arXiv:2603.03027v1 [math.RT] 3 Mar 2026

一个扭曲赫克代数：过去与现在，以及一只温和表示的克莱因瓶

Anne-Marie Aubert 和 Roger Plymen

Abstract. 设 F 为一个非阿基米德局部域，满足 $4|q-1$；记 F的剩余域的阶为 q。设（M^0，σ^0）为扭曲Levi子群G^0 中的深度零尖点对，其中该子群属于 SL_8，由二次和四次域扩张产生，定义见 [AFO]。则相应的伯恩斯坦块由一个扭曲赫克代数 $\mathcal{H}^0$描述。我们将 $\mathcal{H}^0$ 明确描述为一个带有生成元和关系的非交换 $\mathbb{C}$-代数。我们还将明确描述 $\mathcal{H}^0$的单模。所有单模均为二维的。于是，$\mathcal{H}^0$ 的本原谱是一个显式的复代数簇 $\mathfrak{X}$。$\mathfrak{X}$ 的极大紧实实形式同胚于一个克莱因瓶。这个克莱因瓶是与尖点对（M^0，σ^0）相联系的 G^0 的酉主系列的一个模型。

此外，我们将其与经典情形作了全面比较：在该情形中，$G=\mathrm{SL}_8$ 和 $(M,\ \sigma)$ 是 G 的一个尖点对。超尖点表示 σ 由 F 的同一组二次扩张和四次扩张构造而来。设 $\mathfrak{s}$ 为由 $(M,\ \sigma)$ 确定的伯恩斯坦谱 $\mathfrak{B}G$ 中的点。我们比较这两个点 $\mathfrak{s}$ 和 $\mathfrak{s}^0$，并明确证明相应的伯恩斯坦簇同构。在这种情况下，克莱因瓶再次出现，这一次悬浮于 SL_8 的温和对偶中。

Contents

1. 引言 1
2. 深度零 3
3. 关于零深度簇 4
4. 群上同调 9
5. Adler-Fintzen-Ohara 的扭曲群代数 $\mathbb{C}[\Gamma,\mu^{\mathcal{T}}]$ 11
6. 的简单模 $\mathbb{C}[\Gamma]$ 15
7. 未扭曲代数的简单模 $\mathbb{C}[\Gamma]$ 16
8. 作为该代数几何印记的克莱因瓶 $\mathbb{C}[\Gamma,\mu^{\mathcal{T}}]$ 18
9. 正深度 R 21
ef 参考文献

1. Introduction

设 G 表示非阿基米德局部域 F上的连通约化群。接下来，依照[伯], 范畴 Rep($G(F)$) 是 $G(F$ 的光滑复表示范畴，它是若干满子范畴的直积，这些满子范畴称为“伯恩斯坦块”：

$$\mathrm{Rep}(G(F)) = \prod_{\mathfrak{s}\in\mathfrak{B}G} \mathrm{Rep}^{\mathfrak{s}}(G(F)).$$

每个块 Rep$^{\mathfrak{s}}(G(F))$ 都等价于某个代数$\mathcal{H}^{\mathfrak{s}}$上的含单位元右模范畴。假设范畴 Rep$^{\mathfrak{s}}(G(F))$ 具有一个由 Bushnell 和 Kutzko 定义的关联类型 [BK], , 即 K 的一个紧开子群 $G(F$以及一个不可约光滑表示

Date: 2026年3月4日。

ρ K 的，使得表示 $\pi \in \mathrm{Rep}(G(F))$ 属于 $\mathrm{Rep}^{\mathfrak{s}}(G(F))$，当且仅当 π 的每个不可约子商在限制到 K 后都包含 ρ。那么，我们可以用赫克代数 $\mathcal{H}(G(F), (K, \rho))$ 替换代数$\mathcal{H}^{\mathfrak{s}}$；该赫克代数由定义在$G(F)$上的所有紧支集、取值于 $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\rho)$ 的函数构成，这些函数在左侧和右侧均按 ρ 变换。也就是说，$\mathrm{Rep}^{\mathfrak{s}}(G(F))$ 等价于 $\mathcal{H}(G(F), (K, \rho))$ 上的模范畴。

我们将把这些考量应用于群 G^0，它是 SL_8，的一个扭曲Levi子群，近期在 Adler-Fintzen-Ohara [AFO] 中有所研究。按照他们的构造，设 M^0 是 G^0 中的一个极大环面，并设 σ^0 是他们在文章中定义的 M^0 的二次特征。令 $\mathfrak{s}^0$ 为伯恩斯坦谱中由尖点对（$\mathfrak{B}G^0$,M^0）确定的点。令（σ^0,K^0）为 ρ^0 中构造的 Iwahori对 [AFO]。那么（K^0, ρ^0）是一个 $\mathfrak{s}^0$-类型。

我们记作

$$\mathcal{H}^0 = \mathcal{H}^{\mathfrak{s}^0} = \mathcal{H}(G^0(F), (K^0, \rho^0)).$$

特别地，$\mathcal{H}^0$ 是一个赫克代数的例子，它附属于拟分裂群的深度零主系列块，并且需要一个非平凡2-余循环。在本文的语境下，我们有

$$\boxed{\mathcal{H}(G^0(F), (K^0, \rho^0)) \simeq \mathbb{C}[W_{\mathrm{aff}}(\widetilde{A}_1) \times \mathbb{Z}, \mu^{\mathcal{T}}].}$$

群 $W_{\mathrm{aff}}(\widetilde{A}_1)$ 是类型为 $\widetilde{A}_1$ 的仿射根系的仿射Weyl群，而 $\mu^{\mathcal{T}}$ 是一个非平凡2-余循环（参见 [AFO，推论 3。9]）。它定义为将 $W_{\mathrm{aff}}(\widetilde{A}_1) \times \mathbb{Z})^2$ 上在 [AFMO，记号 3.6 中构造的2-余循环限制而得，1], 该余循环与一族 $\mathcal{T}$ 交织算子相关联。

在第2节中，我们回顾 [AFO] 中的记号和定义，并检查 Iwahori对 (K^0, ρ^0) 是一个 $\mathfrak{s}^0$-型。

在第3节中，我们明确计算伯恩斯坦环面 $T^{\mathfrak{s}^0}$、群 $W^{\mathfrak{s}^0}$和簇$T^{\mathfrak{s}^0}/W^{\mathfrak{s}^0}$。我们注意到，$T^{\mathfrak{s}^0}$是一个二维复环面。我们记

$$\mathfrak{X} = T^{\mathfrak{s}^0}/W^{\mathfrak{s}^0}$$

并证明，$\mathfrak{X}$ 的极大紧实实形式是克莱因瓶 $\mathbf{Kb}$。这个克莱因瓶$\mathbf{Kb}$ 是附属于尖点对 (M^0, σ^0) 的 G^0 的酉主系列的一种模型。

第4节专门介绍群上同调的背景知识。

在第5节中，我们将扭曲群代数 $\mathbb{C}[W_{\mathrm{aff}}(\widetilde{A}_1) \times \mathbb{Z}, \mu^{\mathcal{T}}]$ 描述为一个非交换的 $\mathbb{C}$-代数，并给出其明确的生成元和关系。

在第6节中，我们计算扭曲群代数的简单模。我们证明，正如预期的那样，它们的参数空间同构于 $\mathfrak{X}$，这是一个不可约复代数簇。所有简单模都是二维的。

在第7节中，我们通过比较计算非扭曲群代数的简单模。非扭曲群代数既有一维简单模，也有二维简单模。

在第8节中，我们明确展示克莱因瓶如何作为 G^0的温和对偶的紧豪斯多夫子空间出现。

在第9节中，我们将与 Roche [R] 和 Goldberg- Roche [GR2]中的经典例子进行全面比较。这个经典例子最终归功于 Phil Kutzko。在本节中，我们记$G = \mathrm{SL}_8(F)$，并且与 [R], 一样，只假设 $4|(q-1)$，其中 q 是 F的剩余域的阶，即剩余特征 p的有限次幂，而 F是剩余特征。我们注意到，这一假设使我们能够考虑较小的奇素数 p，也就是说，考虑 p 整除 G的魏尔群阶（等于8！）的情形，例如 $p = 3$（其中 $q = p^2 = 9$）、$p = 5$（其中 $q = p$ 或 $q = p^2 = 25$），以及 $p = 7$（其中$q = p$）。

那么，G 拥有一个尖点对 (M, σ)，其中 σ 是通过对 F进行相同的二次扩张和四次扩张构造的。令 $\mathfrak{s}$ 为由尖点对 (M, σ)确定的伯恩斯坦谱 $\mathfrak{B}G$ 中的点。我们比较这两个点 $\mathfrak{s}$ 和 $\mathfrak{s}^0$，并明确证明相应的伯恩斯坦

簇同构。在这种情况下，克莱因瓶再次出现，这次漂浮在 SL_8 的温和对偶中。

~1.0.1. 余循环的几何意义。 群 $W_{\mathrm{aff}}(A_1)$ 是无限二面体群

$$\mathrm{D}_\infty := \langle s, t \,:\, s^2 = t^2 = 1 \rangle \simeq \mathbb{Z}/2 * \mathbb{Z}/2,$$

它也具有如下表示

$$\mathrm{D}_\infty = \langle r, s \,:\, s^2 = 1, srs = r^{-1} \rangle \simeq \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2.$$

值得比较的是非扭曲群代数 $\mathbb{C}[\Gamma]$，其中 $\Gamma := (\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2) \times \mathbb{Z}$，与扭曲代数 $\mathbb{C}[\Gamma, \mu]$，其 $\mu\colon \Gamma \times \Gamma \to \mathbb{C}^\times$ 是一个非平凡2-余循环。

在没有余循环的情况下，诱导的 $\mathbb{Z}/2$–作用在特征环面 $(\mathbb{C}^\times)^2$ 上为

$$(w, z) \longmapsto (w, z^{-1}),$$

其不动点产生一维简单模。扭曲之后， $\mathbb{Z}/2$–生成元与 $\mathbb{Z}$–方向之间的交换关系发生了改变，对合变为

$$(w, z) \longmapsto (-w, z^{-1}),$$

其在 $(\mathbb{C}^\times)^2$ 上自由作用。因此，所有简单模都变为二维的；在极大紧实形式 $S^1 \times S^1$ 上，由此得到的自由反定向商空间是一个克莱因瓶。从这个意义上说，温和对偶中出现的克莱因瓶，是非平凡上同调类 $[\mu] \in H^2(\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}, \mathbb{C}^\times)$ 的拓扑表现。

总而言之，我们有

定理 1.1。 设 (M^0, σ^0) 是 G^0 的深度零尖点对，由 F 的二次和四次域扩张产生。则伯恩斯坦块 $\mathrm{Rep}^{\mathfrak{s}^0}(G^0(F))$ 由一个扭曲海克代数描述，其本原谱是不可约复代数簇 $\mathfrak{X} = (\mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times)/(w, z) \sim (-w, z^{-1})$。其极大紧实形式是一个克莱因瓶。这个克莱因瓶是 G^0 的酉主系列的一个模型，该酉主系列附属于尖点对 (M^0, σ^0)。

设 $G = \mathrm{SL}_8$，并设 $\mathfrak{s}$ 为伯恩斯坦谱 $\mathfrak{B}G$ 中由(M, σ)所确定的点。与点 $\mathfrak{s}$ 和 $\mathfrak{s}^0$ 相关联的伯恩斯坦簇是同构的。在这种情形下，克莱因瓶再次出现，这一次漂浮在SL_8的温和对偶之中。

在 G^0 与 G这两种情形中，赫克代数中的一个非平凡余循环都与温和对偶中的一个紧连通不可定向分支相关联。我们不禁要问，这一现象是否也会在其他例子中出现。

2. Depth zero

我们首先回顾 [AFO]中的记号。设 F 为一个非阿基米德局部域，其剩余域 $\mathfrak{f}$ 的特征为 p（假定为奇数），阶为 q。设 $\mathfrak{o}_F$ 表示F的整数环， $\mathfrak{p}_F$表示 $\mathfrak{o}_F$的极大理想。我们在 F中固定一个赋值参数 ϖ_F，并设 ζ表示 F中的一个本原$(q-1)$次单位根。我们还假定4整除 $q-1$。由此可知，存在唯一的特征 $\eta\colon\ F^\times \to \mathbb{C}^\times$，它在 ϖ_F和 $1 + \mathfrak{p}_F$上是平凡的，并且满足 $\eta(\zeta) = \sqrt{-1}$。

令 χ_0 为 $F^\times$ 的非分歧特征，使得 $\chi_0(\varpi_F) = -\sqrt{-1}$。

设 E_2 为多项式 $X^2 + \varpi_F$ 的分裂域，且 E_4 为多项式 $X^4 + \zeta\varpi_F$的分裂域。注意，我们将 E_2 和 E_4 分别记作 E_1和 E_2的域，在 [R]中分别记作 ϖ_{E_2}，分别为 ϖ_{E_4}的赋值参数 E_2和 E_4，使得 $\varpi_{E_2}^2 = -\varpi_F$，分别为 $\varpi_{E_4}^4 = -\zeta\varpi_F$。

Let

$$\begin{aligned} G^0 &= (\mathrm{GL}_2(E_2)\times \mathrm{GL}_1(E_4))\cap \mathrm{SL}_8(F)\\ K^0 &= G^0(F)_{x_0} = (I_2\times I_4)\cap \mathrm{SL}_8(F)\\ \rho^0\colon K^0 &\to \mathbb{C}^\times, \qquad (\left(\begin{smallmatrix} a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right), -) \mapsto (\eta\circ N_{E_2/F})(d)\\ \eta\colon F^\times &\to \mathbb{C}^\times \quad \text{is the depth-zero character from §1}\\ M^0 &= (\mathrm{GL}_1(E_2)\times \mathrm{GL}_1(E_2)\times \mathrm{GL}_1(E_4))\cap \mathrm{SL}_8(F)\\ \sigma^0\colon M^0 &\to \mathbb{C}^\times, \qquad 1\otimes \eta\circ N_{E_2/F}\otimes 1 \end{aligned}$$

采用 σ^0的记号（我们对 [的定义除外），参见]AFO $\mathbb{C}$。那么我们有一个非交换-代数的同构：

$$\boxed{\mathcal{H}(G^0(F),(K^0,\rho^0))\simeq \mathbb{C}[W_{\mathrm{aff}}(\widetilde{A}_1)\times \mathbb{Z},\mu^{\mathcal{T}}]}$$

作者 [AFO，命题 3.4 和推论 3。9]。

引理 2.1。令 $\mathfrak{s}^0$ 为伯恩斯坦谱 $\mathfrak{B}G^0$ 中由尖点对(M^0,σ^0)确定的点。那么(K^0,ρ^0) 是一个 $\mathfrak{s}^0$-类型。

证明。令 $P^0=M^0N^0$为 G^0的一个抛物子群，其 Levi 因子为 M^0，并定义惯性类 $\mathfrak{s}^0=[M^0,\sigma^0]$。根据构造，

$$K^0=(I_2\times I_4)\cap \mathrm{SL}_8(F)$$

关于 P^0具有 Iwahori 分解：

$$K^0=(K^0\cap \overline{N^0})\,(K^0\cap M^0)\,(K^0\cap N^0).$$

表示 ρ^0 是一个深度零特征，因此在 pro-p 根基上平凡。特别地，它在幺幂部分 $K^0\cap N^0$和 $K^0\cap N^0$上平凡。此外，根据定义公式， ρ^0 在 $K^0\cap \overline{M^0}$ 上的限制与 $\sigma^0|_{K^0\cap M^0}$一致。

由 [Mo，§4.9] 可知，$(K^0,\ \rho^0)$ 是一对的 G^0-覆盖

$$(K^0\cap M^0,\ \sigma^0|_{K^0\cap M^0}).$$

因此是 G^0 的 $\mathfrak{s}^0$-类型。 □

3. On the depth-zero variety

我们先整理一些有用的结果。

引理 3.1。

$$(\eta\circ N_{E_2/F})\otimes 1\otimes 1|_{M^0}=1\otimes(\eta^{-1}\circ N_{E_2/F})\otimes(\eta^{-1}\circ N_{E_4/F})|_{M^0} \tag{1}$$

$$(\eta^2\circ N_{E_2/F})(E_2^\times)=1 \tag{2}$$

$$(x,y,z)\in M^0 \implies (\eta^2\circ N_{E_4/F})(z)=1 \tag{3}$$

$$(\eta^{-1}\circ N_{E_4/F})(\mathcal{O}_{E_4}^\times)=1. \tag{4}$$

证明。回顾一下，

$$\begin{aligned} M^0&=\{(x,y,z)\in E_2^\times\times E_2^\times\times E_4^\times\ :\ N_{E_2/F}(xy)\cdot N_{E_4/F}(z)=1\}\\ \sigma^0(x,y,z)&=(\eta\circ N_{E_2/F})(y). \end{aligned}$$

如果 $(x,\ y,\ z)\in M^0$，那么我们有范数为一条件

$$N_{E_2/F}(x)\cdot N_{E_2/F}(y)\cdot N_{E_4/F}(z)=1. \tag{5}$$

（1）将 η 应用于该方程即可得出。

（2）：由 [R，§4。1], 可得以下方程：

$$N_{E_2/F}(E_2^\times) = (1+\mathfrak{p}_F)\langle\zeta^2\rangle\langle\varpi_F\rangle.$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}\eta^2(N_{E_2/F}E_2^\times) &= \eta^2(\langle\zeta^2\rangle)\\ &= 1.\end{aligned}$$

由此可见， σ^0 是 M^0的一个二次特征。

在应用 η^2之后，(3) 由 (2) 和 (5) 推出。

(4)：我们如下进行。在本段中，我们记 $E = E_4$。每个$z \in \mathfrak{o}_E^\times$ 都可以写成

$$z = u\cdot(1+\alpha), \qquad u \in \mu_{q-1},\ \alpha \in \mathfrak{p}_E.$$

由于 E/F是温和的，故有 $N_{E/F}(1+\mathfrak{p}_E) = 1+\mathfrak{p}_F$；因此 η（从而 η^{-1}亦然）在主单位的范数上是平凡的。此外，由于 E/F 是完全分歧的， $k_E = k_F$，故 Teichm¨uller 子群$\mu_{q-1} \subset \mathfrak{o}_E^\times$ 与 F中的相应子群等同。对于 $u \in \mu_{q-1}$，伽罗瓦群在 u上平凡地作用，因此

$$N_{E/F}(u) = u^{[E:F]} = u^4,$$

并且 $\eta(u^4) = 1$，因为 $\eta(\zeta^4) = \eta(\zeta)^4 = i^4 = 1$ （因而 η 零化 μ_{q-1} 中的所有四次幂）。因此，

$$\eta^{-1}\big(N_{E/F}(u(1+\alpha))\big) = 1 \quad \text{for all } u \in \mu_{q-1},\ \alpha \in \mathfrak{p}_E.$$

□

定理 3.2. 我们有

$$\widetilde{s}\sigma^0 \cong \chi\cdot\sigma^0$$

其中 χ 是 M^0 的一个非分歧特征。

证明。 我们将把引理 3.1 在 [AFO]中的证明加以改编，以适应当前情形 .

定义

$$\chi_4 \colon E_4^\times \to \mathbb{C}^\times, \qquad z \mapsto (\eta^{-1}\circ N_{E_4/F}(z).$$

当我们依次应用（3.1）和 (2) 时，我们得到

$$\begin{aligned}\widetilde{s}\sigma^0 &= \widetilde{s}(1\otimes(\eta\circ N_{E_2/F})\otimes 1)|_{M^0}\\ &= \big((\eta\circ N_{E_2/F})\otimes 1\otimes 1\big)\,|_{M^0}\\ &= \big(1\otimes(\eta^{-1}\circ N_{E_2/F})\otimes(\eta^{-1}\circ N_{E_4/F})\big)\,|_{M^0}\\ &= \big(1\otimes(\eta\circ N_{E_2/F})\otimes\chi_4)\big)\,|_{M^0}\\ &= \chi\sigma^0\end{aligned}$$

其中 $\chi = 1\otimes 1\otimes\chi_4$。特征 χ 在 M^0的极大紧子群 K_{M^0} 上平凡，因此 χ 是 M^0的非分歧特征。□

我们回顾 $W^{\mathfrak{s}^0}$的定义：

$$W^{\mathfrak{s}^0} := \left\{n \in N_{G^0}(M^0) \,:\, {}^n\sigma^0 \simeq \sigma^0\chi \text{ for some unramified character } \chi \text{ of } M^0\right\}.$$

推论 3.3. 令 $\mathfrak{s}^0$ 表示由尖点对 (M^0,σ^0)确定的伯恩斯坦谱 $\mathfrak{B}G^0$ 中的点。那么我们有

$$W^{\mathfrak{s}^0} = \{1, \widetilde{s}\}.$$

引理 3.4. 设 E_4/F 如 §2 中所述，取满足$\varpi_{E_4}^4 = -\zeta\,\varpi_F$的赋值参数 $\varpi_F \in F$ 和 $\varpi_{E_4} \in E_4$，并令 η： $F^\times \to \mathbb{C}^\times$ 为满足 $\eta(\varpi_F) = 1$和 $\eta(\zeta) = \sqrt{-1} = i$的深度零特征。

(1) 如果 $z \in E_4^\times$那么

$$\eta^{-1}\big(N_{E_4/F}(z)\big) = (-i)^{v_{E_4}(z)}.$$

(2) 如果 $(x, y, z) \in M^0$，且 v_{E_4}表示 $E_4^\times$上的标准化赋值，那么 $v_{E_4}(z) \equiv 0$(模 2)。

证明。我们先证证（1）。设 $z = \varpi_{E_4}^k u$，其中 $k = v_{E_4}(x) \in \mathbb{Z}$ 且 $u \in \mathcal{O}_{E_4}^\times$。于是有

$$\eta^{-1}\big(N_{E_4/F}(u)\big) = 1$$

由引理3.1 第（4）部分。

接下来，因为 $\mu_4 \subset F^\times$， ϖ_{E_4} 的 F-共轭元为 ϖ_{E_4}， $i\varpi_{E_4}$， $i^2\varpi_{E_4}$， $i^3\varpi_{E_4}$，所以

$$N_{E_4/F}(\varpi_{E_4}) = \prod_{j=0}^{3} i^j\,\varpi_{E_4} = i^{0+1+2+3}\,\varpi_{E_4}^4 = i^6\,\varpi_{E_4}^4 = i^2\,\varpi_{E_4}^4 = (-1)\,\varpi_{E_4}^4.$$

利用 $\varpi_{E_4}^4 = -\zeta\,\varpi_F$，我们得到 $N_{E_4/F}(\varpi_{E_4}) = \zeta\,\varpi_F$，因此

$$\eta^{-1}\big(N_{E_4/F}(\varpi_{E_4})\big) = \eta^{-1}(\zeta)\eta(\varpi_F) = -i.$$

因此,

$$\eta^{-1}\big(N_{E_4/F}(z)\big) = \eta^{-1}\big(N_{E_4/F}(\varpi_{E_4})\big)^k\ \eta^{-1}\big(N_{E_4/F}(u)\big) = (-i)^k.$$

现在我们证明 (2)。如果 $(x,\ y,\ z) \in M^0$那么 $\eta^2(N_{E_4/F}(z)) = 1$根据引理 3.1 的第 (3) 部分。这给出 $(-i)^{2k} = (-1)^k = 1$，因此 k 是偶数。□

3.0.1. 注记。 我们注意到，以下两个陈述是一致的:

- 特征 χ_4： $E_4^\times \to \mathbb{C}^\times$ 的阶为 4
- 特征 $(1 \otimes 1 \otimes \chi_4)_{M^0}$： $M^0 \to \mathbb{C}^\times$ 的阶为 2。

我们回顾一下 χ_4 定理 3.2中的定义:

$$\chi_4 := \eta^{-1} \circ N_{E_4/F}.$$

对于标准化赋值 val_F 和 v_{E_4}，我们有

$$\mathrm{val}_F(N_{E_4/F}(x)) = f(E_4/F)v_{E_4}(x)$$

对所有 $x \in E_4$ 均成立。由于 E_4/F 是完全分歧的，我们有 $f(E_4/F) = 1$。因此我们有

$$v_{E_4} = \mathrm{val}_F \circ N_{E_4/F}.$$

现在我们可以按如下方式继续。采用定理 3.2中的记号，并利用引理 3.4:

$$\begin{aligned}
&(x, y, z) \in M^0 \\
\implies \chi(x, y, z) &= (1 \otimes 1 \otimes \chi_4)(x, y, z) \\
&= \chi_4(z) \\
&= \eta^{-1}(N_{E_4/F}(z)) \\
&= (-i)^{v_{E_4}(z)} \\
&= (-i)^{\mathrm{val}_F(N_{E_4/F}(z))}
\end{aligned}$$

因此，在下文将定义的坐标中，定理 χ 3.2中出现的扭曲就是由非分歧特征 $(1 : 1 : -i)$ 所作的扭曲。

3.0.2. 伯恩斯坦环面 $T^{\mathfrak{s}^0}$。令 $X_{\mathrm{nr}}(M^0)$ 表示 M^0 的非分歧特征群。我们回顾与尖点对 (M^0,σ^0) 相关的伯恩斯坦环面的定义：

$$T^{\mathfrak{s}^0}=\{\psi\otimes\sigma:\psi\in X_{\mathrm{nr}}(M^0)\}.$$

令 $X_{\mathrm{nr}}(E_2^\times)$（分别地，$X_{\mathrm{nr}}(E_4^\times)$）表示 $E_4^\times$（分别地，$E_4^\times$）的非分歧特征标群。于是有

$$T^{\mathfrak{s}^0}=\{\psi_1\otimes\psi_2(\eta\circ N_{E_2/F})\otimes\psi_3:\psi_1,\psi_2\in X_{\mathrm{nr}}(E_2^\times),\psi_3\in X_{\mathrm{nr}}(E_4^\times)\}.$$

我们如下为坐标 a_1、a_2、$a_3\in\mathbb{C}^\times$ 赋值：

$$\psi_1(x)=a_1^{\mathrm{val}_F(N_{E_2/F}(x))}$$
$$\psi_2(y)=a_2^{\mathrm{val}_F(N_{E_2/F}(y))}$$
$$\psi_3(z)=a_3^{\mathrm{val}_F(N_{E_4/F}(z))}$$

并写作

$$\psi=\psi_1\otimes\psi_2\otimes\psi_3.$$

我们回顾元素 $(x、y、z)\in E_2^\times\times E_2^\times\times E_4^\times$所满足的范数1方程（5）：

$$N_{E_2/F}(x)N_{E_2/F}(y)N_{E_4/F}(z)=1.$$

由此可得

$$\mathrm{val}_F(N_{E_2/F}(x))+\mathrm{val}_F(N_{E_2/F}(y))+\mathrm{val}_F(N_{E_4/F}(z))=0. \tag{6}$$

若 $(x,y,z)\in\mathfrak{o}_{E_2}^\times\times\mathfrak{o}_{E_2}^\times\times\mathfrak{o}_{E_4}^\times$ 则 $\psi(x,y,z)=1$ 从而 ψ 确实是非分歧的。为确认这一点，设 E 为 E_2 或 E_4。则 $x\in\mathfrak{o}_E^\times\implies v_E(x)=0\implies\mathrm{val}_F(N_{E/F}(x))=f(E/F)v_E(x)=0$。注意，若 $a_1=a_2=a_3$ 则由 (6) 有 $\psi(x_1,x_2,x_3)=1$。

我们实际上有齐次坐标，因此我们将写作

$$\psi=(a_1:a_2:a_3).$$

我们希望计算商簇

$$T^{\mathfrak{s}^0}/W^{\mathfrak{s}^0}.$$

假设 σ^0 被具有坐标 $(a_1:a_2:a_3)$ 的非分歧特征 ψ 扭曲。该 n

$$\widetilde{s}(\psi_1\otimes\psi_2(\eta\circ N_{E_2/F})\otimes\psi_3)=\psi_2\otimes\psi_1(\eta\circ N_{E_2/F})\otimes\chi_4\psi_3)$$

如定理 3.2的证明中那样。用坐标表示，这就是

$$s\cdot(a_1:a_2:a_3)=(a_2:a_1:-ia_3) \tag{7}$$
$$=(ia_2:ia_1:a_3) \tag{8}$$

令二元素群 $J=\{1,-1\}$ 作用于 $(\mathbb{C}^\times)^2$ 如下：

$$(-1)(b,c)=(-b,-c)$$

并令 $(\mathbb{C}^\times)^2/J$ 表示商空间。定义

$$s\cdot(b,c)=(ic,ib)$$

其中 s 是 $W^{\mathfrak{s}^0}$的生成元。

引理 3.5. 设 $T^{\mathfrak{s}^0}$ 为附属于伯恩斯坦谱$\mathfrak{B}G^0$中点 $\mathfrak{s}^0$ 的伯恩斯坦环面。则我们有一个 $W^{\mathfrak{s}^0}$-等变同构

$$T^{\mathfrak{s}^0}\cong(\mathbb{C}^\times)^2/J,\qquad(a_1:a_2:a_3)\mapsto(a_1/a_3,a_2/a_3).$$

证明。 我们将使用该映射的逆。考虑

$$f\colon (\mathbb{C}^\times)^3 \to T^{\mathfrak{s}^0}$$
$$(a,b,c) \mapsto a^{\mathrm{val}(N_{E_2/F}(x_1))} b^{\mathrm{val}(N_{E_2/F}(x_2))} c^{\mathrm{val}(N_{E_4/F}(x_3))}.$$

注意

$$f(a,a,a) = 1$$

对所有 $a \in \mathbb{C}^\times$，由（6）。我们注意到 z 由引理 3.4 知具有偶赋值，故 $z = \varpi_E^{2m} u$。因此

$$\mathrm{val}_F(N_{E_4/F}(z)) = \mathrm{val}_F(\zeta^{2m}\varpi_F^{2m}) = 2m$$

从而

$$(-1)^{\mathrm{val}(N_{E_4/F}(z))} = 1.$$

由此可得

$$f(b,b,-b) = 1$$

对所有 $b \in C^\times$。这两个族生成对角 $\mathbb{C}^\times$-子群与符号子群 J，因此核恰为其乘积。 f 的核如所需。最后，由（7）， s 为 $W^{\mathfrak{s}^0}$ 的生成元，在 $(\mathbb{C}^\times)^3/\mathbb{C}^\times$ 中的射影坐标上作用如下：

$$s \cdot (a:b:c) = (b:a:-ic) = (ib:ia:c).$$

□

定理 3.6（深度零商空间的拓扑）。 对于 *Bernstein*簇，我们有 $T^{\mathfrak{s}^0}/W^{\mathfrak{s}^0}$是一个维数为 2 的复代数簇。如果 a_1、a_2、a_3 的模为 1 ，那么 b、c的模也为 1 。按此等价关系将 $S^1 \times S^1$ 取商所得的商空间是克莱因瓶 **Kb**。因此我们有

$$T^{\mathfrak{s}^0}/W^{\mathfrak{s}^0} \quad \textit{deformation-retracts onto} \quad \mathbf{Kb}.$$

Let

$$Y := (\mathbb{C}^\times)^2/J, \qquad J = \{\pm 1\}, \quad (-1)\cdot(b,c) = (-b,-c).$$

映射

$$\tau\colon (b,c) \longmapsto (ic,\, ib)$$

下降为 Y上的良定义对合 $\bar{\tau}$。在极大紧实实形式上，商空间

$$Y_{\mathrm{cpt}}/\langle\bar{\tau}\rangle$$

同胚于克莱因瓶。

证明。 **τ 变为 Y上的一个对合**。在 $(\mathbb{C}^\times)^2$ 经计算得到

$$\tau^2(b,c) = (-b,-c).$$

由于这正是 W-作用， τ^2在 Y上是平凡的，所以 $\bar{\tau}^2 = \mathrm{id}$。

角坐标。 限制到极大紧环面

$$T = S^1 \times S^1, \qquad b = e^{i\theta},\ c = e^{i\phi}, \quad (\theta,\phi) \in \mathbb{R}^2/(2\pi\mathbb{Z})^2.$$

J-关系变为

$$(\theta,\phi) \sim (\theta+\pi, \phi+\pi),$$

对合的作用为

$$\bar{\tau}(\theta,\phi) = (\phi + \tfrac{\pi}{2},\, \theta + \tfrac{\pi}{2}).$$

该作用是自由的。 如果 $\bar{\tau}(\theta,\phi) \equiv (\theta,\phi)$ 模 $(2\pi\mathbb{Z})^2$和 J-关系，那么

$$\theta - \phi \equiv \tfrac{\pi}{2}, \qquad \phi - \theta \equiv \tfrac{\pi}{2} \pmod{2\pi},$$

这是不可能的。因此该作用是自由的，且商空间是一个无边界的光滑紧曲面。

欧拉示性数。 由于 $\bar{\tau}$ 在 Y_{cpt} 上阶为 2，而原先在 T 上的作用阶为 4 且是自由的，

$$\chi\big(Y_{\mathrm{cpt}}/\langle\bar{\tau}\rangle\big) = \chi(T)/4 = 0.$$

因此，商空间要么是环面，要么是克莱因瓶。

不可定向性。 在角坐标中，$\bar{\tau}$ 的导数是矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

其行列式为 -1；因此，$\bar{\tau}$ 是反向定向的。包含反向定向元素的自由作用会产生不可定向闭曲面。

结论。 欧拉示性数为 0 的连通闭曲面若是不可定向闭曲面，则为克莱因瓶。□

4. Group cohomology

4.0.1. 整数 $\mathbb{Z}$。

引理 4.1。 我们有 $H^2(\mathbb{Z},\ \mathbb{C}^\times) = 0$。

证明。这由 Weibel [W] 中的推论 6.2.7 得出，因为 $\mathbb{Z}$ 是由一个点生成的自由群。 □

4.0.2. 二阶2循环群。设 $C_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \langle s \mid s^2 = 1\rangle$。

引理 4.2。 $H^2(C_2,\ \mathbb{C}^\times) = 0$。

证明。对于一个循环群 C_n 在阿贝尔群 A上平凡作用时，有 [W，定理 6.2。2]

$$H^2(C_n, A) \cong A/N(A), \qquad N(a) = a \cdot (s \cdot a) \cdots (s^{n-1} \cdot a).$$

对于 $n = 2$ 和 $A = \mathbb{C}^\times$，范数为 $N(z) = z \cdot s(z) = z^2$，因此

$$H^2(C_2, \mathbb{C}^\times) \cong \mathbb{C}^\times/(\mathbb{C}^\times)^2.$$

每个陪集都具有 $z(\mathbb{C}^\times)^2$ 的形式，其中 $z \neq 0$。但是 $z(\mathbb{C}^\times)^2 = \mathbb{C}^\times$，因此结论成立。 □

4.0.3. 无限二面体群 $D_\infty = \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2$。

引理 4.3。 $H^2(D_\infty, \mathbb{C}^\times) = 0$。

证明。 回忆一下，无限二面体群具有如下表示

$$\mathrm{D}_\infty = \langle s, t \mid s^2 = t^2 = 1\rangle \cong (\mathbb{Z}/2) * (\mathbb{Z}/2),$$

即，它是两个 $\mathbb{Z}/2$的自由积。现在我们将对 [W]应用推论 6.2.10：

$$\begin{aligned} H^2(\mathrm{D}_\infty, \mathbb{C}^\times) &\cong H^2(\mathbb{Z}/2, \mathbb{C}^\times) \oplus H^2(\mathbb{Z}/2, \mathbb{C}^\times) \\ &= 0 \end{aligned}$$

由引理 4.2。 □

4.0.4. 群 $\mathbb{Z}/2\times\mathbb{Z}$。设 $N=\mathbb{Z}/2\times\mathbb{Z}$。我们考虑以$\mathbb{C}^\times$为系数、具有平凡 N作用的群上同调。将 N 的元素写作 (ε,m)，其中 $\varepsilon\in\{0,1\}$ 且 $m\in\mathbb{Z}$。

Since $\mathbb{C}^\times$ 是可除阿贝尔群，泛系数定理可将其识别为 es

$$H^2(N,\mathbb{C}^\times)\cong \mathrm{Hom}(H_2(D,\mathbb{Z}),\mathbb{C}^\times).$$

使用 K¨unneth 公式计算群同调 [W，§3.5]，

$$H_2(\mathbb{Z}/2\times\mathbb{Z},\mathbb{Z})\cong H_1(\mathbb{Z}/2,\mathbb{Z})\otimes H_1(\mathbb{Z},\mathbb{Z})\cong(\mathbb{Z}/2)\otimes\mathbb{Z}\cong\mathbb{Z}/2,$$

由于 $H_2(\mathbb{Z}/2,\ \mathbb{Z})=H_2(\mathbb{Z},\ \mathbb{Z})=0$，$H_1(\mathbb{Z}/2,\ \mathbb{Z})=\mathbb{Z}/2$，且 $H_1(\mathbb{Z},\ \mathbb{Z})=\mathbb{Z}$。

因此

$$\boxed{H^2(\mathbb{Z}/2\times\mathbb{Z},\mathbb{C}^\times)\cong\mathbb{Z}/2.}$$

因此有 恰好有两个上同调类：平凡类和唯一的非平凡类。

4.0.5. 首选余循环。我们的目标是描述相关的类

$$H^2(N,\mathbb{C}^\times).$$

Γ 的射影表示仅在相差一个余边界的意义下确定一个2-余循环。因此，对生成元进行不同的正规化会得到上同调等价的余循环。

令 $N=\mathbb{Z}/2\times\mathbb{Z}$，将其加法地写成对（$\varepsilon$，$m$），其中 $\varepsilon\in\{0,1\}$ 且 $m\in\mathbb{Z}$，群运算为

$$(\varepsilon,m)+(\delta,n)=(\varepsilon+\delta,\ m+n).$$

我们考虑系数取在 $\mathbb{C}^\times$ 中的群上同调，并取平凡的 N–作用。为与后文（第4节）所使用的交织算子的正规化保持一致，我们采用余循环

$$\mu\big((\varepsilon,m),(\delta,n)\big)\ =\ (-1)^{\varepsilon n}.$$

引理4.4。函数 μ 是 N上的一个正规化的2–余循环。

证明。 正规化显然成立：如果某个元素为 (0,0)，那么指数为 0，且 $\mu=1$。对于上闭链恒等式，取 $g=(\varepsilon,m)$、 $h=(\delta,n)$、 $k=(\gamma,p)$。那么

$$\mu(g,h)\mu(g+h,k)=(-1)^{\varepsilon n}\,(-1)^{(\varepsilon+\delta)p}=(-1)^{\varepsilon n+\varepsilon p+\delta p},$$

而

$$\mu(h,k)\mu(g,h+k)=(-1)^{\delta p}\,(-1)^{\varepsilon(n+p)}=(-1)^{\delta p+\varepsilon n+\varepsilon p}.$$

两者相等，因此 μ 是一个 2–余循环。 □

引理 4.5。 上同调类 $[\mu]\in H^2(N,\mathbb{C}^\times)$ 非平凡。

证明。 对于阿贝尔群上的 2–余循环 α，定义其换位子双特征

$$b_\alpha(g,h):=\frac{\alpha(g,h)}{\alpha(h,g)}.$$

如果 $\alpha=\partial f$ 是一个余边界，那么

$$\partial f(g,h)=\frac{f(g)f(h)}{f(g+h)}=\partial f(h,g),$$

因此，对于所有 g，h，$b_{\partial f}(g,\ h)=1$。

现在计算 b_μ 在 $\mathbb{Z}/2$ 的生成元 $a=(1,\ 0)$ 和 $t=$ 在 $\mathbb{Z}$ 的生成元 (0，1) 上的值：

$$\mu(a,t)=(-1)^{1\cdot1}=-1,\qquad \mu(t,a)=(-1)^{0\cdot0}=1.$$

因此

$$b_\mu(a,t)=\frac{\mu(a,t)}{\mu(t,a)}=-1\neq1.$$

因此， μ 不是余边界，即 $[\mu]\neq0$ 属于 $H^2(G,\ \mathbb{C}^\times)$。 □

在本文余下部分，我们使用余循环 μ，因为它与第4节中由交织算子产生的正规化一致。

4.0.6. 余循环 $\mu^{\mathcal{T}}$ 来自 [AFO]。余循环 $\mu^{\mathcal{T}}$ 具有以下性质：

- 它在 $\mathbb{Z}_A$ 和 $\mathbb{Z}_B$ 上是平凡的，见引理4.1
- 它在无限二面体群 $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2$ 上是平凡的，见引理 4.3

现在考虑 $\mu^{\mathcal{T}}$ 在子群上的限制

$$\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z} \subset \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}.$$

根据 [AFO推论 3，它必定非平凡。6]。另一方面， $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}$ 具有唯一的非平凡上同调类。因此必有

$$\mu^{\mathcal{T}}|_{\mathbb{Z}/2\times\mathbb{Z}} = \mu,$$

也就是说

$$\begin{aligned}\mu^{\mathcal{T}}((m_1,\varepsilon,n_1),(m_2,\delta,n_2)) &= \mu((\varepsilon,n_1),(\delta,n_2)) \\ &= (-1)^{\varepsilon n_2}\end{aligned}$$

对于所有 m_1， m_2， n_1， n_2， $\in \mathbb{Z}$ 和 ε， $\delta \in \mathbb{Z}/2$。我们将在下一节使用这个公式。

5. The twisted group algebra $\mathbb{C}[\Gamma, \mu^{\mathcal{T}}]$ of Adler-Fintzen-Ohara

我们考虑可数离散群

$$\Gamma := (\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2) \times \mathbb{Z}$$

其中， $\mathbb{Z}/2$ 的生成元 s 作用为 $s \cdot n = -n$。有时我们会写成

$$\Gamma = (\mathbb{Z}_A \rtimes \mathbb{Z}/2) \times \mathbb{Z}_B$$

以区分 $\mathbb{Z}$的两个副本。

显式余循环 $\mu = \mu^{\mathcal{T}}$ 由下式给出

$$\boxed{\mu((m_1,\varepsilon,n_1),(m_2,\delta,n_2)) = (-1)^{\varepsilon\cdot n_2}}$$

with

$$m_1, m_2 \in \mathbb{Z}_A \qquad \varepsilon, \delta \in \{0,1\} \qquad n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_B.$$

注意，

$$\mu|_{\mathbb{Z}_A\rtimes\mathbb{Z}/2} = 1, \qquad \mu|_{\mathbb{Z}_B} = 1, \qquad \mu|_{\mathbb{Z}/2} = 1.$$

这与 §2 一致。余循环 μ 只有在限制到 $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}_B$ 时才可能非平凡。扭曲群代数为 $\mathbb{C}[\Gamma, \mu]$。我们将记作

$$\mathbb{C}[\mathbb{Z}_A] = \mathbb{C}[X, X^{-1}] \tag{9}$$

$$\mathbb{C}[\mathbb{Z}_B] = \mathbb{C}[Y, Y^{-1}]. \tag{10}$$

在作出识别 (9) 后，我们有

$$s \cdot X = X^{-1}. \tag{11}$$

限制到 $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}_B$ 的余循环 μ由下式给出

$$\boxed{\mu((\varepsilon,m),(\delta,n)) := (-1)^{\varepsilon n},}$$

其中 ε， $\delta \in \{0,1\}$ 和 m， $n \in \mathbb{Z}$。

我们考察这一对 (s, Y) 。我们有

$$s = (1,0) \in \mathbb{Z}/2 \times_{\mu} \mathbb{Z}_B.$$

在完成识别 (9) 后，我们有

$$Y = (0,1) \in \mathbb{Z}/2 \times_\mu \mathbb{Z}_B.$$

引理 5.1。 代数 $\mathbb{C}[\mathbb{Z}/2 \times_\mu \mathbb{Z}]$ 是一个带单位元的非交换 $\mathbb{C}$-代数。它有生成元 N_s、N_Y，其乘法规则为

$$N_s N_Y = \mu(s,Y) N_{sY}.$$

生成元为 N_s、N_Y，满足关系

$$N_s^2 = 1, \qquad N_s N_Y = -N_Y N_s.$$

证明。 单位元为 $N_{(0,0)}$。我们有

$$\begin{aligned} N_s^2 &= N_{(1,0)} N_{(1,0)} \\ &= \mu((1,0),(1,0)))N_{(0,0)} \\ &= 1. \end{aligned}$$

我们还有

$$\begin{aligned} N_s N_Y &= \mu(s,Y) N_{sY} \\ &= -N_{sY} \\ &= -N_{Ys} \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} N_Y N_s &= \mu(Y,s) N_{Ys} \\ &= N_{Ys} \end{aligned}$$

如所要求。 □

Corollary 5.2. 在群代数 $\mathbb{C}[\mathbb{Z}/2 \times_\mu \mathbb{Z}_B]$ 中，根据引理 *5.1* ，

$$\begin{aligned} N_s N_Y N_s^{-1} &= -N_Y N_s N_s^{-1} \\ &= -N_Y \end{aligned}$$

从而

$$s \cdot Y = -Y \tag{12}$$

恰如 *Goldberg-Roche* [GR2，§11.8]。

6. Simple modules of $\mathbb{C}[\Gamma, \mu^{\mathcal{T}}]$

定理 6.1. 对于扭曲 *AFO* 代数，我们有，

$$\mathbb{C}[\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}, \mu] \;\cong\; \mathbb{C}[s, X, X^{-1}, Y, Y^{-1}] \Big/ \big(s^2 - 1,\; sY + Ys,\; sX - X^{-1}s,\; XY - YX\big),$$

且简单模是2维模

$$M_{w,z} \cong \mathbb{C}^2, \qquad Y \mapsto \begin{pmatrix} w & 0 \\ 0 & -w \end{pmatrix}, \quad s \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X \mapsto \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix},$$

其参数为$(w, z) \in (\mathbb{C}^\times)^2$, 满足

$$M_{w,z} \;\cong\; M_{-w,z^{-1}},$$

并且每个单模都同构于其中之一。 $\mathbb{C}[\Gamma, \mu^{\mathcal{T}}]$ 的本原谱自然等同于$(\mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times)/(w, z) \sim (-w, z^{-1})$。特别地，本原谱是不可约的。

证明。扭曲群代数的表示。记

$$\Gamma = (\mathbb{Z}_A \rtimes \mathbb{Z}/2) \times \mathbb{Z}_B,$$

其中，s 是 $\mathbb{Z}/2$ 的生成元，它对 $\mathbb{Z}_A$ 的作用是取逆。令 X 表示与 $1 \in \mathbb{Z}_A$ 对应的类群元素，Y 表示与 $1 \in \mathbb{Z}_B$对应的类群元素。那么在非扭曲群代数中，有

$$sXs^{-1} = X^{-1}, \qquad XY = YX, \qquad s^2 = 1.$$

余循环 μ 在 $\mathbb{Z}_A \rtimes \mathbb{Z}/2$ 和 $\mathbb{Z}_B$上均为平凡的，仅在子群 $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}_B$上非平凡；具体而言，采用加法记号 $(\varepsilon,\ m) \in \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}_B$,

$$\mu\big((\varepsilon, m), (\delta, n)\big) = (-1)^{\varepsilon n}.$$

特别是，若将 N_g 记为附属于 $g \in \Gamma$的基元素，则在 $\mathbb{C}[\Gamma, \mu]$ 中有

$$N_s N_Y = \mu(s, Y) N_{sY} = (-1) N_{sY}, \qquad N_Y N_s = \mu(Y, s) N_{Ys} = (+1) N_{Ys}.$$

由于 $Ys = sY$属于底层群，因此得到扭曲关系

$$N_s N_Y = -\, N_Y N_s.$$

因此，$\mathbb{C}[\Gamma, \mu]$ 由 s、$X^{\pm 1}$、$Y^{\pm 1}$ 生成，其关系为

$$s^2 = 1, \qquad sX = X^{-1}s, \qquad sY = -Ys, \qquad XY = YX,$$

由此得到所述表示。

不存在一维模。设 M 是一维模。由于 Y 在代数中可逆，它在 End(M) 中的像$\cong \mathbb{C}$ 必为一个非零标量，记为 $Y \mapsto \lambda \in \mathbb{C}^\times$。但关系$sY = -Ys$ 迫使

$$s\lambda = -\lambda s.$$

在 $\mathbb{C}$ 中，这意味着 $2\lambda s = 0$，因此 $s = 0$，这与 $s^2 = 1$ 矛盾。因此，不存在一维表示。

将问题化归为交换子代数上的克利福德理论。令

$$B := \mathbb{C}[X^{\pm 1}, Y^{\pm 1}] \subset \mathbb{C}[\Gamma, \mu].$$

那么，B 是一个含两个变量的交换 Laurent 多项式代数。由 s 的共轭作用定义了 B 上的对合自同构 α：

$$\alpha(X) = X^{-1}, \qquad \alpha(Y) = -Y.$$

等价地，对于由下式确定的任意特征 $\chi : B \to \mathbb{C}$

$$\chi(X) = z \in \mathbb{C}^\times, \qquad \chi(Y) = w \in \mathbb{C}^\times,$$

有

$$(\chi \circ \alpha)(X) = z^{-1}, \qquad (\chi \circ \alpha)(Y) = -w.$$

因此，$\mathbb{Z}/2$ 在 Spec(B) $\cong (\mathbb{C}^\times)^2$ 上的作用为

$$(w, z) \longmapsto (-w, z^{-1}).$$

注意，这个作用在 $(\mathbb{C}^\times)^2$ 上没有不动点：不动点要求 $z = z^{-1}$ 和$w = -w$，因此 $w = 0$，这是不可能的。

二维单模的构造。取 $(w,\ z) \in (\mathbb{C}^\times)^2$，并令 $\mathbb{C}_{w,\ z}$ 为一维 B-模，满足 $X \mapsto z$ 和 $Y \mapsto w$。构造诱导模

$$M_{w,z} := \mathrm{Ind}_B^{\mathbb{C}[\Gamma,\mu]} \mathbb{C}_{w,z} \ \cong\ \mathbb{C}[\Gamma, \mu] \otimes_B \mathbb{C}_{w,z}.$$

由于 (w, z) 的 $\mathbb{Z}/2$ 轨道大小为 2，根据标准的克利福德理论（或下面的直接计算）可知 $M_{w,z}$ 是二维的且简单。

具体而言，令 $v := 1 \otimes 1 \in M_{w,z}$，并设 $v' := s \cdot v$。那么 $\{v, v'\}$ 是 $M_{w,z}$ 的一组基。利用 $s^2 = 1$，我们有 $s \cdot v = v'$ 和 $s \cdot v' = v$，因此

$$s \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

接下来，$Xv = zv$ 根据定义。此外，

$$Xv' = X(sv) = (Xs)v = (sX^{-1})v = s(z^{-1}v) = z^{-1}v',$$

so

$$X \mapsto \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix}.$$

类似地，$Yv = wv$ 以及

$$Yv' = Y(sv) = -(sY)v = -s(wv) = -wv',$$

因此

$$Y \mapsto \begin{pmatrix} w & 0 \\ 0 & -w \end{pmatrix}.$$

这些矩阵满足定义关系，因此$M_{w,\ z}$ 确实是一个表示 .

同构关系 $M_{w,\ z} \cong M_{-w,\ z^{-1}}$。$B$ 的特征上的 $\mathbb{Z}/2$–作用将（w，z）映到（$-w$，z^{-1}）。等价地，用 s–矩阵对上述矩阵作共轭会交换两个基向量，并将（w，z）映到（$-w$，z^{-1}）。因此$M_{w,\ z} \cong M_{-w,\ z^{-1}}$。

穷尽性：每个单模都属于这些模之一。设 M 是一个简单的 $\mathbb{C}[\Gamma, \mu]$–模。将 M限制到交换子代数 B上。在 M的支集中选取一个极大理想 $\mathfrak{m} \subset B$；等价地，选取一个特征 $\chi\colon B \to \mathbb{C}$，它出现在 M 中，且满足 $\chi(X) = z \neq 0$和 $\chi(Y) = w \neq 0$（因为 X, Y在该代数中可逆）。由于 $\mathbb{Z}/2$在 $\mathrm{Spec}(B)$ 上的作用是自由的，χ–等型分量生成一个二维 $\mathbb{C}[\Gamma, \mu]$–子模（如上所述，由 v 和 sv 张成），而单纯性迫使M 同构于这个诱导模 $M_{w,z}$。因此，每个单模都是二维的，并且同构于某个 $M_{w,z}$，唯一的等同关系为 $(w, z) \sim (-w, z^{-1})$。

证明至此完成。 □

推论 6.2（克莱因瓶作为紧参数空间）。设

$$\tau\colon\ S^1 \times S^1 \longrightarrow S^1 \times S^1, \qquad \tau(w, z) = (-w, z^{-1}).$$

于是，扭曲代数 $\mathbb{C}[\Gamma, \mu^{\mathcal{T}}]$ 的简单酉模的参数空间（即满足$|w| = |z| = 1$的模）为商空间

$$K := (S^1 \times S^1)/\langle\tau\rangle,$$

并且 K 与克莱因瓶同胚。

证明。根据定理 6.1，简单模由 $(w, z) \in (\mathbb{C}^\times)^2$ 模去等同关系 $(w, z) \sim (-w, z^{-1})$ 参数化。限制到酉轨迹 $|w| = |z| = 1$ 恰好得到商空间$K = (S^1 \times S^1)/\langle\tau\rangle$。

记 $w = e^{i\theta}$ 和 $z = e^{i\phi}$。则 τ 的作用为

$$(\theta, \phi) \longmapsto (\theta + \pi,\ -\phi).$$

这个作用是自由的：不动点要求 $\theta \equiv \theta + \pi$（模 2π），这是不可能的。因此，$S^1 \times S^1 \to K$是一个二重覆盖，并且

$$\chi(K) = \chi(S^1 \times S^1)/2 = 0.$$

此外，τ 是反向定向的（它翻转了 ϕ圆周），因此 K 是一个欧拉示性数为 0 的闭非定向曲面。所以 K 是一个克莱因瓶。□

7. Simple modules of the untwisted algebra $\mathbb{C}[\Gamma]$

命题 7.1. 设

$$\Gamma := (\mathbb{Z}_A \rtimes \mathbb{Z}/2) \times \mathbb{Z}_B,$$

其中， s 在 $\mathbb{Z}/2$ 中的生成元通过取逆作用于 $\mathbb{Z}_A$ 。令 X （分别为 Y）表示对应于 $1 \in \mathbb{Z}_A$ （分别为 $1 \in \mathbb{Z}_B$）的类群元素。那么，（未扭曲的）群代数具有如下表示

$$\mathbb{C}[\Gamma] \;\cong\; \mathbb{C}[s, X, X^{-1}, Y, Y^{-1}] \Big/ \big(s^2 - 1,\; sX - X^{-1}s,\; sY - Ys,\; XY - YX\big),$$

即 $B := \mathbb{C}[X^{\pm 1}, Y^{\pm 1}]$ 是交换的，且 s 通过以下方式作用于 B

$$\alpha(X) = X^{-1}, \qquad \alpha(Y) = Y.$$

简单的 $\mathbb{C}[\Gamma]$–模如下。

对于 $(w, z) \in (\mathbb{C}^\times)^2$ ，其中 $z \neq \pm 1$，令 $M_{w,z} \cong \mathbb{C}^2$ ，其中

$$Y \mapsto \begin{pmatrix} w & 0 \\ 0 & w \end{pmatrix}, \qquad s \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad X \mapsto \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix}.$$

那么 $M_{w,\,z}$ 是简单的，并且

$$M_{w,z} \;\cong\; M_{w,z^{-1}}.$$

每个维数为2 的简单模都恰好同构于一个 $M_{w,\,z}$ ，其中 $z \neq \pm 1$，且同构意义下满足识别 $z \sim z^{-1}$。

对于每个 $w \in \mathbb{C}^\times$、每个符号选择 $\delta \in \{+1, -1\}$以及每个 $\varepsilon \in \{+1, -1\}$，令 $\mathbb{C}_{w,\,\delta,\,\varepsilon}$ 为如下的1维模：

$$Y \mapsto w, \qquad X \mapsto \delta, \qquad s \mapsto \varepsilon.$$

这些都是简单模，两两不同构，并且穷尽了所有1维简单模。

因此， $\mathbb{C}[\Gamma]$ 的简单模同构类集合是不交并

$$\Big\{ M_{w,z} :\; (w,z) \in (\mathbb{C}^\times)^2,\; z \neq \pm 1 \Big\} \Big/ \big((w,z) \sim (w,z^{-1})\big) \;\sqcup\; \Big\{ \mathbb{C}_{w,\delta,\varepsilon} :\; w \in \mathbb{C}^\times,\; \delta = \pm 1,\; \varepsilon = \pm 1 \Big\}.$$

证明。表示。在群 Γ 中，我们有 $s^2 = 1$、 $sXs^{-1} = X^{-1}$ （在 $\mathbb{Z}_A$上的求逆），以及$sYs^{-1} = Y$ （因为 $\mathbb{Z}_B$是一个直因子）。此外，由于 $\mathbb{Z}_A$和 $\mathbb{Z}_B$可交换，有 $XY = YX$。这就得到了所述表示。

视为交叉积。令 $B = \mathbb{C}[X^{\pm 1}, Y^{\pm 1}]$。由 s的共轭作用诱导出 B的一个对合 α： $\alpha(X) = X^{-1}$且 $\alpha(Y) = Y$。因此$\mathbb{C}[\Gamma] \cong B \rtimes_\alpha \mathbb{Z}/2$。

B 的特征由 $(w, z) \in (\mathbb{C}^\times)^2$ 参数化，具体为

$$\chi_{w,z}(Y) = w, \qquad \chi_{w,z}(X) = z.$$

在 $\mathrm{Spec}(B) \cong (\mathbb{C}^\times)^2$ 上诱导的作用为

$$(w, z) \longmapsto (w, z^{-1}).$$

因此，(w, z)的轨道大小为 2，当且仅当 $z \neq \pm 1$；而当且仅当 $z = \pm 1$时，轨道大小为 1。

一般情形 $z \neq \pm 1$: 诱导模是2维的简单模。固定 $z \neq \pm 1$ ，并考虑一维 B模 $\mathbb{C}_{w,z}$ ，其特征为 $\chi_{w,\,z}$。构造诱导模

$$M_{w,z} := \mathrm{Ind}_B^{B \rtimes \mathbb{Z}/2} \mathbb{C}_{w,z} \;\cong\; (B \rtimes \mathbb{Z}/2) \otimes_B \mathbb{C}_{w,z}.$$

设 $v := 1 \otimes 1$ 且 $v' := s \cdot v$。则 $\{v, v'\}$ 张成 $M_{w,z}$。可以计算

$$Yv = wv, \quad Yv' = wv', \qquad Xv = zv, \quad Xv' = X(sv) = (sX^{-1})v = z^{-1}v',$$

且 s 交换 v 与 v'，恰好给出所展示的矩阵。由于 $\chi_{w,z}$ 的 $\mathbb{Z}/2$–轨道大小为 2，关于交叉积的标准克利福德理论蕴含 $M_{w,z}$ 是简单的；此外 $M_{w,z} \cong M_{w,z^{-1}}$，因为 (w,z) 与 (w,z^{-1}) 位于同一轨道。

不动点情形 $z = \pm 1$: 一维简单模。假设 $z = \delta \in \{\pm 1\}$，因此 $\chi_{w,\,\delta}$ 被 α固定。那么关系式 $sX = X^{-1}s$ 除了 $s\delta = \delta s$之外不施加任何约束，并且在未扭曲代数中，s 与 Y 可交换。因此，我们可以为 s 任意选取一个标量 $\varepsilon = \pm 1$（只需满足$s^2 = 1$），从而得到一维模 $\mathbb{C}_{w,\,\delta,\,\varepsilon}$。显然，根据 $(X,\ Y,\ s)$ 的特征值，这些模两两不同构。

最后，若 $z = \pm 1$，则诱导模 $\mathrm{Ind}_B^{B\times\mathbb{Z}/2}\mathbb{C}_{w,\,z}$ 可约，并分解为与 $\varepsilon = \pm 1$ 对应的两个特征之直和。因此，不存在其他单模。□

注记 7.2（余循环对单模和拓扑的影响）。从非扭曲群代数 $\mathbb{C}[\Gamma]$ 转到扭曲代数 $\mathbb{C}[\Gamma,\mu^T]$ 会产生两个决定性后果。

首先，余循环将 $\mathbb{Z}/2$–生成元与 s 之间的交叉积关系$\mathbb{Z}_B$–生成元 Y从 $sY = Ys$ 修改为 $sY = -Ys$。因此，一维表示消失：在一维情形下，关系 $sY = -Ys$ 会迫使 $Y = 0$成立，这与可逆性矛盾。因此，扭曲代数的每个简单模都变为二维（定理6.1）。

其次，这一改变后的交换关系改变了 $\mathbb{Z}/2$ 在特征环面 $\mathrm{Spec}\mathbb{C}[X^{\pm1},Y^{\pm1}] \cong (\mathbb{C}^\times)^2$上的诱导作用。在未扭曲的情形下，对合为

$$(w,z) \longmapsto (w,z^{-1}),$$

其不动点 $z = \pm 1$ 恰好产生一维简单模。扭曲之后，对合变为

$$(w,z) \longmapsto (-w,z^{-1}),$$

它没有　　在 $(\mathbb{C}^\times)^2$ 上的不动点，因此只产生二维简单模　　.

在紧实实形 $S^1 \times S^1$上，这一变化将环面的商空间从带边界的反射（与一维表示的存在相符）替换为自由的、反转定向的对合。由此得到的紧商空间是不可定向且无边界的，因此是一个克莱因瓶。从这个确切意义上说，克莱因瓶几何是非平凡2-余循环 $\mu^{\mathcal{T}}$的拓扑体现。

8. The Klein bottle as geometric footprint of the algebra $\mathbb{C}[\Gamma,\mu^{\mathcal{T}}]$

考虑对合

$$\tau\colon\ S^1 \times S^1 \longrightarrow S^1 \times S^1, \qquad \tau(w,z) = (-w,z^{-1}),$$

以及商空间

$$\mathcal{K} := (S^1 \times S^1)/\langle\tau\rangle.$$

记 $w = e^{i\theta}$ 和 $z = e^{i\phi}$。则 τ 的作用为

$$(\theta,\phi) \longmapsto (\theta+\pi,\,-\phi).$$

此作用是自由的（没有不动点），因此 $\mathcal{K}$ 是一个闭光滑曲面，而 $S^1 \times S^1 \to \mathcal{K}$ 是一个二重覆盖。

8.0.1. 它如何作为实形式嵌入复商空间中。设

$$X := (\mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times)/\langle\tau\rangle, \qquad \tau(w,z) = (-w,z^{-1}).$$

紧致环面 $S^1\times S^1 \subset \mathbb{C}^\times\times\mathbb{C}^\times$ 在 τ作用下保持不变，因此其商空间 $\mathcal{K}$ 自然嵌入为 X中的一个实子流形：

$$K \ =\ (S^1 \times S^1)/\langle\tau\rangle \ \hookrightarrow\ (\mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times)/\langle\tau\rangle \ =\ X.$$

此外， $\mathcal{K}$ 是 X 的一个极大紧致实形式，因为 $\mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times$ 变形收缩到 $S^1 \times S^1$，且此收缩是 τ等变的；因此， X变形收缩到 $\mathcal{K}$。特别地，$\mathcal{K}$ 刻画了复曲面 X的同伦型。

将限制到极大紧子群 $S^1 \times S^1$ ，得到商空间的紧实实形。由于该对合在环面上是自由的且反向定向，因此所得紧商空间不可定向，即为克莱因瓶。从这个意义上说，克莱因瓶是非平凡2-余循环 $\mu^{\mathcal{T}}$ 的拓扑印记。

引理 8.1 （伯恩斯坦环面的平方根坐标）。 令

$$J = \{\pm 1\}, \qquad (-1)\cdot(b,c) = (-b,-c)$$

作用于（$\mathbb{C}^\times$）^{2},并定义

$$w := bc, \qquad z := \frac{b}{c}.$$

那么映射

$$(\mathbb{C}^\times)^2 \longrightarrow (\mathbb{C}^\times)^2, \qquad (b,c) \longmapsto (w,z)$$

在 J 下不变，并诱导出一个代数同构

$$(\mathbb{C}^\times)^2/J \xrightarrow{\sim} (\mathbb{C}^\times)^2.$$

证明。 若 $(b,c) \mapsto (-b,-c)$，则

$$bc \longmapsto (-b)(-c) = bc, \qquad \frac{b}{c} \longmapsto \frac{-b}{-c} = \frac{b}{c},$$

因此该映射在 J 下不变，故可下降到商空间。

反过来，给定 $(w,z) \in (\mathbb{C}^\times)^2$, 的任一解 (b,c)，满足

$$b^2 = wz, \qquad c^2 = \frac{w}{z}$$

便确定一个原像，而唯一的不确定性是同时变号 $(b,c) \sim (-b,-c)$，这恰好就是 J–作用。因此，诱导映射 $(\mathbb{C}^\times)^2/J \to (\mathbb{C}^\times)^2$ 是双射。由于两个簇都是二维光滑代数环面，该映射是代数同构。□

8.0.2. 的温和对偶。 我们回顾 w 和 z的定义：

$$w := bc, \qquad z := \frac{b}{c}.$$

由此可知，若 b 和 c的模为 1，则 w 和 z 的模也为 1。

令 $\mathfrak{B}$ 表示 G^0的约化 C^*-代数。我们有 Bernstein分解

$$\mathfrak{B} = \bigoplus_{\mathfrak{t}\in\mathfrak{B}G^0} \mathfrak{B}^{\mathfrak{t}}$$

作为一个 C^*-直和。定义

$$\mathfrak{A}^0 := \mathfrak{B}^{\mathfrak{s}^0}$$

并令 $X_{\mathrm{unr}}(M^0)$表示 M^0的非分歧幺正特征群。

Lo$\widehat{\mathfrak{A}^0}$ 表示 $\mathfrak{A}^0$的谱，并在其本原理想集合上赋予标准的 Jacobson 拓扑，参见 [D，§3。1]。

定理 8.2。 $\mathfrak{A}^0$ 的谱与克莱因瓶同胚：

$$\widehat{\mathfrak{A}^0} \cong \mathbf{Kb}.$$

证明。 注意到 M^0是 G^0的极大 Levi 子群，且 $W^{\mathfrak{s}^0}$在 $X_{\mathrm{unr}}(M^0)$ 上自由作用。现在我们可以应用 [R，§4。3] 中的命题，从而推知每个诱导表示 $\mathrm{Ind}_{M^0N^0}^{G^0}\psi\otimes\sigma^0$ （其中 $\psi\in X_{\mathrm{unr}}(M^0)$ 是 G^0的不可约幺正表示，也是温和的表示G^0。因此，映射

$$X_{\mathrm{unr}}(M^0)\longrightarrow\widehat{\mathfrak{A}^0}\qquad\psi\mapsto\mathrm{Ind}_{M^0N^0}^{G^0}\psi\otimes\sigma^0 \tag{13}$$

有良好定义且是满射。映射 (15) 确定了一个双射

$$X_{\mathrm{unr}}(M^0)/W^{\mathfrak{s}^0}\longrightarrow\widehat{\mathfrak{A}^0}$$

也就是说，一个双射

$$\mathbf{Kb}\longrightarrow\widehat{\mathfrak{A}^0}.$$

在证明的这一阶段，我们将使用来自 C^*的 -Plancherel 定理 [P]。根据 [P], 中的推论 2.7，傅里叶变换 $\mathcal{F}$ 确定了一个 C^*-代数的同构

$$\mathcal{F}:\mathfrak{A}^0\cong C(\mathbf{Kb},\mathfrak{K})$$

其中，$\mathbf{Kb}$ 是具有自然拓扑的克莱因瓶（作为 $S^1\times S^1$的商空间）， $\mathfrak{K}$ 是作用于可分无限维希尔伯特空间上的紧算子 C^*-代数，而 $C(\mathbf{Kb}\ \mathfrak{K})$ 表示从$\mathbf{Kb}$ 到 $\mathfrak{K}$的所有连续映射构成的C^*-代数。由此可知， $\mathfrak{A}^0$ 与 $C(\mathbf{Kb})$强 Morita 等价。因此，我们有

$$\widehat{\mathfrak{A}^0}\cong\mathbf{Kb}.$$

该陈述表明， $\mathfrak{A}^0$ 的谱与$\mathbf{Kb}$同胚。 □

因此，克莱因瓶 $\mathbf{Kb}$ 是 G^0 的温和对偶中的一个连通紧豪斯多夫子空间。

9. Positive depth

我们简要说明，如何将前述分析推广到 Roche 在 [R, §4.1]. 中考虑的正深度情形。

令 $G:=\mathrm{SL}_8$。在相同的基本数据 $(F,E_2/F,E_4/F,\zeta,\eta,\chi_0)$ 下，Roche 考虑一个 Levi 子群 $M(F)\subset\mathrm{SL}_8(F)$，使得

$$M(F)\simeq(\mathrm{GL}_2(F)\times\mathrm{GL}_2(F)\times\mathrm{GL}_4(F))\cap\mathrm{SL}_8(F)$$

以及 $M(F)$ 的一个不可约超尖表示 σ。

对于 $\mathrm{GL}^{n_i}(F)$ 的一个表示 $\widetilde{\sigma}_i$，我们用 $\mathfrak{S}(\widetilde{\sigma}_i)$ 表示满足 $\widetilde{\sigma}_i\simeq\chi\widetilde{\sigma}_i$ 的 $F^\times$ 的特征 χ 的集合，其中 $\chi\widetilde{\sigma}_i$ 是表示 $g\mapsto\widetilde{\sigma}_i(g)\chi(\det(g))$，适用于 $g\in\mathrm{GL}^{n_i}(F)$。表示 $\widetilde{\sigma_1}$ 和 $\widetilde{\sigma_2}$（其中 $\widetilde{\sigma}_1$ 是 $\mathrm{GL}_2(F)$ 的一个不可约超尖表示， $\widetilde{\sigma}_2$ 是 $\mathrm{GL}_4(F)$ 的一个不可约超尖表示）构造如下，使得

$$\mathfrak{S}(\widetilde{\sigma}_1)=\{1,\eta^2\}\qquad\text{and}\qquad\mathfrak{S}(\widetilde{\sigma}_2)=\langle\chi_0\eta\rangle.$$

表示 σ 定义为不可约超尖表示在 $M(F)$ 上的限制

$$\widetilde{\sigma}:=\widetilde{\sigma}_1\otimes\eta\widetilde{\sigma}_1\otimes\widetilde{\sigma}_2$$

$\mathrm{GL}_2(F)\times\mathrm{GL}_2(F)\times\mathrm{GL}_4(F)$ 其中 σ_1,σ_2是在 [R,§4.1] 中精心构造的超尖点表示。

尖点对 $(M,\ \sigma)$ 在伯恩斯坦谱 $\mathfrak{B}\mathrm{SL}_8$ 中对应一个点 $\mathfrak{s}=[M(F)\ \sigma]_G$。令

$$\mathcal{H}^{\mathfrak{s}}:=\mathcal{H}(\mathrm{SL}_8(F),(K_{\mathfrak{s}},\rho_{\mathfrak{s}}))$$

表示附属于类型 $(K_{\mathfrak{s}},\ \rho_{\mathfrak{s}})$ 的赫克代数，其中 $\mathfrak{s}$。$(K_{\mathfrak{s}},\ \rho_{\mathfrak{s}})$ 的存在性由[GR1，定理 4.4]。

作者：[R ，§4.2]，群 $W^{\mathfrak{s}}$ 的阶为 2。令 ϵ 表示 $W^{\mathfrak{s}}$中的非平凡元素。

令 δ 为 [GR2，定理 11.1]中出现的 2-余循环。群 C （出现在他们的定理 11.1 中）在我们的情形下为 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$，此时 δ 自动是一个余边界。在这种情况下，我们有$\mathbb{C}[\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}]_{\delta}=\mathbb{C}[\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}]$，参见 [GR2，§11.1，§11。7]。

9.0.1. 赫克代数 $\mathcal{H}^{\mathfrak{s}}$ 的描述。

定理 9.1. 我们有一个 $\mathbb{C}$-代数的同构：

$$\mathcal{H}^{\mathfrak{s}}\simeq\mathbb{C}[\Gamma,\mu].$$

证明。 根据 [GR2， §11.8]，我们有一个同构

$$\mathcal{H}^{\mathfrak{s}}\cong\mathbb{C}[X^{\pm1},Y^{\pm1}]\widetilde{\otimes}_t\mathbb{C}[\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}]$$

按照 [GR2]引言中的记号。这里

$$t\colon\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\to\mathrm{Aut}(\mathbb{C}[X^{\pm1},Y^{\pm1}])$$

是由下式定义的群的单同态

$$t(\epsilon)(X):=X^{-1}\quad\text{and}\quad t(\epsilon)(Y):=-Y. \tag{14}$$

我们回顾这个同构

$$\mathbb{C}[\mathbb{Z}\rtimes\mathbb{Z}/2\times\mathbb{Z},\mu]\cong\mathbb{C}[s,X,X^{-1},Y,Y^{-1}]\Big/\big(s^2-1,\ sY+Ys,\ sX-X^{-1}s,\ XY-YX\big).$$

映射 $s\mapsto t(\varepsilon)$ 导出一个同构：

$$\mathbb{C}[s,X,X^{-1},Y,Y^{-1}]\Big/\big(s^2-1,\ sY+Ys,\ sX-X^{-1}s,\ XY-YX\big)\cong[\mathbb{C}[X^{\pm1},Y^{\pm1}]\widetilde{\otimes}_t\mathbb{C}[\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}]$$
$$s\mapsto t(\varepsilon)$$

鉴于方程（14）。 □

9.0.2. 比较。 由定理 9.1 可知 $\mathcal{H}^{\mathfrak{s}}$ 和 $\mathcal{H}^{\mathfrak{s}^0}$ 将拥有相同的简单模。我们有

$$T^{\mathfrak{s}}\cong T^{\mathfrak{s}^0}\cong(\mathbb{C}^\times)^2,\qquad W^{\mathfrak{s}}\cong W^{\mathfrak{s}^0}\cong\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

事实远不止于此。

定理9.2。 设 $G=\mathrm{SL}_8(F)$。设 $\mathfrak{s}$ 为伯恩斯坦谱 $\mathfrak{B}G$ 中由尖点对 (M,σ)确定的点。设 $T^{\mathfrak{s}}$ 为附属于 $\mathfrak{s}$的伯恩斯坦环面。那么我们有一个 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-等变同构

$$\tau:T^{\mathfrak{s}}\cong T^{\mathfrak{s}^0}.$$

证明。 映射 τ 定义如下：

$$\tau:X_{\mathrm{nr}}(M)\longrightarrow X_{\mathrm{nr}}(M^0)$$
$$a^{\mathrm{valodet}}\,b^{\mathrm{valodet}}\,c^{\mathrm{valodet}}\mapsto a^{\mathrm{valo}N_{E_2/F}}\,b^{\mathrm{valo}N_{E_2/F}}\,c^{\mathrm{valo}N_{E_4/F}}$$

其中 $a,\ b,\ c\in\mathbb{C}^\times$。

给定

$$(A,B,C)\in(\mathrm{GL}_2(F)\times\mathrm{GL}_4(F)\times\mathrm{GL}_4(F))\cap\mathrm{SL}_8(F),$$

我们注意到 $\det(A)\det(B)\det(C)=1$。因此我们有

$$\mathrm{val}(\det(A))+\mathrm{val}(\det(B))+\mathrm{val}(\det(C))=0.$$

因此，当 $a=b=c$ 时， τ 的定义域中的非分歧特征是平凡的。

根据 [R，§4。1] 我们令 χ_0 表示 $F^\times$ 的非分歧特征，使得 $\chi_0(\varpi_F) = -\sqrt{-1}$。那么，对于所有 $C \in \mathrm{GL}_4(F$，我们有

$$(\chi_0\sigma)(C) = -i^{\mathrm{val}(\det(C))}\sigma(C)$$

根据 [R，§4.2] 我们有

$${}^w\sigma \cong (1 \otimes 1 \otimes \chi_0)\sigma.$$

再应用一次 w，我们得到

$$\begin{aligned}\sigma &\cong (1 \otimes 1 \otimes \chi_0^2)\sigma \\ &\cong (1 \otimes 1 \otimes (-1)^{\mathrm{val}\circ\det})\sigma.\end{aligned}$$

映射 τ 的定义域和陪域中的特征都由三元组 $(a,\ a,\ c)$ 参数化。映射 τ 的定义域和陪域中的特征当且仅当三元组为 $(a,\ a,\ a)$ 或 $(b,\ b-b)$ 时是平凡的。因此，映射 τ 是阿贝尔群的一个同构。

特征 $1 \otimes 1 \otimes \chi_0$ 的齐次坐标为 $(1 : 1 : -i)$，特征 $1 \otimes 1 \otimes \chi_0^2$ 的齐次坐标为 $(1 : 1 : -1)$。

映射 τ 是 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-等变的，理由如下。在 τ 的定义域和陪域中，$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 的非平凡元素 s 在齐次三元组上的作用如下：

$$s \cdot (a : b : c) = (b : a : -ic) = (ib : ic : c).$$

□

定理 9.3. 伯恩斯坦簇之间存在一个典范同构：

$$T^{\mathfrak{s}}/W^{\mathfrak{s}} \cong T^{\mathfrak{s}^0}/W^{\mathfrak{s}^0}.$$

*Bernstein*簇 $T^{\mathfrak{s}}/W^{\mathfrak{s}}$ 是一个维数为2 的复代数簇，其极大紧实实形式是一个克莱因瓶**Kb**。这个克莱因瓶是SL_8的温和对偶中的一个紧豪斯多夫子空间：

$$\mathbf{Kb} \subset \mathrm{Irr}^{\mathrm{t}}(\mathrm{SL}_8)$$

证明。L et $\mathfrak{C}$表示 G的约化 C^*-代数。我们有伯恩斯坦分解 n

$$\mathfrak{C} = \bigoplus_{\mathfrak{t} \in \mathfrak{B}G} \mathfrak{C}^{\mathfrak{t}}$$

作为一个 C^*-直和。定义

$$\mathfrak{A} := \mathfrak{C}^{\mathfrak{s}}$$

并令 $X_{\mathrm{unr}}(M)$表示 M的非分歧幺正特征群。

Le$\mathfrak{A}$ $\widehat{\ }$表示 $\mathfrak{A}$的谱，并在其本原理想集合上赋予标准的 Jacobson 拓扑，参见 [D，§3。1]。

根据 [R，§4。1], 每个诱导表示 $\mathrm{Ind}_{MN}^G \psi \otimes \sigma$ 在 $\psi \in X_{\mathrm{unr}}(M^)$ 下都是 G的不可约幺正表示，是 *tempered* 表示 G。因此，映射

$$\begin{aligned} X_{\mathrm{unr}}(M) &\longrightarrow \widehat{\mathfrak{A}} \\ \psi &\mapsto \mathrm{Ind}_{MN}^G \psi \otimes \sigma \end{aligned} \tag{15}$$

是良定义且满射的。映射（15）确定了一个双射

$$X_{\mathrm{unr}}(M)/W^{\mathfrak{s}} \longrightarrow \widehat{\mathfrak{A}}$$

也就是说，一个双射

$$\mathbf{Kb} \longrightarrow \widehat{\mathfrak{A}}.$$

如同在证明中 定理8.2的 C^*-Plancherel 定理现在确保了一个同胚

$$\widehat{\mathfrak{A}} \cong \mathbf{Kb}.$$

□

因此，克莱因瓶$\mathbf{Kb}$ 呈现为 G 的温和对偶中的一个连通紧豪斯多夫子空间。

References

[AFMO] J.D. Adler、J. Fintzen、M. Mishra 和 K. Ohara，“由类型产生的赫克代数的结构”，预印本 arXiv:2408.07801，2024年。[AFO] J.D. Adler、J. Fintzen 和 K. Ohara，“其赫克代数具有非平凡余循环的深度零主序列块”，预印本 arXiv:2510.07391，2025年。[Ber] J. N. Bernstein，“Bernstein 的‘中心’”，载于 *Representations of reductive groups over a local field* (P. Deligne 编)，Hermann，巴黎，1984年，1–32。[BK] C.J. Bushnell 和 P.C. Kutzko，“约化 p进群的光滑表示：基于类型的结构理论”，《伦敦数学学会会刊》(3) **77** (1998年)，第3期，582–634。[D] J. Dixmier，“C^*代数”，North-Holland，1982年。[GR1] D. Goldberg 和 A. Roche，“SL_n中的类型”，《伦敦数学学会会刊》(3) **85** (2002年)，119–138。[GR2] , “赫克代数与 SL_n类型”，《伦敦数学学会会刊》(3) **90** (2005年)，87–131。[Mo] L. Morris，“零层级$\mathbf{G}$类型”，《组合数学》**118** (1999年)，135–157。[P] R.J. Plymen，“约化 C^*代数群的约化 p进群”，《泛函分析杂志》88 (1990) 251–266。[R] A. Roche，“抛物诱导与 Bernstein 分解”，《组合数学》**134** (2002年)，113–133。[W] C. A. Weibel, *An Introduction to Homological Algebra*，《剑桥高等数学研究丛书》**38**，剑桥大学出版社，1994年。

Sorbonne Université and Université Paris Cité, CNRS, IMJ-PRG, F-75005 Paris, France
Email address: anne-marie.aubert@imj-prg.fr

School of Mathematics, Southampton University, Southampton SO17 1BJ, England *and* School of Mathematics, Manchester University, Manchester M13 9PL, England*Email address*: r.j.plymen@soton.ac.uk roger.j.plymen@manchester.ac.uk