arXiv:2603.03029v1 [math.NT] 3 Mar 2026

L 函数的系数符号

DIDIER LESESVRE

法国国家科学研究中心 — 蒙特利尔大学 ´ *CRM-CNRS* 里尔大学 ´ *Paul Painlevé* 实验室，*UMR 8524*，*59000* 里尔，法国 电子邮箱：*didier.lesesvre@univ-lille.fr*

MING HO NG

数学系，香港中文大学 沙田，香港，中国 电子邮箱：*mhng@math.cuhk.edu.hk*

YINGNAN WANG

深圳大学数学科学学院，中国广东省深圳市，邮编 *518060*。电子邮箱：*ynwang@szu.edu.cn*

Abstract. 我们给出了塞尔伯格类中 L-函数的实系数发生符号变化频率的一般下界。特别地，我们重新得到 GL(2) 和 GL(3) 情形下已有的结果，并在 GSp(4) 情形下得到了新的界。

1. 引言

L-函数在数论中无处不在，并承载着关于许多不同类型对象的关键信息：椭圆曲线、伽罗瓦表示、自守形式等。更深入的综述见 [3]。尽管关于 L-函数的一些结果依赖于非常具体的情形，在这些情形中可以利用额外的算术或结构信息（如黑克关系、迹公式、函子性等），但有些论证仍具有普适性。以如此一般的形式呈现这些论证，有助于理解各项性质之间的联系，并促使人们提出某些假设。本文就在这一一般框架下，探讨如何对这类 L- 函数所附系数的符号变化建立统计规律，这一研究受一些问题的启发

日期：2026年3月4日。

例如，狄利克雷 L-函数情形下的林尼克问题，以及 J¨a¨asaari[4] 关于 GL(3) 情形的近期研究。

1.1. **L-函数与塞尔伯格类。** 本节中，我们定义塞尔伯格类中的一般 L-函数，并参照 [2, 第 5] 章。 L-函数 $L(s)$ 是定义在某个右半平面上的复解析函数，具有以下性质：

(i) 狄利克雷级数： 它可展开为如下形式的级数

$$L(s) = \sum_{m\geqslant 1} \frac{A(m)}{m^s}, \qquad \Re(s) > 1, \tag{1}$$

其中，对所有 $m \geqslant 1$， $A(m) \in \mathbb{C}$，它们称为该 L-函数的系数。

(ii) 欧拉乘积： 我们假设 $L(s)$ 有欧拉乘积

$$L(s) = \prod_{p} L_p(s), \qquad \Re(s) > 1, \tag{2}$$

其中乘积遍历素数 p，并且对每个素数 p，令

$$L_p(s) = \sum_{k\geqslant 0} \frac{A(p^k)}{p^{ks}}. \tag{3}$$

(iii) 函数方程： 存在一个整数 $d \geqslant 1$ （称为该 L-函数的次数）以及常数 $\mu_j \in \mathbb{C}$，使得令

$$\gamma(s) = \prod_{j=1}^{d} \Gamma\left(\frac{s+\mu_j}{2}\right), \tag{4}$$

L函数 $L(s)$ 可亚纯延拓至整个复平面 $\mathbb{C}$，并满足函数方程

$$L(s) = \varepsilon(L)\frac{\gamma(1-s)}{\gamma(s)} L(1-s) \tag{5}$$

其中 $\varepsilon(L)$ 为某个 $\in \mathbb{U}$。

(iv) 次凸性： 我们考虑趋向林德勒夫假设的一个（次）凸性指数 $\theta \geqslant 0$，即满足

$$L(\tfrac{1}{2} + it) \ll (1+|t|)^{\theta+\varepsilon}, \tag{6}$$

根据普朗格曼-林德勒夫原理，这意味着在临界带 $\sigma \in (0,1)$ 内有

$$L(\sigma + it) \ll (1+|t|)^{2\theta(1-\sigma)+\varepsilon}. \tag{7}$$

无条件地，对于任何满足系数温和界限的 L-函数（即，对某个 $\delta > 0$，有 $A(m) \ll m^{1/2-\delta}$；GL(n) L-函数通常都满足这一条件），我们知道凸性界 $\theta = d/4$，其中整数 d 是该 L- 函数的次数。林德洛夫假设断言 $\theta = 0$；在一些低秩的特定情形下，已经建立了超越凸性界的显式指数，最近 Nelson [7] 又对所有 GL(n) 建立了这一结果。

(v) **Rankin-Se 塞尔伯格界：**我们假设 Rankin–Selberg 界，即对所有 $X \geqslant 1$ ，

$$\sum_{m \leqslant X} |A(m)|^2 \ll X^{1+\varepsilon} \tag{8}$$

这对应于相应的 Rankin-Selberg$L$-函数在 $\Re(s) > 1$ 上不存在极点，以及在 $\Re(s) = 1$ 周围存在经典无零区域。作为应用，我们很容易得到

$$A(m) \ll m^{1/2+\varepsilon}. \tag{9}$$

(vi) 系数非消失性的下界： 我们要求系数和的下界，其形式为

$$\sum_{m \sim X} |A(m)| \gg X^{\kappa-\varepsilon} \tag{10}$$

其中 $\kappa > 0$。由 (8) 和柯西不等式，我们有 $\kappa \leqslant 1$。若应用 Rankin–Selberg理论以及广义Ramanujan猜想的一个相关界$A(m) \ll m^{\vartheta}$，则有 $\kappa = 1 - \vartheta$ 是可取的。若假设广义Sato–Tate猜想，则可取 $\kappa = 1 - c \log\log(X)/\log(X)$，当 X 充分大时，特别是 $\kappa \geqslant 1 - \varepsilon$ 对所有 $\varepsilon > 0$，当 X 趋于无穷时。

1.2. **系数符号。** 我们假设系数 $A(m$为实数，例如，这可由底层对象的自反对偶性质推出。假设$L(s$在 $s = 1$ 处无极点（这排除了 $\zeta(s$，而且这是 Selberg 意义下的本原 L-函数的唯一情形），Landau论证（例如参见 [9]）表明，$A(m)$ 会无穷多次改变符号，因此有必要更细致地理解这种行为。

近年来，人们针对这一方向开展了一些研究，涉及 GL(2)（参见[6]），最近也包括 GL(3)（参见 [4]）或 GL(n)（参见 [5]）。本文针对塞尔伯格类讨论类似问题，并改进 [4] 中的论证，以展示其在这一极一般情形下的稳健性。本文的主要结果如下。

定理1. 考虑塞尔伯格类中的一个 L-函数，其具有实系数$(A(m))_{m \geqslant 1}$，并满足上述条件——尤其是，满足指数为 θ的 *Lindel ̈of* 假设相关界、指数为 κ 的非消失相关界，以及 *Rankin-Selberg* 估计。我们假设

$$\begin{cases} \kappa \geqslant 1 - \left(2(7\theta + 3 + \sqrt{(7\theta+3)^2+2})^2\right)^{-1} & \text{if } \theta \geqslant 1/2, \\ \kappa \geqslant -\frac{17}{2} + 3\sqrt{10} & \text{if } \theta \leqslant 1/2. \end{cases} \tag{11}$$

那么，$(A(m))_{m \leqslant X}$ 中的符号变化至少为

$$\begin{cases} X^{2\kappa-2+1/2\theta-\delta-\frac{6\delta+2\delta^2}{2\theta}} & \text{if } \theta \geqslant 1/2, \\ X^{2\kappa-1-6\delta} & \text{if } \theta \leqslant 1/2, \end{cases} \tag{12}$$

对 $\delta = \sqrt{2 - 2\kappa + \varepsilon}$ 而言。

备注 1. 定理 1 特别包括了在 [6] 中讨论的 GL(2) 情形，以及在 [4] 中讨论的 GL(3) 情形。只要对 θ 和 κ 有足够好的界，它就改进了 [5] 中的 GL(n) 情形。

注2.猜想　　构造性地，$\kappa = 1$，在这种情况下，$(A(m))_{m\leqslant X}$ i 中符号变化的次数　　s

$$\begin{cases} X^{1/2\theta-\delta} & \text{if } \theta \geqslant 1/2, \\ X^{1-\delta} & \text{if } \theta \leqslant 1/2, \end{cases} \tag{13}$$

对所有 $\delta > 0$。此外，林德¨夫假设认为 $\theta = 0$，在这种情况下，对于所有 $X^{1-\delta}$，总应有符号变化 $\delta > 0$ （但定理 1 证明当$\theta \leqslant 1/2$时确实如此）。关于 θ 和 κ 的条件，即使无法在林德¨夫假设或系数非消失性方面达到预期的最佳结果，也留有一定余地。如果 θ 非常大，则要求 κ 非常接近 1；凸性界 $\theta = d/4$ 已经允许 $\kappa \geqslant 1-\eta$取某个 $\eta > 0$。当 $\theta = 1/2$时，任意 $\kappa \geqslant 0.9971$ 都可取。当$\theta < 1/2$时，任意 $\kappa > 0.9869$ 都可取。

注 3。 除了改进 [4] 中的论证以使其适用于塞尔伯格类之外，我们还详细证明了部分和的（次）凸性界（见引理 1）以及一般情形下消去同余条件的方法（见引理3）。这或许会令一些读者感兴趣。

我们可以从定理 1 的一般性结论推导出 GSp(4) 情形的一个新结果：

推论 1。 设 f 为权重 k的西格尔模形式。假设 f 是一个非 *Saito–Kurokawa*提升的 *Hecke* 特征形式。令 $(A(m))_m$ 为相关自旋 L- 函数 $L(s, f,$ 自旋 $)$ 的系数，并令 θ 为 *Lindel¨of* 猜想的最佳指数。那么，$(A(m))_{m\leqslant X}$ 中的符号变化次数为 $\gg X^{1/2\theta+\varepsilon}$。

注 4。 Saito–Kurokawa提升的情形已十分清楚：它们对应于满足 $A(m) > 0$ 对所有 $m \geqslant 1$ 成立的模形式，正如 Pitale-Schmidt [10]所证明的那样；因此这种情形下没有符号变化。

证明策略是通过比较，在短区间内检测符号变化

$$S_1(X) := \left| \sum_{\substack{mk\in[x,x+H] \\ m\sim M \\ (m,k)=1}} A(m) \right| \quad \text{and} \quad S_2(X) := \sum_{\substack{mk\in[x,x+H] \\ m\sim M \\ (m,k)=1}} |A(m)| \tag{14}$$

对于某个 $H > 0$ 并证明 $S_1(X) < S_2(X)$ 当 X足够大时，因此在区间 $[X, X + H]$内检测到一次符号变化。这将确保至少有 X/H 次符号变化，发生在$[1, X]$中；特别是， H越小，结果越好。我们将通过建立（ $S_1(X)$ 的二阶矩的）上界（见第2节），以及 $S_2(X)$ 的下界（见第3节），来证明该不等式，并在第4节完成论证。第4.1节给出了一项新颖的应用。

2. Upper bound

我们旨在沿用 [4]中的策略，证明以下二阶矩上界。

命题1。令 $X^{6\delta} \ll H \ll X^{1-6\delta}$ 和 $M = X^{\delta}$，其中 $0 < \delta < 1$为正常数。我们有

$$\int_X^{2X} \left| \sum_{\substack{mk\in[x,x+H] \\ m\sim M \\ (m,k)=1}} A(mk) \right|^2 dx \ll H^2 X^{1-\delta^2} + X^{2\theta(1+\delta)+6\delta} H^{2-2\theta}. \tag{15}$$

本节全部用于证明这一点。

2.1. 预备引理。 对于 $\Re(s) > 1$，引入

$$M(s) = \sum_{m\sim M} \frac{A(m)}{m^s},$$

$$K(s) = \sum_{X/3M\leqslant k\leqslant 3X/M} \frac{A(k)}{k^s}.$$

由（8）以及柯西-施瓦茨不等式可得，对于 $\Re s = \sigma \geqslant 1/2$,

$$M(s) \ll \left(\sum_{m\sim M} \frac{|A(m)|^2}{m} \right)^{1/2} \left(\sum_{m\sim M} m^{1-2\sigma} \right)^{1/2} \ll M^{1-\sigma+\varepsilon}. \tag{16}$$

类似于（16），我们有 $K(s) \ll (X/M)^{1-\sigma+\varepsilon}$。关键在于为部分和 $K(s)$ 得到更精细的“次凸性”界。

引理 1（部分凸性界）。 对于 $s = 1/2 + it$ 满足 $|t| \leqslant T$，有

$$K(s) \ll T^{\theta+\varepsilon} + (X/MT)^{1/2+\varepsilon},$$

其中 θ 是定义于 (7)中的次凸指数。

证明。 根据 [11,定理 II 2.3], 中的截断佩龙公式，我们有

$$\sum_{X/3M\leqslant k\leqslant 3X/M} \frac{A(k)}{k^s} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\frac{1}{2}+\varepsilon-iT}^{\frac{1}{2}+\varepsilon+iT} L(s+z) \frac{(3X/M)^z - (X/3M)^z}{z} dz$$
$$+ O\left((X/M)^{1/2+\varepsilon} \sum_{k\geqslant 1} \frac{|A(k)|}{k^{1+\varepsilon}(1+T|\log(X/Mk)|)} \right).$$

将误差项中的求和按照 k 的范围分成两部分后，我们得到误差项有如下界:

$$\frac{1}{T} \sum_{|k-X/M|\geqslant X/2M} \frac{|A(k)|}{k^{1+\varepsilon}} + \sum_{|k-X/M|<X/2M} \frac{|A(k)|}{k^{1+\varepsilon}(1+TM(k-X/M)/X)}$$
$$\ll_\varepsilon \frac{1}{T} + \frac{X}{M} \sum_{\substack{|k-X/M|<X/2M \\ k\neq X/M}} \frac{|A(k)|}{k^{1+\varepsilon}(X/M+T|k-X/M|)} + \frac{A(X/M)}{(X/M)^{1+\varepsilon}}.$$

同时应用柯西-施瓦茨不等式以及界（8）和（9），由上述公式可得

$$\begin{aligned}
&\ll \frac{1}{T}+\frac{X}{M}\left(\sum_{\substack{|k-X/M|<X/2M\\ k\neq X/M}}\frac{|A(k)|^2}{k^{1+\varepsilon}}\right)^{1/2}\left(\sum_{\substack{|k-X/M|<X/2M\\ k\neq X/M}}\frac{1}{k^{1+\varepsilon}(X/M+T|k-X/M|)^2}\right)^{1/2}+\frac{1}{(X/M)^{1/2+\varepsilon}}\\
&\ll \frac{1}{T}+\frac{(X/M)^{1/2-\varepsilon}}{(T(T+X/M))^{1/2}}+\frac{1}{(X/M)^{1/2+\varepsilon}}\\
&\ll \frac{1}{T^{1/2}}+\frac{1}{(X/M)^{1/2+\varepsilon}}.
\end{aligned}$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}
\sum_{X/3M\leqslant k\leqslant 3X/M}\frac{A(k)}{k^s}=\frac{1}{2i\pi}\int_{\frac{1}{2}+\varepsilon-iT}^{\frac{1}{2}+\varepsilon+iT}L(s+z)\frac{(3X/M)^z-(X/3M)^z}{z}dz\\
+O\left((X/M)^{\varepsilon}\left(1+\frac{(X/M)^{1/2}}{T^{1/2}}\right)\right).
\end{aligned}$$

将积分直线从直线 $\Re z=1/2+\varepsilon$ 移至直线 $\Re z=\varepsilon$，并应用凸性界 $L(s+z)\ll(1+|t|)^{2\theta(1/2-\sigma)+\varepsilon}$，可得上述积分的上界为

$$\begin{aligned}
&X^{\varepsilon}\int_{\varepsilon}^{1/2+\varepsilon}\frac{(X/M)^{\alpha}(1+|t|+T)^{2\theta(1/2-\alpha)+\varepsilon}}{T}d\alpha+X^{\varepsilon}\int_{-T}^{T}\frac{(1+|t+h|)^{\theta+\varepsilon}}{\varepsilon+|h|}dh\\
&\ll X^{\varepsilon}T^{\varepsilon}\frac{T^{\theta}+(X/M)^{1/2}}{T}+X^{\varepsilon}T^{\theta+\varepsilon}.
\end{aligned}$$

因此，对于 $|t|\leqslant T$，我们有

$$\sum_{X/3M\leqslant k\leqslant 3X/M}\frac{A(k)}{k^s}\ll T^{\theta+\varepsilon}+(X/MT)^{1/2+\varepsilon},$$

证明至此完成。 □

我们可以在部分和中去除模 d 的同余条件，并以引入关于 p^{-s} 的显式多项式为代价，将其与相应的完全和联系起来，其中 $p\mid d$。以下引理给出了这一结论。

引理 2 (去除同余)。 对于所有无平方因子的 d 以及所有 $\Re(s)>1$，我们有

$$\sum_{\substack{m\geqslant 1\\ m\equiv 0(d)}}\frac{A(m)}{m^s}=d^{-s}\prod_{p\mid d}p^s(1-P(p^{-s}))\sum_{m\geqslant 1}\frac{A(m)}{m^s}. \tag{17}$$

证明。 我们比较欧拉乘积，并利用 d 的无平方因子性。事实上，我们有

$$\sum_{m\equiv 0(d)}\frac{A(m)}{m^s}=\sum_{m}\frac{A(dm)}{(dm)^s}=\prod_{p\mid d}p^{-s}\sum_{k\geqslant 0}\frac{A(p^{k+1})}{p^{ks}}\prod_{p\nmid d}\sum_{k\geqslant 0}\frac{A(p^k)}{p^{ks}} \tag{18}$$

而且，

$$\sum_{k\geqslant 0}\frac{A(p^{k+1})}{p^{ks}}=p^s\sum_{k\geqslant 0}\frac{A(p^{k+1})}{p^{(k+1)s}}=p^s(P(p^{-s})^{-1}-1). \tag{19}$$

将其除以完整求和的欧拉乘积，这相当于在每个位置 p 乘以 $P(p^{-s})$，即可得到结论。□

引理 3. 对于 $\Re(s)=1/2$，有

$$\left|\sum_{d\leqslant M}\mu(d)\sum_{\substack{m\sim M\\ m\equiv 0(d)}}\frac{A(m)}{m^s}\sum_{\substack{X/3M\leqslant k\leqslant 3X/M\\ k\equiv 0(d)}}\frac{A(k)}{k^s}\right|^2\ll X^{\varepsilon}\left|\sum_{m\sim M/\ell_1}\frac{A(m)}{m^s}\right|^2\left|\sum_{X/3M\ell_2\leqslant k\leqslant 3X/M\ell_2}\frac{A(k)}{k^s}\right|^2,$$

其中 ℓ_1、$\ell_2\geqslant 1$ 为某些整数。

证明。由于被加数中含有 $\mu(d)$，本证明中出现的所有 d 都必定无平方因子，尽管我们没有在求和指标中明确标示这一点。根据柯西-施瓦茨不等式，左端可由以下式子界定

$$\left(\sum_{d\leqslant M}\left|\sum_{\substack{m\sim M\\ m\equiv 0(d)}}\frac{A(m)}{m^s}\right|^2\right)\left(\sum_{d\leqslant M}\left|\sum_{\substack{X/3M\leqslant k\leqslant 3X/M\\ k\equiv 0(d)}}\frac{A(k)}{k^s}\right|^2\right).$$

这使我们需要考虑（回想一下，$\Re s=1/2$）如下形式的和

$$\begin{aligned}\sum_{d\leqslant A}\left|\sum_{\substack{m\sim B\\ m\equiv 0(d)}}\frac{A(m)}{m^s}\right|^2&=\sum_{d\leqslant A}\left|\sum_{\substack{\ell=d\\ P(\ell)=d}}^{2B}\frac{A(\ell)}{\ell^s}\sum_{\substack{m\sim B/\ell\\ (m,d)=1}}\frac{A(m)}{m^s}\right|^2\\ &\leqslant\max_{d\leqslant A,\ell\leqslant 2B,P(\ell)=d}\left\{\left|\sum_{\substack{m\sim B/\ell\\ (m,d)=1}}\frac{A(m)}{m^s}\right|^2\right\}\sum_{d\leqslant A}\left|\sum_{\substack{\ell=d\\ P(\ell)=d}}^{2B}\frac{|A(\ell)|}{\ell^{1/2}}\right|^2\\ &\leqslant\max_{d\leqslant A,\ell\leqslant 2B,P(\ell)=d}\left\{\left|\sum_{\substack{m\sim B/\ell\\ (m,d)=1}}\frac{A(m)}{m^s}\right|^2\right\}\sum_{d\leqslant A}\left(\sum_{\substack{\ell=d\\ P(\ell)=d}}^{2B}\frac{|A(\ell)|^2}{\ell}\right)\left(\sum_{\substack{\ell=d\\ P(\ell)=d}}^{2B}1\right),\end{aligned}$$

其中 $A\ll B$ 且

$$P(\ell)=\prod_{p|\ell}p.$$

注意，

$$\sum_{\substack{\ell=d\\ P(\ell)=d}}^{2B}1\ll\sum_{\substack{n_1+n_2+\cdots+n_{\omega(d)}\leqslant[\log(2B)]\\ n_1,n_2,\ldots,n_{\omega(d)}\geqslant 1}}1\ll\binom{[\log(2B)]}{\omega(d)}\ll\left(\frac{c\log B}{\omega(d)}\right)^{\omega(d)}\ll e^{C\frac{(\log B)(\log\log\log B)}{\log\log B}}, \tag{20}$$

将 $\omega(d)$ 分成两个范围 $\omega(d) \ll (\log B)/(\log\log B)^2$ 和 $(\log B)/(\log\log B)^2 \ll \omega(d) \ll (\log B)/(\log\log B)$。这里 c, C 是两个绝对常数，我们应用了著名的结果

$$\omega(d) \ll (\log d)/(\log\log d) \ll (\log A)/(\log\log A) \ll (\log B)/(\log\log B). \tag{21}$$

接下来，我们有

$$\sum_{d\leqslant A}\sum_{\substack{\ell=d\\ P(\ell)=d}}^{2B}\frac{|A(\ell)|^2}{\ell} \leqslant \sum_{d\leqslant A}\sum_{\substack{\ell\leqslant 2B\\ \ell\equiv 0(d)}}\frac{|A(\ell)|^2}{\ell} \leqslant B^{\varepsilon}\sum_{d\leqslant A}\sum_{\substack{\ell\leqslant 2B\\ \ell\equiv 0(d)}}\frac{|A(\ell)|^2}{\ell^{1+\varepsilon}} \leqslant B^{\varepsilon}\sum_{d\leqslant A}\sum_{\substack{\ell=1\\ \ell\equiv 0(d)}}^{\infty}\frac{|A(\ell)|^2}{\ell^{1+\varepsilon}}.$$

Hence，我们将引理 2 应用于右侧的内层求和，得到

$$\begin{aligned}\sum_{d\leqslant A}\sum_{\substack{\ell=d\\ P(\ell)=d}}^{B}\frac{|A(\ell)|^2}{\ell} &\ll B^{\varepsilon}\sum_{d\leqslant A}\prod_{p\mid d}\left(\frac{|A(p)|^2}{p^{1+\varepsilon}}-\frac{|A(p)|^2}{p^{2+2\varepsilon}}+\frac{1}{p^{3+3\varepsilon}}\right)\sum_{\ell=1}\frac{|A(\ell)|^2}{\ell^{1+\varepsilon}}\\ &\ll B^{\varepsilon}\sum_{d\leqslant A}2^{\omega(d)}\prod_{p\mid d}\frac{|A(p)|^2+1}{p^{1+\varepsilon}}\sum_{\ell=1}\frac{|A(\ell)|^2}{\ell^{1+\varepsilon}}.\end{aligned}$$

应用 Rankin–Selberg 界（8）和（21），得到

$$\sum_{d\leqslant A}\sum_{\substack{\ell=d\\ P(\ell)=d}}^{B}\frac{|A(\ell)|^2}{\ell} \ll B^{\varepsilon}\sum_{d\leqslant A}\frac{\sum_{h\mid d}|A(h)|^2}{d^{1+\varepsilon}} \ll B^{\varepsilon}\sum_{h\leqslant A}\frac{|A(h)|^2}{h^{1+\varepsilon}}\sum_{j\leqslant A/h}\frac{1}{j^{1+\varepsilon}} \ll B^{\varepsilon}.$$

此外，上述最大值在 ℓ 的有限种可能取值之一处取得。因此，原始求和有如下上界：

$$X^{\varepsilon}\left|\sum_{m\sim M/\ell_1}\frac{A(m)}{m^s}\right|^2\left|\sum_{X/3M\ell_2\leqslant k\leqslant 3X/M\ell_2}\frac{A(k)}{k^s}\right|^2$$

对于某些整数 $\ell_1, \ell_2 \geqslant 1$，如所述。 □

我们需要以下均值定理，参见 [2, 第 9], 章关于狄利克雷多项式的内容：

引理 4 (均值定理)。 设 $N \geqslant 1$，并设 $F(s) = \sum_{n\sim N} a_n n^{-s}$ 是一个狄利克雷多项式。则

$$\int_{-T}^{T}\left|F(\tfrac{1}{2}+it)\right|^2 dt \ll (N+T)\sum_{n\sim N}\frac{|a_n|^2}{n}. \tag{22}$$

2.2. 通过 Perron 公式化为积分。 我们现在准备研究这个二阶矩。Perron 公式将其中出现的系数之和与相应 L-函数的逆梅林变换联系起来：

$$\sum_{\substack{mk\in[x,x+H]\\ m\sim M\\ (m,k)=1}}A(mk) = \frac{1}{2i\pi}\int_{(2)}\sum_{\substack{m\sim M\\ X/3M\leqslant k\leqslant 3X/M\\ (m,k)=1}}\frac{A(mk)}{(mk)^s}\frac{(x+H)^s-x^s}{s}ds. \tag{23}$$

2.3. **用¨ Möbius 函数检测互素性。** 我们采用[4], 中的 Saffari-Vaughan 论证，利用系数的乘法性和¨Möbius 反演检测互素条件，因此二阶矩（15）有如下界

$$\int_X^{2X} \left| \int_{(2)} \sum_{d\leqslant M} \mu(d) \sum_{\substack{m\sim M\\ m\equiv 0(d)}} \frac{A(m)}{m^s} \sum_{\substack{X/3M\leqslant k\leqslant 3X/M\\ k\equiv 0(d)}} \frac{A(k)}{k^s} x^s \frac{(1+u)^s-1}{s} ds \right|^2 dx, \tag{24}$$

对于某个给定的 $u \ll H/X$。我们将多次用到以下界

$$\frac{(1+u)^s-1}{s} \ll \max\left(\frac{H}{X}, \frac{1}{|\Im(s)|}\right), \tag{25}$$

对所有 $u \ll H/X$ 均成立。

2.4. **移动积分路径。** 现在我们需要研究积分 **(24)**，方法是移动积分路径。该积分沿着一条位于其中所有狄利克雷级数绝对收敛域内的完整竖直直线取值；在移动积分路径之前，我们先去掉高处的部分。为简便起见，令

$$F(s) = \sum_{d\leqslant M} \mu(d) \sum_{\substack{m\sim M\\ m\equiv 0(d)}} \frac{A(m)}{m^s} \sum_{\substack{k\sim X/M\\ k\equiv 0(d)}} \frac{A(k)}{k^s}.$$

2.4.1. 右侧的高处部分。 我们同样地 J¨a¨沿用 [4], 的策略，这里仅为完整起见简要回顾他的论证。我们如下估计积分中虚部较大的部分所作的贡献：

引理5。 对于所有 $U > X^5$ 及所有 $0 < \Xi < 1$，有

$$\int_X^{2X} \left| \int_{\substack{(1+\Xi)\\ \Im>U}} F(s) x^s \frac{(1+u)^s-1}{s} ds \right|^2 dx \ll X^{3+2\Xi} U^{-1}. \tag{26}$$

我们展开平方，这基本上只留下对角项（消去了振荡项 $x^{s_1+\bar{s}_2}$；这一点很重要，因为 x 很大）。事实上，展开平方后，我们得到

$$\iint_{\substack{(1+\Xi)\\ \Im>U}} \left| F(s_1)\overline{F(s_2)} \frac{(1+u)^{s_1}-1}{s_1} \overline{\frac{(1+u)^{s_2}-1}{s_2}} \right| \times \left| \int_{\mathbb{R}} g(x/X) x^{s_1+\bar{s}_2} dx \right| ds_1 ds_2, \tag{27}$$

其中 g 是紧支撑光滑函数。

此时内部积分小到可以忽略（即 $\ll X^{-A}$ 对所有 $A > 0$），如果 $\Im(s_1 + \bar{s}_2) \neq 0$，这由驻相法得出。当 $s_1 = s_2$ 时，它以 $X^{2\Re(s)+1}$ 为界。然后我们利用 $F(s)$ 在 $\Re(s) > 1$ 上的绝对收敛，以及关于 u 项在 **(25)** 中给出的显式界。我们得到这些项的最终界的大小为 $X^{3+2\Xi}/U$，而当 $U > X^5$ 时这可以忽略。

2.4.2. 水平部分。 由 (9)，我们得到对于 $\Re(s) = \sigma \geqslant 1/2$,

$$F(s) \ll X^{3/2-\sigma+\varepsilon} M.$$

J¨a¨萨里的计算 [4] 持续进行，直到得到界（关于 $x \asymp X$）

$$\ll X \int_{1/2}^{1+\Xi} \left| F(\sigma \pm iU) x^{\sigma} \frac{(1+u)^{\sigma \pm iU} - 1}{\sigma \pm iU} \right|^2 d\sigma. \tag{28}$$

利用分数可由 $\ll 1/|t| \asymp 1/U$ 根据（25）给出，并将这些界平方，我们总共得到以下界

$$\ll X^{1+\varepsilon} \int_{1/2}^{1+\Xi} X^{3-2\sigma} M^2 U^{-2} d\sigma \ll X^4 U^{-2}. \tag{29}$$

当 $U > X^5$ 时，这可以忽略不计。

2.4.3. 左侧主体部分。 这些围道估计表明，除去上文给出的误差项，我们所研究的积分与竖直线段 $[1/2 \pm iU]$ 上的积分相同；现在我们将研究后者。因此，二阶矩为

$$\underbrace{H^2 \int_{1/2}^{1/2+iX/H} |F(s)|^2 ds}_{=:I_1} + \underbrace{X^2 \int_{1/2+iX/H}^{1/2+iU} \frac{|F(s)|^2}{|t|^2} dt}_{=:I_2} \tag{30}$$

这里的划分是由不等式（25）促成的，我们在每个范围内都相应地使用了该不等式。我们将分别估计这些积分。

我们应用引理 3，得到

$$I_1 \ll H^2 X^{\varepsilon} \int_{1/2}^{1/2+iX/H} \left| \sum_{m \sim M/\ell_1} \frac{A(m)}{m^s} \right|^2 \left| \sum_{X/3M\ell_2 \leqslant k \leqslant 3X/M\ell_2} \frac{A(k)}{k^s} \right|^2 ds \tag{31}$$

并且

$$I_2 \ll X^{2+\varepsilon} \int_{1/2+iX/H}^{1/2+iU} \frac{1}{|t|^2} \left| \sum_{m \sim M/\ell_1} \frac{A(m)}{m^s} \right|^2 \left| \sum_{X/3M\ell_2 \leqslant k \leqslant 3X/M\ell_2} \frac{A(k)}{k^s} \right|^2 ds \tag{32}$$

对某些整数 ℓ_1， $\ell_2 \geqslant 1$。注意，由于最终这些界将由 M的正幂给出，我们可以忽略 ℓ_i ，并将它们取为1。

(30) 中的第一个积分，我们将其拆分为集合 $\mathcal{T} = \{t \in [0, X/H] : \quad |M(\frac{1}{2} + it)| \leqslant M^{1/2-\delta}\}$ 及其在 $[0, X/H]$中的补集 $\mathcal{U}$。根据引理 4和（8）， $\mathcal{T}$的贡献有如下界

$$\begin{aligned} &\int_{\mathcal{T}} \left| M\left(\frac{1}{2} + it\right) \right|^2 \left| K\left(\frac{1}{2} + it\right) \right|^2 dt \\ &\ll M^{1-2\delta} \left(\frac{X}{H} + \frac{X}{M}\right) \sum_{k \sim X/M} \frac{|A(k)|^2}{k} \ll X^{1+\varepsilon} M^{-2\delta} \ll X^{1-\delta^2} \end{aligned} \tag{33}$$

条件是 $\varepsilon < \delta^2/10^{2026}$。

由于 $M = X^{\delta}$ 且 $X^{2\delta} \ll H \ll X$，存在一个正整数 $\ell = [1/\delta] + 1$ 使得$M^{\ell} \gg X/H$。由柯西–施瓦茨不等式、引理4 和（8），可得

$$\begin{aligned}
\operatorname{meas}(\mathcal{U}) M^{2\ell(1/2-\delta)} &\leqslant \int_0^{X/H} \left| M\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^{2\ell} dt \\
&\ll \int_0^{X/H} \ell \sum_{j=0}^{\ell-1} \left| \sum_{n\sim 2^j M^{\ell}} \frac{\sum\limits_{\substack{n=m_1\cdots m_{\ell}\\ m_i\sim M}} A(m_1)\cdots A(m_{\ell})}{n^s}\right|^2 dt \\
&\ll \ell \sum_{j=0}^{\ell-1} \left(\frac{X}{H} + 2^j M^{\ell}\right) \sum_{n\sim 2^j M^{\ell}} \frac{\left|\sum\limits_{\substack{n=m_1\cdots m_{\ell}\\ m_i\sim M}} A(m_1)\cdots A(m_{\ell})\right|^2}{n} \\
&\ll \ell \sum_{j=0}^{\ell-1} \sum_{n\sim 2^j M^{\ell}} d_{\ell}(n) 2^j M^{\ell} \sum_{\substack{n=m_1\cdots m_{\ell}\\ m_i\sim M}} \frac{|A(m_1)\cdots A(m_{\ell})|^2}{n} \\
&\ll \ell 2^{\ell} X^{\varepsilon} \left(\sum_{m\sim M} |A(m)|^2\right)^{\ell} \\
&\ll \ell 2^{\ell} X^{\varepsilon} M^{\ell+\ell\varepsilon}.
\end{aligned}$$

因此，对于 $\varepsilon < \delta^2/10^{2026}$,

$$\operatorname{meas}(\mathcal{U}) \ll \ell 2^{\ell} X^{3\varepsilon} M^{2\ell\delta} \ll_{\delta} X^{4\delta}$$

并且由（16），$\mathcal{U}$ 对 I_1 中的积分的贡献有如下界

$$\int_{\mathcal{U}} \left| M\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2 \left| K\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2 dt \ll X^{5\delta+\varepsilon} \sup_{|t|\leqslant X/H} \left| K\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2.$$

将上述公式与（33）及引理1结合，可得

$$\begin{aligned}
I_1 &\ll H^2 X^{1-\delta^2} + H^2 X^{5\delta+\varepsilon} \sup_{|t|\leqslant X/H} \left| K\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2 \\
&\ll H^2 X^{1-\delta^2} + H^2 X^{6\delta} \left((X/H)^{2\theta} + H/M\right). \qquad (34)
\end{aligned}$$

接下来，我们转向 I_2，其有如下界

$$\begin{aligned}
&X^{2+\varepsilon} \int_{X/H}^{MX/H} \frac{1}{|t|^2} \left| M\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2 \left| K\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2 dt + X^{2+\varepsilon} \int_{MX/H}^{U} \frac{1}{|t|^2} \left| M\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2 \left| K\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2 dt \\
&\ll I_3 + I_4,
\end{aligned}$$

其中

$$I_3 = H^2 X^{\varepsilon} \int_{X/H}^{MX/H} \left| M\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2 \left| K\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2 dt$$

and

$$I_4 = X^{2+\varepsilon} \int_{MX/H}^{U} \frac{1}{|t|^2} \left| M\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2 \left| K\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2 dt.$$

采用与上述估计 I_1 类似的论证，我们得到

$$I_3 \ll H^2 X^{1-\delta^2} + H^2 X^{5\delta+\varepsilon} \sup_{|t|\leqslant MX/H} \left| K\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2.$$

则由引理1，我们有

$$I_3 \ll H^2 X^{1-\delta^2} + H^2 X^{6\delta} \left((MX/H)^{2\theta} + H/M^2\right). \tag{35}$$

取 $U = X^{2026}$，由（16）及引理4，

$$\begin{aligned} I_4 &\ll X^{2+\varepsilon} M^{1+\varepsilon} \sum_{n=1}^{[2026\log X]+1} \int_{2^n MX/H}^{2^{n+1}MX/H} \frac{1}{|t|^2} \left| K\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2 dt \\ &\ll X^{2+\varepsilon} M^{1+\varepsilon} \sup_{MX/H\leqslant T\leqslant X^{2026}} \frac{1}{T^2} \int_T^{2T} \left| K\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2 dt \\ &\ll X^{2+\varepsilon} M^{1+\varepsilon} \sup_{MX/H\leqslant T\leqslant X^{2026}} \frac{X/M+T}{T^2} \sum_{k\sim X/M} \frac{|A(k)|^2}{k} \\ &\ll X^{1+2\varepsilon} H^2 M^{-2} + X^{1+2\varepsilon} H \ll H^2 X^{1-\delta^2}. \end{aligned}$$

因此，我们有

$$I_2 \ll I_3 + I_4 \ll H^2 X^{1-\delta^2} + H^2 X^{6\delta} \left((MX/H)^{2\theta} + H/M^2\right).$$

综上所述，（30）不超过

$$H^2 X^{1-\delta^2} + H^2 X^{6\delta} \left((MX/H)^{2\theta} + H/M\right) \ll H^2 X^{1-\delta^2} + X^{2\theta(1+\delta)+6\delta} H^{2-2\theta}. \tag{36}$$

当取下列值时达到最优

$$H = \begin{cases} X^{1+\delta-\frac{1}{2\theta}+\frac{6\delta+2\delta^2}{2\theta}} & \text{if } \theta \geqslant 1/2, \\ X^{6\delta} & \text{otherwise,} \end{cases} \tag{37}$$

由此得到最终上界为

$$H^2 X^{1-2\delta^2} = \begin{cases} X^{3+2\delta-\frac{1}{\theta}+\frac{6\delta+2\delta^2}{\theta}-2\delta^2} & \text{if } \theta \geqslant 1/2, \\ X^{1+12\delta-2\delta^2} & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{38}$$

根据二阶矩上界，我们可以推导出大多数单个求和的逐点界：

推论 2。对 于所有 $C \geqslant 1$，至少有比例为 $1-C^{-2}$ 的 $x \sim X$ 满足 t

$$\Sigma := \sum_{\substack{mk\in[x,x+H] \\ m\sim M \\ k\sim X/M \\ (m,k)=1}} A(mk) < CHX^{-\delta^2/2}, \tag{39}$$

当 $H = X^{1+\delta-\frac{1}{2\theta}+\frac{6\delta+2\delta^2}{2\theta}}$ 若 $\theta \geqslant 1/2$ 且 $H = X^{6\delta}$ 若 $0 < \theta < 1/2$。12

证明。我们首先证明，对于大部分 x，系数之和都很小，这一结论是从平均意义下的结果（命题1的二阶矩上界）推得的逐点陈述。这是一种切比雪夫型论证，只依赖于二阶矩的上界，正如 [4]。

由第一个命题得到的上界可知，

$$\int_2^{2X} |\Sigma|^2 dx \ll H^2 X^{1-\delta^2}, \tag{40}$$

其中，当 $\theta \geqslant 1/2$ 时，$H = X^{1+\delta-\frac{1}{2\theta}+\frac{6\delta+2\delta^2}{2\theta}}$；当 $0 < \theta < 1/2$ 时，$H = X^{6\delta}$。将积分按 x 划分，使得内部的和大于（分别小于） B （例如，分别取子集 X_1 和 X_2 ），我们得到 X_1 的贡献为

$$H^2 X^{1-\delta^2} \gg \int_{X_1} |\Sigma|^2 \gg |X_1| B^2 \tag{41}$$

因此 $|X_1| \leqslant H^2 X^{1-\delta^2} B^{-2}$。取 B，使得它为 $\asymp X$，即 $B = CHX^{-\delta^2/2}$，我们得到 $|X_2| < (1 - C^{-2}) X$。换言之，对于至少 $(1 - C^{-2})$ X 的 $x \sim X$，我们有 $|\Sigma| < CHX^{-\delta^2/2}$，即至少占 $x \sim X$ 的 $1 - C^{-2}$。□

3. Lower bound

我们证明一个旨在模仿 [4, 引理 22], 的设定，该引理对任意 L-函数都成立，并能根据完全和的信息提供一些关于短区间的信息。

命题2. 对于所有 $H = o(X)$，我们有

$$\sum_{\substack{km \in [x, x+H] \\ m \sim M \\ (k,m)=1}} |A(km)| > HX^{\kappa-1-2\varepsilon} \tag{42}$$

对于 $x \sim X$的 $\gg X^{2\kappa-1-3\varepsilon}$ 。

注 5. 有趣的是，这并不需要对 κ作任何假设。这是一个一般性结论：只要我们能对 Rankin–Selberg 界有所控制，整个和的下界就意味着短区间上的下界。

让我们根据 $A(m)$ 的大小区分不同情形，以量化较小的 系数 $A(m)$ 的贡献。令 $\alpha > 0$ 为一个参数，并根据 $|A(m)|$ 相对于 X^{α}的大小拆分求和。

根据假设（10），我们有

$$\sum_{\substack{km \sim X \\ m \sim M \\ (k,m)=1}} |A(km)| = \sum_{m \sim M} |A(m)| \sum_{\substack{k \sim X/m \\ (k,m)=1}} |A(k)| \gg X^{\kappa-\varepsilon}.$$

当 $|A(m)| > X^{\alpha}$，我们可以利用 Rankin–Selberg 界（8）并得到

$$\sum_{\substack{km\sim X\\ m\sim M\\ (k,m)=1\\ |A(km)|>X^{\alpha}}} |A(km)| \leqslant X^{-\alpha} \sum_{\substack{km\sim X\\ m\sim M\\ (k,m)=1}} |A(km)|^2 \ll X^{-\alpha} \sum_{m\sim M} |A(m)|^2 \sum_{\substack{k\sim X/m\\ (k,m)=1}} |A(k)|^2 \ll X^{1-\alpha+\varepsilon}. \tag{43}$$

因此，

$$\sum_{\substack{km\sim X\\ m\sim M\\ (k,m)=1\\ |A(km)|\leqslant X^{\alpha}}} |A(km)| = \sum_{\substack{km\sim X\\ m\sim M\\ (k,m)=1}} |A(km)| - \sum_{\substack{km\sim X\\ m\sim M\\ (k,m)=1\\ |A(km)|>X^{\alpha}}} |A(km)| \gg X^{\kappa-\varepsilon} - X^{1-\alpha+\varepsilon} \tag{44}$$

并且只要 $\alpha > 1-\kappa+2\varepsilon$，其大小即为 $X^{\kappa-\varepsilon}$。此后我们假定该条件成立，即取 $\alpha = 1-\kappa+2\varepsilon$。这尤其意味着

$$\begin{aligned} X^{\kappa-\varepsilon} \ll \sum_{\substack{km\sim X\\ m\sim M\\ (k,m)=1\\ |A(km)|\leqslant X^{\alpha}}} |A(km)| &\ll \sum_{n=0}^{[X/H]+1} \frac{1}{H} \int_{X+(n-1)H}^{X+nH} \sum_{\substack{km\in[X+nH,X+(n+1)H]\\ m\sim M\\ (k,m)=1\\ |A(km)|\leqslant X^{\alpha}}} |A(km)|dx \\ &\leqslant \sum_{n=0}^{[X/H]+1} \frac{1}{H} \int_{X+(n-1)H}^{X+nH} \sum_{\substack{km\in[x,x+2H]\\ m\sim M\\ (k,m)=1\\ |A(km)|\leqslant X^{\alpha}}} |A(km)|dx \\ &\leqslant \frac{1}{H} \int_{X-H}^{2X+H} \sum_{\substack{km\in[x,x+2H]\\ m\sim M\\ (k,m)=1\\ |A(km)|\leqslant X^{\alpha}}} |A(km)|dx. \end{aligned} \tag{45}$$

这里我们用到了一个简单的观察：对任意 $x \in [X+(n-1)H,\ X+nH]$，我们有$[X+nH, X+(n+1)H] \subset [x, x+2H]$，从而

$$\sum_{\substack{km\in[X+nH,X+(n+1)H]\\ m\sim M\\ (k,m)=1\\ |A(km)|\leqslant X^{\alpha}}} |A(km)| \leqslant \sum_{\substack{km\in[x,x+2H]\\ m\sim M\\ (k,m)=1\\ |A(km)|\leqslant X^{\alpha}}} |A(km)|.$$

考虑不满足所述界的“坏”集合 $\mathcal{S}$（$x \sim X$，称为 B，阈值稍后再优化），即

$$\mathcal{S} := \left\{ x\sim X \ : \sum_{\substack{km\in[x,x+2H]\\ m\sim M\\ (k,m)=1\\ |A(km)|\leqslant X^{\alpha}}} |A(mk)| \leqslant B \right\}. \tag{46}$$

这些点 集合 $\mathcal{S}$ 中的点在上述积分中的贡献至多为（将 $|\mathcal{S}|$ 用 X 估计）

$$\frac{1}{H}\int_{\mathcal{S}}\sum_{\substack{km\in[x,x+2H]\\ m\sim M\\ (k,m)=1\\ |A(km)|\leqslant X^{\alpha}}}|A(km)|\ll\frac{1}{H}|\mathcal{S}|B\ll\frac{1}{H}XB. \tag{47}$$

这不足以确保积分45的大小（ $H^{-1}XB\ll X^{\kappa-\varepsilon}$，也就是说，只要 $B\ll HX^{\kappa-1-\varepsilon}$。因此，我们选择这个前沿阈值 $B=HX^{\kappa-1-2\varepsilon}$。在这种情况下，积分的大小必须由互补集中的点 ${}^{c}\mathcal{S}$ 来决定 $\mathcal{S}$，该集合由 $x\sim X$ 中断言成立的点组成。在 ${}^{c}\mathcal{S}$上，利用求和所涉及的系数足够小这一事实 $|A(mk)|\leqslant X^{\alpha}$，积分的贡献至多为

$$X^{\kappa}\ll\frac{1}{H}\int_{{}^{c}\mathcal{S}}\sum_{\substack{km\in[x,x+H]\\ m\sim M\\ (k,m)=1\\ |A(m)|\leqslant X^{\alpha}}}|A(km)|\ll\frac{1}{H}|{}^{c}\mathcal{S}|HX^{\alpha}. \tag{48}$$

这意味着

$$|{}^{c}\mathcal{S}|\gg X^{\kappa-\alpha}=X^{2\kappa-1-3\varepsilon} \tag{49}$$

因为我们选择了 $\alpha=1-\kappa+2\varepsilon$。由此得到所需的结论。 □

4. Proof of the theorem

本节中我们完成定理1 的证明。

对于 $\gg X^{2\kappa-1-\varepsilon}$ 中 $x\sim X$ 由推论2 和命题2得到的比例，我们可以写出所得到的上界和下界的推论：

$$\left|\sum A(mk)\right|<CHX^{-\delta^2/2}<HX^{\kappa-1}<\sum|A(mk)| \tag{50}$$

其中，当 X 足够大时，中心不等式总是成立。 d

$$\delta>\sqrt{2-2\kappa}.$$

这表明在区间 $A(mk)$ 中 $[x,x+H]$发生了变号，而这发生在 $\gg X^{2\kappa-1-\varepsilon}$ 个 x 的情况下（因为推论 2 和命题 2 对于这样多的 x 同时成立）。因此， $\gg X^{2\kappa-1-\varepsilon}/H$ 中至少有 $[X,2X]$次符号变化。

若 $\theta>1/2$，我们可以（就上界而言）取 $H=X^{1+\delta-\frac{1}{2\theta}+\frac{6\delta+2\delta^2}{2\theta}}$，因此得出，对于 $m\in[0,X]$，在 $A(m)$ 中至少有 $X^{2\kappa-2+1/2\theta-\delta-\frac{6\delta+2\delta^2}{2\theta}}$ 次变号。由于我们要求 $X^{6\delta}\ll H\ll X^{1-6\delta}$，因此需要 ($X^{6\delta}\ll H$ 在 $\delta\leqslant 1/6$ 时成立，这可由以下公式保证)

$$1+\delta-\frac{1}{2\theta}+\frac{6\delta+2\delta^2}{2\theta}\leqslant 1-6\delta\Longrightarrow\delta\leqslant\frac{1}{7\theta+3+\sqrt{(7\theta+3)^2+2}}. \tag{51}$$

因此，

$$\sqrt{2-2\kappa}<\delta\leqslant\frac{1}{7\theta+3+\sqrt{(7\theta+3)^2+2}}\Longrightarrow\kappa\geqslant 1-\frac{1}{2(7\theta+3+\sqrt{(7\theta+3)^2+2})^2}.$$

若 $\theta = 1/2$, $\kappa \geqslant 0.9971$ 且 $\kappa \to 1$ 是 θ 递增的。若取 $\delta = \varepsilon$ 如定理 1中所述，则$\kappa \geqslant 1 - \varepsilon$。

如果 $\theta \leqslant 1/2$，我们要求（对于上界结论） $H = X^{6\delta}$，并由此得到，对于 $m \in [0, X]$, $A(m)$ 中至少有 $X^{2\kappa-1-6\delta}$ 次变号。当 $\delta < (2\kappa - 1)/6$ 时，这一结果是非平凡的。因此

$$\sqrt{2-2\kappa} < \delta < (2\kappa-1)/6 \Longrightarrow \kappa \geqslant -\frac{17}{2} + 3\sqrt{10} \geqslant 0.986833.$$

定理 1 的证明只需取 $\delta = \sqrt{2 - 2\kappa + \varepsilon}$即可完成。 □

4.1. **在** GSp(4) **上的一个应用。** 我们将定理 1应用于 GSp(4) 上的西格尔模形式。根据 [10, 定理 4.2], ，由 Weissauer 关于 GSp(4) 的函子性和 Langlands猜想的深刻结果 [12, 定理 3.3] 可知，任何不是 Saito–Kurokawa提升的 Siegel模Hecke特征形式都满足广义 Ramanujan猜想。可以证明，对于 Maass空间正交补中的形式，这等价于 $|\mu(p^r)| \leqslant 36p^{r(k-3/2)}$，其中 $\mu(m)$ 是 Hecke特征值（见 [8, 定理 4.2]）。利用关系 $A(p^r) = \mu(p)p^{k-3/2}$ （见 [9, 公式 (7)]），其中 $A(m)$ 是自旋 L函数的系数，我们推得 $|A(p)| \leqslant 36$。

根据我们对 L-函数这一类的定义之后的注释，这意味着 $\vartheta = 0$是可容许的，因此 $\kappa = 1$ 成立。因此，我们可以由定理1 推出关于西格尔模形式的推论1 。

致谢。本研究是在 D. L. 访问深圳大学期间完成的，谨此感谢该校提供了优良的工作环境和支持。D. L. 感谢 CDP C2EMPI、法国政府通过法国2030计划、里尔大学、里尔大学卓越计划以及里尔欧洲都会区对 R-CDP-24-004-C2EMPI 项目的资助与支持。Y. W. 获国家自然科学基金委员会资助（项目编号：12371006）。

References

[1] J. B. Conrey 和 A. Ghosh，《狄利克雷级数塞尔伯格类：低次数》，《Duke数学杂志》72 (1993), 673–693。[2] H. Iwaniec 和 E. Kowalski，《解析数论》，《Colloquium Publications》53，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2004。[3] H. Iwaniec 和 P. Sarnak，《解析理论展望 L-函数》。载于：Alon、N.，Bourgain、J.，Connes、A.，Gromov、M.，Milman、V.（编），《数学展望》。现代 Birkh¨auser经典丛书。Birkh¨auser巴塞尔。（2000），705–741。
https://doi.org/10.1007/978-3-0346-0425-3_6[4] J. J¨a¨asaari，《Hecke-Maass尖点形式 Fourier系数的符号》，GL_3，《美国数学会会刊》376 (2023)，8193–8223。[5] Y.-K. Lau、刘建亚和吴杰，《算术函数的局部行为及其在自守L-函数中的应用》，《国际数学研究通知》IMRN 16 (2017), 4815–4839。[6] K. Matom¨aki，《尖点形式 Fourier系数的符号》，《剑桥哲学会数学学报》152 (2012)，207–222。[7] P. D. Nelson，《标准 L-函数的界》，预印本 arXiv:2109.15230 (2021)。[8] A. Pitale，《西格尔模形式：古典与表示论方法》，《数学讲义》2240，Springer，2019。

[9] A. Pitale 和 R. Schmidt, 《次数2 Siegel尖点形式Hecke特征值的符号变化》, 《美国数学会会刊》136 (2008), 3831–3838。[10] A. Pitale 和 R. Schmidt, 《次数2 Siegel尖点形式的Ramanujan型结果》, 《Ramanujan杂志》24 (2009), 87–111。[11] G. Tenenbaum, 《解析数论与概率数论导论》（第3版）, 《数学研究生教材》163, 美国数学会, 2015。[12] R. Weissauer, 《GSp(4)的端oscopy与Siegel模三维簇的上同调》, 《数学讲义》1968（施普林格出版社, 柏林, 2009）。