \in A^-$ 和 $X^{\beta}_{G_2} = X^{\phi_1\,(\alpha|_{G_2})\;G_2}$。利用命题 3.16，我们可以看出

$$X^{\alpha}_{G_2} + X^{\beta}_{G_2} = X^{\alpha|_{G_2}}_{G_2} + X^{\phi_1(\alpha|_{G_2})}_{G_2} \geq_{2s} 0. \tag{4.6}$$

由于对任意 $v \notin G_2$，$\alpha(v) = \psi_2(\alpha)(v)$，我们看到 $X^{\alpha}_{G_1} = X^{\beta}_{G_1} \geq_{2s} 0$ 且 $X^{\alpha}_{G_3} = X^{\beta}_{G_3} \geq_{2s} 0$。因此

$$\begin{aligned} X^{\alpha}_{T_{3,m,n}} + X^{\psi_2(\alpha)}_{T_{3,m,n}} &= X^{\alpha}_{G_1} X^{\alpha}_{G_2} X^{\alpha}_{G_3} + X^{\beta}_{G_1} X^{\beta}_{G_2} X^{\beta}_{G_3} \\ &= (X^{\alpha}_{G_2} + X^{\beta}_{G_2}) X^{\alpha}_{G_1} X^{\alpha}_{G_3} \geq_{2s} 0. \end{aligned}$$

□

引理 4.3. 存在一个从 N_3 到 M_3的单射 ψ_3 。此外，$X^{\alpha}_{T_3,\ m,\ n} + X^{\psi_3}_{T_3\ (\alpha)\ ,\ m,\ n}$ 是 *2-s*-正的。

证明。 该引理的证明与引理 4.2的证明类似。我们给出 ψ_3 的显式定义，并省略细节。

$$\psi_3(\alpha)(v) = \begin{cases} \phi_1(\alpha\mid_{G_3})(v), & \text{if } v \in V(G_3); \\ \alpha(v), & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{4.7}$$

□

引理 4.4。 存在一个从 N_4 到 M_4的单射 ψ_4 。此外，$X^{\alpha}_{T_3,\ m,\ n} + X^{\psi_4}_{T_3(\alpha)\ ,\ m,\ n}$ 是 *2-s*-正的。

证明。 给定 $\alpha \in N_4$，根据定义可知 $G_2^{\alpha} \in A^-$, G_1^{α}， $G_3^{\alpha} \in A^+$和 $k_2 \geq 4$。结合 $G_2^{\alpha} \in A^-$ 和命题3.16，我们得到$\alpha\mid_{G_2} \in \mathcal{A}_{k_2}$。由（3.8）和推论 3.11可知，存在唯一的 $j \geq 0$ 使得 $G_3^{\alpha} \in X_{j,\ n}$。我们通过区分指标 j的奇偶性来定义映射 $\psi_4(\alpha): V(G) \to \mathbb{N}$：

$$\psi_4(\alpha)(v) = \begin{cases} \phi_3(\alpha\mid_{G_2})(v), & \text{if } v \in V(G_2) \text{ and } j \text{ even}; \\ \phi_4(\alpha\mid_{G_2})(v), & \text{if } v \in V(G_2) \text{ and } j \text{ odd}; \\ \alpha(v), & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{4.8}$$

设 $\beta = \psi_4(\alpha)$。根据 ψ_4 的构造，我们有 $\beta\mid_{G_2} = \phi_3(\alpha\mid_{G_2}) \in x_3^{k_2,\ m}$ 当 j 为偶数时，以及 $\beta\mid_{G_2} = \phi_4(\alpha\mid_{G_2}) \in x_4^{k_2,\ m}$ 当 j 为奇数时。这就得到，当 j 为偶数时有 $G_2^{\beta} \in X_3^{k_2,\ m}$，当 j 为奇数时有$G_2^{\beta} \in X_4^{k_2,\ m}$。此外， $G_1^{\beta} = G_1^{\alpha} \in A^+$。因此， $\beta \in M_4$。

接下来我们证明 ψ_4 是一个单射。设 $I_4 = \{\psi_4(\alpha): \alpha \in N_4\} \subseteq M_4$。对于任意 $\beta \in I_4$，我们按如下方式构造一个映射 $\varphi_4: I_4 \to N_4$：

$$\varphi_4(\beta)(v) = \begin{cases} \phi^{-1}(\beta\mid_{G_2})(v), & \text{if } v \in V(G_2); \\ \beta(v), & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{4.9}$$

由于 ϕ^{-1} 是 ϕ_3 和 ϕ_4 的逆映射，因此容易验证，对于任意 $\alpha \in N_4$，都有 $\varphi_4(\psi_4(\alpha)) = \alpha$。这就得到 ψ_4 是一个单射。

此外，由 $G_2^{\alpha} \in A^-$ 和 $\beta\mid_{G_2} = \phi_3(\alpha\mid_{G_2})$ 或 $\beta\mid_{G_2} = \phi_4(\alpha\mid_{G_2})$，利用命题3.16，在这两种情况下我们都可以看出

$$X^{\alpha}_{G_2} + X^{\beta}_{G_2} = X^{\alpha\mid_{G_2}}_{G_2} + X^{\beta\mid_{G_2}}_{G_2} \geq_{2s} 0. \tag{4.10}$$

由于对任意 $v \notin G_2$, $\alpha(v) = \psi_4(\alpha)(v)$，我们可以看出 $X^{\alpha}_{G_1} = X^{\beta}_{G_1} \geq_{2s} 0$ 和 $X^{\alpha}_{G_3} = X^{\beta}_{G_3} \geq_{2s} 0$。因此

$$\begin{aligned} X^{\alpha}_{T_{3,m,n}} + X^{\psi_4(\alpha)}_{T_{3,m,n}} &= X^{\alpha}_{G_1} X^{\alpha}_{G_2} X^{\alpha}_{G_3} + X^{\beta}_{G_1} X^{\beta}_{G_2} X^{\beta}_{G_3} \\ &= (X^{\alpha}_{G_2} + X^{\beta}_{G_2}) X^{\alpha}_{G_1} X^{\alpha}_{G_3} \geq_{2s} 0. \end{aligned}$$

□

引理4.5。 存在一个从 N_5 到 M_5的单射 ψ_5 。此外，$X^{\alpha}_{T_{3,\ m,\ n}} + X^{\psi_5}_{T_3(\alpha)\ ,\ m,\ n}$ 是*2-s*-正的。

证明。 证明与引理4.4的证明类似。我们给出 ψ_5 的显式映射，并省略其他细节。

$$\psi_5(\alpha)(v) = \begin{cases} \phi_4(\alpha\mid_{G_2})(v), & \text{if } v \in V(G_2) \text{ and } j \text{ even;} \\ \phi_3(\alpha\mid_{G_2})(v), & \text{if } v \in V(G_2) \text{ and } j \text{ odd;} \\ \alpha(v), & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{4.11}$$

□

引理4.6。 存在一个从 N_6 到 M_6的单射 ψ_6 。此外，$X^{\alpha}_{T_{3,\ m,\ n}} + X^{\psi_6}_{T_3(\alpha)\ ,\ m,\ n}$ 是*2-s*-正的。

证明。 给定 $\alpha \in N_6$，根据定义可知 G^{α}_1， $G^{\alpha}_2 \in A^-, G^{\alpha}_3 \in A^+$。由 $G^{\alpha}_1 \in A^-$ 可得 $G^{\alpha}_1 \cong S(1^3)$。此外，由 $G^{\alpha}_2 \in A^-$ 和命题3.16 可知 $\alpha\mid_{G_2} \in \mathcal{A}_{k_2}$和 $k_2 \geq 3$。与引理4.4中的情况类似，我们看到存在唯一的 $j \geq 0$ 满足$G^{\alpha}_3 \in X_{j,\ n}$。定义 $\psi_6(\alpha)$如下：

$$\psi_6(\alpha)(v) = \begin{cases} \phi_1(\alpha\mid_{G_1})(v), & \text{if } v \in V(G_1); \\ \phi_2(\alpha\mid_{G_2})(v), & \text{if } v \in V(G_2) \text{ and } j \text{ odd;} \\ \phi_1(\alpha\mid_{G_2})(v), & \text{if } v \in V(G_2) \text{ and } j \text{ even;} \\ \alpha(v), & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{4.12}$$

设 $\beta = \psi_6(\alpha)$。根据 ψ_6 的构造，我们有 $\beta\mid_{G_1} = \phi_1(\alpha\mid_{G_1}) \in x^3_{1,\ 3}$，因此$G^{\beta}_1 \in X^3_{1,\ 3}$。此外，当 j 为奇数时，$\beta\mid_{G_2} = \phi_2(\alpha\mid_{G_2}) \in x^{k_2}_{2,\ m}$；当 j 为偶数时，$\beta\mid_{G_2} = \phi_1(\alpha\mid_{G_2}) \in x^{k_2}_{1,\ m}$。因此，当 j 为奇数时，$G^{\beta}_2 \in X^{k_2}_{2,\ m}$；当 j 为偶数时，$G^{\beta}_2 \in X^{k_2}_{1,\ m}$。这意味着$\beta \in M_6$。

接下来我们证明 ψ_6 是单射。设 $I_6 = \{\psi_6(\alpha)\colon\ \alpha \in N_6\} \subseteq M_6$。对于任意$\beta \in I_6$, 我们按如下方式构造一个映射 $\varphi_6\colon\ I_6 \to N_6$：

$$\varphi_6(\beta)(v) = \begin{cases} \phi^{-1}(\beta\mid_{G_1})(v), & \text{if } v \in V(G_1); \\ \phi^{-1}(\beta\mid_{G_2})(v), & \text{if } v \in V(G_2); \\ \beta(v), & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{4.13}$$

根据 ϕ^{-1} 的定义，我们看到 ϕ^{-1} 是 ϕ_1 和 ϕ_2的逆映射。因此，很容易验证，对于任意 $\alpha \in N_6$, $\varphi_6(\psi_6(\alpha)) = \alpha$。这说明 ψ_6 是一个单射。

注意到 G_1^α, $G_2^\alpha \in A^-$ 推出 $\alpha\mid_{G_1} \in \mathcal{A}_3$ 和 $\alpha\mid_{G_2} \in \mathcal{A}_{k_2}$。此外, $\beta\mid_{G_1} = \phi_1(\alpha\mid_{G_1})$，且 $\beta\mid_{G_2} = \phi_1(\alpha\mid_{G_2})$或 $\beta\mid_{G_2} = \phi_2(\alpha\mid_{G_2})$。令 F 为由$T_{3,m}$和n 诱导的子图，其中顶点集为 $V(G_1) \cup V(G_2$。由命题3.18可知，在任一情况下都有

$$X_F^\alpha + X_F^\beta \geq_{2s} 0. \tag{4.14}$$

由于 对于任意 $v \in V(G_3)$、 $\alpha(v) = \psi_6(\alpha)(v)$，我们看到 $X_{G_3}^\alpha = X_{G_3}^\beta \geq_{2s} 0$。因此

$$\begin{aligned} X_{T_{3,m,n}}^\alpha + X_{T_{3,m,n}}^{\psi_6(\alpha)} &= X_F^\alpha X_{G_3}^\alpha + X_F^\beta X_{G_3}^\beta \\ &= (X_F^\alpha + X_F^\beta) X_{G_3}^\alpha \geq_{2s} 0. \end{aligned}$$

□

引理4.7。 存在一个从 N_7 到 M_7的单射 ψ_7。此外，$X_{T_{3,\ m,\ n}}^\alpha + X_{T_{3}(\alpha)\ ,\ m,\ n}^{\psi_7}$ 是 *2-s*-正的。

证明。 此引理的证明与引理4.6的证明类似。设 $G_2^\alpha \in X_{j,\ m}$，其中 $0 \leq j \leq m$。我们给出 ψ_7 的显式映射，并省略其他细节。

$$\psi_7(\alpha)(v) = \begin{cases} \phi_1(\alpha\mid_{G_1})(v), & \text{if } v \in V(G_1); \\ \phi_2(\alpha\mid_{G_3})(v), & \text{if } v \in V(G_3) \text{ and } j \text{ even}; \\ \phi_1(\alpha\mid_{G_3})(v), & \text{if } v \in V(G_3) \text{ and } j \text{ odd}; \\ \alpha(v), & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{4.15}$$

□

引理 4.8. 存在一个从 N_8 到 M_8的单射 ψ_8。此外，$X_{T_{3,\ m,\ n}}^\alpha + X_{T_{3}(\alpha)\ ,\ m,\ n}^{\psi_8}$ 是 *2-s*-正的。

证明。给定 $\alpha \in N_8$，根据定义可知 G_2^α，$G_3^\alpha \in A^-$，$G_1^\alpha \in A^+$。由 G_2^α，$G_3^\alpha \in A^-$ 以及命题 3.16，可知 $\alpha\mid_{G_2} \in \mathcal{A}_{k_2}$，$\alpha\mid_{G_3} \in \mathcal{A}_{k_3}$，$k_2 \geq 3$ 以及 $k_3 \geq 3$。定义$\psi_8(\alpha)$如下：

$$\psi_8(\alpha)(v) = \begin{cases} \phi_{\{1,2\}}(\alpha\mid_{G_2})(v), & \text{if } v \in V(G_2); \\ \phi_{\emptyset}(\alpha\mid_{G_3})(v), & \text{if } v \in V(G_3); \\ \alpha(v), & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{4.16}$$

设 $\beta = \psi_8(\alpha)$。由 ψ_8 的构造，采用引理 4.4 中相同的论证，我们得到 $G_1^\beta = G_1^\alpha \in A^+$，$G_2^\beta \in X^{k_2}_{\{1,2\},m}$ 和 $G_3^\beta \in X^{k_3}_{\emptyset,n}$。这意味着 $\beta \in M_8$。

接下来证明 ψ_8 是一个单射。令 $I_8 = \{\psi_8(\alpha)\colon \alpha \in N_8\} \subseteq M_8$。对于任意 $\beta \in I_8$，我们构造如下映射 $\varphi_8\colon I_8 \to N_8$：

$$\varphi_8(\beta)(v) = \begin{cases} \phi^{-1}(\beta\mid_{G_2})(v), & \text{if } v \in V(G_2); \\ \phi^{-1}(\beta\mid_{G_3})(v), & \text{if } v \in V(G_3); \\ \beta(v), & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{4.17}$$

由 ϕ^{-1} 的定义可知，ϕ^{-1} 是 $\phi_{\{1,2\}}$ 和 $\phi_\emptyset$ 的逆映射。因此，很容易验证，对于任意 $\alpha \in N_8$，都有 $\varphi_8(\psi_8(\alpha)) = \alpha$。由此可得 ψ_8 是一个单射。

注意，$G_2^\alpha \in \mathcal{A}_{k_2}$、$G_3^\alpha \in \mathcal{A}_{k_3}$ 和 $\beta\mid_{G_2} = \phi_{\{1,2\}}(\alpha\mid_{G_2})$、$\beta\mid_{G_3} = \phi_\emptyset(\alpha\mid_{G_3})$。由推论 3.19，若令 F 为由 $V(G_2) \cup V(G_3)$ 在 $T_{3,m,n}$ 中诱导出的子图，则

$$X_F^\alpha + X_F^\beta \geq_{2s} 0. \tag{4.18}$$

由于对于任意 $v \in V(G_1)$，$\alpha(v) = \psi_8(\alpha)(v)$，我们可知 $X^\alpha_{G_1} = X^\beta_{G_1} \geq_{2s} 0$。因此

$$\begin{aligned} X^\alpha_{T_{3,m,n}} + X^{\psi_8(\alpha)}_{T_{3,m,n}} &= X_F^\alpha X^\alpha_{G_1} + X_F^\beta X^\beta_{G_1} \\ &= (X_F^\alpha + X_F^\beta) X^\alpha_{G_1} \geq_{2s} 0. \end{aligned}$$

□

引理 4.9. 存在一个从 N_9 到 M_9 的单射 ψ_9。此外，$X^\alpha_{T_{3,m,n}} + X^{\psi_9}_{T_3(\alpha),m,n}$ 是 *2-s-*正的。

证明。本引理的证明与引理 4.8的证明类似。我们给出 ψ_9 的显式映射，并省略其他细节。

$$\psi_9(\alpha)(v) = \begin{cases} \phi_{\{1,2,3\}}(\alpha\mid_{G_2})(v), & \text{if } v \in V(G_2); \\ \phi_{\emptyset}(\alpha\mid_{G_1})(v), & \text{if } v \in V(G_1); \\ \phi_{\emptyset}(\alpha\mid_{G_3})(v), & \text{if } v \in V(G_3); \\ 0, & \text{if } v = v_0. \end{cases} \tag{4.19}$$

□

引理 4.10。 存在一个单射 ψ_{10} 从 N_{10} 到 M_{10}。此外，$X^{\alpha}_{T_3,\,m,\,n}+X^{\psi_{10}}_{T_3\,(\alpha)\,,\,m,\,n}$ 是 *2-s-*正的。

证明。给定 $\alpha\in N_{10}$，根据定义，我们有 $\alpha(v_0)=\alpha(v_1)=1$, $k_1=2$和 $\alpha(v_2)=\alpha(v_3)=0$。显然，在 $T^{\alpha}_{3},_{m,n}$ 中，唯一的非 2-*s*- 正连通分支是包含 v^{α}_0 的分支（示例见图 4.2）。显然， T 是一个蜘蛛图，其躯干为 v^{α}_1，且 $T\cong S(1^3)$ 或 $T\cong S(1^3,2)$。因此，T 的二分划分为 (3, 1) 或 (4, 2)。由推论 3.20 可知， $G^{\alpha}_2,G^{\alpha}_3\in Z$。

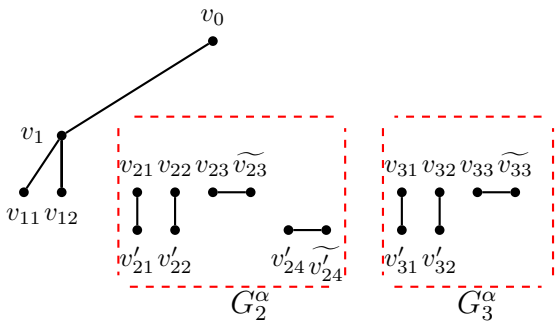


图 4.2：$T^{\alpha}_{3},_{4,3}(\alpha\in N_{10})$ 的示例。

如下定义 $\psi_{10}(\alpha)$:

$$\psi_{10}(\alpha)(v)=\begin{cases}\phi_1(\alpha\mid_{G_1})(v), & \text{if } v\in V(G_1);\\ \alpha(v), & \text{otherwise.}\end{cases}\tag{4.20}$$

令 $\beta=\psi_{10}(\alpha)$。根据 ψ_{10} 的构造，并运用与引理4.4相同的论证，可得 $G^{\beta}_1\in X^2_{1,3}$, $G^{\beta}_2=G^{\alpha}_2\in Z$ 和 $G^{\beta}_3=G^{\alpha}_3\in Z$。这意味着 $\beta\in M_{10}$。

接下来证明 ψ_{10} 是一个单射。令 $I_{10}=\{\psi_{10}(\alpha):\ \alpha\in N_{10}\}\subseteq M_{10}$。对于任意 $\beta\in I_{10}$，我们按如下方式构造映射 $\varphi_{10}:\ I_{10}\to N_{10}$：

$$\varphi_{10}(\beta)(v)=\begin{cases}\phi^{-1}(\beta\mid_{G_1})(v), & \text{if } v\in V(G_1);\\ \beta(v), & \text{otherwise.}\end{cases}\tag{4.21}$$

容易验证对于任意 $\alpha\in N_{10}$, $\varphi_{10}(\psi_{10}(\alpha))=\alpha$。由此可得 ψ_{10} 是一个单射。

接下来我们计算 $X^{\alpha}_{T_3、\,m、\,n}+X^{\beta}_{T_3、\,m、\,n_0}$ 令 $G_1,0$ 表示由 $V(G_1)$ 诱导的 $T_3、\,m、\,n$ 的子图，并令 $G_1,0$ 表示由 $V(T_3、\,m、\,n)\setminus V(G_1,0)$ 诱导的 $T_3、\,m、\,n$ 的子图。显然 $G_1、_0\cong S(1,2^3)$。此外， $\alpha\mid_{G_1}\in\mathcal{A}_2$。由命题 3.17，我们可推出

$$X^{\alpha}_{G_{1,0}}+X^{\beta}_{G_{1,0}}\geq_{2s}0.\tag{4.22}$$

由 $\alpha(v_2) = \alpha(v_3) = 0$可知，$G_{1,0}^{\alpha}$ 与 $G_{1,0}{}^{\alpha}$之间不存在边。同样，$\beta(v_2) = \beta(v_3) = 0$ 意味着 $G_{1,0}^{\beta}$ 与$G_{1,0}{}^{\beta}$之间不存在边。利用命题 3.3，我们得到

$$X_{T_{3,m,n}}^{\alpha} = X_{G_{1,0}}^{\alpha} X_{\overline{G_{1,0}}}^{\alpha}, \quad \text{and} \quad X_{T_{3,m,n}}^{\beta} = X_{G_{1,0}}^{\beta} X_{\overline{G_{1,0}}}^{\beta} \tag{4.23}$$

根据 ψ_{10}的构造可知$X_{G_{1,0}}^{\beta} = X_{G_{1,0}}^{\alpha}$。结合（4.22）和（4.23），得到

$$X_{T_{3,m,n}}^{\alpha} + X_{T_{3,m,n}}^{\beta} = (X_{G_{1,0}}^{\alpha} + X_{G_{1,0}}^{\beta}) X_{\overline{G_{1,0}}}^{\alpha} \geq_{2s} 0.$$

□

引理 4.11。存在一个从 N_{11} 到 M_{11}的单射 ψ_{11}。此外，$X_{T_{3,m,n}}^{\alpha} + X_{T_3}^{\psi_{11}(\alpha),m,n}$ 是 *2-s*-正的。

证明。给定 $\alpha \in N_{11}$，根据定义可知 $\alpha(v_0) = \alpha(v_1) = 1$, $\alpha(v_2) = \alpha(v_3) = 0$以及 $k_1 = 3$。由 $k_1 = 3$显然可得 $\alpha(v_{11}) = \alpha(v_{12}) = \alpha(v_{13}) = 1$ 以及 $\alpha(v'_{11}) = \alpha(v'_{12}) = \alpha(v'_{13}) = 0$。定义

$$\psi_{11}(\alpha)(v) = \begin{cases} 1, & \text{if } v = v'_{11}; \\ 0, & \text{if } v = v_{13}; \\ \alpha(v), & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{4.24}$$

令 $\beta = \psi_{11}(\alpha)$。显然 $\beta \in M_{11}$。下面证明 ψ_{11} 是一个单射。设$I_{11} = \{\psi_{11}(\alpha) : \alpha \in N_{11}\} \subseteq M_{11}$。对于任意 $\beta \in I_{11}$，我们构造一个映射 φ_{11}： $I_{11} \to N_{11}$如下：

$$\varphi_{11}(\beta)(v) = \begin{cases} 1, & \text{if } v = v_{13}; \\ 0, & \text{if } v = v'_{11}; \\ \beta(v), & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{4.25}$$

很容易验证，对于任意 $\alpha \in N_{11}$，$\varphi_{11}(\psi_{11}(\alpha)) = \alpha$。由此可得，$\psi_{11}$ 是一个单射。

令 G_1,0 为由 $V(G_1) \cup \{v_0\}$ 诱导的 $T_{3,m,n}$ 的子图，并令 G_1,0 表示由$\overline{V(T_{3,m,n})} \setminus V(G_1,0)$ 诱导的 $T_{3,m,n}$ 的子图。由 $\alpha(v_2) = \alpha(v_3) = 0$，我们可知 $G_{1,0}^{\alpha}$ 与 $G_{1,0}{}^{\alpha}$ 之间没有边。同样，$\beta(v_2) = \beta(v_3) = 0$ 表明$\overline{G_1^{\beta}}$,0 与 $G_{1,0}{}^{\beta}$ 之间没有边。利用命题 3.3，我们得到

$$X_{T_{3,m,n}}^{\alpha} = X_{G_{1,0}}^{\alpha} X_{\overline{G_{1,0}}}^{\alpha}, \quad \text{and} \quad X_{T_{3,m,n}}^{\beta} = X_{G_{1,0}}^{\beta} X_{\overline{G_{1,0}}}^{\beta} \tag{4.26}$$

显然，$G_{1,0}^{\alpha}$ 的二分划分是（4，1），而$G_{1,0}^{\beta}$ 的二分划分是（3，2）。由命题 2.6，我们有

$$X_{G_{1,0}}^{\alpha} =_{2s} (s_{(4,1)} - s_{(3,2)}) \quad \text{and} \quad X_{G_{1,0}}^{\beta} =_{2s} s_{(3,2)}. \tag{4.27}$$

因此，将（4.27）代入（4.26），并注意到 $G_{1,\ 0}{}^{\alpha} = G_{1,\ 0}{}^{\beta}$，我们有

$$X^{\alpha}_{T_{3,m,n}} + X^{\beta}_{T_{3,m,n}} =_{2s} s_{(4,1)} X^{\alpha}_{G_{1,0}} \geq_{2s} 0. \tag{4.28}$$

□

引理 4.12. 存在一个从 N_{12} 到 M_{12} 的单射 ψ_{12}。此外，$X^{\alpha}_{T_{3,m,n}} + X^{\psi_{12}}_{T_3\ (\alpha)\ ,m,n}$ 是 *2-s*-正的。

证明。 本引理的证明类似于引理 4.10的证明。我们给出 ψ_{12} 的显式映射，并省略其他细节。

$$\psi_{12}(\alpha)(v) = \begin{cases} \phi_1(\alpha\mid_{G_2})(v), & \text{if } v \in V(G_2); \\ \alpha(v), & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{4.29}$$

□

引理 4.13. 存在一个从 N_{13} 到 M_{13} 的单射 ψ_{13}。此外，$X^{\alpha}_{T_{3,m,n}} + X^{\psi_{13}}_{T_3\ (\alpha)\ ,m,n}$ 是 *2-s*-正的。

证明。 给定 $\alpha \in N_{13}$，由定义可知 $\alpha(v_0) = \alpha(v_2) = 1$，$\alpha(v_1) = \alpha(v_3) = 0$ 且$k_2 \geq 3$。由（3.8）和推论 3.11，我们看到存在唯一的 $j \geq 0$ 满足 $G_3^{\alpha} \in X_{j,n}$。定义

$$\psi_{13}(\alpha)(v) = \begin{cases} \phi_2(\alpha\mid_{G_2})(v), & \text{if } v \in V(G_2), \text{ and } j \text{ odd}; \\ \phi_3(\alpha\mid_{G_2})(v), & \text{if } v \in V(G_2), \text{ and } j \text{ even}; \\ \alpha(v), & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{4.30}$$

令 $\beta = \psi_{13}(\alpha)$。由 ψ_{13} 的构造可知，$\beta(v_0) = 1$，$\beta(v_1) = \beta(v_3) = 0$且 $G_3^{\beta} = G_3^{\alpha} \in X_{j,n}$。此外，当 j 为奇数时，$G_2^{\beta} \in X_{2,\ m}^{k_2}$；当 j 为偶数时，$G_2^{\beta} \in X_{3,\ m}^{k_2}$。这意味着 $\beta \in M_{13}$。

接下来证明 ψ_{13} 是一个单射。设 $I_{13} = \{\psi_{13}(\alpha)\colon\ \alpha \in N_{13}\} \subseteq M_{13}$。对于任意 $\beta \in I_{13}$，我们按如下方式构造映射 $\varphi_{13}\colon\ I_{13} \to N_{13}$：

$$\varphi_{13}(\beta)(v) = \begin{cases} \phi^{-1}(\beta\mid_{G_2})(v), & \text{if } v \in V(G_2); \\ \beta(v), & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{4.31}$$

容易验证，对于任意 $\alpha \in N_{13}$，$\varphi_{13}(\psi_{13}(\alpha)) = \alpha$。这说明 ψ_{13} 是一个单射。

令 $G_{2,0}$ 表示由 $V(G_2) \cup \{v_0\}$ 诱导的 $T_{3,m,n}$ 的子图，并令 $G_{2,0}$ 表示由 $\overline{V(T_{3,m,n})} \setminus V(G_{2,0})$ 诱导的 $T_{3,m,n}$ 的子图。显然，$G_{2,0} \cong S(1, 2^m)$，且 $G_2^\alpha \in \mathcal{A}_{k_2}$。利用命题 3.17，我们得到

$$X^\alpha_{G_{2,0}} + X^\beta_{G_{2,0}} \geq_{2s} 0. \tag{4.32}$$

此外，由 $\alpha(v_1) = \alpha(v_3) = 0$可知，$X^\alpha_{T_{3,m,n}} = X^\alpha_{G_{2,0}} X^\alpha_{G_2,0}$。同样地，由 $\beta(v_1) = \beta(v_3) = 0$ 可知，$X^\beta_{T_{3,m,n}} = X^\beta_{G_{2,0}} X^\beta_{G_2,0}$。此处，根据 ψ_{13} 的定义，我们得到 $X^\beta_{G_{2,0}} = X^\alpha_{G_2,0}$。由上述分析和（4.32），我们有

$$X^\alpha_{T_{3,m,n}} + X^\beta_{T_{3,m,n}} = (X^\alpha_{G_{2,0}} + X^\beta_{G_{2,0}}) X^\alpha_{\overline{G_{2,0}}} \geq_{2s} 0. \tag{4.33}$$

□

引理 4.14。 存在一个从 N_{14} 到 M_{14}的单射 ψ_{14}。此外，$X^\alpha_{T_{3,\,m,\,n}} + X^{\psi_{14}}_{T_3\,(\alpha)\,,\,m,\,n}$ 是 *2-s-*正的。

证明。 该引理的证明类似于引理 4.10的证明。我们给出 ψ_{14} 的显式映射，并省略其他细节。

$$\psi_{14}(\alpha)(v) = \begin{cases} \phi_1(\alpha\mid_{G_3})(v), & \text{if } v \in V(G_3); \\ \alpha(v), & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{4.34}$$

□

引理 4.15。 存在一个从 N_{15} 到 M_{15}的单射 ψ_{15}。此外，$X^\alpha_{T_{3,\,m,\,n}} + X^{\psi_{15}}_{T_3\,(\alpha)\,,\,m,\,n}$ 是 *2-s-*正的。

证明。 这个引理的证明与引理 4.13 的证明类似。由（3.8）和推论 3.11 可知，存在唯一的 $i \geq 0$ 满足 $G_2^\alpha \in X_{i,m}$。我们给出 ψ_{15} 的显式映射，并省略其他细节。

$$\psi_{15}(\alpha)(v) = \begin{cases} \phi_3(\alpha\mid_{G_3})(v), & \text{if } v \in V(G_3), i \text{ odd}; \\ \phi_2(\alpha\mid_{G_3})(v), & \text{if } v \in V(G_3), i \text{ even}; \\ \alpha(v), & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{4.35}$$

□

引理 4.16。 存在一个从 N_{16} 到 M_{16}的单射 ψ_{16}。此外，$X^\alpha_{T_{3,\,m,\,n}} + X^{\psi_{16}}_{T_3\,(\alpha)\,,\,m,\,n}$ 是 *2-s-*正的。

证明。 给定 $\alpha \in N_{16}$，根据定义可知 $\alpha(v_0) = \alpha(v_2) = \alpha(v_3) = 1$ 且 $\alpha(v_1) = 0$。令 T 表示$T_{3,\,m,\,n}^{\alpha}$中包含 v_0^{α}的连通分支。假设

$$\#\{j\colon \alpha(v_{2j}) = \alpha(v'_{2j}) = 1\} = r_2, \quad \text{and} \quad \#\{j\colon \alpha(v_{3j}) = \alpha(v'_{3j}) = 1\} = r_3.$$

我们看到 T具有二分划分（$r_2+r_3+k_2+k_3+1,\ r_2+r_3+2$）。由于 T是唯一可能的非 2-s-正连通分支，位于$T_{3,\,m,\,n}^{\alpha}$中，由推论2.7，我们有 $k_2+k_3 \geq 3$。共有两种情况。

情况 1. 若 $k_2 \geq 2$，则定义

$$\psi_{16}(\alpha)(v) = \begin{cases} \phi_{\{1,2\}}(\alpha\mid_{G_2})(v), & \text{if } v \in V(G_2); \\ \phi_{\emptyset}(\alpha\mid_{G_3})(v), & \text{if } v \in V(G_3); \\ \alpha(v), & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{4.36}$$

情形 2. 若 $k_2 \leq 1$，则由 $k_2+k_3 \geq 3$ 我们可推出 $k_3 \geq 2$。定义 e

$$\psi_{16}(\alpha)(v) = \begin{cases} \phi_{\{1,2\}}(\alpha\mid_{G_3})(v), & \text{if } v \in V(G_3); \\ \phi_{\emptyset}(\alpha\mid_{G_2})(v), & \text{if } v \in V(G_2); \\ \alpha(v), & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{4.37}$$

令 $\beta = \psi_{16}(\alpha)$。由 ψ_{16}的构造容易看出，$\beta(v_0) = 1$ 且$\beta(v_1) = \beta(v_2) = \beta(v_3) = 0$。此外，要么$G_2^{\beta} \in X_{\{1,2\},\,m}$ 且$G_3^{\beta} \in X_{\emptyset,\,n}$，要么$G_2^{\beta} \in X_{\emptyset,\,m}$且$G_3^{\beta} \in X_{\{1,2\},\,n}$。由此可得 $\beta \in M_{16}$。

令 $I_{16} = \{\psi_{16}(\alpha)\colon\ \alpha \in N_{16}\} \subseteq M_{16}$。对于任意 $\beta \in I_{16}$，定义 $\varphi_{16}\colon\ I_{16} \to N_{16}$如下：

$$\varphi_{16}(\beta)(v) = \begin{cases} \phi^{-1}(\beta\mid_{G_2})(v), & \text{if } v \in V(G_2); \\ \phi^{-1}(\beta\mid_{G_3})(v), & \text{if } v \in V(G_3); \\ \beta(v), & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{4.38}$$

显然，对于任意 $\alpha \in N_{16}$，$\varphi_{16}(\psi_{16}(\alpha)) = \alpha$。由此可知，$\psi_{16}$ 是一个单射。

ˆ令 T 和 $\overline{T}$如定义3.14所述。根据 ψ_{16}的定义，我们有 $\alpha(v) = \beta(v)$，对于任意 $v \in T$。由命题3.15，我们得到

$$X_{T_{3,m,n}}^{\alpha} + X_{T_{3,m,n}}^{\beta} = X_{\overline{T}}^{\alpha}(X_{\hat{T}}^{\alpha} + X_{\hat{T}}^{\beta}). \tag{4.39}$$

由于 T 的二分划分为 $(r_2+r_3+k_2+k_3+1,\ r_2+r_3+2)$，我们可知

$$X_{\hat{T}}^{\alpha} = X_T =_{2s} s_{(r_2+r_3+k_2+k_3+1,r_2+r_3+2)} - s_{(r_2+r_3+k_2+k_3,r_2+r_3+3)}. \tag{4.40}$$

此外，根据 ψ_{16} 的构造，无论哪种情况，$\hat{T}^{\beta}$ 都是由 r_2+r_3+2 个 K_2 的副本与 k_2+k_3-1 个孤立顶点作不交并得到的。因此，

$$X_{\hat{T}}^{\beta}=\frac{1}{2^2}(2s_{(1,1)})^{r_2+r_3+2}s_1^{k_2+k_3-1}\geq_{2s} s_{(r_2+r_3+k_2+k_3,r_2+r_3+3)}. \tag{4.41}$$

将（4.40）和（4.41）代入（4.39），得到 $X^{\alpha}_{T_3,\,m,\,n}+X^{\beta}_{T_3,\,m,\,n}\geq_{2s}0$。 □

引理 4.17。存在一个单射 ψ_{17} 从 N_{17} 到 M_{17}。此外，$X^{\alpha}_{T_3,\,m,\,n}+X^{\psi_{17}}_{T_3(\alpha),\,m,\,n}$ 是 *2-s-*正的。

证明。给定 $\alpha\in N_{17}$，根据定义可知，$\alpha(v_0)=\alpha(v_1)=\alpha(v_3)=1$，$\alpha(v_2)=0$，$G_2^{\alpha}\notin X_{1,\,m}$ 以及 $k_3\geq 1$。定义

$$\psi_{17}(\alpha)(v)=\begin{cases}2, & \text{if } v=v_0;\\ \phi_{\emptyset}(\alpha\restriction_{G_1})(v), & \text{if } v\in V(G_1);\\ \phi_1(\alpha\restriction_{G_3})(v), & \text{if } v\in V(G_3);\\ \alpha(v), & \text{otherwise.}\end{cases} \tag{4.42}$$

置 $\beta=\psi_{17}(\alpha)$。由 ψ_{17} 的构造，容易看出 $\beta(v_0)=2$，$\beta(v_1)=\beta(v_2)=\beta(v_3)=0$。此外 $G_1^{\beta}\in X_{\emptyset,\,3}$，$G_3^{\beta}\in X_{1,\,n}$ 以及 $G_2^{\beta}=G_2^{\alpha}\notin X_{1,\,m}$。这意味着$\beta\in M_{17}$。

令 $I_{17}=\{\psi_{17}(\alpha)\colon\ \alpha\in N_{17}\}\subseteq M_{17}$。对于任意 $\beta\in I_{17}$，定义 $\varphi_{17}\colon\ I_{17}\to N_{17}$ 如下 s:

$$\varphi_{17}(\beta)(v)=\begin{cases}1, & \text{if } v=v_0;\\ \phi^{-1}(\beta\restriction_{G_1})(v), & \text{if } v\in V(G_1);\\ \phi^{-1}(\beta\restriction_{G_3})(v), & \text{if } v\in V(G_3);\\ \beta(v), & \text{otherwise.}\end{cases} \tag{4.43}$$

显然，对于任意 $\alpha\in N_{17}$，$\varphi_{17}(\psi_{17}(\alpha))=\alpha$。由此可知 ψ_{17} 是一个单射。

与引理 4.16类似，令 T 表示 T_3^{α}中的连通分支，$m,\,n$ 包含 $\hat{v}_0^{\alpha}$。此外，令 T 和 T 如定义 3.14所述。假设

$$\#\{j\colon\alpha(v_{1j})=\alpha(v'_{1j})=1\}=r_1,\quad\text{and}\quad\#\{j\colon\alpha(v_{3j})=\alpha(v'_{3j})=1\}=r_3.$$

我们注意到 T具有二分划分（$r_1+r_3+k_1+k_3+1$，r_1+r_3+2）。由于 T是 s中唯一可能的非 2- 正连通分支$T^{\alpha}_{3,\,m,\,n}$根据推论 2.7，我们有 $k_1+k_3\geq 3$。因此

$$X_T=X_{\hat{T}}^{\alpha}=_{2s}s_{(r_1+r_3+k_1+k_3+1,r_1+r_3+2)}-s_{(r_1+r_3+k_1+k_3,r_1+r_3+3)}. \tag{4.44}$$

根据 ψ_{17}的构造，我们有 $\alpha(v) = \beta(v)$，对任意 $v \in V(T)$。利用命题 3.15，我们推得

$$X^{\alpha}_{T_{3,m,n}} + X^{\beta}_{T_{3,m,n}} = (X^{\alpha}_{\hat{T}} + X^{\beta}_{\hat{T}})X^{\alpha}_{\overline{T}}. \tag{4.45}$$

根据 ψ_{17} 的构造，我们得出 $\hat{T}^{\beta}$ 是 K_2 的 r_1+r_3+2 个副本与 k_1+k_3-1 个孤立顶点的不交并。由此得到

$$X^{\beta}_{\hat{T}} = \frac{1}{2^2}(2s_{(1,1)})^{r_1+r_3+2}s_1^{k_1+k_3-1} \geq_{2s} s_{(r_1+r_3+k_1+k_3,r_1+r_3+3)}. \tag{4.46}$$

代入 (4.44) 和 (4.46) 代入 (4.45)，我们得出 $X^{\alpha}_{T_{3,m,n}} + X^{\beta}_{T_{3,m,n}} \geq_{2s} 0$. □

引理 4.18. 存在一个从 N_{18} 到 M_{18} 的单射 ψ_{18}。此外，$X^{\alpha}_{T_{3,\,m,\,n}} + X^{\psi_{18}}_{T_3(\alpha),\,m,\,n}$ 是 *2-s-*正的。

证明。给定 $\alpha \in N_{18}$，根据定义可知 $\alpha(v_0) = \alpha(v_1) = \alpha(v_3) = 1$, $\alpha(v_2) = 0$,$G^{\alpha}_2 \notin X_{1,m}$ 和 $k_3 = 0$。令 T 表示 $T^{\alpha}_{3,\,m,\,n}$ 中包含 v^{α}_0 的连通分支。假设

$$\#\{j\colon \alpha(v_{1j}) = \alpha(v'_{1j}) = 1\} = r_1, \quad \text{and} \quad \#\{j\colon \alpha(v_{3j}) = \alpha(v'_{3j}) = 1\} = r_3.$$

由 $k_3 = 0$，可知 T的二分划分为 $(r_1+r_3+k_1+1, r_1+r_3+2)$。由于在 T^{α}_3,$_{m,n}$ 中，T^{α} 是唯一可能的非 2-*s*-正连通分支，由推论 2.7 可得 $k_1 \geq 3$，进而得到 $3 = r_1+k_1 \geq k_1 \geq 3$。因此 $r_1 = 0$ 和 $k_1 = 3$。由此得到$\alpha(v_{11}) = \alpha(v_{12}) = \alpha(v_{13}) = 1$ 以及 $\alpha(v'_{11}) = \alpha(v'_{12}) = \alpha(v'_{13}) = 0$。定义

$$\psi_{18}(\alpha)(v) = \begin{cases} 1, & \text{if } v \in \{v'_{11}, v'_{12}\}; \\ 0, & \text{if } v \in \{v_3, v_{13}\}; \\ \alpha(v), & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{4.47}$$

令 $\beta = \psi_{18}(\alpha)$，不难验证 $\beta \in M_{18}$。

令 $I_{18} = \{\psi_{18}(\alpha)\colon \alpha \in N_{18}\} \subseteq M_{18}$。对于任意 $\beta \in I_{18}$，定义 $\varphi_{18}\colon I_{18} \to N_{18}$如下:

$$\varphi_{18}(\beta)(v) = \begin{cases} 0, & \text{if } v \in \{v'_{11}, v'_{12}\}; \\ 1, & \text{if } v \in \{v_3, v_{13}\}; \\ \beta(v), & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{4.48}$$

显然，对于任意 $\alpha \in N_{18}$，都有 $\varphi_{18}(\psi_{18}(\alpha)) = \alpha$。这表明 ψ_{18} 是一个单射。

设 T 如定义3.14中所定义，设 T_1 表示$T_{3,\,m,\,n}$ 中由$V(T) \cup \{v'_{11}, v'_{12}\}$导出的子图，并设 T_1 表示$T_{3,\,m,\,n}$中由 $\overline{V}(T_{3,\,m,\,n}) \setminus V(T_1)$导出的子图。

由 $\alpha(v'_{11}) = \alpha(v'_{12}) = 0$，可得 $T = T_1^\alpha$，因此 T_1^α也是$T_{3,\ m,\ n}^\alpha$中的一个连通分支。此外，$\alpha(v) = \beta(v)$ 对任意 $v \in T_1$成立。利用命题3.15，我们推导出

$$X^\alpha_{T_{3,m,n}} + X^\beta_{T_{3,m,n}} = (X^\alpha_{T_1} + X^\beta_{T_1})X^\alpha_{\overline{T}_1}. \tag{4.49}$$

由于 T具有二分划分 $(r_3+4,\ r_3+2)$ 和 $T = T_1^\alpha$，我们得到

$$X^\alpha_{T_1} = X_T = s_{(r_3+4,r_3+2)} - s_{(r_3+3,r_3+3)}. \tag{4.50}$$

此外，根据 ψ_{18}的构造，见图 4.3 中的示例，我们有 T_1^β 由一个蜘蛛图 $S(1,2^2)$ 和 r_3 个互不相交的 K_2组成。

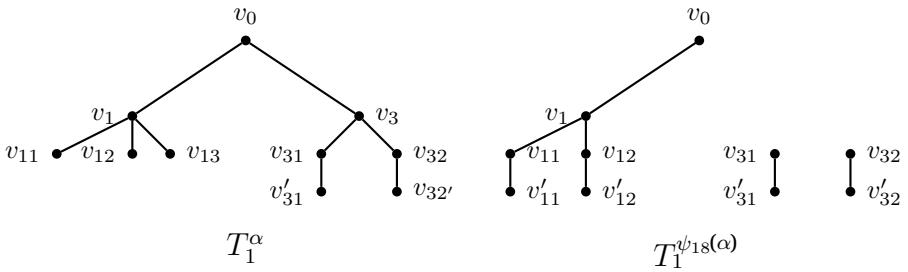


图 4.3：T_1^α和 $T^{\psi_{18}(\alpha)}{}_1$ $(\alpha \in N_{18})$。

Thus

$$X^\beta_{T_1} =_{2s} s_{(3,3)}(2s_{(1,1)})^{r_3} =_{2s} 2^{r_3}s_{(r_3+3,r_3+3)}. \tag{4.51}$$

将 (4.50) 和 (4.51) 代入 (4.49），我们得到

$$X^\alpha_{T_{3,m,n}} + X^\beta_{T_{3,m,n}} \geq_{2s} 0.$$

□

引理 4.19。存在一个单射 ψ_{19} 从 N_{19} 到 M_{19}。此外，$X^\alpha_{T_{3,\ m,\ n}} + X^{\psi_{19}}_{T_3{}(\alpha)\ ,\ m,\ n}$ 是 *2-s*-正的。

证明。此引理的证明类似于引理 4.17。我们给出 ψ_{19} 的显式映射，并省略其他细节。

$$\psi_{19}(\alpha)(v) = \begin{cases} 2, & \text{if } v = v_0; \\ \phi_2(\alpha\mid_{G_1})(v), & \text{if } v \in V(G_1); \\ \phi_\emptyset(\alpha\mid_{G_3})(v), & \text{if } v \in V(G_3); \\ \alpha(v), & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{4.52}$$

□

引理 4.20。 存在一个从 N_{20} 到 M_{20}的单射 ψ_{20}。此外，$X^{\alpha}_{T_{3,\ m,\ n}} + X^{\psi_{20}}_{T_3\ (\alpha)\ ,\ m,\ n}$ 是 *2-s*-正的。

证明。 这个引理的证明与引理 4.17 的证明类似。注意，$T^{\alpha}_{3,m,n}$ 是非 2-*s*-正的，这意味着 $k_3 \geq 2$。我们给出 ψ_{20} 的显式映射，并省略其他细节。

$$\psi_{20}(\alpha)(v) = \begin{cases} 2, & \text{if } v = v_0; \\ \phi_2(\alpha\mid_{G_3})(v), & \text{if } v \in V(G_3); \\ \phi_{\emptyset}(\alpha\mid_{G_1})(v), & \text{if } v \in V(G_1); \\ \alpha(v), & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{4.53}$$

□

引理 4.21。 存在一个从 N_{21} 到 M_{21} 的单射 ψ_{21}。此外，$X^{\alpha}_{T_{3,m,n}} + X^{\psi_{21}}_{T_3\ (\alpha)\ ,m,n}$ 是 *2-s*-正的。

证明。 这个引理的证明与引理 4.17 的证明类似。我们给出 ψ_{21} 的显式映射，并省略其他细节。

$$\psi_{21}(\alpha)(v) = \begin{cases} 2, & \text{if } v = v_0; \\ \phi_2(\alpha\mid_{G_2})(v), & \text{if } v \in V(G_2); \\ \phi_{\emptyset}(\alpha\mid_{G_1})(v), & \text{if } v \in V(G_1); \\ \alpha(v), & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{4.54}$$

□

引理 4.22。 存在一个从 N_{22} 到 M_{22} 的单射 ψ_{22}。此外，$X^{\alpha}_{T_{3,m,n}} + X^{\psi_{22}}_{T_3\ (\alpha)\ ,m,n}$ 是 *2-s*-正的。

证明。 给定 $\alpha \in N_{22}$，根据定义，我们有 $\alpha(v_0) = \alpha(v_1) = \alpha(v_2) = 1$, $\alpha(v_3) = 0$, $G^{\alpha}_3 \notin X_{1,n}$, $k_2 \leq 1$ 和 $k_1 = 2$。令 T 表示 $T^{\alpha}_{3,m,n}$ 中包含 v^{α}_0 的连通分支。假设

$$\#\{j\colon \alpha(v_{1j}) = \alpha(v'_{1j}) = 1\} = r_1, \quad \text{and} \quad \#\{j\colon \alpha(v_{2j}) = \alpha(v'_{2j}) = 1\} = r_2.$$

我们看到 T具有二分划分（$r_1+r_2+k_1+k_2+1$, r_1+r_2+2）。由于 T是唯一可能的非 2-*s*-正连通分支，位于 $T^{\alpha}_{3、\ m、\ n}$ 中，由推论 2.7，我们有 $k_1+k_2 \geq 3$。结合 $k_1 = 2$ 与 $k_2 \leq 1$，我们得到 $k_2 = 1$。由命题 3.20，我们发现

即 T_3^α、$_{m,\ n}$ 中不存在孤立顶点。特别地，G_3^α 中不存在孤立顶点，这意味着 $G_3^\alpha \notin X_{2,\ n}$。定义

$$\psi_{22}(\alpha)(v) = \begin{cases} 2, & \text{if } v = v_0; \\ \phi_1(\alpha\mid_{G_2})(v), & \text{if } v \in V(G_2); \\ \phi_\emptyset(\alpha\mid_{G_1})(v), & \text{if } v \in V(G_1); \\ \alpha(v), & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{4.55}$$

证明的其余部分与引理 4.17的证明类似。详细证明从略。

□

引理 4.23. 存在一个从 N_{23} 到 M_{23}的单射 ψ_{23}。此外，$X^\alpha_{T_{3,\ m,\ n}} + X^{\psi_{23}}_{T_3(\alpha),\ m,\ n}$ 是 *2-s-*正的。

证明。 该引理的证明与引理 4.18的证明类似。我们给出 的显式映射， ψ_{23} 其余细节从略。

$$\psi_{23}(\alpha)(v) = \begin{cases} 1, & \text{if } v \in \{v'_{11}, v'_{12}\}; \\ 0, & \text{if } v \in \{v_2, v_{12}\}; \\ \alpha(v), & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{4.56}$$

作为说明，考虑以下示例。 □

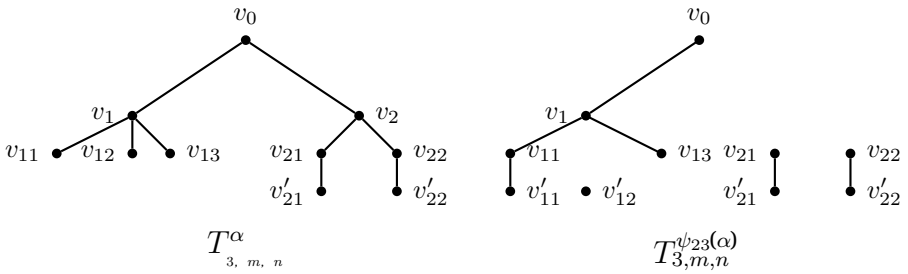


图 4.4: ψ_{23} 的一个示例。

引理 4.24. 存在一个从 N_{24} 到 M_{24} 的单射 ψ_{24}。此外，$X^\alpha_{T_{3,m,n}} + X^{\psi_{24}}_{T_3(\alpha),m,n}$ 是 *2-s-*正的。

证明。 本引理的证明类似于引理 4.17。我们给出

ψ_{24} 的显式映射，并省略其他细节。

$$\psi_{24}(\alpha)(v)=\begin{cases}2, & \text{if } v=v_0;\\ \phi_{\emptyset}(\alpha\mid_{G_1})(v), & \text{if } v\in V(G_1);\\ \phi_1(\alpha\mid_{G_2})(v), & \text{if } v\in V(G_2);\\ \alpha(v), & \text{otherwise.}\end{cases} \tag{4.57}$$

□

引理 4.25. 存在一个从 N_{25} 到 M_{25} 的单射 ψ_{25}。此外，$X^{\alpha}_{T_{3,m,n}}+X^{\psi_{25}}_{T_3{}^{(\alpha)},m,n}$ 是 *2-s*-正的。

证明。给定 $\alpha\in N_{25}$，由定义我们有 $\alpha(v_0)=\alpha(v_1)=\alpha(v_2)=1$, $\alpha(v_3)=0$, $G_3^{\alpha}\in X_{1,n}$ 和 $k_2=0$。设 T 表示 $T^{\alpha}_{3,m,n}$ 中包含 v_0^{α} 的连通分支。假设

$$\#\{j\colon \alpha(v_{1j})=\alpha(v'_{1j})=1\}=r_1,\quad \text{and}\quad \#\{j\colon \alpha(v_{2j})=\alpha(v'_{2j})=1\}=r_2.$$

我们看到 T 具有二分划分 $(r_1+r_2+k_1+1, r_1+r_2+2)$。由于 T 是 $T^{\alpha}_{3,m,n}$ 中唯一可能的非 2-*s*-正连通分支，由推论 2.7，我们有 $k_1\geq 3$。结合 $3=k_1+r_1\geq k_1\geq 3$，我们推出 $k_1=3$ 和 $r_1=0$。因此 $\alpha(v_{11})=\alpha(v_{12})=\alpha(v_{13})=1$ 且 $\alpha(v'_{11})=\alpha(v'_{12})=\alpha(v'_{13})=0$。定义

$$\psi_{25}(\alpha)(v)=\begin{cases}1, & \text{if } v\in\{v'_{11},v'_{12}\};\\ 0, & \text{if } v\in\{v_{11},v_2\};\\ \alpha(v), & \text{otherwise.}\end{cases} \tag{4.58}$$

我们给出一个示例以作说明。

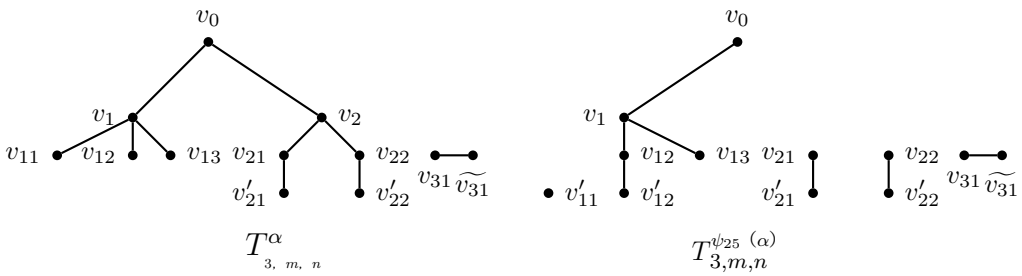


图 4.5： ψ_{25}的一个示例。

证明的其余部分与引理4.18的证明类似。详细证明从略。

□

引理4.26。 存在一个从 N_{26} 到 M_{26}的单射 ψ_{26}。此外，$X^{\alpha}_{T_3,\ m,\ n} + X^{\psi_{26}}_{T_3\ (\alpha)\ ,\ m,\ n}$ 是 *2-s-*正的。

证明。给定 $\alpha \in N_{26}$，由定义可知 $\alpha(v_0) = \alpha(v_1) = \alpha(v_2) = \alpha(v_3) = 1$，$k_1 + k_2 + k_3 \geq 4$ 且 $k_1 = 3$、 $k_2 \geq 2$、 $k_3 \geq 2$ 中至少有一个为真。共有三种情况。

情况 1。 $k_1 = 3$。在这种情况下，定义

$$\psi_{26}(\alpha)(v) = \begin{cases} 2, & \text{if } v = v_0; \\ \phi_{\{1,2\}}(\alpha\mid_{G_1})(v), & \text{if } v \in V(G_1); \\ \phi_{\emptyset}(\alpha\mid_{G_2})(v), & \text{if } v \in V(G_2); \\ \phi_{\emptyset}(\alpha\mid_{G_3})(v), & \text{if } v \in V(G_3). \end{cases} \tag{4.59}$$

令 $\beta = \psi_{26}(\alpha)$。显然 $G_1^{\beta} \in X^3_{\{1,2\},3}$， $G_2^{\beta} \in X_{\emptyset,m}$ 且 $G_3^{\beta} \in X_{\emptyset,n}$。由此可得$\beta \in M_{26}$。

情形 2。 $k_1 \leq 2$ 且 $k_2 \geq 2$。在这种情况下，定义

$$\psi_{26}(\alpha)(v) = \begin{cases} 2, & \text{if } v = v_0; \\ \phi_{\emptyset}(\alpha\mid_{G_1})(v), & \text{if } v \in V(G_1); \\ \phi_{\{1,2\}}(\alpha\mid_{G_2})(v), & \text{if } v \in V(G_2); \\ \phi_{\emptyset}(\alpha\mid_{G_3})(v), & \text{if } v \in V(G_3). \end{cases} \tag{4.60}$$

令 $\beta = \psi_{26}(\alpha)$。显然 $G_2^{\beta} \in X_{\{1,2\},m}$， $G_1^{\beta} \in X_{\emptyset,3}$ 且 $G_3^{\beta} \in X_{\emptyset,n}$。由此可得$\beta \in M_{26}$。

情形 3. $k_1 \leq 2, k_2 \leq 1$ 和 $k_3 \geq 2$。在这种情况下，定义

$$\psi_{26}(\alpha)(v) = \begin{cases} 2, & \text{if } v = v_0; \\ \phi_{\emptyset}(\alpha\mid_{G_1})(v), & \text{if } v \in V(G_1); \\ \phi_{\emptyset}(\alpha\mid_{G_2})(v), & \text{if } v \in V(G_2); \\ \phi_{\{1,2\}}(\alpha\mid_{G_3})(v), & \text{if } v \in V(G_3). \end{cases} \tag{4.61}$$

令 $\beta = \psi_{26}(\alpha)$。显然， $G_3^{\beta} \in X_{\{1,2\},\ n}$, $G_1^{\beta} \in X_{\emptyset,\ 3}$ 和 $G_2^{\beta} \in X_{\emptyset,\ m}$。这意味着$\beta \in M_{26}$。

因此，在每种情况下，我们都有 $\beta \in M_{26}$。令 $I_{26} = \{\psi_{26}(\alpha)\colon\ \alpha \in N_{26}\} \subseteq M_{26}$。对于任意$\beta \in I_{26}$，定义 $\varphi_{26}\colon\ I_{26} \to N_{26}$ 如下：

$$\varphi_{26}(\beta)(v) = \begin{cases} 1, & \text{if } v = v_0; \\ \phi^{-1}(\beta\mid_{G_1})(v) & \text{if } v \in V(G_1); \\ \phi^{-1}(\beta\mid_{G_2})(v) & \text{if } v \in V(G_2); \\ \phi^{-1}(\beta\mid_{G_3})(v) & \text{if } v \in V(G_3). \end{cases} \tag{4.62}$$

Cle显然，对于任意 $\alpha \in N_{26}$， $\varphi_{26}(\psi_{26}(\alpha)) = \alpha$ 。由此可知， ψ_{26} 是一个单射 .

设 T 表示$T_{3,\,m,\,n}^{\alpha}$中包含 v_0^{α}的连通分支。假设

$$\#\{(i,j)\colon \alpha(v_{ij}) = \alpha(v'_{ij}) = 1\} = r.$$

我们看到 T具有二分划分（$r + k_1 + k_2 + k_3 + 1$， $r + 3$）。由命题2.6，我们有 e

$$X_T =_{2s} s_{(r+k_1+k_2+k_3+1,r+3)} - s_{(r+k_1+k_2+k_3,r+4)}. \tag{4.63}$$

ˆ此外，定义 T 和 T 如定义3.14中所述。由 ψ_{26}的构造可见，在每种情形下 α（v）$= \beta$（v）对任意 $v \in T$成立。由命题3.15，¯我们有

$$X^{\alpha}_{T_{3,m,n}} + X^{\beta}_{T_{3,m,n}} = (X^{\alpha}_{\hat{T}} + X^{\beta}_{\hat{T}})X^{\alpha}_{\overline{T}}. \tag{4.64}$$

由 ψ_{26}的构造可见，在每种情形下ˆT^{β} 由 $r + 3$ 个K_2 的副本和 $k_1 + k_2 + k_3 - 2$ 个孤立顶点组成。由此可得

$$X^{\beta}_{\hat{T}} = \frac{1}{2^3}(2s_{(1,1)})^{r+3} s_1^{k_1+k_2+k_3-2} \geq_{2s} s_{(r+k_1+k_2+k_3,r+4)}. \tag{4.65}$$

将（4.63）和（4.65）代入（4.64），我们得到$X^{\alpha}_{T_{3,\,m,\,n}} + X^{\beta}_{T_{3,\,m,\,n}} \geq_{2s} 0$。 □

引理 4.27. 存在一个从 N_{27} 到 M_{27}的单射 ψ_{27}。此外，$X^{\alpha}_{T_{3,\,m,\,n}} + X^{\psi_{27}}_{T_3\,(\alpha)\,,\,m,\,n}$ 是 *2-s-*正的。

证明。给定 $\alpha \in N_{27}$，根据定义可知 $\alpha(v_0) = \alpha(v_1) = \alpha(v_2) = \alpha(v_3) = 1$，$k_1 = 2$且 $k_2 = k_3 = 1$。定义

$$\psi_{27}(\alpha)(v) = \begin{cases} 2, & \text{if } v = v_0; \\ \phi_1(\alpha\mid_{G_1})(v), & \text{if } v \in V(G_1); \\ \phi_{\emptyset}(\alpha\mid_{G_2})(v), & \text{if } v \in V(G_2); \\ \phi_1(\alpha\mid_{G_3})(v), & \text{if } v \in V(G_3). \end{cases} \tag{4.66}$$

令 $\beta = \psi_{27}(\alpha)$。显然，$G_1^{\beta} \in X^2_{1,\,3}$, $G_2^{\beta} \in X^1_{\emptyset,\,m}$ 且$G_3^{\beta} \in X^1_{1,\,n}$。这意味着$\beta \in M_{27}$。

令 $I_{27} = \{\psi_{27}(\alpha)\colon \alpha \in N_{27}\} \subseteq M_{27}$。对于任意 $\beta \in I_{27}$，定义 $\varphi_{27}\colon I_{27} \to N_{27}$如下 s:

$$\varphi_{27}(\beta)(v) = \begin{cases} 1, & \text{if } v = v_0; \\ \phi^{-1}(\beta\mid_{G_1})(v), & \text{if } v \in V(G_1); \\ \phi^{-1}(\beta\mid_{G_2})(v), & \text{if } v \in V(G_2); \\ \phi^{-1}(\beta\mid_{G_3})(v), & \text{if } v \in V(G_3). \end{cases} \tag{4.67}$$

Cle对于任意 $\alpha \in N_{27}$， $\varphi_{27}(\psi_{27}(\alpha)) = \alpha$ 。由此可得， ψ_{27} 是一个单射 .

ˆ 令 T表示 T_3^{α}中的连通分支， m， n 包含 v_0^{α}。此外，定义 T和T 如定义 3.14所示。假设
—

$$\#\{(i,j)\colon \alpha(v_{ij}) = \alpha(v'_{ij}) = 1\} = r.$$

我们看到， T具有二分划分（$r+5$， $r+3$）。因此

$$X_T = X_{\hat{T}}^{\alpha} =_{2s} s_{(r+5,r+3)} - s_{(r+4,r+4)}. \tag{4.68}$$

此外，根据 ψ_{27}的构造，我们有 $\alpha(v) = \beta(v)$，对任意 $v \in T$均成立。由命题3.15，可推得

$$X_{T_{3,m,n}}^{\alpha} + X_{T_{3,m,n}}^{\beta} = (X_{\hat{T}}^{\alpha} + X_{\hat{T}}^{\beta}) X_{\overline{T}}^{\alpha}. \tag{4.69}$$

此外，同样根据 ψ_{27}的构造，我们看到ˆT^{β} 由 $r+3$ 个 K_2 的副本和两个孤立顶点组成。因此

$$X_{\hat{T}}^{\beta} = \frac{1}{2^3}(2s_{(1,1)})^{r+3} s_1^2 =_{2s} 2^r (s_{(r+5,r+3)} + s_{(r+4,r+4)}). \tag{4.70}$$

将（4.68）和（4.70）代入（4.69），得到$X_{T_3,\ m,\ n}^{\alpha} + X_{T_3,\ m,\ n}^{\beta} \geq_{2s} 0$。 □

为了描述$T_{3,\ m,\ n}^{\alpha}$ 在 $\alpha \in N_{28} \cup N_{29}$时的结构，我们需要引入以下定义。

定义 4.28. 对于固定的 $\alpha \in N_{28} \cup N_{29} \cup N_{30}$，令 $\alpha_{i,j}$ 表示整数对 $(\alpha(v_{ij})\ \alpha(v'_{ij}))$，其中 v_{ij}, $v'_{ij} \in V(T_{3,m,n})$。

引理 4.29. 存在一个从 N_{28} 到 M_{28} 的单射 ψ_{28}。此外，$X_{T_{3,m,n}}^{\alpha} + X_{T_3\ (\alpha)\ ,m,n}^{\psi_{28}}$ 是 *2-s-*正的。

证明。给定 $\alpha \in N_{28}$，根据定义可知 $\alpha(v_0) = \alpha(v_1) = \alpha(v_2) = \alpha(v_3) = 1$ 和 $k_1 + k_2 + k_3 = 0$。此外，存在 v_{ij} 使得 $\alpha(v_{ij}) = 1$ 且 $\sum_{v \in V(T_3,m,n)} \alpha(v) < 2m + 2n + 10$。由 $k_1 + k_2 + k_3 = 0$ 可知，不存在 k, l 使得 $\alpha_{k,l} = (1, 0)$。由推论 2.8 可知，对于任意顶点 v_{kl}， $\alpha(v_{kl}) \leq 1$ 。因此，$\alpha_{k,l}$ 必须从以下四种情形中选取： $\{(0, 0), (0, 1), (1, 1), (0, 2)\}$。令 T 表示 $T_3^{\alpha},_{m,n}$ 中包含 v_0^{α} 的连通分支。假设

$$\#\{(k,l)\colon \alpha_{k,l} = (1,1)\} = r \quad \text{and} \quad \#\{(k,l)\colon \alpha_{k,l} = (0,2)\} = h. \tag{4.71}$$

于是显然 T具有二分划分（$r+3, r+1$）。由命题3.20可知，$T_{3,m,n}^{\alpha}$中没有孤立顶点，这意味着不存在（k, l）使得$\alpha_{k,l} = (0, 1)$。此外，由 $\sum_v \alpha(v) < 2m + 2n + 10$ 可知存在$\alpha_{p,\ q} = (0, 0)$。我们首先选取

这样的 p 使其最大，然后在相同的值 p中选取最小的 q 。另一方面，根据 N_{28}的定义，存在（i, j）使得 $\alpha(v_{ij}) = 1$，这意味着$\alpha_{i,j} = (1,1)$。我们首先选取这样的 i 使其最小，然后在相同的值 i中选取最小的 j。定义

$$\psi_{28}(\alpha)(v) = \begin{cases} 1, & \text{if } v = v_{pq}; \\ 0, & \text{if } v = v_{ij}; \\ \alpha(v), & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{4.72}$$

集合 $\beta = \psi_{28}(\alpha)$。根据 ψ_{28} 的构造，显然 $\beta_{p,q} = (1, 0)$、$\beta_{i,j} = (0, 1)$ 以及所有其他的 $\beta_{k,l} = \alpha_{k,l} \in \{(0, 2)、(1, 1)、(0, 0)\}$，对于任意 $(k, l) \notin \{(i, j)、(p, q)\}$。换言之，存在唯一的 (p, q) 使得 $\beta_{p,q} = (1, 0)$，并且存在唯一的 (i, j) 满足 $\beta_{i,j} = (0, 1)$。由此得到 $\beta \in M_{28}$。

接下来我们证明 ψ_{28} 是一个单射。设 $I_{28} = \{\psi_{28}(\alpha)\colon \alpha \in N_{28}\} \subseteq M_{28}$。对于任意 $\beta \in I_{28}$，令 (i, j) 为满足 $\beta_{i, j} = (0, 1)$ 的唯一一对，并令 (p, q) 为满足 $\beta_{p, q} = (1, 0)$ 的唯一一对。我们如下构造一个映射 $\varphi_{28}\colon I_{28} \to N_{28}$：

$$\varphi_{28}(\beta)(v) = \begin{cases} 0, & \text{if } v = v_{pq}; \\ 1, & \text{if } v = v_{ij}; \\ \beta(v), & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{4.73}$$

容易验证，β 中的有序对 (p, q) 与构造 ψ_{28}中的有序对 (p, q) 相同。此外，β中的有序对 (i, j) 与构造 ψ_{28}中的有序对 (i, j) 相同。因此，对于任意 $\alpha \in N_{28}$，$\varphi_{28}(\psi_{28}(\alpha)) = \alpha$ 。这说明 ψ_{28} 是一个单射。

接下来我们计算 $X^{\alpha}_{T_{3,\ m,\ n}}$。注意，$r$ 和 h 的定义与（4.71）中的相同。于是，$T^{\alpha}_{3,\ m,\ n}$由 T 以及 h 个 K_2副本组成。由于 T有一个二分划分（$r + 3$，$r + 1$），利用命题2.6，

$$X^{\alpha}_{T_{3,m,n}} =_{2s} \frac{1}{2^h}(s_{(r+3,r+1)} - s_{(r+2,r+2)})(2s_{(1,1)})^h =_{2s} s_{(h+r+3,h+r+1)} - s_{(h+r+2,h+r+2)}. \tag{4.74}$$

现在我们计算$X^{\beta}_{T_{3,\ m,\ n}}$。令 T'表示$T^{\beta}_{3\ ,\ m,\ n}$中包含 v^{β}_0的连通分支。于是我们看到，T'有一个二分划分（$r + 2$，$r + 1$）。由命题2.6，可得 $X_{T'} =_{2s} s_{(r+2,r+1)}$。此外，$T^{\beta}_{3\ ,\ m,\ n}$由 h个 K_2副本以及一个孤立顶点 v'_{ij}（在 T'之外）组成。这说明

$$X^{\beta}_{T_{3,m,n}} = \frac{1}{2^h}X_{T'}(2s_{(1,1)})^h s_1 =_{2s} s_{(r+h+3,r+h+1)} + s_{(r+h+2,r+h+2)}. \tag{4.75}$$

结合（4.74）和（4.75），我们得到 $X^{\alpha}_{T_{3,\ m,\ n}} + X^{\beta}_{T_{3,\ m,\ n}} \geq_{2s} 0$。 □

引理 4.30。 存在一个从 N_{29} 到 M_{29}的单射 ψ_{29}。此外，$X^{\alpha}_{T_{3,\ m,\ n}} + X^{\psi_{29}}_{T_3\ (\alpha)\ ,\ m,\ n}$ 是 *2-s-*正的。

证明。给定 $\alpha \in N_{29}$，根据定义可知 $\alpha(v_0) = \alpha(v_1) = \alpha(v_2) = \alpha(v_3) = 1$ 且 $k_1 + k_2 + k_3 = 0$。此外，对于任意 i, j， $\alpha(v_{ij}) = 0$。使用与引理 4.29 相同的论证，可知对于任意 i, j， $\alpha_{i,j} \in \{(0, 2), (0, 0)\}$。定义

$$\psi_{29}(\alpha)(v) = \begin{cases} 2, & \text{if } v = v_1; \\ 0, & \text{if } v = v_0; \\ \alpha(v), & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{4.76}$$

显然， $\psi_{29}(\alpha) \in M_{29}$。

接下来证明 ψ_{29} 是一个单射。令 $I_{29} = \{\psi_{29}(\alpha)\colon\ \alpha \in N_{29}\} \subseteq M_{29}$。对于任意 $\beta \in I_{29}$，我们构造映射 $\varphi_{29}\colon\ I_{29} \to N_{29}$ 如下：

$$\varphi_{29}(\beta)(v) = \begin{cases} 1, & \text{if } v \in \{v_0, v_1\}; \\ \beta(v), & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{4.77}$$

显然，对于任意 $\alpha \in N_{29}$， $\varphi_{29}(\psi_{29}(\alpha)) = \alpha$。由此可知 ψ_{29} 是一个单射。

接下来计算 $X^{\alpha}_{T_{3,\ m,\ n}}$。假设

$$\#\{(i, j)\colon\ \alpha_{i,j} = (0, 2)\} = h.$$

使用与（4.74）中相同的论证，我们得到

$$X^{\alpha}_{T_{3,m,n}} =_{2s} s_{(h+3,h+1)} - s_{(h+2,h+2)}. \tag{4.78}$$

现在计算 $X^{\beta}_{T_{3,\ m,\ n}}$。显然， $T_3^{\beta}{}_{,\ m,\ n}$ 由 $(h + 1)$ 个 K_2 的副本和两个孤立顶点组成，即 v_2^{β} 和 v_3^{β}。因此

$$X^{\beta}_{T_{3,m,n}} = \frac{1}{2^{h+1}}(2s_{(1,1)})^{h+1}s_1^2 =_{2s} s_{(h+3,h+1)} + s_{(h+2,h+2)}. \tag{4.79}$$

结合（4.78）和（4.79），我们得到 $X^{\alpha}_{T_{3,\ m,\ n}} + X^{\beta}_{T_{3,\ m,\ n}} \geq_{2s} 0$。 □

引理 4.31。对于任意 $\alpha \in N_{30}$ 和 $k \neq m + n + 5$，我们有

$$[s_{(k,k)}]X^{\alpha}_{T_{3,m,n}} \geq 0.$$

证明。给定 $\alpha \in N_{30}$，由定义可知 $\alpha(v_0) = \alpha(v_1) = \alpha(v_2) = \alpha(v_3) = 1$ 且 $k_1 + k_2 + k_3 = 0$。此外 $\sum_v \alpha(v) = 2m + 2n + 10$。若 $[s_{(k,k)}]X^{\alpha}_{T_{3,m,n}} \neq 0$，则有 $2k = \sum_{v \in V(T_{3,m,n})} \alpha(v) = 2m + 2n + 10$。因此 $k = m + n + 5$。

□

定理 *1.4* 的证明。 显然，$T_{3,m,n}$ 的独立数为 $m+n+6$。假设

$$I_{T_{3,m,n}}(t) = \sum_{j=0}^{m+n+6} i_j t^j.$$

定义 ψ: $N \setminus N_{30} \to M$ 如下:

$$\psi(\alpha) = \psi_i(\alpha), \quad \text{if } \alpha \in N_i. \tag{4.80}$$

由引理4.1 $\sim$ 引理4.30，可知 ψ 是一个单射，并且

$$X^{\alpha}_{T_{3,m,n}} + X^{\psi(\alpha)}_{T_{3,m,n}} \geq_{2s} 0. \tag{4.81}$$

回忆一下， $I_i = \{\psi_i(\alpha)\colon \ \alpha \in N_i\} \subseteq M_i$。我们有

$$\begin{aligned} Y_{T_{3,m,n}} &= \sum_{\alpha\in N} X^{\alpha}_{T_{3,m,n}} + \sum_{\alpha\in M} X^{\alpha}_{T_{3,m,n}} \\ &= \sum_{i=1}^{29}\sum_{\alpha\in N_i}\left(X^{\alpha}_{T_{3,m,n}} + X^{\psi(\alpha)}_{T_{3,m,n}}\right) + \sum_{\substack{\alpha\in M \\ \alpha\notin\bigcup_{i=1}^{29} I_i}} X^{\alpha}_{T_{3,m,n}} + \sum_{\alpha\in N_{30}} X^{\alpha}_{T_{3,m,n}}. \end{aligned}$$

利用（4.81），我们有

$$\sum_{i=1}^{29}\sum_{\alpha\in N_i}\left(X^{\alpha}_{T_{3,m,n}} + X^{\psi(\alpha)}_{T_{3,m,n}}\right) \geq_{2s} 0.$$

根据 M 的定义，我们有 $X^{\alpha}_{T_{3,\ m,\ n}} \geq_{2s} 0$ 对每个 $\alpha \in M \setminus \bigcup_{i=1}^{29} I_i$ 均成立。此外，由引理4.31，对于任意 $k \neq m+n+5$ 和 $\alpha \in N_{30}$，我们有 $[s_{(k,k)}]X^{\alpha}_{T_{3,\ m,\ n}} \geq 0$。根据以上分析，对于 $1 \leq k \leq m+n+4$，我们有

$$[s_{(k,k)}]Y_{T_{3,m,n}} \geq 0$$

因此，由推论 2.5，我们有 $\{i_j\}_{j=0}^{m+n+5}$ 是对数凹的，由此可得数列$\{i_j\}_{j=0}^{m+n+5}$ 是单峰的。因此存在 k 使得

$$i_0 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \geq i_{k+1} \geq \cdots \geq i_{m+n+5}.$$

结合定理2.10可得

$$i_0 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \geq i_{k+1} \geq \cdots \geq i_{m+n+5} \geq i_{m+n+6}.$$

证明至此完成。 □

5 {v3}的独立集多项式的单峰性

$T_{3,\ m,}^{*}$

n

本节旨在证明定理 1.5。为此，我们首先列出对证明至关重要的两个性质。与第 4 节一样，我们将集合 $N' = \{\alpha:\ {X_{T_3,m,n}^{*}}^{\alpha}$ is non- 2-s-positive$\}$划分为四个子集 N_1', N_2', N_3'和 N_4'。此外，我们列出集合 $M' = \{\alpha$ 的三个两两不相交子集: ${X_{T_3,m,n}^{*}}^{\alpha}$ is 2-s-positive$\}$, 即 M_1', M_2'和 M_3'。此外，我们证明，对于每个 $i \in \{1,2,3\}$，都存在一个从 N_i'到 M_i' 的单射 Ψ_i，使得 $X_{T_3^*,m,n}^{\alpha} + X_{T_3^*}^{\Psi_i(\alpha)}{}_{,m,n} \geq_{2s} 0$；并且对于任意 $\alpha \in N_4'$和 $k \leq m+n+4$, 都有$^{[s_{(k,k)}]}X_{T_3^*,m,n}^{\alpha} = 0$。这样，仿照定理 1.4 的证明，我们便得到了定理 1.5 的证明。

我们首先证明关于映射 ψ （定义见（4.80）。

命题 5.1. 对于任意 $\alpha \in N \setminus N_{30}$，有

$$\alpha(v_{13}') = \psi(\alpha)(v_{13}'). \tag{5.1}$$

证明。通过验证（5.1）对每个 $\alpha \in N_i$都成立，即可验证此结果，其中$1 \leq i \leq 29$。事实上，由于将映射 ϕ_S 作用于$\alpha\ |_{G_1}$ 不会改变$\alpha(v_{13}')$ 的值，对任意 S，我们只需检查 ψ_{11}, ψ_{18}，ψ_{23}，ψ_{25} 和 ψ_{28}。在这五种情况下，均有 $\alpha(v_{13}') = \psi(\alpha)(v_{13}') = 0$。由此得到所需结果。 □

接下来我们记录一个在证明中至关重要的结果。

命题 5.2. 设 G 为一个图，并设 $v \in V(G)$。用 G_v 表示由 G 在 v处附加一条长度为2的路径所得到的图，该路径由两个新顶点 c、 d以及边 vc、 cd组成。对任意 α: $V(G_v) \to \mathbb{N}$，下列结论成立。

(1) 若 $\alpha(c) = 0$，则

$$X_{G_v}^{\alpha} = X_G^{\alpha} X_d^{\alpha}. \tag{5.2}$$

(2) 若 $\alpha(c) = 2$ 且 $X_{G_v}^{\alpha} \neq_{2s} 0$，则

$$X_{G_v}^{\alpha} = X_G^{\alpha} s_{(1,1)}. \tag{5.3}$$

(3) 若 $\alpha(c) = \alpha(d) = \alpha(v) = 1$，则

$$X_{G_v}^{\alpha} =_{2s} X_G^{\alpha} s_{(1,1)}. \tag{5.4}$$

(4) 若 $\alpha(c) = \alpha(d) = 1$ 且 $\alpha(v) = 0$，则

$$X_{G_v}^{\alpha} = X_G^{\alpha} 2 s_{(1,1)}. \tag{5.5}$$

证明。我们分别证明各个部分。

(1). 若 $\alpha(c) = 0$，则 G^α 与 d^α 以及 $G_v^\alpha = G^\alpha + d^\alpha$之间没有边。命题 3.3 立即给出 (5.2)。

(2). 若 $\alpha(c) = 2$，则由推论 2.8，条件 $X_{G_v}^\alpha \neq_{2s} 0$ 迫使 $\alpha(x)+\alpha(y) \leq 2$ 对任意边 $xy \in E(G_v)$ 成立。从而 $\alpha(v) = \alpha(d) = 0$。因此 $G_v^\alpha = G^\alpha + c^\alpha$。由命题3.3，我们得到

$$X_{G_v}^\alpha = X_G^\alpha X_c^\alpha = X_G^\alpha \frac{1}{2}(2s_{(1,1)}) = X_G^\alpha s_{(1,1)}. \tag{5.6}$$

(3). 若 $\alpha(c) = \alpha(d) = \alpha(v) = 1$，则令 T 为包含 v^α 的 G^αˆ ˆ的连通分支，并令 T' 为包含 v^α 的 G_v^α 的连通分支。按定义 3.14 定义 T、T' 和 T'。若 T 是非二分的，则 G^α 与 G_v^α 均为非二分的。由推论 2.8，我们得到

$$X_{G_v}^\alpha = 0 = 0 \cdot s_{(1,1)} = X_G^\alpha s_{(1,1)},$$

即（5.4）。

现假设 T具有二分划分（p，q）。由于 T'是由 T在 v^α处连接一条长度为2的路径得到的，因此它具有二分划分（$p+1$，$q+1$）。若 $p \geq q+2$，则有 $X_T =_{2s} s_{(p,q)} - s_{(p-1,q+1)}$ 和 $X_{T'} =_{2s} s_{(p+1,q+1)} - s_{(p,q+2)}$。若 $q \leq p \leq q+1$，则有 $X_T =_{2s} s_{(p,q)}$ 和 $X_{T'} =_{2s} s_{(p+1,q+1)}$。容易验证，在任一情形下，

$$X_{T'} =_{2s} X_T s_{(1,1)} \tag{5.7}$$

成立。

ˆ另一方面，注意到$G = T + T'$。利用命题3.3，我们得到

$$X_G^\alpha = X_{\hat{T}}^\alpha X_{\overline{T'}}^\alpha. \tag{5.8}$$

由命题3.15，我们得到

$$X_{G_v}^\alpha = X_{\hat{T}'}^\alpha X_{\overline{T'}}^\alpha. \tag{5.9}$$

显然 $X_T = X_{\hat{T}}^\alpha$且 $X_{T'} = X_{\hat{T}'}^\alpha$。由（5.7）、（5.8）和（5.9），我们推出（5.4）。

(4) 由于 $\alpha(c) = \alpha(d) = 1$ 和 $\alpha(v) = 0$，命题 3.3 可直接得到（5.5 ）. □

现在我们可以对 N_1'、N_2'、N_3' 和 N_4' 给出显式定义。令 T 为由 $V(T_{3,m,n}^*) \setminus \{x, y\}$ 诱导的 $T_{3,m,n}^*$ 的子图。显然，$T \cong T_{3,m,n}$。如本节开头所述，我们将集合 N' 划分为以下四个子集：

(1) $N_1' = \{\alpha \in N' : \alpha(x) \neq 1, \alpha\,|_T \notin N_{30}\}$;

(2) $N_2' = \{\alpha \in N' : \ \alpha\ (x)\ = \alpha\ (y)\ = 1, \ \alpha\mid_T \notin N_{30}\}$;

(3) $N_3' = \{\alpha \in N' : \ \alpha(x) = 1, \ \alpha(y) = 0, \ \sum_{v\in V(T)}\alpha(v) \leq 2m + 2n + 7\}$。

(4) $N_4' = \{\alpha \in N' : \ \alpha\mid_T \in N_{30}\} \cup \{\alpha \in N' : \ \alpha(x) = 1, \ \alpha(y) = 0, \ \sum_{v\in V(T)} \alpha(v) \geq 2m + 2n + 8\}$。

类似地，我们现在列出 M' 的三个两两不相交子集如下：

(1) $M_1' = \{\alpha \in M' : \ \alpha(x) \neq 1\}$; (2) $M_2' = \{\alpha \in M' : \ \alpha(x) = \alpha(y) = 1\}$;

(3) $M_3' = \{\alpha \in M' : \ \alpha(x) = 1, \ \alpha(y) = 0\}$。

接下来，我们构造三个单射 $\Psi_i : \ N_i' \to M_i'$，其中 $1 \leq i \leq 3$，并证明对于任意 $\alpha \in N_i'$，都有 $X^{\alpha}_{T^*_{3,\ m,\ n}} + X^{\Psi_i}_{T^*_{3}(\alpha),\ m,\ n} \geq_{2s} 0$。然后，我们采用与定理1.4的证明相同的方法，证明定理1.5。

引理 5.3。 存在一个从 N_1' 到 M_1'的单射 Ψ_1。此外，$X^{\alpha}_{T^*_{3,\ m,\ n}} + X^{\Psi_1}_{T^*_{3}(\alpha),\ m,\ n}$ 是 *2-s*-正的。

证明。 给定 $\alpha \in N_1'$，根据定义，我们看到 $\alpha(x) \neq 1$ 且 $\alpha\mid_T \notin N_{30}$。我们首先证明 X^{α}_T 不是 2-s-正的。分两种情况讨论。

情况 1. 若 $\alpha(x) = 0$，则由 (5.2)，

$$X^{\alpha}_{T^*_{3,m,n}} = X^{\alpha}_T X^{\alpha}_y. \tag{5.10}$$

由于 $T^{*\ \alpha}_{3,\ m,\ n}$ 是非 2-s-正的，且 y^{α} 始终是 s-正的，因此 X^{α}_T 是非 2-s-正的。

情形 2. 若 $\alpha(x) = 2$，则由 (5.3)，

$$X^{\alpha}_{T^*_{3,m,n}} = s_{(1,1)} X^{\alpha}_T. \tag{5.11}$$

同样，由于 $T^{*\ \alpha}_{3,\ m,\ n}$ 是非 2-s-正的，我们得出 X^{α}_T 是非 2-s-正的。

注意，推论 2.8 蕴含 $\alpha(x) \leq 2$，且根据 N_1' 的定义，我们有 $\alpha(x) \neq 1$。因此，在两种情形下都有 X^{α}_T是非 2-s-正的。换言之， $\alpha\mid_T \in N \setminus N_{30}$。

定义 Ψ_1 如下：

$$\Psi_1(\alpha)(v) = \begin{cases} \psi(\alpha\mid_T)(v), & \text{if } v \notin \{x, y\}; \\ \alpha(v), & \text{if } v \in \{x, y\}. \end{cases} \tag{5.12}$$

令 $\beta = \Psi_1(\alpha)$，我们接下来证明 $\beta \in M'_1$。由于 $\beta(x) = \alpha(x) \neq 1$，因此以下两种情况必有其一：$\beta(x) = 0$ 或 2。若 $\beta(x) = 0$，则由（5.2），可得

$$X^{\beta}_{T^*_{3,m,n}} = X^{\beta}_T X^{\beta}_y. \tag{5.13}$$

由于 $\beta|_T \in M$，我们有 T^{β} 是 2-s-正的。因此 $\beta \in M'$。若 $\beta(x) = 2$，则根据 Ψ_1 的构造可知，$\alpha(x) = 2$。由推论 2.8 以及 ${T^*_{3,m,n}}^{\alpha}$ 非 2-s-正这一事实，我们得到 $\alpha(y) = \alpha(v'_{13}) = 0$。再次根据 Ψ_1 的构造，我们有 $\beta(y) = \alpha(y) = 0$。此外，利用命题 5.1，我们得到 $\alpha(v'_{13}) = \beta(v'_{13}) = 0$。由此可得

$$X^{\beta}_{T^*_{3,m,n}} = X^{\beta}_T \cdot X^{\beta}_x = X^{\beta}_T \cdot \frac{1}{2}\left(2s_{(1,1)}\right) \geq_{2s} 0. \tag{5.14}$$

因此，无论哪种情况，$\beta \in M'$。此外，$\beta(x) = \alpha(x) \neq 1$。由此可得 $\beta \in M'_1$。

由于 ψ 是单射，容易看出 $\Psi_1\Psi_1$也是单射。

接下来我们证明 $X^{\alpha}_{T^*_{3,\,m,\,n}} + X_{T^*_{3}(\alpha),\,m,\,n}$ 是 2-s-正的。根据 Ψ_1 的构造，我们有 $\beta|_T = \psi(\alpha|_T)$。因此

$$X^{\beta}_T + X^{\alpha}_T = X^{\beta|_T}_T + X^{\alpha|_T}_T \geq_{2s} 0. \tag{5.15}$$

如果 $\alpha(x) = \beta(x) = 0$，则结合（5.10）、（5.13）、（5.15）以及事实 $\alpha(y) = \beta(y)$，我们有

$$X^{\alpha}_{T^*_{3,m,n}} + X^{\beta}_{T^*_{3,m,n}} = \left(X^{\beta}_T + X^{\alpha}_T\right) X^{\alpha}_y \geq_{2s} 0. \tag{5.16}$$

类似地，如果 $\alpha(x) = \beta(x) = 2$，则结合（5.11）、（5.14）以及（5.15），我们有

$$X^{\alpha}_{T^*_{3,m,n}} + X^{\beta}_{T^*_{3,m,n}} = (X^{\alpha}_T + X^{\beta}_T)s_{(1,1)} \geq_{2s} 0. \tag{5.17}$$

因此在任一情形下 $X^{\alpha}_{T^*_{3,\,m,\,n}} + X^{\beta}_{T^*_{3,\,m,\,n}} \geq_{2s} 0$。 □

引理 5.4. 存在一个单射 Ψ_2，从 N'_2 到 M'_2。此外，$X^{\alpha}_{T^*_{3,\,m,\,n}} + X^{\Psi_2}_{T^*_{3}(\alpha),\,m,\,n}$ 是 2-s-正的。

证明。给定 $\alpha \in N'_2$。根据定义，可见 $\alpha(x) = \alpha(y) = 1$ 以及 $\alpha|_T \notin N_{30}$。接下来我们证明 T^{α} 是非 2-s-正的，从而推出 $\alpha|_T \in N \setminus N_{30}$。共有两种情形。

情况 1. 若 $\alpha(v'_{13}) = 0$，则由 (5.5)，

$$X^{\alpha}_{T^*_{3,m,n}} = X^{\alpha}_T 2s_{(1,1)}. \tag{5.18}$$

由 ${T^*_{3,\,m,\,n}}^{\alpha}$ 不是 2-s-正的，可得 X^{α}_T不是 2-s-正的，这意味着 $\alpha|_T \in N \setminus N_{30}$。

情形 2. 若 $\alpha(v'_{13}) \neq 0$，则由命题 3.3 和 $\alpha(x) = 1$，可推得 $\alpha(v'_{13}) = 1$。由 (5.4)，

$$X^{\alpha}_{T^*_{3,m,n}} = s_{(1,1)} X^{\alpha}_T. \tag{5.19}$$

因此 $X^{\alpha}_T <_{2s} 0$。由此得到 $\alpha\,|_T \in N \setminus N_{30}$。

定义 Ψ_2 如下:

$$\Psi_2(\alpha)(v) = \begin{cases} \psi(\alpha\,|_T)(v), & \text{if } v \in V(T); \\ \alpha(v), & \text{if } v \in \{x, y\}. \end{cases} \tag{5.20}$$

设 $\beta = \Psi_2(\alpha)$，下面证明 $\beta \in M'_2$。由于 $\beta(x) = \alpha(x) = 1$ 且 $\beta(y) = \alpha(y) = 1$，只需证明 $\beta \in M'$。为此，我们按如下方式计算 $X^{\beta}_{T^*_3、m、n}$。当 $\alpha(v'_{13}) = 0$ 时，根据命题 5.1，我们有 $\beta(v'_{13}) = 0$。利用 (5.5)，我们有

$$X^{\beta}_{T^*_{3,m,n}} = X^{\beta}_T 2 s_{(1,1)}. \tag{5.21}$$

由于 $\beta\,|_T = \psi(\alpha\,|_T) \in M$，我们有 $\beta \in M'$。类似地，当 $\alpha(v'_{13}) = 1$ 时，根据命题 5.1，我们有 $\beta(v'_{13}) = 1$。利用 (5.4)，我们推得

$$X^{\beta}_{T^*_{3,m,n}} =_{2s} X^{\beta}_T s_{(1,1)}. \tag{5.22}$$

再次由 $\beta\,|_T = \psi(\alpha\,|_T) \in M$，可得 $\beta \in M'$。因此，无论哪种情况，都有 $\beta \in M'$。此外，由于 ψ 是单射，我们可知 Ψ_2 是单射。

接下来证明 $X^{\alpha}_{T^*_{3,\,m,\,n}} + X^{\beta}_{T^*_{3,\,m,\,n}}$ 是 2-s-正的。由于 $\beta\,|_T = \psi(\alpha\,|_T)$，我们得到

$$X^{\alpha}_T + X^{\beta}_T \geq_{2s} 0. \tag{5.23}$$

若 $\alpha(v'_{13}) = 0$，则由 (5.18)、(5.21) 和 (5.23)，可推出

$$X^{\alpha}_{T^*_{3,m,n}} + X^{\beta}_{T^*_{3,m,n}} = 2 s_{(1,1)} (X^{\alpha}_T + X^{\beta}_T) \geq_{2s} 0. \tag{5.24}$$

若 $\alpha(v'_{13}) = 1$，则由 (5.19)、(5.22) 和 (5.23)，可推出

$$X^{\alpha}_{T^*_{3,m,n}} + X^{\beta}_{T^*_{3,m,n}} = s_{(1,1)} (X^{\alpha}_T + X^{\beta}_T) \geq_{2s} 0. \tag{5.25}$$

因此，无论哪种情况，都有 $X^{\alpha}_{T^*_{3,\,m,\,n}} + X^{\beta}_{T^*_{3,\,m,\,n}} \geq_{2s} 0$。 □

为了定义单射 Ψ_3，我们需要一个关于 ψ 的命题。为此，我们引入 N_{28} 的一个特定子集 $\overline{N_{28}}$。

定义 5.5。令 $\overline{N_{28}}$ 为由满足以下条件的那些 α 组成的 N_{28} 的子集：$\{(i,j) : \alpha_{i,j} = (0,0)\} = \{(1,3)\}$.

现在我们陈述 ψ的性质。

命题 5.6。对于任意 $\alpha \in N \setminus (N_{30} \cup N_{28})$，我们有

$$\alpha(v_{13}) \geq \psi(\alpha)(v_{13}). \tag{5.26}$$

证明。我们首先考虑 $\alpha \in N_{28}$ 的情形。给定 $\alpha \in N_{28}$，由 ψ_{28}(4.72) 的构造可知，除非 $(p,q) = (1,3)$，否则 $\alpha(v_{13}) \geq \psi(\alpha)(v_{13})$。但根据 (p,q) 的选取方式，我们先选取最大的 p，再在相同的 p 值中选取最小的 q，因此 $(p,q) = (1,3)$ 意味着 $\{(i,j) : \alpha_{i,j} = (0,0)\} = \{(1,3)\}$。因此，$\alpha(v_{13}) < \psi(\alpha)(v_{13})$ 意味着 $\alpha \in N_{28}$。

容易验证，对于 $\alpha \in N \setminus (N_{30} \cup N_{28})$，(5.26) 成立。至此，证明完毕。

□

引理 5.7。存在一个从 N_3'到 M_3'的单射 Ψ_3。此外，$X^{\alpha}_{T^*_{3,\,m,\,n}} + X^{\Psi_3}_{T^*_3(\alpha),\,m,\,n}$是 2-$s$-正的。

证明。给定 $\alpha \in N_3'$。根据定义，我们看到 $\alpha(x) = 1$，$\alpha(y) = 0$和 $\sum_{v \in V(T)} \alpha(v) \leq 2m + 2n + 7$。我们用 T'表示由 $V(T) \setminus \{v_{13}'\}$诱导的 T的子图，并为简便起见，令 γ 表示 $(\alpha \mid^{T'}) \mid_T$。换言之，$\gamma$： $V(T) \to \mathbb{N}$如下：

$$\gamma(v) = \begin{cases} \alpha(v), & \text{if } v \neq v_{13}'; \\ 0, & \text{if } v = v_{13}'. \end{cases} \tag{5.27}$$

我们接下来 证明 $\gamma \in N \setminus (N_{30} \cup N_{28})$。显然 $\alpha \mid_{T'} = \gamma \mid_{T'}$。分三种情况 s.

情况 1。 $\alpha(v_{13}') = 0 = \gamma(v_{13}')$。在这种情况下，$\gamma = \alpha \mid_T$，因此 $X^{\alpha}_T = X^{\gamma}_T$和 $T'^{\alpha} = T^{\alpha}$。根据 (5.2)，可得

$$X^{\alpha}_{T^*_{3,m,n}} = X^{\alpha}_{T'} s_1 = X^{\gamma}_T s_1. \tag{5.28}$$

由于 $X^{\alpha}_{T^*_{3,\,m,\,n}}$ 是非 2-s-正的，因此 X^{γ}_T 是非 2-s-正的。这得到 $\gamma = \alpha \mid_T \in N$。

情形 2。 $\alpha(v_{13}') = 1$和 $\alpha(v_{13}) = 0$。在此情形下，我们看到 $T^{\gamma} = T'^{\alpha}$。此外，由 (5.5)，

$$X^{\alpha}_{T^*_{3,m,n}} = X^{\alpha}_{T'} 2 s_{(1,1)} = X^{\gamma}_T 2 s_{(1,1)}. \tag{5.29}$$

因此，由于 $X^{\alpha}_{T^*_{3,\,m,\,n}}$ 是非 2-s-正的，我们得到 X^{γ}_T 是非 2-s-正的。这得到$\gamma = \alpha \mid_T \in N$。

情形 3. $\alpha(v_{13}') = 1$与 $\alpha(v_{13}) \neq 0$。在此情形下，由推论2.8可知$\alpha(v_{13}) = 1$。由（5.4），

$$X^{\alpha}_{T^*_{3,m,n}} = X^{\alpha}_{T'} s_{(1,1)} = X^{\gamma}_T s_{(1,1)}. \tag{5.30}$$

因此由$X^{\alpha}_{T^*_{3,\ m,\ n}}$为非2-$s$-正，可得 X^{γ}_{T}为非2-s-正。由此得到 $\gamma = \alpha\mid_{T} \in N$。

在每种情况下，我们都得到 $\gamma \in N$。接下来证明 $\gamma \overline{\notin} N_{28} \cup N_{30}$。根据 N'_3 的定义，我们看到 $\sum_{v\in V\ (T)} \alpha(v) \leq 2m + 2n + 7$。由 $\gamma(v'_{13}) = 0$、$\alpha(v'_{13}) \leq 1$，以及对任意 $v \in V(T')$ 都有 $\alpha(v) = \gamma(v)$，可推得

$$\sum_{v\in V(T)} \gamma(v) \leq \sum_{v\in V(T)} \alpha(v) \leq 2m + 2n + 7, \tag{5.31}$$

因此 $\gamma \notin N_{30}$。若 $\gamma \in \overline{N_{28}}$，根据引理 4.29 中的分析，我们发现 $\gamma_{i,\ j} \in \{(0,\ 2),\ (1,\ 1)\}$，除非 $(i,\ j) = (1,\ 3)$。因此，对任意 $(i,\ j) \neq (1,\ 3)$，$\gamma(v_{ij}) + \gamma(v'_{ij}) = 2$。由此可得

$$\sum_{v\in V(T)} \gamma(v) = \sum_{i=0}^{3} \gamma(v_i) + \sum_{(i,j)\neq(1,3)} \gamma(v_{ij}) + \gamma(v'_{ij}) = 4 + 2(m + n + 2) = 2m + 2n + 8, \tag{5.32}$$

这与（5.31）矛盾。因此 $\gamma \in N \setminus (N_{30} \cup N_{28})$。$\overline{\ }$

现在我们可以如下定义 Ψ_3：

$$\Psi_3(\alpha)(v) = \begin{cases} \psi(\gamma)(v), & \text{if } v \notin \{x, y, v'_{13}\}; \\ \alpha(v), & \text{if } v \in \{x, y, v'_{13}\}. \end{cases} \tag{5.33}$$

令 $\beta = \Psi_3(\alpha)$。下面证明 $\beta \in M'_3$。由 $\beta(x) = \alpha(x) = 1$ 和 $\beta(y) = \alpha(y) = 0$，只需证明 $\beta \in M'$。此外，由命题 5.1 可得 $\psi(\gamma)(v'_{13}) = \gamma(v'_{13}) = 0$。进一步，由 Ψ_3 的构造，对于任意$v \in V(T')$，可得 $\beta(v) = \psi(\gamma)(v)$。根据上述分析，我们推得

$$X^{\beta}_{T'} = X^{\psi(\gamma)}_{T}.$$

由于 $\psi(\gamma) \in M$，因此有 $X^{\beta}_{T'} = X^{\psi(\gamma)}_{T} \geq_{2s} 0$。共有三种情况。

情况 (i) $\alpha(v'_{13}) = \beta(v'_{13}) = 0$。在这种情况下，由（5.2），

$$X^{\beta}_{T^*_{3,m,n}} = s_1 X^{\beta}_{T'} \geq_{2s} 0. \tag{5.34}$$

情形 (ii) $\alpha(v'_{13}) = \beta(v'_{13}) = 1 = \beta(v_{13})$. 在此情形下，利用 (5.4)，我们有

$$X^{\beta}_{T^*_{3,m,n}} =_{2s} X^{\beta}_{T'} s_{(1,1)} \geq_{2s} 0. \tag{5.35}$$

情形（iii） $\alpha(v'_{13}) = \beta(v'_{13}) = 1$ 和 $\beta(v_{13}) = 0$，由（5.5），可得

$$X^{\beta}_{T^*_{3,m,n}} = X^{\beta}_{T'} 2 s_{(1,1)} \geq_{2s} 0. \tag{5.36}$$

显然，在每种情况下，我们都有 $\beta \in M'$。

接下来证明 Ψ_3是一个单射。令 $I'_3 = \{\Psi_3(\alpha)\colon \ \alpha \in N'_3\}$.。对于任意 $\beta \in I'_3$，为简便起见，令μ表示 $(\beta\,|^{T'})\,|_T$。具体而言，定义 $\mu\colon\ V(T) \to \mathbb{N}$如下：

$$\mu(v) = \begin{cases} \beta(v), & \text{if } v \neq v'_{13}; \\ 0, & \text{if } v = v'_{13}. \end{cases} \tag{5.37}$$

从 Ψ_3 的构造以及命题 5.1可知， $\psi(\gamma) = \mu$，这意味着$\mu \in \bigcup_{i=1}^{29} M_i$。设 $\mu \in M_i$对某个 $1 \leq i \leq 29$成立，定义 $\pi\colon\ V(T^*_{3,\ m,\ n}) \to \mathbb{N}$如下：

$$\pi(v) = \begin{cases} \varphi_i(\mu)(v), & \text{if } v \notin \{v'_{13}, x, y\}; \\ \beta(v), & \text{if } v \in \{v'_{13}, x, y\}. \end{cases} \tag{5.38}$$

由对任意 $1 \leq i \leq 29$都有 $\varphi_i(\psi_i(\gamma)) = \gamma$，可知 $\pi(\Psi_3(\alpha)) = \alpha$。由此得到 Ψ_3 是一个单射。

接下来证明 $X^{\alpha}_{T^*_{3,\ m,\ n}} + X^{\beta}_{T^*_{3,\ m,\ n}}$是 2-$s$-正的。由 $\mu = \psi(\gamma)$ 可知$X^{\mu}_T + X^{\gamma}_T \geq_{2s} 0$。由于对于任意 $v \in V(T')$， $\mu(v'_{13}) = 0$ 且 $\beta(v) = \mu(v)$，我们推得$X^{\mu}_T = X^{\mu}_{T'} = X^{\beta}_{T'}$。因此

$$X^{\beta}_{T'} + X^{\gamma}_T \geq_{2s} 0.$$

共有四种情形。

情形 A. $\alpha(v'_{13}) = 0$. 由 (5.28) 和 (5.34)，可得

$$X^{\alpha}_{T^*_{3,m,n}} + X^{\beta}_{T^*_{3,m,n}} =_{2s} (X^{\gamma}_T + X^{\beta}_{T'})s_1 \geq_{2s} 0. \tag{5.39}$$

情形 B. $\alpha(v'_{13}) = 1$ 以及 $\alpha(v_{13}) = 0$。由命题 5.6 可得

$$\beta(v_{13}) = \psi(\gamma)(v_{13}) \leq \gamma(v_{13}) = \alpha(v_{13}) = 0.$$

因此 $\beta(v_{13}) = 0$。利用 (5.29) 和 (5.36)，得到

$$X^{\alpha}_{T^*_{3,m,n}} + X^{\beta}_{T^*_{3,m,n}} =_{2s} 2s_{(1,1)}(X^{\gamma}_T + X^{\beta}_{T'}) \geq_{2s} 0. \tag{5.40}$$

情形 C. $\alpha(v'_{13}) = \alpha(v_{13}) = \beta(v_{13}) = 1$。利用 (5.30) 和 (5.35)，得到

$$X^{\alpha}_{T^*_{3,m,n}} + X^{\beta}_{T^*_{3,m,n}} =_{2s} s_{(1,1)}(X^{\gamma}_T + X^{\beta}_{T'}) \geq_{2s} 0. \tag{5.41}$$

情形 D。 $\alpha(v'_{13}) = 1 = \alpha(v_{13})$ 以及 $\beta(v_{13}) \neq 1$。再次由命题 5.6 可得

$$\beta(v_{13}) = \psi(\gamma)(v_{13}) \leq \gamma(v_{13}) = \alpha(v_{13}) = 1.$$

因此 $\beta(v_{13}) = 0$。此外，由 Ψ_3的构造可得 $\mu = \psi(\gamma)$，从而有$X_T^{\mu} \geq_{2s} 0$。因此 $X_{T'}^{\beta} = X_T^{\mu} \geq_{2s} 0$。由 (5.30) 和 (5.36)，

$$X^{\alpha}_{T^*_{3,m,n}} + X^{\beta}_{T^*_{3,m,n}} =_{2s} s_{(1,1)}(X_T^{\gamma} + X_{T'}^{\beta}) + s_{(1,1)}X_{T'}^{\beta} \geq_{2s} 0. \tag{5.42}$$

因此，在每种情况下，我们都有 $X^{\alpha}_{T^*_{3,m,n}} + X^{\beta}_{T^*_{3,m,n}} \geq_{2s} 0$。 □

引理 5.8. 给定 $\alpha \in N_4'$ 和 $k \leq m+n+4$，我们有

$$[s_{(k,k)}]X^{\alpha}_{T^*_{3,m,n}} = 0.$$

证明. 给定 $\alpha \in N_4'$，根据定义，要么是 $\alpha|_T \in N_{30}$ 或 $\alpha(x) = 1$，$\alpha(y) = 0$ 和 $\sum_{v\in V(T)} \alpha(v) \geq 2m+2n+8$。

如果 $\alpha|_T \notin N_{30}$，我们可知

$$\sum_{v\in V(T^*_{3,m,n})} \alpha(v) = \alpha(x) + \alpha(y) + \sum_{v\in V(T)} \alpha(v) \geq 2m+2n+9.$$

如果 $\alpha|_T \in N_{30}$，根据 N_{30}的定义，我们有 $\sum_{v\in V(T)} \alpha(v) = 2m+2n+10$。因此

$$\sum_{v\in V(T^*_{3,m,n})} \alpha(v) \geq \sum_{v\in V(T)} \alpha(v) = 2m+2n+10.$$

因此，无论哪种情况，

$$\sum_{v\in V(T^*_{3,m,n})} \alpha(v) \geq 2m+2n+9.$$

这意味着，如果 $[s_{(k,k)}]X^{\alpha}_{T^*_{3,m,n}} \neq 0$，那么 $k \geq m+n+5$。 □

定理的证明 *1.5*. 显然，$T^*_{3,m,n}$的独立数为 $m+n+7$。假设

$$I_{T^*_{3,m,n}}(t) = \sum_{j=0}^{m+n+7} i_j^* t^j.$$

定义 Ψ： $N' \setminus N_4' \to M'$如下：

$$\Psi(\alpha) = \begin{cases} \Psi_1(\alpha), & \text{if } \alpha \in N_1'; \\ \Psi_2(\alpha), & \text{if } \alpha \in N_2'; \\ \Psi_3(\alpha), & \text{if } \alpha \in N_3'. \end{cases} \tag{5.43}$$

由引理 5.3、引理 5.4 和引理 5.7 可知 Ψ 是一个单射，并且

$$X^{\alpha}_{T^*_{3,m,n}} + X^{\Psi(\alpha)}_{T^*_{3,m,n}} \geq_{2s} 0. \tag{5.44}$$

设 $I^* = \{\Psi(\alpha) : \alpha \in N' \setminus N'_4\} \subseteq M'$。我们有

$$\begin{aligned} Y_{T^*_{3,m,n}} &= \sum_{\alpha \in N'} X^{\alpha}_{T^*_{3,m,n}} + \sum_{\alpha \in M'} X^{\alpha}_{T^*_{3,m,n}} \\ &= \sum_{i=1}^{3} \sum_{\alpha \in N'_i} \left(X^{\alpha}_{T^*_{3,m,n}} + X^{\Psi(\alpha)}_{T^*_{3,m,n}} \right) + \sum_{\alpha \in M' \setminus I^*} X^{\alpha}_{T^*_{3,m,n}} + \sum_{\alpha \in N'_4} X^{\alpha}_{T^*_{3,m,n}}. \end{aligned}$$

利用（5.44），我们有

$$\sum_{i=1}^{3} \sum_{\alpha \in N'_i} \left(X^{\alpha}_{T^*_{3,m,n}} + X^{\Psi(\alpha)}_{T^*_{3,m,n}} \right) \geq_{2s} 0.$$

由 M'的定义，我们有$X^{\alpha}_{T^*_{3,\ m,\ n}} \geq_{2s} 0$对每个 $\alpha \in M' \setminus I^*$成立。此外，由引理5.8，对任意 $k \leq m+n+4$和 $\alpha \in N'_4$，我们有$[s_{(k,k)}]X^{\alpha}_{T^*_{3,\ m,\ n}} \geq 0$。由上述分析，对 $1 \leq k \leq m+n+4$，我们得到

$$[s_{(k,k)}]Y_{T^*_{3,m,n}} \geq 0$$

因此由推论2.5，我们有 $\{i^*_j\}_{j=0}^{m+n+5}$ 是对数凹的，从而序列$\{i^*_j\}_{j=0}^{m+n+5}$ 是单峰的。因此存在 k 使得

$$i^*_0 \leq i^*_1 \leq \cdots \leq i^*_k \geq i^*_{k+1} \geq \cdots \geq i^*_{m+n+5}.$$

结合定理2.10，我们得到

$$i^*_0 \leq i^*_1 \leq \cdots \leq i^*_k \geq i^*_{k+1} \geq \cdots \geq i^*_{m+n+5} \geq i^*_{m+n+6} \geq i^*_{m+n+7}.$$

至此证明完毕。 □

参考文献

[1] Y. Alavi、P. J. Malde、A. J. Schwenk 和 P. Erd˝os，《图的顶点独立序列不受约束》，第58卷。《第十八届东南国际组合数学、图论与计算会议》（佛罗里达州博卡拉顿，1987）。1987，15–23。

[2] P. Bahls、B. Ethridge 和 L. Szabo，《非正则毛虫图的独立多项式的单峰性》，《澳大利亚组合数学杂志》71（2018年），104–112。

[3] T. Ball、D. Galvin、C. Hyry 和 K. Weingartner，独立集与匹配排列，《图论杂志》99.1（2022），40–57。

[4] A. Basit 和 D. Galvin，关于树的独立集序列，《电子组合学杂志》28.3（2021），论文编号 3.23，23 页。[5] C. Bautista-Ramos，树的独立多项式中的对数凹性多重断点，arXiv：2511.00334，2025年。[6] F. Bencs，关于具有实根独立多项式的树，《离散数学》341.12（2018），3321–3330。[7] A. Bendjeddou 和 L. Hardiman，洛伦兹多项式与图的独立集序列，《伦敦数学学会会刊》57.4（2025），1305–1323。[8] J. I. Brown、K. Dilcher 和 R. J. Nowakowski，良覆盖图的独立多项式的根，《代数组合学杂志》，2000年，11(3)：197–210。[9] D. Galvin，具有非对数凹独立集序列的树，arXiv：2502.10654，2025年。[10] I. Gutman 和 F. Harary，匹配多项式的推广，《数学实用论》24（1983年），97–106。[11] D. T. Hoang、V. E. Levit、E. Mandrescu 和 M. H. Pham，Wp图的独立多项式的对数凹性，arXiv：2409.00827，2024年。[12] O. Kadrawi 和 V. E. Levit，树的独立多项式并不总是对数凹的：从阶为 26 开始，《当代数学艺术》25.4（2025），论文编号 3，23 页。[13] O. Kadrawi、V. E. Levit、R. Yosef 和 M. Mizrachi，关于树的独立¨多项式的计算，《多项式研究新进展》，F. Ozger 编，里耶卡：IntechOpen，2023年，第 7 章。[14] V. E. Levit 和 E. Mandrescu，具有对数凹独立多项式的极良覆盖图，《喀尔巴阡数学杂志》20.1（2004年），73–80。[15] V. E. Levit 和 E. Mandrescu，独立多项式与极良覆盖图、拟可正则化图和完美图的单峰性猜想，《巴黎图论》，《数学趋势》，Birkh¨auser，巴塞尔，2007年，243–254。[16] E.Y.H. Li、G.M.X. Li、A.L.B. Yang 和 Z.-X. Zhang，对独立多项式对数凹性的对称函数方法，arXiv：2501.04245，2025年。

[17] L. L. Liu、H. Tang 和 J. Zhao，具有仅实零点的独立多项式的树，《应用数学学报（英文版）》，2025年：1–29。[18] T. S. Michael 和 W. N. Traves，良覆盖图的独立序列：非单峰性与过山车猜想，《图与组合》19.3（2003年），403–411。[19] E. Ramos 和 S. Sun，一种借助人工智能改进的树的单峰性猜想研究方法，arXiv：2510.18826，2025年。[20] R.P. Stanley，图着色及相关对称函数：思想与应用——结果概述、有趣的应用和重要的未解问题，《离散数学》198（1998年），267–286。[21] R.P. Stanley，《枚举组合学》，第2卷，剑桥高等数学研究丛书，剑桥大学出版社（2001年）。[22] R.P. Stanley，图的色多项式的一种对称函数推广，《数学进展》111(1)（1995年），166–194。[23] Y. Wang 和 B.-X. Zhu，若干图的独立多项式的单峰性，《欧洲组合学杂志》32.1（2011年），10–20。[24] R. Yosef、M. Mizrachi 和 O. Kadrawi，树的独立多项式的单峰性，arXiv：2101.06744，2021年。[25] B.-X. Zhu，图的关联积的独立多项式的单峰性，《离散数学》341.8（2018年），2359–2365。