arXiv:2603.03032v1 [math.AP] 3 Mar 2026

具有高振荡边界的球面上薄域中的拉普拉斯算子渐近分析

Naísa C. Garcia *、Raquel Lehrer†、Marcus A. M. Marrocos ‡

2026年3月4日

摘要

本文分析了球面 S^2内具有高振荡行为 $\mathcal{U}^\varepsilon$ 的薄区域中满足诺伊曼边界条件的泊松方程解的收敛性。利用多重尺度法，我们获得了均匀化极限问题，并分析了解的收敛性，其中 ε 趋于 0。通过引入适当的校正子，我们证明了解的强收敛性，并给出了误差估计。

关键词和短语： 薄域、校正子、均匀化、误差估计
2010 年数学学科分类： 35B25, 35B27,74Q05.

1 引言

在纳米尺度力学研究中，各种物理现象都通过定义在薄域上的偏微分方程来建模。这些现象包括细杆、板和壳体等细长结构的力学；润滑模型和血流等薄通道中的流体动力学；以及膜或窄条带上的化学扩散过程，例如催化反应。在此背景下，研究振荡边界薄域中建模的现象，已引起学界广泛关注。在这些领域中，现实问题往往涉及高度不规则的边界，这些边界会显著影响底层模型的行为。众所周知，用于分析这些现象的数学工具通常涉及偏微分方程和微分几何。例如，我们强调 [1], [2], [11], 及其中参考文献所述工作的重要性；这些工作研究了齐次诺伊曼边界条件下的椭圆型和抛物型问题，探讨了极限问题和收敛性质，并聚焦于 $\mathbb{R}^2$中的薄域。

近期，Arrieta、Nakasato 和 Villanueva-Pesqueira [2], 研究了三维均匀化 thi具有振荡边界的区域，但采用了与我们将在此介绍的方法不同的技术 1

*N. C. Garcia 获数学、计算与认知中心 - ABC联邦大学 - Santo André/SP 资助，电子邮箱：naisa.camila@ufabc.edu.br。

†R. Lehrer 获精确与技术科学中心 - 巴拉那州立西部大学 - UNIOESTE 资助，地址：卡斯卡韦尔/巴西，电子邮箱：raquel.lehrer@unioeste.br。

‡M. A. M. Marrocos 获数学系 - 亚马孙联邦大学资助，地址：马瑙斯/巴西，电子邮箱：marcusmarrocos@ufam.edu.br。

。在 [3, 7, 8, 9, 11], 中，作者仅在不同背景下研究了纯薄域。Grisier 在 [7] 中提供了一篇非常出色的综述，探讨了在薄域中分析偏微分方程解的行为所涉及的多个领域，例如数理物理、谱几何和整体分析。在 [1], 中，Arrieta 等人分析了边界具有高度振荡行为的薄区域内偏微分方程解的渐近行为。我们研究了 [1], 中提出的同一个椭圆问题，不过考察的是球面上的振荡区域。我们的工作与他们的研究不同之处在于，经过变量替换后，我们处理的是一个关于加权测度对称的非常系数椭圆问题。

我们研究由拉普拉斯-贝尔特拉米算子与诺伊曼边界条件给出的问题的解在球面上退化至赤道的区域上的行为。更具体地说，设 $\mathbb{S}^2$ 表示配备由 $\mathbb{R}^3$ 中的内积诱导的典范度量G的球面，并设 $\mathcal{U}^\varepsilon \subset \mathbb{S}^2$ 为包含赤道的一条带状区域，其边界具有高度振荡行为，并在 ε 趋于零时退化至赤道。我们将讨论如下问题：对适当的f^ε

$$\begin{cases} -\Delta v + v = f^\varepsilon \ \ in \ \ \mathcal{U}^\varepsilon; \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 \ \ on \ \ \partial\mathcal{U}^\varepsilon \end{cases} \tag{1.1}$$

其中

$$\Delta v = \frac{1}{\sqrt{|G|}}\partial_i(\sqrt{|G|}G^{ij}\partial_j v),$$

$|G|$ 是由 $\mathbb{R}^3$ 上的典范度量诱导的 $\mathbb{S}^2$ 上圆度量G 的行列式，且η是 $\partial\mathcal{U}^\varepsilon$的单位外法向量场。具体而言，我们按如下方式定义 $\mathcal{U}^\varepsilon$：设$g:\ \ [0,2\pi] \to \mathbb{R}$为算子 $L-$周期的$C^1(0,2\pi)$函数，且算子 $L = 2\pi/a$，$a \in \mathbb{N}^*$，并考虑

$$R^\varepsilon = \left\{(\varphi,\theta) \in \mathbb{R}^2; 0 < \varphi < 2\pi \ \text{ and } \ 0 < \theta < \varepsilon g\left(\frac{\varphi}{\varepsilon}\right)\right\}, \tag{1.2}$$

球面带域 $\mathcal{U}^\varepsilon$定义为 $\mathcal{U}^\varepsilon = \{\chi(\varphi,\theta); (\varphi,\theta) \in R^\varepsilon\} \subset \mathbb{S}^2$，其中 χ是参数化

$$\begin{aligned} \chi : R^\varepsilon \subset \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^3 \\ (\varphi,\theta) &\to \chi(\varphi,\theta) = (\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, \sin\theta). \end{aligned}$$

我们注意到 $\theta \le g_1$，，其中

$$g_1 := \max_{\varphi\in[0,2\pi)}\{g(\varphi)\} < \frac{\pi}{2}. \tag{1.3}$$

对问题 (1.1) 进行变量代换 χ，得到

$$\begin{cases} -\left(\frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)v + \frac{1}{\cos^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}v\right) + v = f^\varepsilon \ \ in \ R^\varepsilon; \\ \frac{1}{\cos^2\theta}\frac{\partial v}{\partial\varphi}N_1 + \frac{\partial v}{\partial\theta}N_2 = 0 \ \ on \ \ \partial R^\varepsilon; \\ v(\cdot,\theta) \ \ 2\pi - \text{periodic}, \end{cases} \tag{1.4}$$

其中$N = (N_1,N_2)$ 是上边界和下边界上的法向量场，分别由$N = \left(-g'\left(\frac{\varphi}{\varepsilon}\right)\sqrt{1+g'\left(\frac{\varphi}{\varepsilon}\right)^2}, \sqrt{1+\ \overset{1}{g'\left(\frac{\varphi}{\varepsilon}\right)^2}}\right)$

和$N = (0,\overline{-1)给出。}$ 为补全边界条件，我们将考虑关于变量 φ 的 $2\pi-$ 周期函数，其中变量取值于 R^ε。

令 $C^{\infty}_{per}(R^{\varepsilon})$ 表示 $C^{\infty}(R^{\varepsilon})$ 中由关于第一变量为 2π-周期的函数构成的子集。接下来，我们考虑加权索伯列夫空间 $W^{1\,2}_{per}$, $(R^{\varepsilon}, \cos\theta) = H^1_{per}(R^{\varepsilon}, \cos\theta)$，它是 $C^{\infty}_{per}(R^{\varepsilon})$ 在 $H^1(R^{\varepsilon}, \cos\theta)$ 范数下的闭包

$$\|v\|_{H^1_{per}(R^{\varepsilon},\cos\theta)} = \left(\int_{R^{\varepsilon}} |v|^2 \cos\theta \, d\varphi d\theta\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{R^{\varepsilon}} |\nabla v|^2 \cos\theta \, d\varphi d\theta\right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

根据 Lax–Milgram 定理，问题 (1.4) 具有唯一解，我们将其记为 w^{ε}，只要 f^{ε} 关于变量 φ 是 $2\pi-$周期的，且 $f^{\varepsilon} \in$ 算子 $L^2(R^{\varepsilon}, cos\theta)$。

值得注意的是，振荡区域族 $\mathcal{U}^{\varepsilon}$ 可视为收敛到球面的赤道线，并且在极限情形下，该方程化为 $\mathbb{S}^1$ 上的一个椭圆问题。

接下来，我们进行一个简单的变量代换，即将区域 R^{ε} 沿 θ 方向拉伸 $\frac{1}{\varepsilon}$ 倍（即 $\varphi_1 = \varphi$, $\theta_1 = \frac{\theta}{\varepsilon}$），从而把区域 R^{ε} 变换为区域

$$\Omega^{\varepsilon} = \left\{(\varphi_1, \theta_1) \in \mathbb{R}^2; \varphi_1 \in (0, 2\pi) \text{ and } 0 < \theta_1 < g\left(\frac{\varphi_1}{\varepsilon}\right)\right\}.$$

回顾 (1.3)，我们还将区域 Ω 定义为

$$\Omega = \left\{(\varphi_1, \theta_1) \in \mathbb{R}^2; \varphi_1 \in (0, 2\pi) \text{ and } 0 < \theta_1 < g_1,\right\}$$

且显然 $\Omega^{\varepsilon} \subset \Omega$。由此，我们得到一个不再薄的区域 Ω^{ε}，尽管它呈现出高度振荡的行为。在此变量代换下，解 $w^{\varepsilon}(\varphi, \theta)$ 现在将记为 $u^{\varepsilon} = u^{\varepsilon}(\varphi_1, \theta_1)$，而问题 (1.4) 被变换为

$$\begin{cases} -\left(\frac{1}{\varepsilon^2 \cos(\varepsilon\theta_1)} \frac{\partial}{\partial\theta_1}\left(\cos(\varepsilon\theta_1)\frac{\partial}{\partial\theta_1}\right) u^{\varepsilon} + \frac{1}{\cos^2(\varepsilon\theta_1)} \frac{\partial^2}{\partial\varphi_1^2} u^{\varepsilon}\right) + u^{\varepsilon} = f^{\varepsilon} \quad in\ \Omega^{\varepsilon}; \\ \frac{1}{\cos^2(\varepsilon\theta_1)} \frac{\partial}{\partial\varphi_1} u^{\varepsilon} N_1^{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial}{\partial\theta_1} u^{\varepsilon} N_2^{\varepsilon} = 0 \quad on \quad \partial\Omega^{\varepsilon}; \\ u^{\varepsilon}(\cdot, \theta_1) \quad 2\pi - \text{periodic}, \end{cases} \tag{1.5}$$

其中，$N^{\varepsilon} = (N_1^{\varepsilon}, N_2^{\varepsilon})$分别是上边界和下边界上的法向量场，由$N^{\varepsilon} = \left(-g'(\frac{\varphi_1}{\varepsilon})\sqrt{1+g'(\frac{\varphi_1}{\varepsilon})^2}, \sqrt{1+{}'g(\frac{\varphi_1}{\varepsilon})^2}\right)$和$N^{\varepsilon} = (0, -1)$给出。这里，适当的索伯列夫空间为$H^1_{per}(\Omega^{\varepsilon}, \cos(\varepsilon\theta_1))$。$\theta$方向导数前面的因子 $\frac{1}{\varepsilon^2}$ 表示球面 $\mathbb{S}^2$上沿子午测地线方向的扩散非常快。

我们注意到区域 Ω^{ε} “收敛”到区域 Ω。因此，我们预期问题u^{ε} (1.5) 的解会以某种意义收敛到定义在 Ω上的一个问题的解。

解u^{ε} 不仅取决于 ε，区域 Ω^{ε} 也如此。因此，要着手解决收敛问题，第一步是先在一个固定区域 Ω上进行研究。为此，我们需要某个延拓算子P_{ε}，将定义在 Ω^{ε} 上的函数延拓为定义在 Ω 上的函数（见引理 3.1）。利用这个延拓算子，我们证明问题(1.5)的解满足

$$P_{\varepsilon} u_{\varepsilon} \to w_0 \text{ weakly in } H^1(\Omega),$$

其中 w_0 是均匀化极限问题的唯一解，该解通过多重尺度法得到：

$$\begin{cases} -q_0 \frac{d^2}{d\varphi^2} w_0(\varphi) + w_0(\varphi) = f(\varphi) \quad \varphi \in (0, 2\pi); \\ w_0 \quad \text{periodic}, \end{cases}$$

其中 q_0 是均匀化系数，f 是序列 f^ε的适当极限。详情请参见第2节。

我们将采用针对球面薄域加以调整的 Tartar方法，证明收敛结果。该结果见定理 3.2。然而，由于这一结果通常只能在特定意义下得到弱收敛，因此无法捕捉解的更精细特征，尤其是区域的奇异结构或边界附近的特征。为改进分析并获得强收敛，我们基于多尺度方法导出的形式渐近展开引入校正子，这些展开基于 [4]。具体而言，我们引入一阶和二阶校正子，以获得精确解 w^ε 的近似误差估计，从而推导出强收敛以及 H^1-范数下的误差估计。我们指出，加入校正子后，可以直接针对问题(1.4)处理收敛问题。这些校正子使我们能够严格量化近似误差，并证明补充了适当校正项的均匀化模型能够精确描述 w^ε 在 $\varepsilon \to 0$时的行为。参见定理4.5和4.6。

此外，从球面 S^2的内禀角度看，我们的极限微分算子本质上是赤道 S^1上的拉普拉斯-贝尔特拉米算子。我们注意到，$\mathcal{U}^\varepsilon$ 边界的振荡意味着沿着垂直于赤道的测地线方向发生了极快的扩散。这一效应在方程（1.5）中更加明显。这一特征与 $\mathbb{R}^n$中针对强振荡区域所得的结果一致。

2 多重尺度法与均匀化方程

本节中，我们应用多重尺度法，形式上推导出（1.4）的极限均匀化问题，更多细节见第2节。2, [4]

关于方程（1.4）的右端，考虑$f^\varepsilon(\cdot,\theta) \in L^2(R^\varepsilon, cos\theta)$， $2\pi-$ 为周期函数，并满足

$$\int_{R^\varepsilon} (f^\varepsilon)^2 \cos\theta \, d\varphi \, d\theta \le C,$$

对于某个与 ε无关的常数$C \ > \ 0$ 。此外，为简单起见，我们假设非齐次项$f^\varepsilon = f$满足$f(\varphi,\theta) = f(\varphi)$。

为了引入多尺度方法，我们考虑区域

$$Y^* = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 < y < L, \ 0 < z < g(y)\} \tag{2.1}$$

称为基本胞元，以及定义在 $\mathbb{R}^2 \times Y^*$ 上的函数$w_i(x,r,y,z), i \in \mathbb{N}$，它们关于变量$x$ 是 2π-周期的，关于变量y是 算子 L-周期的。我们寻求问题 (1.4) 的解的形式渐近展开，其形式为

$$w^\varepsilon(\varphi,\theta) = w_0\left(\varphi,\theta,\frac{\varphi}{\varepsilon},\frac{\theta}{\varepsilon}\right) + \varepsilon w_1\left(\varphi,\theta,\frac{\varphi}{\varepsilon},\frac{\theta}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^2 w_2\left(\varphi,\theta,\frac{\varphi}{\varepsilon},\frac{\theta}{\varepsilon}\right) + \cdots$$

由于R^ε 在 $\varphi-$轴上随着 ε 趋于 0 而退化，这表明w^ε 趋于变得与变量 θ无关。因此，我们将 $w'_i s$ 视为与 θ 无关的函数，从而假设

$$w^\varepsilon(\varphi,\theta) = w_0\left(\varphi,\frac{\varphi}{\varepsilon},\frac{\theta}{\varepsilon}\right) + \varepsilon w_1\left(\varphi,\frac{\varphi}{\varepsilon},\frac{\theta}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^2 w_2\left(\varphi,\frac{\varphi}{\varepsilon},\frac{\theta}{\varepsilon}\right) + \cdots \tag{2.2}$$

其中，对每个$i \in \mathbb{N}$，$w_i : \ (0,2\pi) \times Y^* \longrightarrow \mathbb{R}$。

变量 φ 和 θ 表示“宏观”位置，而变量 φ/ε 和 θ/ε表示区域的“微观”几何结构。这种“微观结构”由基本胞元 Y^*表示。

该方法的思路是将展开式 (2.2) 代入问题 (1.4)。我们先分析内部的问题，随后分析边界上的问题。

令 $\mathcal{L}$ 表示问题 (1.4) 的内部算子，即

$$\mathcal{L}w := \frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)w + \frac{1}{\cos^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}w. \tag{2.3}$$

因此，

$$\mathcal{L}(w) := \sum_{j=1}^{+\infty}\varepsilon^j\mathcal{L}\left(w_j\right).$$

令 $x = \varphi$、$y = \frac{\varphi}{\varepsilon}$ 和 $z = \frac{\theta}{\varepsilon}$。经过这些变量变换，我们得到：

$$\frac{\partial}{\partial\varphi} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial y}, \qquad \frac{\partial}{\partial\theta} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial z}, \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{2}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}, \qquad \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} = \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

算子 $\mathcal{L}$ 变为：

$$\begin{aligned}\mathcal{L}w_j :=& \frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)w_j + \frac{1}{\cos^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}w_j\\ =& \frac{1}{\varepsilon^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)w_j + \frac{1}{\varepsilon}\left(-\tan(\varepsilon z)\frac{\partial}{\partial z} + 2\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\right)w_j + \frac{1}{\cos^2(\varepsilon z)}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)w_j.\end{aligned}$$

将 w^ε 替换为其在 (2.2) 中给出的形式展开，并代入方程 (1.4)，我们得到 th e foll关于变量x、y、z的展开：

$$\begin{aligned} f &= \sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j\left(-\mathcal{L}w_j + w_j\right) = -\frac{1}{\varepsilon^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}w_0 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}w_0\right) - \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}w_1 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}w_1 + 2\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}w_0\right)\\ &- \frac{\partial^2}{\partial y^2}w_2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}w_2 - \frac{\partial^2}{\partial x^2}w_0 + z\frac{\partial w_0}{\partial z} - z^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}w_0 - 2\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}w_1 + w_0 + \cdots\end{aligned}$$

注意，在上述展开中，我们可以舍去 ε 的正幂项，因为我们将取 $\varepsilon \to 0$ 时的极限。因此，为了在暂时忽略边界条件的情况下，得到确保当 $\varepsilon \to 0$ 时收敛的必要条件，我们需要求解以下问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial y^2}w_0 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}w_0 = 0 \ \text{ in } \ Y^*;\\ \frac{\partial^2}{\partial y^2}w_1 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}w_1 + 2\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}w_0 = 0 \ \text{ in } \ Y^*;\\ -\frac{\partial^2}{\partial y^2}w_2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}w_2 - \frac{\partial^2}{\partial x^2}w_0 - 2\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}w_1 + w_0 + z\frac{\partial}{\partial z}w_0 - z^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}w_0 = f \ \text{ in } \ Y^*. \end{cases} \tag{2.5}$$

现在我们分析边界条件。若$N(\varphi,\theta)$ 和 $\eta(\frac{\varphi}{\varepsilon},\frac{\theta}{\varepsilon}) = \eta(y,z)$ 分别表示 ∂R^ε 和 ∂Y^*上的单位外法向量，则$N(\varphi,\theta) = \eta\left(\frac{\varphi}{\varepsilon},\frac{\theta}{\varepsilon}\right) = \eta(y,z)$,

前提是 $\theta = 0$ 或 $\theta = \varepsilon g(\frac{\varphi}{\varepsilon})$。若 $\theta = 0$，则 $N(\varphi,\theta) = \eta\left(\frac{\varphi}{\varepsilon},\frac{\theta}{\varepsilon}\right) = \eta(y,z) = (0,-1)$。若 $\theta = \varepsilon g(\frac{\varphi}{\varepsilon})$，则

$$N(\varphi,\theta) = \left(-\frac{g'\left(\frac{\varphi}{\varepsilon}\right)}{\sqrt{1+g'\left(\frac{\varphi}{\varepsilon}\right)^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+g'\left(\frac{\varphi}{\varepsilon}\right)^2}}\right) = \eta\left(\frac{\varphi}{\varepsilon},\frac{\theta}{\varepsilon}\right) = \eta(y,z),$$

由于 ∂R^ε 的上部由 $(\varphi, \varepsilon g(\frac{\varphi}{\varepsilon}))$ 给出，其切向量为 $(1, g'(\frac{\varphi}{\varepsilon}))$，而 ∂Y^* 的上边界为 $(\varphi, \varepsilon g(\varphi))$，其切向量为 $(1, g'(\varphi))$。因此，为简便起见，我们将两个法向量都记为 N。

我们对 ∂R^ε 有如下边界条件：

$$0 = \left(\frac{1}{\cos^2\theta}\frac{\partial w^\varepsilon}{\partial\varphi}, \frac{\partial w^\varepsilon}{\partial\theta}\right)\cdot(N_1,N_2).$$

利用形式展开（2.2）并进行变量代换，我们得到：

$$\begin{aligned}0 = &\left(\frac{1}{\cos^2\theta}\frac{\partial w^\varepsilon}{\partial\varphi}, \frac{\partial w^\varepsilon}{\partial\theta}\right)\cdot(N_1,N_2) = \frac{1}{\cos^2\theta}\frac{\partial w^\varepsilon}{\partial\varphi}\cdot N_1 + \frac{\partial w^\varepsilon}{\partial\theta}\cdot N_2\\ =&\frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{\partial w_0}{\partial y}N_1 + \frac{\partial w_0}{\partial z}N_2\right] + \left[\left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{\partial w_1}{\partial y}\right)N_1 + \frac{\partial w_1}{\partial z}N_2\right]\\ &+\varepsilon\left[\left(\frac{1}{\cos^2(\varepsilon z)}\frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{1}{\cos^2(\varepsilon z)}\frac{\partial w_2}{\partial y}\right)N_1 + \frac{\partial w_2}{\partial z}N_2\right] + \cdots\end{aligned}$$

现在，令 $\partial Y^* = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4$，其中，$B_1$ 为上边界，B_2 为下边界，B_3 为左侧边界，B_4 为 Y^* 的右侧边界。因此，问题（2.5）以及由上文推导出的相应边界条件变为：

$$\begin{cases}\frac{\partial^2}{\partial y^2}w_0 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}w_0 = 0 \ \text{ in } \ Y^*;\\ \frac{\partial w_0}{\partial y}N_1 + \frac{\partial w_0}{\partial z}N_2 = 0 \ \text{ on } \ B_1\cup B_2;\\ w_0(x,\cdot,z) \ \ L-\text{periodic}.\end{cases} \tag{2.6}$$

$$\begin{cases}\frac{\partial^2}{\partial y^2}w_1 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}w_1 = -2\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}w_0 \ \text{ in } \ Y^*;\\ \frac{\partial w_1}{\partial y}N_1 + \frac{\partial w_1}{\partial z}N_2 = -\frac{\partial w_0}{\partial x}N_1 \ \text{ on } \ B_1\cup B_2;\\ w_1(x,\cdot,z) \ \ L-\text{periodic}.\end{cases} \tag{2.7}$$

$$\begin{cases}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}w_2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}w_2 = f - w_0 + 2\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}w_1 - \frac{\partial^2}{\partial x^2}w_0 - z\frac{\partial}{\partial z}w_0 + z^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}w_0 \ \text{ in } \ Y^*;\\ \frac{\partial w_2}{\partial y}N_1 + \frac{\partial w_2}{\partial z}N_2 = -\frac{\partial w_1}{\partial x}N_1 \ \text{ on } \ B_1\cup B_2;\\ w_2(x,\cdot,z) \ \ L-\text{periodic}.\end{cases} \tag{2.8}$$

由（2.6）可知，$w_0(x, y, z) = w_0(x)$。将其代入（2.7），得到：

$$\begin{cases}\frac{\partial^2}{\partial y^2}w_1 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}w_1 = 0 \ \text{ in } \ Y^*;\\ \frac{\partial w_1}{\partial y}N_1 + \frac{\partial w_1}{\partial z}N_2 = \frac{g'(y)}{\sqrt{1+g'(y)^2}}\frac{dw_0}{dx} \ \text{ on } \ B_1;\\ \frac{\partial w_1}{\partial y}N_1 + \frac{\partial w_1}{\partial z}N_2 = 0 \ \text{ on } \ B_2;\\ w_1(x,\cdot,z) \ \ L-\text{periodic}.\end{cases}$$

设X（y，z）为以下方程的解

$$\begin{cases} \Delta_{y,z}X(y,z)=0 \ \text{ in } \ Y^*; \\ \frac{\partial X}{\partial N}(y,g(y))=-\frac{g'(y)}{\sqrt{1+g'(y)^2}} \ \text{ on } \ B_1; \\ \frac{\partial X}{\partial N}(y,0)=0 \ \text{ on } \ B_2; \\ X(\cdot,z) \ \ L-\text{periodic}. \end{cases} \tag{2.9}$$

我们有

$$w_1(x,y,z)=-X(y,z)\frac{dw_0}{dx}(x). \tag{2.10}$$

因此，(2.8) 变为：

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2}{\partial y^2}w_2-\frac{\partial^2}{\partial z^2}w_2=f-w_0+\left(1-2\frac{\partial}{\partial y}X\right)\frac{d^2w_0}{dx^2} \ \text{ in } \ Y^*; \\ \frac{\partial w_2}{\partial N}=-\frac{g'(y)}{\sqrt{1+g'(y)^2}}X\frac{d^2w_0}{dx^2} \ \text{ on } \ B_1; \\ \frac{\partial w_2}{\partial N}=0 \ \text{ on } \ B_2; \\ w_2(x,\cdot,z) \ \ L-\text{periodic}. \end{cases} \tag{2.11}$$

由于 w_2 是 (2.11) 的解，根据散度定理可得

$$0=\int_{Y^*}\left\{f(x)-w_0(x)+\left(1-2\frac{\partial}{\partial y}X(y,z)\right)\frac{d^2w_0}{dx^2}(x)\right\}\phi(x)\ dydz+\int_{\partial Y^*}\frac{\partial w_2}{\partial N}\phi(x)\ dS, \tag{2.12}$$

对于所有 2π-周期测试函数 $\phi\in C^\infty_{per}(\mathbb{R})$，$\phi(\cdot,y,z)=\phi(x)$。另一方面，

$$\begin{aligned} \int_{Y^*}\phi(x)\frac{d^2w_0}{dx^2}(x)\frac{\partial}{\partial y}X(y,z)\ dydz &= \int_{Y^*}\phi(x)\frac{d^2w_0}{dx^2}(x)\nabla_{y,z}X(y,z)\cdot(1,0)dydz \\ &= \int_{\partial Y^*}\phi(x)\frac{d^2w_0}{dx^2}(x)XN_1\ dS=\int_{\partial Y^*}\phi\frac{\partial w_2}{\partial N}\ dS. \end{aligned}$$

将其代入 (2.12)，可得：

$$\int_{Y^*}\left\{w_0(x)-\left(1-\frac{\partial}{\partial y}X(y,z)\right)\frac{d^2w_0}{dx^2}(x)\right\}\phi(x)\ dydz=\int_{Y^*}f(x)\phi(x)\ dydz$$

对于所有 $\phi\in C^\infty_{per}(\mathbb{R})$。因此，我们有：

$$w_0(x)|Y^*|-\frac{d^2w_0}{dx^2}(x)\int_{Y^*}\left(1-\frac{\partial}{\partial y}X(y,z)\right)\ dydz=|Y^*|f(x).$$

Let

$$q_0=\frac{1}{|Y^*|}\int_{Y^*}\left(1-\frac{\partial}{\partial y}X(y,z)\right)\ dydz, \tag{2.13}$$

那么，我们有

$$-q_0\frac{d^2w_0}{dx^2}(x)+w_0(x)=f(x),$$

其中 w_0 必须满足：

$$\begin{cases} -q_0\frac{d^2w_0}{dx^2}(x)+w_0(x)=f(x) \ \ x\in(0,2\pi); \\ w_0(\cdot) \ \ 2\pi-\text{periodic}. \end{cases} \tag{2.14}$$

这个定义在区间w_0 $(0,2\pi)$上的二阶微分方程，称为问题 (1.4) 的均匀化方程 。

3 收敛到均匀化极限

正如我们在引言中所观察到的，对于每个固定的 ε ，问题 (1.4) 都存在唯一解w^ε。现在，我们旨在研究当 ε 趋于 0 时这些解的行为。更准确地说，我们将证明这些解以适当的意义收敛到问题 (2.14) 的解。为简化记号，我们用 $\to$表示强收敛，用 $\rightharpoonup$ 表示弱收敛，并用 $\overset{*}{\rightharpoonup}$表示弱* 收敛，同时始终注明收敛所处的空间。

现在，我们将再次研究之前定义的区域 $\Omega^\varepsilon, \Omega$ ，以及问题 (1.5)，其解记为 u^ε。

当 ε 趋于 0 时，我们希望在定义于某个固定区域上的函数空间中进行研究。为此有几种可行的方法。遵循 [1], 的思路，我们构造一个延拓算子 P_ε，将问题 (1.5) 的变分形式转化为定义在固定区域上的积分方程。这一步对于建立后续章节中给出的一般性结果至关重要。该构造基于沿 θ_1 方向的反射论证，并根据振荡边界进行调整，改编自 [1] 。接

or th下来 lemma，我们考虑 der the foll以下开集：

$$\mathcal{O} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_1 \in I \text{ and } 0 < x_2 < G_1\},$$
$$\mathcal{O}^\varepsilon = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_1 \in I \text{ and } 0 < x_2 < G_\varepsilon(x_1)\},$$

其中，$I \subset \mathbb{R}$ 是一个开区间，G_0,G_1 是正常数，$G_\varepsilon : I \mapsto \mathbb{R}$ 是由$C^1(I)I$-周期函数组成的一族，且满足 $0 < G_0 \le G_\varepsilon(x_1) \le G_1$ 对所有$x \in I$ 以及 $\varepsilon > 0$均成立。注意到$\mathcal{O}^\varepsilon \subset \mathcal{O}$。

引理 3.1. 设 $\sigma_\varepsilon = \cos(\varepsilon x_2)$ 为 $\mathcal{O}^\varepsilon$ 中定义的权函数，$W_{1,per}^{p}(\mathcal{O}^\varepsilon)$ 为 $W^{1,p}(\mathcal{O}^\varepsilon)$ 中关于变量 x_1, 具有 I-周期性的函数集合，类似于 $L^2_{per}(\mathcal{O}^\varepsilon,cos(\varepsilon x_2))$。则存在一个连续的延拓算子

$$P_\varepsilon \in \mathbb{L}(L^p(\mathcal{O}^\varepsilon, \sigma_\varepsilon), L^p(\mathcal{O})) \cap \mathbb{L}(W^{1,p}(\mathcal{O}^\varepsilon, \sigma_\varepsilon), W^{1,p}(\mathcal{O})) \cap \mathbb{L}(W^{1,p}_{per}(\mathcal{O}^\varepsilon, \sigma_\varepsilon), W^{1,p}_{per}(\mathcal{O})),$$

一个与 ε 和 p 无关的常数 K，使得

$$\|P_\varepsilon \varphi\|_{L^p(\mathcal{O})} \le K \|\varphi\|_{L^p(\mathcal{O}^\varepsilon, \cos(\varepsilon x_2))}$$
$$\left\| \frac{\partial P_\varepsilon \varphi}{\partial x_1} \right\|_{L^p(\mathcal{O})} \le K \left\{ \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right\|_{L^p(\mathcal{O}^\varepsilon, \cos(\varepsilon x_2))} + \eta(\varepsilon) \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right\|_{L^p(\mathcal{O}^\varepsilon, \cos(\varepsilon x_2))} \right\}$$
$$\left\| \frac{\partial P_\varepsilon \varphi}{\partial x_2} \right\|_{L^p(\mathcal{O})} \le K \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right\|_{L^p(\mathcal{O}^\varepsilon, \cos(\varepsilon x_2))}$$

对所有 $\varphi \in W^{1,p}(\mathcal{O}^\varepsilon,\cos(\varepsilon x_2))$ ，其中 $1 \le p \le \infty$ 且

$$\eta(\varepsilon) = sup_{x \in I}\{|G'_\varepsilon(x)|\}$$

证明。 证明可由 [1] 中的引理 3.1 得出。 □

引理 3.1 表明，延拓算子 P_ε : 算子 $L^2_{per}(\Omega^\varepsilon$,余弦$(\varepsilon\theta_1)) \to$ 算子 $L^2_{per}(\Omega)$ 是连续的。此外，将其限制在索伯列夫空间 $H^1_{per}(\Omega^\varepsilon$,余弦$(\varepsilon\theta_1))$时，延拓算子仍然连续，其连续性由相应的范数衡量。这是陈述我们的第一个收敛结果所需的最后一个工具：

定理 3.2. 设 $u^\varepsilon \in H^1_{per}(\Omega^\varepsilon, 余弦(\varepsilon\theta_1))$ 是问题 *(1.5)* 的解，其中 $f^\varepsilon \in$ 算子 $L^2_{per}(\Omega^\varepsilon, 余弦(\varepsilon\theta_1))$，且 $\|f^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon, 余弦(\varepsilon\theta_1))} \leq C$，其中 C 与参数 ε 无关。那么，若存在一个序列 $\varepsilon \to 0$ 满足

$$\hat{f}^\varepsilon(\cdot) = \int_0^{g(\varphi_1/\varepsilon)} f^\varepsilon(\cdot, \theta_1) d\theta_1 \rightharpoonup \hat{f}(\cdot) \ \ in \ L^2_{per}(0, 2\pi).$$

那么，

$$P_\varepsilon u^\varepsilon \rightharpoonup u_0 \quad in \ \ H^1_{per}(\Omega),$$

其中，P_ε 是引理 *3.1* 中构造的延拓算子（其中 $\mathcal{O}^\varepsilon = \Omega^\varepsilon$ 和 $\mathcal{O} = \Omega$），且对于所有的(φ_1, θ_1) $=$，$u_0(\varphi_1, \theta_1) = u_0(\varphi_1)$ 是 $(\varphi_1, \theta_1) \in \Omega$ 的唯一解

$$\begin{cases} -q_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial \varphi_1^2} + u_0 = f_0 \ \ in \ (0, 2\pi); \\ u_0 \in H^1_{per}(0, 2\pi); \end{cases}$$

其中，$q_0 > 0$ 由 $|Y^*|^{-1} \int_{Y^*} \left(1 - \partial_{X\partial} y\right) dydz$ 给出，且 $f_0(\cdot) = L|Y^*| \hat{f}(\cdot)$。

我们将使用 Tartar 振荡测试函数技巧，证明薄区域中的解收敛到均匀化极限解；更多详情见 [6]。定理 3.2 的证明将分为几个步骤。现将这些步骤概述如下：

1. 构造 Tartar 测试函数 τ^ε2. χ^ε 的极限（稍后定义）。
3. 零延拓函数的极限 $\partial_{\varphi_1}^\varepsilon u$, $\partial_{u_{\partial\theta_1}}^\varepsilon$和 $\tilde{f}^\varepsilon$4. 扩展函数 $P_\varepsilon u^\varepsilon$ 和 $\partial_{P_\varepsilon}^\varepsilon u$的极限5. τ^ε的极限6. $\frac{\partial \tau^\varepsilon}{\partial \varphi_1}$ 的极限。
7. 定理 3.2 的证明。

3.1 Tartar 测试函数的构造 τ^ε

若函数 $u^\varepsilon \in H^1_{per}(\Omega^\varepsilon, \cos(\varepsilon\theta_1))$ 满足以下条件，则它是问题 (1.5) 的弱解

$$\int_{\Omega^\varepsilon} \left(\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \theta_1} \frac{\partial \psi}{\partial \theta_1} + \frac{1}{\cos^2(\varepsilon\theta_1)} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \varphi_1} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi_1} + u^\varepsilon \psi \right) \cos(\varepsilon\theta_1) \, d\varphi_1 d\theta_1 = \int_{\Omega^\varepsilon} f^\varepsilon \psi \cos(\varepsilon\theta_1) \, d\varphi_1 d\theta_1, \quad (3.1)$$

对所有 $\psi \in H^1_{per}(\Omega^\varepsilon, \cos(\varepsilon\theta_1))$。

在 (3.1) 中取 $\psi = u^\varepsilon$，可得关于 u^ε 的以下先验估计

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \left\| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \theta_1} \right\|^2 + \left\| \frac{1}{\cos(\varepsilon\theta_1)} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \varphi_1} \right\|^2 + \|u^\varepsilon\|^2 \leq \|f^\varepsilon\| \, \|u^\varepsilon\|, \quad (3.2)$$

其中 $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L^2(\Omega^\varepsilon, \cos(\varepsilon\theta_1))}$。

Tartar 方法通过构造一列合适的测试函数，使得问题的变分形式能够取极限，从而有效地消除

耗散项 $\frac{1}{\varepsilon}$。这一方法的第一步是在基本胞元 Y^* 上建立一个辅助问题（见 (2.1)）。

对于每个 $\varepsilon > 0$，我们考虑以下辅助问题：

$$\begin{cases} -\frac{1}{\cos^2(\varepsilon z)}\frac{\partial^2}{\partial y^2}X^\varepsilon - \frac{1}{\cos(\varepsilon z)}\frac{\partial}{\partial z}\left(\cos(\varepsilon z)\frac{\partial}{\partial z}\right)X^\varepsilon = 0 \ \text{ in } \ Y^*; \\ \widetilde{\nabla} X^\varepsilon \cdot N = \xi^\varepsilon \ \text{ on } \partial Y^*; \\ X^\varepsilon(\cdot, z) \ \ L-\text{periodic}; \\ \int_{Y^*} X^\varepsilon dy dz = 0, \end{cases} \tag{3.3}$$

其中 $\widetilde{\nabla} X^\varepsilon = \left(\frac{1}{2}\cos(\varepsilon z)\partial_y X^\varepsilon, \partial_z X^\varepsilon \right)$, $N = \left(-g'(y)\sqrt{1+g'(y)^2}, \sqrt{1+g'(y)^2} \right)$ 在 Y^* 的上边界 B_1 上，且 $N = (0,-1)$ 在 Y^* 的下边界 B_2 上。此外，ξ^ε 分段定义如下：

$$\xi^\varepsilon = \begin{cases} -\frac{g'(y)}{\cos(\varepsilon g(y))\sqrt{1+g'(y)^2}} \ \text{ on } B_1, \\ 0 \ \text{ on } B_2. \end{cases}$$

注意，问题 (3.3) 的弱形式为：

$$\int_{Y^*} \left(\frac{1}{\cos(\varepsilon z)}\frac{\partial X^\varepsilon}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y} + \cos(\varepsilon z)\frac{\partial X^\varepsilon}{\partial z}\frac{\partial \psi}{\partial z} \right) dydz = 0,$$

其中 $X^\varepsilon, \psi \in H^1_{per}(Y^*)$。

引理 3.3. 问题 *(3.3)* 有唯一解 X^ε，属于 $H^1_{per}(Y^*)$，并且该解连续依赖于 ε。

证明。为简化记号，我们记

$$L_\varepsilon X^\varepsilon = -\frac{1}{\cos^2(\varepsilon z)}\frac{\partial^2}{\partial y^2}X^\varepsilon - \frac{1}{\cos(\varepsilon z)}\frac{\partial}{\partial z}\left(\cos(\varepsilon z)\frac{\partial}{\partial z}\right)X^\varepsilon.$$

由 Lax–Milgram 定理，问题 (3.3) 有唯一解 X^ε 属于 $H^1_{per}(Y^*)$。此外，根据经典正则性理论，我们有 $X^\varepsilon \in H^2(Y^*)$。定义映射 F 如下：

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} \times H^2_{per}(Y^*) \setminus \{0\} &\to L^2(Y^*) \times H^{\frac{1}{2}}_{per}(\partial Y^*) \\ (\varepsilon, X) &\mapsto (L_\varepsilon X, \widetilde{\nabla} X \cdot N - \xi^\varepsilon) \end{aligned}$$

注意，如果 $F(0, X) = 0$，那么 $X = 0$。我们有 $\partial_X F(0, X)[v] = \left(L_0 v, \partial_v N \right)$。为了应用隐函数定理，我们需要证明 $\partial_X F(0, X)$ 是一个同构。根据 [5], 中的定理 4.21，对于每一对 $(f, g) \in L^2(Y^*) \times H^{\frac{1}{2}}_{per}(\partial Y^*)$，问题 (3.4) 有唯一解。

$$\begin{cases} L_0 v = f^\varepsilon \ \text{ in } \ Y^*; \\ \frac{\partial v}{\partial N} = g \ \text{ on } \partial Y^*; \\ v(\cdot, z) \ \ \text{L-periodic}. \end{cases} \tag{3.4}$$

我们用 v^0 表示问题 (3.4) 的唯一解。此外，根据上述定理，我们有

$$\|v^0\|_{H^1_{per}(Y^*)} \le C \|g\|_{H^{\frac{1}{2}}_{per}(\partial Y^*)}$$

因此，算子L_0 在所考虑的空间中是单射且连续的。由隐函数定理可知，在$H^1_{per}(Y^*)$中，存在 0 和零函数的邻域，使得问题存在一个由 ε 参数化的唯一解。也就是说，存在一对$(\varepsilon, X^\varepsilon)$ 满足问题 (3.3)，其中X^ε 关于 ε 可微，因此关于 ε 连续。

□

注意，解X^ε 在收敛过程中捕捉到了振荡的微观结构。由于g 是L-周期的，且$L < 2\pi$，区域 Ω^ε 沿 φ_1方向呈现周期性微观结构，周期为 εL （在 φ_1中）。特别地，它可以描述为区间$I_k := (k\varepsilon L, (k+1)\varepsilon L)$上各胞元的近似并集；在每个胞元中，上边界由函数$g(\varphi_1/\varepsilon)$的图像给出，它快速振荡。更准确地说，在胞元$I_k$上，若引入变量代换

$$y = \frac{\varphi_1 - k\varepsilon L}{\varepsilon}, \qquad z = \theta_1,$$

则 Ω_ε 在I_k 上的部分被映射到基本胞元 Y^*。

考虑$Y = (0, L) \times (0, g_1)$ 以及以下微分同胚族$T^\varepsilon_k : A^\varepsilon_k \mapsto Y$

$$T^\varepsilon_k(\varphi_1, \theta_1) = \left(\frac{\varphi_1 - \varepsilon k L}{\varepsilon}, \theta_1 \right), \tag{3.5}$$

其中$A^\varepsilon_k = \{(\varphi_1, \theta_1) \in \mathbb{R}^2; \varepsilon k L < \varphi_1 < \varepsilon L(k+1) \; and \; 0 < \theta_1 < g_1\}$，其中$k \in \mathbb{N}$ 满足$0 \le k < \frac{2\pi}{\varepsilon L}$。取式（3.5）中给出的微分同胚，以及引理 3.1 中的延拓算子P_ε，其中$G_\varepsilon = g(\varphi_1)$，且与 ε无关，据此定义 $\tau^\varepsilon_k : A^\varepsilon_k \to \mathbb{R}$ 如下

$$\tau^\varepsilon_k(\varphi_1, \theta_1) := \varphi_1 - \varepsilon \left(P_\varepsilon X^\varepsilon \circ T^\varepsilon_k(\varphi_1, \theta_1) \right) = \varphi_1 - \varepsilon \left(P_\varepsilon X^\varepsilon \left(\frac{\varphi_1 - \varepsilon k L}{\varepsilon}, \theta_1 \right) \right).$$

现在，我们通过$Y \to \mathbb{R}$ 定义 τ^ε： $\tau^\varepsilon(\varphi_1, \theta_1) = \tau^\varepsilon_k(\varphi_1, \theta_1)$，其中$(\varphi_1, \theta_1) \in A^\varepsilon_k$，对某个$k$成立。这些就是所谓的*Tartar* 测试函数。

命题 3.4。 函数 τ^ε 定义良好，属于 $H^1(\Omega, cos(\varepsilon\theta_1))$，并且关于 ε连续依赖。

证明。由于 $P_\varepsilon X^\varepsilon(\cdot, z)$ 是 $L-$周期的，因此 $P_\varepsilon X^\varepsilon(L, z) = P_\varepsilon X^\varepsilon(0, z)$，所以 $\tau^\varepsilon_k(\varepsilon L(k+1), \theta_1) = \tau^\varepsilon_{k+1}(\varepsilon L(k+1), \theta_1)$。关于 ε，只需注意到 X^ε 关于 ε连续依赖，这已在引理 3.3 中证明。

□

以下结果对于构建一个排除快速扩散项 $\frac{1}{\varepsilon^2}$ 的变分问题至关重要。这样我们就能对所得问题取极限，其中 $\varepsilon \to 0$,一见方程 (3.9)。

引理 3.5。 设函数 $\Psi \in H^1_{per}(\Omega^\varepsilon, cos(\varepsilon\theta_1))$ 满足 $\Psi = 0$ 位于 Ω^ε侧边界的一个邻域内，则存在 $\varepsilon_0 > 0$，使得对所有 $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$，均有：

$$\int_{\Omega^\varepsilon} \left(\frac{\partial \tau^\varepsilon}{\partial \varphi_1} \frac{1}{\cos^2(\varepsilon\theta_1)} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi_1} + \frac{\partial \tau^\varepsilon}{\partial \theta_1} \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_1} \right) \cos(\varepsilon\theta_1) d\varphi_1 d\theta_1 = 0. \tag{3.6}$$

证明。取 $\varepsilon_0 > 0$，使得对于 $[0, \frac{2\pi}{\varepsilon}$算子$L\,]$ 中的最大整数 k_0，有 $\Psi\Big|_{A^\varepsilon_{k_0}\cap\Omega^\varepsilon} \equiv 0$。我们将在各个子集 $A^\varepsilon_k \cap \Omega^\varepsilon$，$0 \le k < k_0$上分析上述积分。取微分同胚$T^\varepsilon_k : A^\varepsilon_k \cap \Omega^\varepsilon \to Y^*$，其中 $0 \le k \le k_0$，，考虑 $S^\varepsilon_k := (T^\varepsilon_k)^{-1} : Y^* \to A^\varepsilon_k \cap \Omega^\varepsilon$。

由于 $\Omega^\varepsilon \ni (\varphi_1, \theta_1) \to T^\varepsilon_k(\varphi_1, \theta_1) = \left(\varphi_1 - \varepsilon kL, \theta_1\right) \in Y^*$，那么 $\frac{\partial}{\partial\varphi_1} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial y}$和 $\frac{\partial}{\partial\theta_1} = \frac{\partial}{\partial z}$。由此可得

$$\frac{\partial\tau^\varepsilon}{\partial\varphi_1}(\varphi_1,\theta_1) = 1 - \frac{\partial X^\varepsilon}{\partial y}\left(\frac{\varphi_1 - \varepsilon kL}{\varepsilon}, \theta_1\right) = 1 - \frac{\partial X^\varepsilon}{\partial y}\left(\frac{\varphi_1}{\varepsilon}, \theta_1\right) := \frac{\partial\tau^\varepsilon}{\partial\varphi_1}(y,z)$$

$$\frac{\partial\tau^\varepsilon}{\partial\theta_1}(\varphi_1,\theta_1) = -\varepsilon\frac{\partial X^\varepsilon}{\partial z}\left(\frac{\varphi_1 - \varepsilon kL}{\varepsilon}, \theta_1\right) = -\varepsilon\frac{\partial X^\varepsilon}{\partial z}\left(\frac{\varphi_1}{\varepsilon}, \theta_1\right) := \frac{\partial\tau^\varepsilon}{\partial\theta_1}(y,z)$$

将这些方程代入（3.6），得到等价表达式：

$$\int_{\Omega^\varepsilon}\left(\frac{\partial X^\varepsilon}{\partial y}\frac{1}{\cos^2(\varepsilon\theta_1)}\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi_1} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial X}{\partial z}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta_1}\right)\cos(\varepsilon\theta_1)d\theta_1\, d\varphi_1 = \int_{\Omega^\varepsilon}\frac{1}{\cos^2(\varepsilon\theta_1)}\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi_1}\cos(\varepsilon\theta_1)\, d\varphi_1 d\theta_1.$$

经过直接计算，右端变为：

$$\int_{\Omega^\varepsilon}\frac{1}{\cos^2(\varepsilon\theta_1)}\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi_1}\cos(\varepsilon\theta_1)\, d\varphi_1 d\theta_1 = \int_0^{\varepsilon k_0 L}\frac{1}{\varepsilon\cos\left(\varepsilon g\left(\frac{\varphi_1}{\varepsilon}\right)\right)}\Psi\left(\varphi_1, g\left(\frac{\varphi_1}{\varepsilon}\right)\right)g'\left(\frac{\varphi_1}{\varepsilon}\right)\, d\varphi_1.$$

对于左端，我们首先注意到

$$\nabla X^\varepsilon \circ T^\varepsilon_k \cdot \left(\frac{1}{\cos^2(\varepsilon\theta_1)}\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi_1}, \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta_1}\right) = \left(\frac{\partial X^\varepsilon}{\partial y}\frac{1}{\cos^2(\varepsilon\theta_1)}\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi_1} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial X}{\partial z}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta_1}\right).$$

由于 $\Omega^\varepsilon = \cup^{k_0}_{k=1}(A^\varepsilon_k \cap \Omega^\varepsilon)$，只需证明

$$\int_{\Omega^\varepsilon\cap A^\varepsilon_k}\nabla X^\varepsilon \circ T^\varepsilon_k \cdot \left(\frac{1}{\cos^2(\varepsilon\theta_1)}\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi_1}, \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta_1}\right)\cos(\varepsilon\theta_1)\, d\varphi_1 d\theta_1 = \int_{\varepsilon kL}^{\varepsilon(k+1)L}\frac{\Psi\left(\varphi_1, g\left(\frac{\varphi_1}{\varepsilon}\right)\right)}{\varepsilon\cos\left(\varepsilon g\left(\frac{\varphi_1}{\varepsilon}\right)\right)}g'\left(\frac{\varphi_1}{\varepsilon}\right)\, d\varphi_1.$$

事实上，应用变量代换 $S^\varepsilon_k : Y^* \to \Omega \cap A^\varepsilon_k$, $\varphi_1 = \varepsilon(y + kL)$, $\theta_1 = z$; $\frac{\partial}{\partial\theta_1} = \frac{\partial}{\partial z}$,$\varepsilon\frac{\partial}{\partial\varphi_1} = \frac{\partial}{\partial y}$和 $\psi = \Psi \circ S^\varepsilon_k$，我们有

$$\int_{\Omega^\varepsilon\cap A^\varepsilon_k}\nabla X^\varepsilon \circ T^\varepsilon_k \cdot \left(\frac{1}{\cos^2(\varepsilon\theta_1)}\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi_1}, \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta_1}\right)\cos(\varepsilon\theta_1)\, d\varphi_1 d\theta_1 =$$

$$\int_{Y^*}\left(\frac{\partial X^\varepsilon}{\partial y}, \frac{\partial X^\varepsilon}{\partial z}\right)\left(\frac{1}{\cos(\varepsilon z)}\frac{\partial\psi}{\partial y}, \cos(\varepsilon z)\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\, dydz = \int_{\partial Y^*}\left(\psi\frac{1}{\cos(\varepsilon z)}\frac{\partial X^\varepsilon}{\partial y}, \psi\cos(\varepsilon z)\frac{\partial X^\varepsilon}{\partial z}\right)\cdot(N_1, N_2)\, dS$$

$$= \int_{B_1}\left(\psi\frac{1}{\cos(\varepsilon z)}\frac{\partial X^\varepsilon}{\partial y}, \psi\cos(\varepsilon z)\frac{\partial X^\varepsilon}{\partial z}\right)(N_1, N_2)\, dS = \int_0^L\left(-\psi\frac{g'(y)}{\cos(\varepsilon z)}\frac{\partial X^\varepsilon}{\partial y} + \cos(\varepsilon z)\psi\frac{\partial X^\varepsilon}{\partial z}\right)\, dy.$$

再次进行变量替换 $\varphi_1 = \varepsilon\,(y + kL)$；$\varepsilon\frac{\partial}{\partial\varphi_1} = \frac{\partial}{\partial y}$，我们得到

$$\begin{aligned}
&\int_0^L\left(-\psi\frac{g'(y)}{\cos(\varepsilon z)}\frac{\partial X^\varepsilon}{\partial y} + \cos(\varepsilon z)\psi\frac{\partial X^\varepsilon}{\partial z}\right)\, dy \\
&\quad= \int_{\varepsilon kL}^{\varepsilon(k+1)L}\left(-\Psi\left(\varphi_1, g\left(\frac{\varphi_1}{\varepsilon}\right)\right)\frac{g'\left(\frac{\varphi_1}{\varepsilon}\right)}{\cos\left(\varepsilon g\left(\frac{\varphi_1}{\varepsilon}\right)\right)}\frac{\partial X^\varepsilon}{\partial\varphi_1} + \cos(\varepsilon g\left(\frac{\varphi_1}{\varepsilon}\right))\Psi\frac{\partial X^\varepsilon}{\partial\theta_1}\right)\frac{1}{\varepsilon}\, d\varphi_1 \\
&\quad= \int_{\varepsilon kL}^{\varepsilon(k+1)L}\frac{1}{\varepsilon\cos\left(\varepsilon g\left(\frac{\varphi_1}{\varepsilon}\right)\right)}\Psi\left(\varphi_1, g\left(\frac{\varphi_1}{\varepsilon}\right)\right)g'\left(\frac{\varphi_1}{\varepsilon}\right)\, d\varphi_1.
\end{aligned}$$

□

随后，我们将由辅助问题 (3.3) 的弱解构造的 Tartar 测试函数应用于问题 (1.5)。结合问题 (1.5) 的弱解与上述引理中的方程 (3.6)，我们推导出一个与 $1/\varepsilon^2$ 无关的问题的变分形式。

令 u^ε 为问题 (1.5) 的弱解。在 (3.6) 中取 $\Psi = \phi u^\varepsilon$ 作为测试函数，其中函数 $\phi \in \mathcal{C}^\infty(0, 2\pi)$ 在 0 的某个邻域内为零， ϕ 且作周期延拓，我们得到：

$$\int_{\Omega^\varepsilon} \left(\frac{1}{\cos^2(\varepsilon\theta_1)} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \varphi_1} \frac{\partial \tau^\varepsilon}{\partial \varphi_1} \phi + \frac{1}{\cos^2(\varepsilon\theta_1)} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi_1} \frac{\partial \tau^\varepsilon}{\partial \varphi_1} u^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \theta_1} \frac{\partial \tau^\varepsilon}{\partial \theta_1} \phi \right) \cos(\varepsilon\theta_1)\ d\varphi_1 d\theta_1 = 0. \quad (3.7)$$

另一方面，在问题 (1.5) 的弱形式中取 $\psi = \phi\tau^\varepsilon$作为测试函数，其中 $\phi \in \mathcal{C}^\infty(0, 2\pi)$在 0 的某个邻域内为零， ϕ且作周期延拓，我们得到：

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^\varepsilon} \left(\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \theta_1} \frac{\partial \tau^\varepsilon}{\partial \theta_1} \phi + \frac{1}{\cos^2(\varepsilon\theta_1)} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \varphi_1} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi_1} \tau^\varepsilon + \frac{1}{\cos^2(\varepsilon\theta_1)} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \varphi_1} \frac{\partial \tau^\varepsilon}{\partial \varphi_1} \phi + u^\varepsilon \phi \tau^\varepsilon \right) \cos(\varepsilon\theta_1)\ d\varphi_1 d\theta_1 \\ = \int_{\Omega^\varepsilon} f^\varepsilon \phi \tau^\varepsilon \cos(\varepsilon\theta_1)\ d\varphi_1 d\theta_1. \end{aligned} \quad (3.8)$$

将 (3.8) 与 (3.7) 相减，我们得到：

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^\varepsilon} \left(\frac{1}{\cos^2(\varepsilon\theta_1)} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \varphi_1} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi_1} \tau^\varepsilon - \frac{1}{\cos^2(\varepsilon\theta_1)} \frac{\partial \tau^\varepsilon}{\partial \varphi_1} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi_1} u^\varepsilon + u^\varepsilon \tau^\varepsilon \phi \right) \cos(\varepsilon\theta_1)\ \ d\varphi_1 d\theta_1 \\ = \int_{\Omega^\varepsilon} f^\varepsilon \tau^\varepsilon \phi \cos(\varepsilon\theta_1)\ \ d\varphi_1 d\theta_1. \end{aligned} \quad (3.9)$$

现在我们需要在 (3.9) 以及问题 (1.5) 的弱形式（见 (3.1)）中取极限。

为了在固定区域上进行研究，我们对这些函数作延拓，以研究当 ε 趋于零时问题的收敛性。两个表达式都需要写成在同一个固定区域上的积分。为此，我们将使用引理 3.1 中构造的延拓 P_ε 、标准零延拓（记为 ~）以及 Ω^ε的特征函数 χ^ε ，如下所示：

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(\frac{1}{\cos^2(\varepsilon\theta_1)} \frac{\widetilde{\partial u^\varepsilon}}{\partial \varphi_1} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi_1} \tau^\varepsilon - \frac{1}{\cos^2(\varepsilon\theta_1)} \frac{\widetilde{\partial \tau^\varepsilon}}{\partial \varphi_1} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi_1} P_\varepsilon(u^\varepsilon) + \chi^\varepsilon P_\varepsilon(u^\varepsilon) \tau^\varepsilon \phi \right) \cos(\varepsilon\theta_1)\ d\varphi_1 d\theta_1 \\ = \int_{\Omega} \chi^\varepsilon \widetilde{f^\varepsilon} \tau^\varepsilon \phi \cos(\varepsilon\theta_1)\ d\varphi_1 d\theta_1, \end{aligned} \quad (3.10)$$

对于所有周期函数 $\phi \in \mathcal{C}^\infty$（$0, 2\pi$），满足 ϕ 在 0 的某个邻域内消失且 2π。考虑 (3.1) 上的 $\psi \in H^1_{per}$（$0, 2\pi$），含有关于 θ_1 的偏导数的项不会出现，因此得到：

$$\int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \cos(\varepsilon\theta_1)\ \widetilde{\partial} + \chi^\varepsilon P_\varepsilon(u^\varepsilon) \psi \right) \text{余弦}(\varepsilon\theta_1)\, d\varphi_1 d\theta_1 = \int_{\Omega} \chi^\varepsilon \widetilde{f^\varepsilon} \psi \text{余弦}(\varepsilon\theta_1)\, d\varphi_1 d\theta_1, \quad (3.11)$$

$$\frac{}{u^\varepsilon} \frac{}{\partial \varphi_1} \frac{}{\partial \psi} \frac{}{\partial \varphi_1}$$

对于所有 $\psi \in H^1_{per}(0, 2\pi)$。

我们旨在对上述表达式 (3.10) 和 (3.11) 取极限。为此，我们分析构成被积函数的各个函数的极限。下一个命题是分析周期函数收敛性的重要工具。

命题 3.6. 设 $1 \leq p \leq \infty$，Y 为 $\mathbb{R}^n$ 中的一个 n 维立方体，且 f 是 $L^p(Y)$ 中的 Y-周期函数。设 $f_\varepsilon(x) = f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ 在 $\mathbb{R}^n$. 中几乎处处成立。在这些条件下，若当 $\varepsilon \to 0$ 时有 $1 \leq p < \infty$，则

$$f_\varepsilon \rightharpoonup M_Y(f) = \frac{1}{|Y|}\int_Y f(y)dy \ \ in\ L^p(\Gamma),$$

对 $\mathbb{R}^n$ 中的任意有界开集 Γ 成立。若 $p = \infty$，则

$$f_\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} M_Y(f) = \frac{1}{|Y|}\int_Y f(y)dy \ \ in\ L^\infty(\mathbb{R}^n).$$

证明。 参见 [5], 定理 2.6。

□

3.2 χ^ε 的极限。

设 χ 为 Y^* 的特征函数，我们将 χ 关于变量 $y \in \mathbb{R}$ 周期地延拓，并将该延拓仍记为 χ。若以 χ^ε 表示 Ω^ε 的特征函数，则有:

$$\chi^\varepsilon(\varphi_1, \theta_1) = \chi\left(\frac{\varphi_1}{\varepsilon}, \theta_1\right), \quad \text{for } (\varphi_1, \theta_1) \in \Omega^\varepsilon. \tag{3.12}$$

由于 χ^ε 是一个周期函数，我们使用命题 3.6 来保证周期函数的收敛。

引理 3.7. 设 χ^ε 为 Ω^ε的特征函数。那么，当 $\varepsilon \to 0$

$$\chi^\varepsilon(\varphi_1, \theta_1)\cos(\varepsilon\theta_1) \overset{*}{\rightharpoonup} \gamma(\theta_1) \quad on\ \ L^\infty(\Omega),$$

其中

$$\gamma(\theta_1) = \frac{1}{L}\int_0^L \chi(s, \theta_1)\, ds, \qquad for\ a.e.\ \theta_1 \in (0, g_1).$$

此外，γ 不依赖于 φ_1，并且满足

$$L\int_0^{g_1} \gamma(\theta_1)\, d\theta_1 = |Y^*|.$$

证明. 根据构造，χ^ε 关于变量 φ_1是周期的，因此，对于每个固定的 θ_1，函数$\chi^\varepsilon(\cdot, \theta_1)\cos(\varepsilon\theta_1)$ 是 I- 周期的，我们可以应用命题 3.6，其中 $I = (0, 2\pi)$。由 (3.12) 和命题 3.6 可得，当 $\varepsilon \to 0$

$$\chi^\varepsilon(\cdot, \theta_1)\cos(\varepsilon\theta_1) \overset{*}{\rightharpoonup} \gamma(\theta_1) := \frac{1}{L}\int_0^L \chi(s, \theta_1)ds \ \text{ on } L^\infty(I), \forall\ \theta_1 \in (0, g_1). \tag{3.13}$$

注意，极限 γ 不依赖于变量 φ_1，并且我们可以通过以下公式求得开集Y^* 的面积

$$L\int_0^{g_1} \gamma(\theta_1)\ d\theta_1 = |Y^*|. \tag{3.14}$$

若 $\phi \in$ 算子 $L^1(\Omega)$，则根据 Fubini-Tonelli定理， $\phi(\cdot,\theta_1) \in$ 算子 $L^1(0,2\pi)$ 对几乎处处的 $\theta_1 \in(0,g_1)$成立。因此，由式（3.13）可得

$$H^\varepsilon(\theta_1) := \int_I \phi(\varphi_1,\theta_1)\left\{\chi^\varepsilon(\varphi_1,\theta_1)\cos(\varepsilon\theta_1) - \gamma(\theta_1)\right\}\, d\varphi_1 \to 0 \ \text{ as } \varepsilon \to 0,$$

对几乎所有的 $\theta_1 \in (0,g_1)$ 以及所有的 $\phi \in$ 算子 $L^1(\Omega)$。由于 $|\chi^\varepsilon \cos(\varepsilon\theta_1) - \gamma| \le 1$，因此可得

$$\int_\Omega \phi(\varphi_1,\theta_1)\left\{\chi^\varepsilon(\varphi_1,\theta_1)\cos(\varepsilon\theta_1) - \gamma(\theta_1)\right\}\, d\varphi_1\, d\theta_1 = \int_0^{g_1} H^\varepsilon(\theta_1)\, d\theta_1$$

and

$$|H^\varepsilon(\theta_1)| \le \int_I \phi(\varphi_1,\theta_1)\, d\varphi_1 \ \text{ a.e. in } (0,g_1),$$

因此，由 Lebesgue 控制收敛定理可知，当 $\varepsilon \to 0$时

$$\chi^\varepsilon \cos(\varepsilon\theta_1) \overset{*}{\rightharpoonup} \gamma, \ \text{ on } L^\infty(\Omega). \tag{3.15}$$

□

3.3 零延拓函数的极限 $\frac{\partial^\varepsilon}{\partial\varphi_1}u$, $\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial\theta_1}$和 $\widetilde{f}^\varepsilon$

现在我们将计算函数 $\frac{\partial^\varepsilon}{\partial\varphi_1}u$, $\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial\theta_1}$和 $\widetilde{f}^\varepsilon$的极限，当 $\varepsilon \to 0$时。

引理3.8. 设 $\|f^\varepsilon\|_{L^2(\Omega,\cos(\varepsilon\theta_1))}$一致有界，则

$$\frac{\widetilde{\partial u^\varepsilon}}{\partial\varphi_1} \rightharpoonup \xi^* \ \text{ in } \ L^2(\Omega,\cos(\varepsilon\theta_1)) \text{ and } \ \frac{\widetilde{\partial u^\varepsilon}}{\partial\theta_1} \to 0 \ \text{ in } L^2(\Omega,\cos(\varepsilon\theta_1)) \ \text{ as } \ \varepsilon \to 0.$$

证明。 由于 $\|f^\varepsilon\|_{L^2(\Omega,\cos(\varepsilon\theta_1))}$一致有界，由式（3.2）可得，存在一个与 ε 无关的M，使得

$$\|\widetilde{u^\varepsilon}\|_{L^2(\Omega,\cos(\varepsilon\theta_1))},\ \frac{1}{\varepsilon}\left\|\frac{\widetilde{\partial u^\varepsilon}}{\partial\theta_1}\right\|_{L^2(\Omega,\cos(\varepsilon\theta_1))} \ \text{ and } \ \left\|\frac{1}{\cos(\varepsilon\theta_1)}\frac{\widetilde{\partial u^\varepsilon}}{\partial\varphi_1}\right\|_{L^2(\Omega,\cos(\varepsilon\theta_1))} \le M, \tag{3.16}$$

对所有 $\varepsilon > 0$ 均成立。因此， $\|\widetilde{u}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega),\cos(\varepsilon\theta_1)} \le M$。接下来，我们可以提取一个子序列，仍记为 $\widetilde{u}^\varepsilon$，使得 $\widetilde{u}^\varepsilon \rightharpoonup u^*$ 在 $L^2(\Omega,\cos(\varepsilon\theta_1))$ 中。类似地，我们可以提取一个子序列，仍记为 $\widetilde{\frac{\partial^\varepsilon}{\partial\varphi_1}}u$ and $\widetilde{\frac{\partial^\varepsilon}{\partial\theta_1}}u$，使得 $\widetilde{\frac{\partial^\varepsilon}{\partial\varphi_1}}u \rightharpoonup \xi^* u$ 在 $L^2(\Omega,\cos(\varepsilon\theta_1))$ 中，且 $\widetilde{\frac{\partial^\varepsilon}{\partial\theta_1}}u \to 0\, u$ 在 $L^2(\Omega,\cos(\varepsilon\theta_1))$ 中，如 $\varepsilon \to 0$。 □

对于函数f^ε，我们定义

$$\hat{f}^\varepsilon(\varphi_1) := \int_0^{g_1} \widetilde{f}^\varepsilon(\varphi_1,\theta_1)d\theta_1 = \int_0^{g(\varphi_1/\varepsilon)} f^\varepsilon(\varphi_1,\theta_1)\, d\theta_1.$$

注意到，根据 Jensen不等式，$\hat{f}^\varepsilon \in L^2(0,2\pi)$ 且 $\|\hat{f}^\varepsilon\|_{L^2(0,2\pi)} \le \|f^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon,\cos(\varepsilon\theta_1))} \le C$。因此，通过选取子序列，我们可以得到函数 $\hat{f} \in L^2(0,2\pi)$，使得 $\hat{f}^\varepsilon \rightharpoonup \hat{f}$ 在 $L^2(0,2\pi)$中。

注 3.9. 注意，在 $f^\varepsilon(\varphi_1,\theta_1) = f(\varphi_1)$ 的情况下，

$$\hat{f}(\varphi_1) = \left(\int_0^{g_1} \gamma(\theta_1)\, d\theta_1\right) f(\varphi_1) = \frac{|Y^*|}{L} f^\varepsilon(\varphi_1),$$

其中我们用到了 (*3.14*) 。

3.4 扩展函数$P_\varepsilon u^\varepsilon$ 和 $\frac{\partial P_\varepsilon u^\varepsilon}{\partial\theta_1}$ 的极限

引理 3.10。 设 $f^\varepsilon \in L^2(\Omega,$ 余弦$(\varepsilon\theta_1)$ 在 ε 中一致有界，且 $u^\varepsilon \in H^1_{per}(\Omega^\varepsilon,$ 余弦$(\varepsilon\theta_1))$。那么，

$$\begin{aligned}
&P_\varepsilon u^\varepsilon \rightharpoonup u_0 \quad in \quad H^1_{per}(\Omega,\cos(\varepsilon\theta_1)) \ and\ strongly\ in \quad L^p_{per}(\Omega,\cos(\varepsilon\theta_1))\ \forall p\geq 1,\\
&\frac{\partial P_\varepsilon u^\varepsilon}{\partial\theta_1}\to 0\ in \quad L^2_{per}(\Omega,\cos(\varepsilon\theta_1)).
\end{aligned} \tag{3.17}$$

证明。利用先验估计 (3.2)、$u^\varepsilon \in H^1_{per}(\Omega^\varepsilon,\cos(\varepsilon\theta_1))$、引理 (3.1) 的结果，以及 $\|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial\varphi_1}\|_{L^2(\Omega,\cos(\varepsilon\theta_1))} \leq \|\frac{1}{\cos(\varepsilon\theta)}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\varphi_1}\|_{L^2u(\Omega,\cos(\varepsilon\theta_1))}$，可得

$$\|P_\varepsilon u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega,\cos(\varepsilon\theta_1))},\ \left\|\frac{\partial P_\varepsilon u^\varepsilon}{\partial\varphi_1}\right\|_{L^2(\Omega,\cos(\varepsilon\theta_1))} \text{ and } \frac{1}{\varepsilon}\left\|\frac{\partial P_\varepsilon u^\varepsilon}{\partial\theta_1}\right\|_{L^2(\Omega,\cos(\varepsilon\theta_1))} \leq \widetilde{M} \text{ for all } \varepsilon>0,$$

其中 $M>0$ 是一个与 ε 无关的正常数，由 (3.16) 和引理 3.1 给出。于是，我们可以提取一个子序列（仍记为 $P_\varepsilon u^\varepsilon$）以及一个函数 $u_0\in H^1(\Omega,\cos(\varepsilon\theta_1))$，从而得到所述结果。

□

(3.17) 中极限的一个推论是，在 Ω 上有 $u_0(\varphi_1,\theta_1)=u_0(\varphi_1)$。更确切地说，

$$\frac{\partial u_0}{\partial\theta_1}(\varphi_1,\theta_1)=0 \ \text{ a. e. } \Omega.$$

事实上，对于所有满足在 0 和 2π 的一个邻域内为零的 φ_1–周期函数 $\phi\in\mathcal{C}^\infty(0,2\pi)$ ϕ，由 (3.17) 可得

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \frac{\partial u_0}{\partial\theta_1}\phi\, d\varphi_1\, d\theta_1 &= -\int_\Omega u_0\frac{\partial\phi}{\partial\theta_1}\, d\varphi_1\, d\theta_1 = -\int_\Omega \lim_{\varepsilon\to 0} P_\varepsilon u^\varepsilon\frac{\partial\phi}{\partial\theta_1}\, d\varphi_1\, d\theta_1\\
&= -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega P_\varepsilon u^\varepsilon\frac{\partial\phi}{\partial\theta_1}\, d\varphi_1\, d\theta_1 = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega \frac{\partial P_\varepsilon u^\varepsilon}{\partial\theta_1}\phi\, d\varphi_1\, d\theta_1 = 0.
\end{aligned}$$

特别地，函数 u_0 属于 $H^1_{per}(0,2\pi)$，因为 $P_\varepsilon u^\varepsilon\in H^1_{per}(\Omega)$ 且 $\frac{\partial u_0}{\partial\theta_1}(\varphi_1,\theta_1)=0$ 几乎处处。

注 *3.11.* 我们在 *(3.15)* 中看到，$\chi^\varepsilon cos(\varepsilon\theta_1)\overset{*}{\rightharpoonup}\gamma$ 属于 $L^\infty(\Omega)$。特别地，我们有 $\chi^\varepsilon\rightharpoonup\gamma$属于 $L^2(\Omega)$。此外，值得注意的是，$\chi^\varepsilon,\gamma\in L^2(\Omega)$（因为 Ω 有界）。由于 $\widetilde{u}^\varepsilon=\chi^\varepsilon P_\varepsilon u^\varepsilon$ 在 Ω 中几乎处处成立，并且我们有 $\widetilde{u}^\varepsilon\rightharpoonup u^*$ 属于 $L^2(\Omega)$，且 $P_\varepsilon u^\varepsilon\to u_0$ 属于 $L^2_{per}(\Omega)$，因此 $\chi^\varepsilon P_\varepsilon u^\varepsilon\rightharpoonup\gamma u_0$ 属于 $L^2(\Omega)$，从而，

$$u^*(\varphi_1,\theta_1)=\gamma(\theta_1)u_0(\varphi_1) \ \ a.\ e.\ \ \Omega.$$

3.5 τ^ε中的极限。

引理 3.12。 当 $\varepsilon\to 0$时，我们得到

$$\tau^\varepsilon\rightharpoonup\varphi_1\ in\ H^1(\Omega)\ and\ strongly\ in\ \ L^p(\Omega)\ for\ all\ p\geq 1\ \ and\ \ \frac{\partial\tau^\varepsilon}{\partial\theta_1}\to 0\ in\ \ L^2(\Omega). \tag{3.18}$$

证明。 根据 τ^ε 的定义，我们有：

$$\int_{A_k^\varepsilon} |\tau^\varepsilon - \varphi_1|^2 \cos(\varepsilon\theta_1)\, d\varphi_1 d\theta_1 = \int_{A_k^\varepsilon} \left| \varepsilon \left(P_\varepsilon X^\varepsilon \left(\frac{\varphi_1 - \varepsilon k L}{\varepsilon}, \theta_1 \right) \right) \right|^2 \cos(\varepsilon\theta_1)\, d\varphi_1 d\theta_1$$
$$= \int_Y |\varepsilon P_\varepsilon X^\varepsilon(y,z)|^2\, \varepsilon \cos(\varepsilon z)\, dy dz \le \int_{Y^*} C\varepsilon^3\, |X^\varepsilon(y,z)|^2 \cos(\varepsilon z)\, dy dz,$$

其中最后一个不等式来自引理 3.1。然后，

$$\int_\Omega |\tau^\varepsilon - \varphi_1|^2 \cos(\varepsilon\theta_1)\, d\varphi_1 d\theta_1 = \sum_{k=1}^{\frac{1}{\varepsilon L}} \int_{Y^*} C\varepsilon^3\, |X^\varepsilon(y,z)|^2 \cos(\varepsilon z)\, dy dz + o(\varepsilon)$$

$$= \frac{\varepsilon^2}{L} \int_{Y^*} C\, |X^\varepsilon(y,z)|^2 \cos(\varepsilon z)\, dy dz \to 0,$$

当 $\varepsilon \to 0$ 时，由于，我们由引理 3.3 可知 $\|X^\varepsilon(y,z)\|_{H^1(Y^*)} <$ 常数 K $\forall \varepsilon \in [0,\varepsilon]$。类似地 y,

$$\int_{A_k^\varepsilon} \left| \frac{\partial}{\partial\varphi_1} (\tau^\varepsilon - \varphi_1) \right|^2 \cos(\varepsilon\theta_1)\, d\varphi_1 d\theta_1 = \int_{A_k^\varepsilon} \left| \varepsilon \frac{\partial P_\varepsilon X^\varepsilon}{\partial \varphi_1} \left(\frac{\varphi_1 - \varepsilon k L}{\varepsilon}, \theta_1 \right) \right|^2 \cos(\varepsilon\theta_1)\, d\varphi_1 d\theta_1$$
$$= \int_Y \varepsilon \left| \frac{\partial P_\varepsilon X^\varepsilon}{\partial y}(y,z) \right|^2 \cos(\varepsilon z)\, dy dz \le \varepsilon \int_{Y^*} C \left| \frac{\partial X^\varepsilon}{\partial y}(y,z) \right|^2 \cos(\varepsilon z)\, dy dz,$$

and

$$\int_{A_k^\varepsilon} \left| \frac{\partial}{\partial\theta_1} (\tau^\varepsilon - \varphi_1) \right|^2 \cos(\varepsilon\theta_1)\, d\varphi_1 d\theta_1 = \int_{A_k^\varepsilon} \left| \varepsilon \frac{\partial P_\varepsilon X^\varepsilon}{\partial \theta_1} \left(\frac{\varphi_1 - \varepsilon k L}{\varepsilon}, \theta_1 \right) \right|^2 \cos(\varepsilon\theta_1)\, d\varphi_1 d\theta_1$$
$$\le \varepsilon^3 \int_{Y^*} C \left| \frac{\partial X^\varepsilon}{\partial z}(y,z) \right|^2 \cos(\varepsilon z)\, dy dz.$$

我们还有，对所有 $\varepsilon > 0$，在 $\tilde{C} = \frac{1}{\varepsilon}$ 算子 $L\varepsilon C = C$ 算子 L 的条件下，

$$\int_\Omega \left| \frac{\partial}{\partial\varphi_1} (\tau^\varepsilon - \varphi_1) \right|^2 \cos(\varepsilon\theta_1)\, d\varphi_1 d\theta_1 = \sum_{k=1}^{\frac{1}{\varepsilon L}} \int_{Y^*} C\varepsilon \left| \frac{\partial X^\varepsilon}{\partial y}(y,z) \right|^2 \cos(\varepsilon z)\, dy dz + o(\varepsilon)$$
$$= \widetilde{C} \int_{Y^*} \left| \frac{\partial X^\varepsilon}{\partial y}(y,z) \right|^2 \cos(\varepsilon z)\, dy dz + o(\varepsilon),$$

and

$$\int_\Omega \left| \frac{\partial}{\partial\theta_1} (\tau^\varepsilon - \varphi_1) \right|^2 \cos(\varepsilon\theta_1)\, d\varphi_1 d\theta_1 \le \sum_{k=1}^{\frac{1}{\varepsilon L}} \int_{Y^*} C\varepsilon^3 \left| \frac{\partial X^\varepsilon}{\partial z}(y,z) \right|^2 \cos(\varepsilon z)\, dy dz$$
$$= \varepsilon^2 \int_{Y^*} \widetilde{C} \left| \frac{\partial X^\varepsilon}{\partial z}(y,z) \right|^2 \cos(\varepsilon z)\, dy dz \to 0,$$

当 $\varepsilon \to 0$ 时。此外，当 $A \le \cos(\varepsilon\theta_1)$ 时，我们有：

$$\int_\Omega \left| \frac{\partial}{\partial\theta_1} (\tau^\varepsilon - \varphi_1) \right|^2 A\, d\varphi_1 d\theta_1 \le \int_\Omega \left| \frac{\partial}{\partial\theta_1} (\tau^\varepsilon - \varphi_1) \right|^2 \cos(\varepsilon\theta_1)\, d\varphi_1 d\theta_1 \to 0,$$

当 $\varepsilon \to 0$ 时。也就是说， $\frac{\partial \tau^\varepsilon}{\partial \theta_1} \to 0$ 属于 算子 $L^2(\Omega)$。以类似的方式论证，可得到其他收敛结果。

□

3.6 的极限 $\widetilde{\frac{\partial \tau^\varepsilon}{\partial \varphi_1}}$

引理 3.13. 设 χ 为集合 Y^* 的特征函数，并令 $\partial X \partial^0 y$ 表示 $\partial X \partial^0 y$ 的零延拓。那么，对于几乎处处的 $\theta_1 \in (0, g_1)$ ，当 $\varepsilon \to 0$ 时，我们得到

$$\widetilde{\frac{\partial \tau^\varepsilon}{\partial \varphi_1}}(\cdot, \theta_1) \overset{*}{\rightharpoonup} q(\theta_1) \quad in\ L^\infty(0, 2\pi),$$

其中 $q(\theta_1) = {}^1$算子 L $\int$算子 $L_0 \left(1 - \widetilde{\partial} X \partial^0 y\,(s, \theta_1)\right) \chi(s, \theta_1)$ ds。此外，

$$\widetilde{\frac{\partial \tau^\varepsilon}{\partial \varphi_1}} \cos(\varepsilon \theta_1) \overset{*}{\rightharpoonup} q \quad in\ L^\infty(\Omega), when\ \varepsilon \to 0.$$

证明. 根据 $\frac{\partial \tau^\varepsilon}{\partial \varphi_1}$ 的定义，可得

$$\widetilde{\frac{\partial \tau^\varepsilon}{\partial \varphi_1}}(\varphi_1, \theta_1) = \chi\left(\frac{\varphi_1}{\varepsilon}, \theta_1\right) - \widetilde{\frac{\partial X^0}{\partial y}}\left(\frac{\varphi_1}{\varepsilon}, \theta_1\right).$$

因此，由于 $\partial X \partial^0 y \in$ 算子 $L^\infty(Y^*)$，由命题 3.6 可得

$$\widetilde{\frac{\partial \tau^\varepsilon}{\partial \varphi_1}}(\cdot, \theta_1) \overset{*}{\rightharpoonup} \frac{1}{L} \int_0^L \left(1 - \widetilde{\frac{\partial X^0}{\partial y}}(s, \theta_1)\right) \chi(s, \theta_1) ds := q(\theta_1) \ \text{ in } L^\infty(0, 2\pi).$$

因此，按照 (3.15) 的方法，我们证明 $\frac{\partial \tau^\varepsilon}{\partial \varphi_1} \cos(\varepsilon \theta_1) \overset{*}{\rightharpoonup} q$ 属于算子 $L^\infty(\Omega)$。 □

3.7 主定理的证明

证明。 首先，利用 (3.15)、(3.17)、(3.18)，当 $\varepsilon \to 0$

$$\int_{\Omega^\varepsilon} u^\varepsilon \phi \tau^\varepsilon \cos(\varepsilon \theta_1) d\varphi_1 d\theta_1 = \int_\Omega \chi^\varepsilon P_\varepsilon u^\varepsilon \phi \tau^\varepsilon \cos(\varepsilon \theta_1) d\varphi_1 d\theta_1 \to \int_\Omega \gamma u_0 \phi \varphi_1 d\varphi_1 d\theta_1,$$

对于所有周期函数 $\phi \in \mathcal{C}^\infty(0, 2\pi)$，满足 ϕ 在 0 的某个邻域内消失且 2π。因此，在 (3.10) 和 (3.11) 中分别取极限，我们得到：

$$\int_\Omega \left(\xi^* \frac{\partial}{\partial \varphi_1}(\phi \varphi_1) - \xi^* \phi - q \frac{\partial \phi}{\partial \varphi_1} u_0 + \gamma u_0 \varphi_1 \phi\right) d\theta_1 d\varphi_1 = \int_0^{2\pi} \hat{f}(\varphi_1) \phi \varphi_1 \, d\varphi_1, \tag{3.19}$$

and

$$\int_\Omega \left(\xi^* \frac{\partial \psi}{\partial \varphi_1} + \gamma u_0 \psi\right) d\theta_1 d\varphi_1 = \int_0^{2\pi} \hat{f} \psi \, d\varphi_1, \tag{3.20}$$

对于所有周期性的 $\phi \in \mathcal{C}^\infty(0, 2\pi)$，满足 ϕ 在 0 的某个邻域内消失，且 2π 和 $\psi \in H^1_{per}(0, 2\pi)$。

取 $\psi(\varphi_1) = \phi(\varphi_1)\varphi_1$ 作为测试函数，我们得到

$$\int_\Omega \left(\xi^* \frac{\partial}{\partial \varphi_1}(\phi\varphi_1) + \gamma u_0 \phi \varphi_1 \right) d\theta_1 d\varphi_1 = \int_0^{2\pi} \hat{f}\phi\varphi_1 \, d\varphi_1. \tag{3.21}$$

对 (3.21) 与 (3.19) 之差进行分部积分，可得

$$0 = \int_\Omega \left(\xi^* \phi + q \frac{\partial \phi}{\partial \varphi_1} u_0 \right) d\theta_1 d\varphi_1 = \int_\Omega \left(\xi^* \phi - q\phi \frac{\partial u_0}{\partial \varphi_1} \right) d\theta_1 d\varphi_1. \tag{3.22}$$

定义

$$\hat{q} := \int_0^{g_1} q(s) ds = \frac{1}{L} \int_{Y^*} \left(1 - \frac{\partial X^0}{\partial y}(y,z) \right) dydz,$$

并计算 (3.22) 中的迭代积分，可得

$$\int_0^{2\pi} \phi \left(\int_0^{g_1} \xi^*(\varphi_1, \theta_1) \, d\theta_1 - \hat{q} \frac{\partial u_0}{\partial \varphi_1} \right) d\varphi_1 = 0,$$

for 所有周期函数 $\phi \in \mathcal{C}^\infty(0, 2\pi)$，使得 ϕ 在 0 的某个邻域内为零且 2π .
This 意味着

$$\int_0^{g_1} \xi^*(\varphi_1, \theta_1) \, d\theta_1 = \hat{q} \frac{\partial u_0}{\partial \varphi_1} \text{ a. e. } \varphi_1 \in (0, 2\pi).$$

注意到 算子 $L \int_{g_0}^{1} \gamma(\theta_1) \, d\theta_1 = |Y^*|$，并在等式 (3.20) 中应用 Fubini定理，可得对所有 $\psi \in H^1_{per}(0, 2\pi)$，

$$\int_0^{2\pi} \hat{f}\psi \, d\varphi_1 = \int_0^{2\pi} \left\{ \left(\int_0^{g_1} \xi^*(\varphi_1, \theta_1) \, d\theta_1 \right) \frac{\partial \psi}{\partial \varphi_1} + \frac{|Y^*|}{L} u_0 \psi \right\} d\varphi_1 = \int_0^{2\pi} \left(\hat{q} \frac{\partial u_0}{\partial \varphi_1} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi_1} + \frac{|Y^*|}{L} u_0 \psi \right) d\varphi_1,$$

定义 $q_0 = \text{算子 } L\widehat{|Y^*|}q$，即，

$$q_0 = \frac{1}{|Y^*|} \int_{Y^*} \left(1 - \frac{\partial X^0}{\partial y}(y,z) \right) dydz, \tag{3.23}$$

并且

$$f_0(\varphi_1) = \frac{L}{|Y^*|} \hat{f}(\varphi_1),$$

我们有

$$\int_0^{2\pi} \left(q_0 \frac{\partial u_0}{\partial \varphi_1} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi_1} + u_0 \psi \right) d\varphi_1 = \int_0^{2\pi} f_0 \psi \, d\varphi_1, \ \ \forall \psi \in H^1_{per}(0, 2\pi),$$

这就是.....的弱形式

$$\begin{cases} -q_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial \varphi_1^2} + u_0 = f_0 \ \ in \ (0, 2\pi); \\ u_0 \in H^1_{per}(0, 2\pi). \end{cases} \tag{3.24}$$

现在我们将证明问题 (3.24) 是适定的，其意义在于系数 q_0 大于零。为此，我们使用辅助问题 (3.3) 的变分形式，对每个 ε，该变分形式为双线性形式

$$b_\varepsilon(\phi,\psi)=\int_{Y^*}\left(\frac{1}{\cos^2(\varepsilon z)}\frac{\partial\phi}{\partial y},\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)\cdot\left(\frac{\partial\psi}{\partial y},\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\cos(\varepsilon z)\,dydz.$$

因此，对所有在 φ_1 变量上为算子 L-周期的 $\phi\in H^1_{per}(Y^*)$，我们得到 X^ε 满足

$$b_\varepsilon(X^\varepsilon,\phi)=\int_{B_1}\frac{g'(y)}{\cos(\varepsilon z)\sqrt{1+g'(y)^2}}\phi\,dS,$$

其中B_1是Y^*的上边界。因此，$y-X^\varepsilon$ 满足

$$b_\varepsilon(y-X^\varepsilon,\phi)=\int_{B_1}\frac{g'(y)}{\cos(\varepsilon z)\sqrt{1+g'(y)^2}}\phi\,dS-\int_{B_1}\frac{g'(y)}{\cos(\varepsilon z)\sqrt{1+g'(y)^2}}\phi\,dS=0,\tag{3.25}$$

对于所有大于 0 的 ε 以及 $\phi\in H^1_{per}(Y^*)$。此外，由方程 (3.23) 可得

$$q_0|Y^*|=\int_{Y^*}\left(1-\frac{\partial X^0}{\partial y}\right)dydz=\int_{Y^*}\frac{\partial}{\partial y}(y-X^0)\frac{\partial y}{\partial y}dydz=b_0(y-X^0,y).\tag{3.26}$$

因此，由方程 (3.25)、$\phi=-X^0$,(3.26) 以及X^0,的周期性可得

$$q_0|Y^*|=b_0(y-X^0,y)+b_0(y-X^0,-X^0)=\|\nabla(y-X^0)\|^2_{L^2(Y^*)}>0.$$

该不等式是严格的，因为如果 $\|\nabla(y-X^0)\|^2{}_{L^2(Y^*)}=0$，则意味着存在$c\in\mathbb{R}$ 使得$X^0+c=y$，这与X^0+c 具有周期性而y 不具有周期性相矛盾。此外，由于 $|Y^*|>0$，我们有$q_0>0$，且上述问题是适定的。特别地，我们得到问题 (3.24) 的解的唯一性。

□

注 3.14. 我们可以考虑(1.5)的更一般形式的问题，其中含有位势项 $V^\varepsilon u^\varepsilon$，该位势项依赖于参数 ε，而不仅仅考虑 u^ε。因此，我们考虑以下问题：

$$\begin{cases}-\frac{1}{\varepsilon^2\cos(\varepsilon\theta_1)}\frac{\partial}{\partial\theta_1}\left(\cos(\varepsilon\theta_1)\frac{\partial}{\partial\theta_1}\right)u^\varepsilon-\frac{1}{\cos^2(\varepsilon\theta_1)}\frac{\partial^2u^\varepsilon}{\partial\varphi_1^2}+V^\varepsilon u^\varepsilon=f^\varepsilon\ \ in\ \Omega^\varepsilon;\\ \frac{1}{\cos^2(\varepsilon\theta_1)}\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial\varphi_1}N_1^\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial\theta_1}N_2^\varepsilon=0\ \ on\ \ \partial\Omega^\varepsilon;\\ u^\varepsilon(\cdot,\theta_1)\ \ 2\pi-periodic,\end{cases}$$

其中，$N^\varepsilon=(N_1^\varepsilon,N_2^\varepsilon)$ 分别是上边界和下边界上的法向量场，由 $N^\varepsilon=\left(-g'(\frac{\varphi_1}{\varepsilon})\sqrt{1+g'(\frac{\varphi_1}{\varepsilon})^2},\sqrt{1+\frac{1}{g'(\frac{\varphi_1}{\varepsilon})^2}}\right)$ 和 $N^\varepsilon=(0,-1)$ 给出。我们假设 $f^\varepsilon\in$ 算子 $L^2(\Omega^\varepsilon,\cos(\varepsilon\theta_1))$，使得 $\|f^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon,\cos(\varepsilon\theta_1))}\le C$ 与 ε 无关；并且 $V^\varepsilon\in$ 算子 $L^\infty(\Omega^\varepsilon)$、$V^\varepsilon(\cdot,\theta_1)$ 是 2π-周期的，$V^\varepsilon\ge1$，且存在与 θ_1 无关的 $V_0\in$ 算子 $L^\infty(\Omega)$（即 $V_0(\varphi_1,\theta_1)=V_0(\varphi_1)$），使得

$$\int_{\Omega^\varepsilon}|V^\varepsilon-V_0|^p\cos(\varepsilon\theta_1)d\varphi_1d\theta_1\xrightarrow[\varepsilon\to0]{}0,$$

对于某个 $p>1$。在这些假设下，仍可得到与之前相同的结论。

4 解的高阶多尺度展开

本节中，我们采用 Bensoussan、Lions 和 Papanicolaou [4] 提出的一种合适的校正子方法，以证明强收敛结果并推导 H^1–范数下的误差估计。为此，我们再次使用多尺度方法。回顾 (2.2) 中给出的形式展开以及均匀化方程 (2.14)，我们可以将问题(2.11) 改写如下：

$$\begin{cases} -div_{y,z}\left(\nabla_{y,z}w_2(x,y,z) - \frac{d^2w_0}{dx^2}(x)\begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \left(1 - q_0 - \frac{\partial}{\partial y}X\right)\frac{d^2w_0}{dx^2} \ \text{ in } \ Y^*; \\ \frac{\partial w_2}{\partial N} = -\frac{g'(y)}{\sqrt{1+g'(y)^2}}X\frac{d^2w_0}{dx^2} \ \text{ on } \ B_1; \\ \frac{\partial w_2}{\partial N} = 0 \ \text{ on } \ B_2; \\ w_2(x,\cdot,z) \ \ L-\text{periodic}. \end{cases} \tag{4.1}$$

(4.1) 的线性以及 $d^2w_0dx^2$ 不依赖于变量 y和 z 这一事实表明，我们应寻求如下形式的 $w_2(x,y,z)$

$$w_2(x,y,z) = \Theta(y,z)\frac{d^2w_0}{dx^2}(x) \ \ \forall x \in (0,2\pi) \ \text{ and } \ \ (y,z) \in Y^*, \tag{4.2}$$

其中 Θ 是辅助问题的解

$$\begin{cases} -div_{y,z}\left(\nabla_{y,z}\Theta(y,z) - \begin{pmatrix} X(y,z) \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 1 - q - \frac{\partial}{\partial y}X(y,z) \ \text{ in } \ Y^*; \\ \left(\nabla_{y,z}\Theta(y,z) - \begin{pmatrix} X(y,z) \\ 0 \end{pmatrix}\right)\cdot N = 0 \ \text{ on } \ B_1 \cup B_2; \\ \Theta(\cdot,z) \ \ L-\text{periodic}. \end{cases} \tag{4.3}$$

然后，我们利用 (2.10) 和 (4.2)，对 (1.4) 引入如下渐近展开 ：

$$w^\varepsilon(\varphi,\theta) = w_0(\varphi) - \varepsilon X\left(\frac{\varphi}{\varepsilon},\frac{\theta}{\varepsilon}\right)\frac{dw_0}{d\varphi}(\varphi) + \varepsilon^2\Theta\left(\frac{\varphi}{\varepsilon},\frac{\theta}{\varepsilon}\right)\frac{d^2w_0}{d\varphi^2}(\varphi) + \cdots$$

现在我们可以定义校正子：

定义 1. 根据 *[4],* ，函数 X 和 Θ 定义了一阶校正子

$$\kappa^\varepsilon(\varphi,\theta) := -\varepsilon X\left(\frac{\varphi}{\varepsilon},\frac{\theta}{\varepsilon}\right)\frac{dw_0}{d\varphi}(\varphi) \ \ (\varphi,\theta) \in R^\varepsilon,$$

以及二阶校正子

$$\mu^\varepsilon(\varphi,\theta) := -\varepsilon X\left(\frac{\varphi}{\varepsilon},\frac{\theta}{\varepsilon}\right)\frac{dw_0}{d\varphi}(\varphi) + \varepsilon^2\Theta\left(\frac{\varphi}{\varepsilon},\frac{\theta}{\varepsilon}\right)\frac{d^2w_0}{d\varphi^2}(\varphi) \ \ (\varphi,\theta) \in R^\varepsilon.$$

注4.1。 函数 X 和 Θ 最初定义在基本胞元Y^*中，但为了在薄区域 R^ε中考察这些函数，我们利用它们关于 y 的周期性，将其延拓到带状区域 $Y = \{(y, z)\mathbb{R}^2 \ \in \mathbb{R} \ 0 < \ <$ ；y ， $z\ g(y)\}$，并将它们与微分同胚复合

$$T^\varepsilon : R^\varepsilon \mapsto Y : (\varphi,\theta) \to \left(\frac{\varphi}{\varepsilon},\frac{\theta}{\varepsilon}\right).$$

在下面的分析中，我们将记号滥用地处处用$X\left(\frac{\varphi}{\varepsilon},\frac{\theta}{\varepsilon}\right)$和 $\Theta\left(\frac{\varphi}{\varepsilon},\frac{\theta}{\varepsilon}\right)$表示这些复合，其中 $(\varphi,\theta)\in R^{\varepsilon}$。基于这些考虑，我们可以得到关于$R^{\varepsilon}$ 上X 和 Θ的一些估计。我们有：

命题 4.2。

$$\begin{aligned}
\|X\|^2_{L^2(R^{\varepsilon},\cos\theta)} &\leq \varepsilon/L\,\|X\|^2_{L^2(Y^*)}, \qquad (4.4)\\
\|\Theta\|^2_{L^2(R^{\varepsilon},\cos\theta)} &\leq \varepsilon/L\,\|\Theta\|^2_{L^2(Y^*)},\\
\left\|\partial_y X\right\|^2_{L^2(R^{\varepsilon},\cos\theta)} &\leq \varepsilon/L\,\left\|\partial_y X\right\|^2_{L^2(Y^*)},\\
\|\partial_z X\|^2_{L^2(R^{\varepsilon},\cos\theta)} &\leq \varepsilon/L\,\|\partial_z X\|^2_{L^2(Y^*)}, \qquad (4.5)\\
\left\|\partial_y \Theta\right\|^2_{L^2(R^{\varepsilon},\cos\theta)} &\leq \varepsilon/L\,\left\|\partial_y \Theta\right\|^2_{L^2(Y^*)},\\
\|\partial_z \Theta\|^2_{L^2(R^{\varepsilon},\cos\theta)} &\leq \varepsilon/L\,\|\partial_z \Theta\|^2_{L^2(Y^*)},\\
\left\|\partial_y^2 X\right\|^2_{L^2(R^{\varepsilon},\cos\theta)} &\leq \varepsilon/L\,\left\|\partial_y^2 X\right\|^2_{L^2(Y^*)},\\
\left\|\partial_y^2 \Theta\right\|^2_{L^2(R^{\varepsilon},\cos\theta)} &\leq \varepsilon/L\,\left\|\partial_y^2 \Theta\right\|^2_{L^2(Y^*)}.
\end{aligned}$$

证明。 对于第一项，我们有

$$\begin{aligned}
\|X\|^2_{L^2(R^{\varepsilon},\cos\theta)} &= \int_{R^{\varepsilon}}\left|X\left(\frac{\varphi}{\varepsilon},\frac{\theta}{\varepsilon}\right)\right|^2\cos\theta\,d\varphi d\theta \leq \int_{R^{\varepsilon}}\left|X\left(\frac{\varphi}{\varepsilon},\frac{\theta}{\varepsilon}\right)\right|^2 d\varphi d\theta\\
&\leq \sum_{k=1}^{1/\varepsilon L}\varepsilon^2\int_{Y^*}|X(y,z)|^2\,dydz \leq \varepsilon/L\,\|X\|^2_{L^2(Y^*)}.
\end{aligned}$$

类似地，我们可以得到 Θ 以及一阶导数的估计。接下来，我们将估计X的二阶导数。由 [命题 7.7 [12]], $\partial^2 X\,\partial y_2 \in$ 算子 $L^2(Y^*)$。因此

$$\begin{aligned}
\left\|\partial_y^2 X\right\|^2_{L^2(R^{\varepsilon},\cos\theta)} &= \int_{R^{\varepsilon}}\left|\partial_y^2 X\left(\frac{\varphi}{\varepsilon},\frac{\theta}{\varepsilon}\right)\right|^2\cos\theta\,d\varphi d\theta \leq \int_{R^{\varepsilon}}\left|\partial_y^2 X\left(\frac{\varphi}{\varepsilon},\frac{\theta}{\varepsilon}\right)\right|^2 d\varphi d\theta\\
&\leq \sum_{k=1}^{1/\varepsilon L}\varepsilon^2\int_{Y^*}\left|\partial_y^2 X(y,z)\right|^2\,dydz \leq \varepsilon/L\,\left\|\partial_y^2 X\right\|^2_{L^2(Y^*)}.
\end{aligned}$$

利用类似的论证，我们得到其余的估计。

□

4.1 问题的变分形式

现在，我们将 [10] 中介绍的方法调整到我们的情形。通过采用适当的校正子方法，我们旨在证明强收敛。由于R^{ε} 取决于一个正参数 ε ，并且当 ε 趋于 0 时，区域R^{ε} 塌缩到区间$(0,2\pi)$上，我们将勒贝格测度按 $\frac{1}{\varepsilon}$ 进行重新缩放，以保持可测集 $\mathcal{O}\subset R^{\varepsilon}$的相对容量。这将得到奇异测度

$$\rho_{\varepsilon}(\mathcal{O}) = \varepsilon^{-1}|\mathcal{O}|.$$

这种测度已在涉及薄区域的研究中得到考察，例如 [8]，并使我们能够引入勒贝格空间$L^2(R^\varepsilon,\ \cos\ \theta;\ \rho_\varepsilon)$和索伯列夫空间$H^1_{per}(R^\varepsilon,\ \cos\ \theta;\ \rho_\varepsilon)$。这些空间中的范数分别记为$|||\cdot|||_{L^2(R^\varepsilon,\ \cos\theta)}$和$|||\cdot|||_{H^1_{per}(R^\varepsilon,\ \cos\theta)}$，它们分别由以下内积引入：

$$(u,v)_\varepsilon = \varepsilon^{-1}\int_{R^\varepsilon} uv\cos\theta d\varphi d\theta,\quad \forall u,v\in L^2(R^\varepsilon,\cos\theta),$$

and

$$a_\varepsilon(u,v) := \varepsilon^{-1}\int_{R^\varepsilon}\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial\theta}\frac{\partial v}{\partial\theta}+\frac{1}{\cos^2\theta}\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial\varphi}\frac{\partial v}{\partial\varphi}+uv\right)\cos\theta d\varphi d\theta,\quad \forall u,v\in H^1_{per}(R^\varepsilon,\cos\theta),$$

分别地。

注释 4.3. 注意到范数 $|||\cdot|||$ 等价于空间 $L^2(R^\varepsilon,\cos\ \theta)$ 和 $H^1_{per}(R^\varepsilon,\cos\ \theta)$的通常范数。此外，这些范数之间的关系为：

$$|||u|||_{L^2(R^\varepsilon,\cos\theta)} = \varepsilon^{-1/2}||u||_{L^2(R^\varepsilon,\cos\theta)},\quad \forall u\in L^2(R^\varepsilon,\cos\theta),$$

$$|||u|||_{H^1_{per}(R^\varepsilon,\cos\theta)} = \varepsilon^{-1/2}||u||_{H^1_{per}(R^\varepsilon,\cos\theta)},\quad \forall u\in H^1_{per}(R^\varepsilon,\cos\theta).$$

(1.4) 的变分形式是求 $w^\varepsilon\in H^1_{per}(R^\varepsilon,\cos\ \theta)$，使得

$$\int_{R^\varepsilon}\left(\frac{\partial w^\varepsilon}{\partial\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}+\frac{1}{\cos^2\theta}\frac{\partial w^\varepsilon}{\partial\varphi}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}+w^\varepsilon\psi\right)\cos\theta\ d\varphi d\theta = \int_{R^\varepsilon} f^\varepsilon\psi\cos\theta\ d\varphi d\theta,$$

对所有 $\psi\in H^1_{per}(R^\varepsilon,\cos\ \theta)$成立，其中 ψ 且 w^ε 满足 (1.4) 中给出的边界条件。该变分公式等价于求 $w^\varepsilon\in H^1_{per}(R^\varepsilon,\cos\ \theta;\ \rho^\varepsilon)$，使得

$$a_\varepsilon(\psi,w^\varepsilon) = (\psi,f^\varepsilon)_\varepsilon\quad \forall\psi\in H^1_{per}(R^\varepsilon,\cos\theta;\rho^\varepsilon). \tag{4.6}$$

注意到解 w^ε 满足关于 ε一致的先验估计。事实上，在 (4.6) 中选取 $\psi = w^\varepsilon$，并暂时将 $|||\cdot|||_{L^2(R^\varepsilon,\cos\theta)}$ 记为 $|||\cdot|||_{L^2}$，我们得到：

$$\left|\left|\left|\frac{\partial w^\varepsilon}{\partial\theta}\right|\right|\right|^2_{L^2}+\left|\left|\left|\frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial w^\varepsilon}{\partial\varphi}\right|\right|\right|^2_{L^2}+|||w^\varepsilon|||^2_{L^2}\le|||f^\varepsilon|||_{L^2}|||w^\varepsilon|||_{L^2}$$

为刻画 $a_\varepsilon(w^\varepsilon,w^\varepsilon)$ 当 $\varepsilon\to 0$时的极限行为，我们考虑 $H^1_{per}(0,2\pi)$ 上由下式给出的半双线性型 a_0：

$$a_0(u,v) = \hat{g}\int_0^{2\pi}\left(q_0\frac{du}{d\varphi}\frac{dv}{d\varphi}+uv\right)dx,\quad \forall u,v\in H^1_{per}(0,2\pi), \tag{4.7}$$

其中 $\hat{g} = {}^1_L\int_L 0\ g(s)ds$ 是函数 g 在区间 $(0,L)$上的平均值，且 q_0 是 (2.13) 中定义的均匀化系数。我们还将考虑 $L^2(0,2\pi)$，并赋予其由内积 $(\cdot,\cdot)_0$, 所诱导的范数，该范数由下式给出

$$(u,v)_0 = \hat{g}\int_0^1 uv\ dx,\quad \forall u,v\in L^2(0,2\pi).$$

注 4.4. 我们可以求解问题(2.6)、(2.7)、(2.9)、(4.1)和(4.3)，方法是对椭圆型双线性形式应用 *Lax-Milgram* 定理

$$a_{Y^*}(\psi,\phi)=\int_{Y^*}\nabla_{y,z}\psi\cdot\nabla_{y,z}\phi\,dydz,\ \ \forall\psi,\phi\in H^1_{per}(Y^*)/\mathbb{R},$$

其中我们考虑范数

$$\|\psi\|=\left(\int_{Y^*}|\nabla\psi|^2\,dydz\right)^{1/2}.$$

这里，H^1_{per}（Y^*）/$\mathbb{R}$表示去掉常数函数后的H^1_{per}（Y^*）。

4.2 一阶校正项

利用一阶校正项，我们将w^ε 在H^1_{per}（R^ε,$cos\theta$）中的收敛提升为强收敛。

定理 4.5。 设 $f^\varepsilon\in$ 算子 L^2（$R^\varepsilon,\cos\theta$）满足

$$|||f^\varepsilon|||_{L^2(R^\varepsilon,\cos\theta)}\le C,$$

对于某个与 >0 和 ε 无关的常数 C，以及由$\hat{}f^\varepsilon\in$ 算子 L^2（$0,2\pi$）定义的函数族

$$\hat{f}^\varepsilon(\varphi)=\varepsilon^{-1}\int_0^{\varepsilon g(\varphi/\varepsilon)}f^\varepsilon(\varphi,\theta)\cos\theta d\theta\ \ \forall\,\varepsilon\in[0,1],$$

并令 $w^\varepsilon\in H^1_{per}(R^\varepsilon,\ cos\theta)$ 为问题(1.4)的解。

若$\hat{}f^\varepsilon\rightharpoonup\hat{}f$属于 $L^2(0,\ 2\pi)$，且 $w_0\in H^2(0,\ 2\pi)\cap C^1(0,\ 2\pi)$ 是均匀化方程(2.14) 的唯一解，其中 $f_0=\ ^1\hat{}g\,\hat{}f$，则 $^-$

$$\lim_{\varepsilon\to0}|||w^\varepsilon-w_0-\kappa^\varepsilon|||_{H^1(R^\varepsilon,\cos\theta)}=0,$$

其中 κ^ε 是根据定义 *1* 得到的 w^ε 的一阶校正项。

证明。 由 (1.4) 的变分形式可得 $a_\varepsilon(\psi,w^\varepsilon)\ =(\psi,f^\varepsilon)_\varepsilon,\ \ \forall\psi\in H^1_{per}(R^\varepsilon,\cos\ \theta)$。因此，注意到$w_0+\kappa^\varepsilon\in H^1_{per}(R^\varepsilon,\cos\ \theta)$，利用$a_\varepsilon$的对称性可得

$$\begin{aligned}|||w^\varepsilon-w_0-\kappa^\varepsilon|||^2_{H^1(R^\varepsilon,\cos\theta)}&=a_\varepsilon(w^\varepsilon-w_0-\kappa^\varepsilon,w^\varepsilon-w_0-\kappa^\varepsilon)\\&=(w^\varepsilon-w_0,f^\varepsilon)_\varepsilon-2(\kappa^\varepsilon,f^\varepsilon)_\varepsilon-(w_0,f^\varepsilon)_\varepsilon+a_\varepsilon(w_0+\kappa^\varepsilon,w_0+\kappa^\varepsilon).\end{aligned}\tag{4.8}$$

现在我们对上述各项分别取极限。对于第一项，我们首先注意到

$$(w^\varepsilon-w_0,f^\varepsilon)_\varepsilon\le|||w^\varepsilon-w_0|||_{L^2(R^\varepsilon,\cos\theta)}|||f^\varepsilon|||_{L^2(R^\varepsilon,\cos\theta)}.$$

使用变量代换 $(\varphi,\theta)\ \to(\varphi,\theta/\varepsilon)\ =(\varphi_1,\theta_1)$，我们得到

$$|||w^\varepsilon-w_0|||^2_{L^2(R^\varepsilon,\cos\theta)}=||u^\varepsilon-w_0||^2_{L^2(\Omega^\varepsilon,\cos(\varepsilon\theta_1))}.$$

根据定理 3.2，可得 $|||w^\varepsilon-w0|||_{L^2(R^\varepsilon,\cos\theta)}\xrightarrow{\varepsilon\to0}0$。

对于第二项，由不等式（4.4）可得

$$(\kappa^\varepsilon, f^\varepsilon)_\varepsilon \le \varepsilon^{-1}||\kappa^\varepsilon||_{L^2(R^\varepsilon,\cos\theta)}||f^\varepsilon||_{L^2(R^\varepsilon,\cos\theta)} \le \frac{\varepsilon C}{L^{1/2}}||X||_{L^2(Y^*)}\left|\left|\frac{dw_0}{d\varphi}\right|\right|_{L^\infty(0,2\pi)} \to 0,$$

当 ε 趋于 0 时。

现在，由于 $\hat{}f^\varepsilon \rightharpoonup \hat{}f$属于 算子 $L^2(0,2\pi)$，第三项满足

$$\begin{aligned}(w_0, f^\varepsilon)_\varepsilon &= \varepsilon^{-1}\int_0^{2\pi} w_0(\varphi)\int_0^{\varepsilon g(\varphi/\varepsilon)} f^\varepsilon(\varphi,\theta)\cos\theta\, d\theta\, d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} w_0(\varphi)\hat{f}^\varepsilon(\varphi)\, d\varphi \to \hat{g}\int_0^{2\pi} w_0(\varphi)f_0(\varphi)\, d\varphi = (w_0, f_0)_0, \quad \text{as } \varepsilon \to 0.\end{aligned}$$

接下来，我们证明

$$a_\varepsilon(w_0+\kappa^\varepsilon, w_0+\kappa^\varepsilon) \to a_0(w_0, w_0) \quad \text{as} \quad \varepsilon \to 0. \tag{4.9}$$

首先，我们计算 $a_\varepsilon(w_0+\kappa^\varepsilon, w_0)$ 当 $\varepsilon \to 0$ 时的极限。注意到

$$\begin{aligned}a_\varepsilon(w_0+\kappa^\varepsilon, w_0) =& \varepsilon^{-1}\int_{R^\varepsilon}\left(\frac{\partial(w_0+\kappa^\varepsilon)}{\partial\theta}\frac{\partial w_0}{\partial\theta} + \frac{1}{\cos^2(\theta)}\frac{\partial(w_0+\kappa^\varepsilon)}{\partial\varphi}\frac{\partial w_0}{\partial\varphi}\right)\cos\theta d\varphi d\theta \\ &+\varepsilon^{-1}\int_{R^\varepsilon}(w_0+\kappa^\varepsilon)w_0\cos\theta d\varphi d\theta \\ =&\varepsilon^{-1}\int_{R^\varepsilon}\frac{1}{\cos^2(\theta)}\frac{d^2w_0}{d\varphi^2}\left(1-\frac{\partial X}{\partial y}\right)\cos\theta d\varphi d\theta + \varepsilon^{-1}\int_{R^\varepsilon}|w_0|^2\cos\theta d\varphi d\theta \\ &-\varepsilon^{-1}\int_{R^\varepsilon}\left(\frac{1}{\cos^2(\theta)}\varepsilon X\frac{dw_0}{d\varphi}\frac{d^2w_0}{d\varphi^2} + \varepsilon X w_0\frac{dw_0}{d\varphi}\right)\cos\theta d\varphi d\theta.\end{aligned}$$

此外，由于

$$\begin{aligned}&\varepsilon^{-1}\int_{R^\varepsilon}\frac{1}{\cos^2(\theta)}\left(\frac{dw_0}{d\varphi}\right)^2\left(1-\frac{\partial X\left(\frac{\varphi}{\varepsilon},\frac{\theta}{\varepsilon}\right)}{\partial y}\right)\cos\theta d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{g(\varphi/\varepsilon)}\frac{1}{\cos^2(\varepsilon z)}\left(\frac{dw_0}{d\varphi}\right)^2\left(1-\frac{\partial X\left(\frac{\varphi}{\varepsilon},z\right)}{\partial y}\right)\cos(\varepsilon z)dzd\varphi,\end{aligned}$$

并且 $y \mapsto \int_0^{g(y)}\frac{1}{\cos^2(\varepsilon z)}\left(1-\frac{\partial X(y,z)}{\partial y}\right)dz$ 是一个算子 L-周期函数，由命题 3.6 可得

$$\varepsilon^{-1}\int_{R^\varepsilon}\frac{1}{\cos^2(\theta)}\left(\frac{dw_0}{d\varphi}\right)^2\left(1-\frac{\partial X\left(\frac{\varphi}{\varepsilon},\frac{\theta}{\varepsilon}\right)}{\partial y}\right)\cos\theta d\varphi d\theta \to \hat{g}\int_0^{2\pi} q_0\left(\frac{dw_0}{d\varphi}\right)^2 d\varphi, \tag{4.10}$$

当 $\varepsilon \to 0$ 时。根据命题 3.6，我们还有

$$\varepsilon^{-1}\int_{R^\varepsilon}|w_0|^2\cos\theta d\varphi d\theta \to \hat{g}\int_0^{2\pi}|w_0|^2 d\varphi \quad \text{as} \quad \varepsilon \to 0. \tag{4.11}$$

由于w_0 不依赖于 θ，且

$$\begin{aligned}&\varepsilon^{-1}\int_{R^\varepsilon}\left(\frac{1}{\cos^2(\theta)}\varepsilon X\frac{dw_0}{d\varphi}\frac{d^2w_0}{d\varphi^2} + \varepsilon X w_0\frac{dw_0}{d\varphi}\right)\cos\theta d\varphi d\theta \\ &\le \|X\|_{L^2(R^\varepsilon,cos\theta)}\left(\left\|\frac{dw_0}{d\varphi}\right\|_{L^\infty(R^\varepsilon)}\left\|\frac{d^2w_0}{d\varphi^2}\right\|_{L^2(R^\varepsilon,cos\theta)} + \|w_0\|_{L^\infty(R^\varepsilon)}\left\|\frac{dw_0}{d\varphi}\right\|_{L^\infty(R^\varepsilon)}\|1\|_{L^2(R^\varepsilon,cos\theta)}\right),\end{aligned}$$

由（4.4）可得

$$-\varepsilon^{-1}\int_{R^\varepsilon}\left(\frac{1}{\cos^2(\theta)}\varepsilon X\frac{dw_0}{d\varphi}\frac{d^2w_0}{d\varphi^2}+\varepsilon X w_0\frac{dw_0}{d\varphi}\right)\cos\theta d\varphi d\theta\to 0, \tag{4.12}$$

如 $\varepsilon\to 0$。因此，由 (4.10)、(4.11)、(4.12) 和 (4.7) 可得 (4.9)。最后，我们还需要证明

$$a_\varepsilon(w_0+\kappa^\varepsilon,\kappa^\varepsilon)\to 0,\ \text{ as }\ \varepsilon\to 0.$$

由于

$$\kappa^\varepsilon=-\varepsilon X\frac{dw_0}{d\varphi},\ \ \frac{\partial\kappa^\varepsilon}{\partial\varphi}=-\frac{\partial X}{\partial y}\frac{dw_0}{d\varphi}-\varepsilon X\frac{d^2w_0}{d\varphi^2}\ \text{ and }\ \frac{\partial\kappa^\varepsilon}{\partial\theta}=-\frac{\partial X}{\partial z}\frac{dw_0}{d\varphi},$$

由直接计算以及不等式 (4.4) 和 (4.5)，我们得到：

$$\begin{aligned}
a_\varepsilon(w_0+\kappa^\varepsilon,\kappa^\varepsilon) &= \varepsilon^{-1}\int_{R^\varepsilon}\left(\frac{\partial(w_0+\kappa^\varepsilon)}{\partial\theta}\frac{\partial\kappa^\varepsilon}{\partial\theta}+\frac{1}{\cos^2(\theta)}\frac{\partial(w_0+\kappa^\varepsilon)}{\partial\varphi}\frac{\partial\kappa^\varepsilon}{\partial\varphi}+(w_0+\kappa^\varepsilon)\kappa^\varepsilon\right)\cos\theta d\varphi d\theta\\
&= \varepsilon^{-1}\int_{R^\varepsilon}\left(\left(\frac{\partial\kappa^\varepsilon}{\partial\theta}\right)^2+\frac{1}{\cos^2(\theta)}\left(\frac{\partial w_0}{\partial\varphi}\frac{\partial\kappa^\varepsilon}{\partial\varphi}+\frac{\partial\kappa^\varepsilon}{\partial\varphi}\frac{\partial\kappa^\varepsilon}{\partial\varphi}\right)+(w_0+\kappa^\varepsilon)\kappa^\varepsilon\right)\cos\theta d\varphi d\theta\\
&\le \frac{1}{L}\left\|\frac{\partial X}{\partial z}\right\|^2_{L^2(Y^*)}\left\|\frac{dw_0}{d\varphi}\right\|^2_{L^2(R^\varepsilon,\cos\theta)}+\frac{1}{L}\left\|\frac{1}{\cos^2(\theta)}\right\|_{L^\infty}\left\|\frac{\partial X}{\partial y}\right\|^2_{L^2(Y^*)}\left\|\frac{dw_0}{d\varphi}\right\|^2_{L^2(R^\varepsilon,\cos\theta)}\\
&+ \frac{1}{\sqrt{L\varepsilon}}\left\|\frac{1}{\cos^2(\theta)}\right\|_{L^\infty}\left\|\frac{d^2w_0}{d\varphi^2}\right\|_{L^2(R^\varepsilon,\cos\theta)}\left\|\frac{\partial X}{\partial y}\right\|_{L^2(Y^*)}+\varepsilon C_1+\varepsilon^{1/2}C_2.
\end{aligned}$$

因此，我们有 $a_\varepsilon(w_0+\kappa^\varepsilon,\kappa^\varepsilon)\to 0$，如 $\varepsilon\to 0$。因此，根据 (4.8)，我们得到

$$|||w^\varepsilon-w_0-\kappa^\varepsilon|||^2_{H^1(R^\varepsilon,\cos\theta)}\xrightarrow{\varepsilon\to 0}a_0(w_0,w_0)-(w_0,f_0)_0=0,$$

证明完毕。 □

4.3 二阶校正项

现在，我们使用定义 1 给出误差估计，其中方程 (1.4) 的解 w^ε 由其一阶截断近似

$$\mathcal{W}_1^\varepsilon(\varphi,\theta):=w_0(\varphi)+\kappa^\varepsilon=w_0(\varphi)-\varepsilon X\left(\frac{\varphi}{\varepsilon},\frac{\theta}{\varepsilon}\right)\frac{dw_0}{d\varphi}(\varphi),\ \ (\varphi,\theta)\in R^\varepsilon, \tag{4.13}$$

在范数 $|||\cdot|||_{H^1(R^\varepsilon,cos\theta)}$下。为改进这一近似，我们还考虑 R^ε 中的二阶截断：

$$\mathcal{W}_2^\varepsilon(\varphi,\theta):=w_0(\varphi)+\mu^\varepsilon=w_0(\varphi)-\varepsilon X\left(\frac{\varphi}{\varepsilon},\frac{\theta}{\varepsilon}\right)\frac{dw_0}{d\varphi}(\varphi)+\varepsilon^2\Theta\left(\frac{\varphi}{\varepsilon},\frac{\theta}{\varepsilon}\right)\frac{d^2w_0}{d\varphi^2}(\varphi), \tag{4.14}$$

其中w_0 表示问题 (2.14) 的均匀化解，X 和 Θ 分别是 (2.9) 和 (4.3) 中定义的辅助解。这些函数最初定义在基本胞元 Y^* 上，并按照注4.1所述延拓至薄区域R^ε 。

定理 4.6. 设 R^ε 为(1.2) 中定义的薄区域，w^ε 为问题(1.4) 的解，其中 $f^\varepsilon(\varphi,\theta) = f^\varepsilon(\varphi)$，且 $f \in W^{2,\infty}(0,2\pi)$ $L-$为周期函数。

那么，若 $\mathcal{W}_1^\varepsilon$ 和 $\mathcal{W}_2^\varepsilon$ 分别由 (4.13) 和 (4.14) 给出，我们便得到

$$|||w^\varepsilon - \mathcal{W}_2^\varepsilon|||_{H^1(R^\varepsilon,\cos\theta)} \le K_1\sqrt{\varepsilon}. \tag{4.15}$$

因此，我们得到一阶近似的如下误差率

$$|||w^\varepsilon - \mathcal{W}_1^\varepsilon|||_{H^1(R^\varepsilon,\cos\theta)} \le K_2\sqrt{\varepsilon}, \tag{4.16}$$

其中，K_1 和 K_2 是与 $\varepsilon > 0$ 无关的正常数。

证明。 首先注意到，(4.16) 是 (4.15) 和 (4.5) 的直接推论，因为

$$\left|\left|\varepsilon^2\Theta\frac{d^2w_0}{d\varphi^2}\right|\right|^2_{L^2(R^\varepsilon,\cos\theta)} \le \varepsilon^4\left|\left|\frac{d^2w_0}{d\varphi^2}\right|\right|^2_{L^\infty(0,2\pi)}||\Theta||^2_{L^2(R^\varepsilon,\cos\theta)} \le \varepsilon^5\left|\left|\frac{d^2w_0}{d\varphi^2}\right|\right|^2_{L^\infty(0,2\pi)}||\Theta||^2_{L^2(Y^*)} \le \varepsilon^5 C_1,$$

and

$$\begin{aligned}
&\left|\left|\nabla_{(\varphi,\theta)}\left(\varepsilon^2\Theta\frac{d^2w_0}{d\varphi^2}\right)\right|\right|^2_{L^2(R^\varepsilon,\cos\theta)} \le \varepsilon^5\left|\left|\frac{d^3w_0}{d\varphi^3}\right|\right|^2_{L^\infty(0,2\pi)}||\Theta||^2_{L^2(Y^*)}\\
&+\varepsilon^3\left|\left|\frac{d^2w_0}{d\varphi^2}\right|\right|^2_{L^\infty(0,2\pi)}\left(\left|\left|\frac{\partial\Theta}{\partial y}\right|\right|^2_{L^2(Y^*)}+\left|\left|\frac{\partial\Theta}{\partial z}\right|\right|^2_{L^2(Y^*)}\right)\\
&+2\varepsilon^4\left|\left|\frac{d^2w_0}{d\varphi^2}\right|\right|^2_{L^\infty(0,2\pi)}\left(\left|\left|\frac{\partial\Theta}{\partial y}\right|\right|^2_{L^2(Y^*)}+\left|\left|\frac{\partial\Theta}{\partial z}\right|\right|^2_{L^2(Y^*)}\right)\left|\left|\frac{d^3w_0}{d\varphi^3}\right|\right|^2_{L^\infty(0,2\pi)}||\Theta||^2_{L^2(Y^*)} \le C_2\varepsilon^3.
\end{aligned}$$

由此，我们有

$$\varepsilon^{-1}\left|\left|\varepsilon^2\Theta\frac{d^2w_0}{d\varphi^2}\right|\right|^2_{H^1(R^\varepsilon,\cos\theta)} \le K_2\varepsilon^2,$$

对于某个常数 常数 $K_2 > 0$ 无关p取决于 ε。

现在我们估计函数 ϕ^ε 的范数 $|||\phi^\varepsilon|||^2{}_{H^1(R^\varepsilon}$、$\cos\theta) = a_\varepsilon(\phi^\varepsilon,\ \phi^\varepsilon)$，其定义如下:

$$\phi^\varepsilon = w^\varepsilon - \mathcal{W}_2^\varepsilon.$$

为此，我们将证明函数 ϕ^ε 满足以下边值问题，其中 $\mathcal{L}$ 由 (2.3) 给出，而 N_1,N_2 如 (1.4) 中所定义。

$$\begin{cases}
-\mathcal{L}(\phi^\varepsilon) + \phi^\varepsilon = \varepsilon F^\varepsilon + \mathcal{J}^\varepsilon \ \ in\ R^\varepsilon;\\
\frac{1}{\cos^2\theta}\frac{\partial\phi^\varepsilon}{\partial\varphi}N_1 + \frac{\partial\phi^\varepsilon}{\partial\theta}N_2 = \varepsilon^2\mathcal{H}^\varepsilon N_1 + r^\varepsilon N_2 \ \ on\ \ \partial R^\varepsilon,\\
\phi^\varepsilon(\cdot,\theta) \qquad 2\pi-\text{periodic},
\end{cases}$$

其中$F^\varepsilon, \mathcal{J}^\varepsilon, \mathcal{H}^\varepsilon$ 和r^ε 将在下文中计算。基于此，我们考虑问题的变分形式，即求 $\phi^\varepsilon \in H^1_{per}(R^\varepsilon,$ $\cos\ \theta)$ 使得

$$a_\varepsilon(\phi^\varepsilon,\psi) = \int_{R^\varepsilon} F^\varepsilon\psi\cos\theta\, d\varphi d\theta + \frac{1}{\varepsilon}\int_{R^\varepsilon}\mathcal{J}^\varepsilon\psi\cos\theta\, d\varphi d\theta + \varepsilon\int_{\partial R^\varepsilon}\mathcal{H}^\varepsilon N_1\psi\cos\theta\, dS + \frac{1}{\varepsilon}\int_{\partial R^\varepsilon} r^\varepsilon N_1\psi\cos\theta\, dS.$$

注意，函数 ϕ^ε 必须在 ε上满足一致先验估计。将 $\psi = \phi^\varepsilon$代入上式，我们得到:

$$\begin{aligned}|||\phi^\varepsilon|||^2_{H^1(R^\varepsilon,cos\theta)} =&|a_\varepsilon(\phi^\varepsilon,\phi^\varepsilon)| \le ||\phi^\varepsilon||_{L^2(R^\varepsilon,\cos\theta)}||F^\varepsilon||_{L^2(R^\varepsilon,\cos\theta)} + \frac{1}{\varepsilon}||\phi^\varepsilon||_{L^2(R^\varepsilon,\cos\theta)}||\mathcal{J}^\varepsilon||_{L^2(R^\varepsilon,\cos\theta)}\\ &+\varepsilon||\phi^\varepsilon||_{L^2(\partial R^\varepsilon,\cos\theta)}||\mathcal{H}^\varepsilon N_1||_{L^2(\partial R^\varepsilon,\cos\theta)} + \frac{1}{\varepsilon}||\phi^\varepsilon||_{L^2(\partial R^\varepsilon,\cos\theta)}||r^\varepsilon N_2||_{L^2(\partial R^\varepsilon,\cos\theta)}.\end{aligned}$$

因此，为了估计 $a_\varepsilon(\phi^\varepsilon,\phi^\varepsilon)$，需要对 F^ε,$\mathcal{J}^\varepsilon$, $\mathcal{H}^\varepsilon$ 和 r^ε 作出精确估计。

为此，我们将使用线性微分算子$\mathcal{L}$满足的以下恒等式,

$$\mathcal{L}(uv) = v\mathcal{L}u + u\mathcal{L}v + 2\frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\partial v}{\partial\theta} + \frac{2}{\cos^2\theta}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\frac{\partial v}{\partial\varphi}.$$

特别地，如果 $v(\varphi,\theta) = v(\varphi)$ ，则有

$$\mathcal{L}(u(\varphi,\theta)v(\varphi)) = v\mathcal{L}u + u\mathcal{L}v + \frac{2}{\cos^2\theta}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\frac{\partial v}{\partial\varphi}. \tag{4.17}$$

利用 (2.4) 中定义的变量代换以及 X 满足 (2.9) 这一事实，我们得到

$$\mathcal{L}X = \frac{1}{\varepsilon^2\cos\theta}\frac{\partial}{\partial z}\left(\cos(\varepsilon z)\frac{\partial}{\partial z}\right)X + \frac{1}{\varepsilon^2\cos^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial y^2}X = \frac{1}{\varepsilon^2}\left(\frac{1}{\cos^2\theta}-1\right)\frac{\partial^2 X}{\partial y^2} - \frac{1}{\varepsilon}\tan\theta\frac{\partial X}{\partial z}.$$

由 (4.17) 可得,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left(X\frac{dw_0}{d\varphi}\right) =&\frac{dw_0}{d\varphi}\mathcal{L}X + X\mathcal{L}\left(\frac{dw_0}{d\varphi}\right) + \frac{2}{\cos^2\theta}\frac{\partial X}{\partial\varphi}\frac{d^2w_0}{d\varphi^2}\\ =&\frac{1}{\varepsilon^2}\left(\frac{1}{\cos^2\theta}-1\right)\frac{dw_0}{dx}\frac{\partial^2 X}{\partial y^2} + \frac{1}{\varepsilon}\left(-\tan\theta\frac{\partial X}{\partial z}\frac{dw_0}{dx} + \frac{2}{\cos^2\theta}\frac{\partial X}{\partial y}\frac{d^2w_0}{dx^2}\right)\\ &+X\frac{1}{\cos^2\theta}\frac{d^3w_0}{dx^3}.\end{aligned}$$

类似地，利用 Θ 满足 (4.3) 这一事实，我们得到

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\Theta =& \frac{1}{\varepsilon^2}\left(\left(\frac{1}{\cos^2\theta}-1\right)\frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\Theta\right) - \frac{1}{\varepsilon}\tan\theta\frac{\partial\Theta}{\partial z}\\ =& \frac{1}{\varepsilon^2}\left(\left(\frac{1}{\cos^2\theta}-1\right)\frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2} - 1 + q + 2\frac{\partial X}{\partial y}\right) - \frac{1}{\varepsilon}\tan\theta\frac{\partial\Theta}{\partial z},\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left(\Theta\frac{d^2w_0}{d\varphi^2}\right) =&\frac{d^2w_0}{d\varphi^2}\mathcal{L}\Theta + \Theta\frac{1}{\cos^2\theta}\frac{d^4w_0}{d\varphi^4} + \frac{2}{\cos^2\theta}\frac{\partial\Theta}{\partial\varphi}\frac{d^3w_0}{d\varphi^3}\\ =&\frac{1}{\varepsilon^2}\left(\left(\frac{1}{\cos^2\theta}-1\right)\frac{d^2w_0}{dx^2}\frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2} - \left(1-q-2\frac{\partial X}{\partial y}\right)\frac{d^2w_0}{dx^2}\right)\\ &+\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{2}{\cos^2\theta}\frac{\partial\Theta}{\partial y}\frac{d^3w_0}{dx^3} - \tan\theta\frac{d^2w_0}{dx^2}\frac{\partial\Theta}{\partial z}\right) + \Theta\frac{1}{\cos^2\theta}\frac{d^4w_0}{dx^4}.\end{aligned}$$

为简化后续计算，我们定义 $A_\theta := \begin{pmatrix} & {}^1\cos^2\theta - 1 \end{pmatrix}$，由此可得

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left(\mathcal{W}_2^\varepsilon(\varphi,\theta)\right) =& -\frac{1}{\varepsilon}A_\theta\frac{dw_0}{dx}\frac{\partial^2 X}{\partial y^2} + \tan\theta\frac{dw_0}{dx}\frac{\partial X}{\partial z} + \frac{d^2w_0}{dx^2}\left[A_\theta\left(1 - 2\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2}\right) + q\right]\\ &+\varepsilon\left[A_\theta\frac{d^3w_0}{dx^3}\left(2\frac{\partial\Theta}{\partial y} - X\right) + \frac{d^3w_0}{dx^3}\left(2\frac{\partial\Theta}{\partial y} - X\right) - \tan\theta\frac{d^2w_0}{dx^2}\frac{\partial\Theta}{\partial z}\right]\\ &+\varepsilon^2\Theta\frac{d^4w_0}{dx^4}\left(1 + A_\theta\right).\end{aligned}$$

最后，

$$\begin{aligned}-\mathcal{L}(\phi^\varepsilon) + \phi^\varepsilon &= -\varepsilon\left[\frac{d^3w_0}{dx^3}\left(X - 2\frac{\partial\Theta}{\partial y}\right) - X\frac{dw_0}{dx} + \varepsilon\left(\Theta\frac{d^4w_0}{dx^4} - \Theta\frac{d^2w_0}{dx^2}\right)\right]\\ &- \frac{1}{\varepsilon}A_\theta\frac{dw_0}{dx}\frac{\partial^2 X}{\partial y^2} + \tan\theta\frac{dw_0}{dx}\frac{\partial X}{\partial z} + \frac{d^2w_0}{dx^2}A_\theta\left(1 - 2\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2}\right)\\ &+ \varepsilon\left[A_\theta\frac{d^3w_0}{dx^3}\left(2\frac{\partial\Theta}{\partial y} - X\right) - \tan\theta\frac{d^2w_0}{dx^2}\frac{\partial\Theta}{\partial z}\right] + \varepsilon^2A_\theta\left[\Theta\frac{d^4w_0}{dx^4}\right],\end{aligned}$$

其中，我们定义

$$F^\varepsilon = -\left[\frac{d^3w_0}{dx^3}\left(X - 2\frac{\partial\Theta}{\partial y}\right) - X\frac{dw_0}{dx}\right] + \varepsilon\left(\Theta\left(\frac{d^4w_0}{dx^4} - \frac{d^2w_0}{dx^2}\right)\right),$$

and

$$\begin{aligned}\mathcal{J}^\varepsilon =& -\frac{1}{\varepsilon}A_\theta\frac{dw_0}{dx}\frac{\partial^2 X}{\partial y^2} + \tan\theta\frac{dw_0}{dx}\frac{\partial X}{\partial z} + \frac{d^2w_0}{dx^2}A_\theta\left(1 - 2\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2}\right)\\ &+\varepsilon\left[A_\theta\frac{d^3w_0}{dx^3}\left(2\frac{\partial\Theta}{\partial y} - X\right) - \tan\theta\frac{d^2w_0}{dx^2}\frac{\partial\Theta}{\partial z}\right] + \varepsilon^2A_\theta\left[\Theta\frac{d^4w_0}{dx^4}\right].\end{aligned} \tag{4.18}$$

于是我们有

$$-\mathcal{L}(\phi^\varepsilon) + \phi^\varepsilon = -\frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\phi^\varepsilon - \frac{1}{\cos^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\phi^\varepsilon + \phi = \varepsilon F^\varepsilon + \mathcal{J}^\varepsilon.$$

在边界 ∂R^ε 上，我们定义算子

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(u) =& \frac{1}{\cos^2\theta}\frac{\partial u}{\partial\varphi}N_1 + \frac{\partial u}{\partial\theta}N_2 = \frac{\partial u}{\partial\varphi}N_1 + \frac{\partial u}{\partial\theta}N_2 + A_\theta\frac{\partial u}{\partial\varphi}N_1\\ =& \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial y}\right)u\ N_1 + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial z}u\ N_2 + A_\theta\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial y}\right)u\ N_1\\ =& \frac{\partial u}{\partial x}N_1 + \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\ N_1 + \frac{\partial u}{\partial z}u\ N_2\right) + A_\theta\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial y}\right)u\ N_1.\end{aligned}$$

于是，我们得到

$$\mathcal{B}(X) = \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\partial X}{\partial y}N_1 + \frac{\partial X}{\partial z}N_2 + A_\theta\frac{\partial X}{\partial y}N_1\right) = \frac{1}{\varepsilon}\left(N_1 + A_\theta\frac{\partial X}{\partial y}N_1\right),$$

其中，我们使用了式（2.9）给出的边界条件。因此

$$\begin{aligned}\mathcal{B}\left(X\frac{dw_0}{dx}\right)=&\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(X\frac{dw_0}{dx}\right)N_1+\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial z}\left(X\frac{dw_0}{dx}\right)N_2+A_\theta\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(X\frac{dw_0}{dx}\right)N_1\\ =&\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\partial X}{\partial y}N_1+\frac{\partial X}{\partial z}N_2\right)\frac{dw_0}{dx}+X\frac{d^2w_0}{dx^2}N_1+A_\theta\left(X\frac{d^2w_0}{dx^2}+\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial X}{\partial y}\frac{dw_0}{dx}\right)N_1\\ =&\frac{1}{\varepsilon}N_1\frac{dw_0}{dx}+X\frac{d^2w_0}{dx^2}N_1+A_\theta\left(X\frac{d^2w_0}{dx^2}+\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial X}{\partial y}\frac{dw_0}{dx}\right)N_1\\ =&\left[\frac{1}{\varepsilon}\frac{dw_0}{dx}\left(1+A_\theta\frac{\partial X}{\partial y}\right)+X\frac{d^2w_0}{dx^2}(1+A_\theta)\right]N_1.\end{aligned}$$

类似地，我们得到

$$\mathcal{B}(\Theta)=\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial y}N_1+\frac{\partial\Theta}{\partial z}N_2+A_\theta\frac{\partial\Theta}{\partial y}N_1\right)=\frac{1}{\varepsilon}\left(XN_1+A_\theta\frac{\partial\Theta}{\partial y}N_1\right),$$

其中我们使用了 (4.3) 中给出的边界条件。因此

$$\begin{aligned}\mathcal{B}\left(\Theta\frac{d^2w_0}{dx^2}\right)=&\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\Theta\frac{d^2w_0}{dx^2}\right)N_1+\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial z}\left(\Theta\frac{d^2w_0}{dx^2}\right)N_2A_\theta\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\Theta\frac{d^2w_0}{dx^2}\right)N_1\\ =&\left(\Theta\frac{d^3w_0}{dx^3}+\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial\Theta}{\partial y}\frac{d^2w_0}{dx^2}\right)N_1+\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial\Theta}{\partial z}\frac{d^2w_0}{dx^2}N_2+A_\theta\left(\Theta\frac{d^3w_0}{dx^3}+\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial\Theta}{\partial y}\frac{d^2w_0}{dx^2}\right)N_1\\ =&\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial y}N_1+\frac{\partial\Theta}{\partial z}N_2\right)\frac{d^2w_0}{dx^2}+\Theta\frac{d^3w_0}{dx^3}N_1+A_\theta\left(\Theta\frac{d^3w_0}{dx^3}+\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial\Theta}{\partial y}\frac{d^2w_0}{dx^2}\right)N_1\\ =&\frac{1}{\varepsilon}X\frac{d^2w_0}{dx^2}N_1+\Theta\frac{d^3w_0}{dx^3}N_1+A_\theta\left(\Theta\frac{d^3w_0}{dx^3}+\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial\Theta}{\partial y}\frac{d^2w_0}{dx^2}\right)N_1\\ =&\left[\frac{1}{\varepsilon}\left(X+A_\theta\frac{\partial\Theta}{\partial y}\right)\frac{d^2w_0}{dx^2}+\Theta\frac{d^3w_0}{dx^3}(1+A_\theta)\right]N_1.\end{aligned}$$

由此可得，

$$\begin{aligned}\mathcal{B}\left(\mathcal{W}_2^\varepsilon\right)=&\mathcal{B}\left(w_0\right)-\varepsilon\mathcal{B}\left(X\frac{dw_0}{d\varphi}\right)+\varepsilon^2\mathcal{B}\left(\Theta\frac{d^2w_0}{d\varphi^2}\right)\\ =&-\frac{dw_0}{dx}A_\theta\left(\frac{\partial X}{\partial y}-1\right)N_1+\varepsilon\left[A_\theta\left(\frac{\partial\Theta}{\partial y}-X\right)\frac{d^2w_0}{dx^2}\right]N_1+\varepsilon^2\Theta\frac{d^3w_0}{dx^3}\left(1+A_\theta\right)N_1.\end{aligned}$$

最后，

$$\mathcal{B}\left(\phi^\varepsilon\right)=\mathcal{B}\left(w^\varepsilon\right)-\mathcal{B}\left(\mathcal{W}_2^\varepsilon\right)=-\mathcal{B}\left(\mathcal{W}_2^\varepsilon\right),$$

因为现在，根据方程 (1.4)，我们有 $\mathcal{B}\left(w^\varepsilon\right)=\quad^1\cos^2\underline{\theta}\ \overset{\partial}{w}_{\partial\varphi}\overset{\varepsilon}{}N_1+\overset{\partial}{}w_{\partial\theta}\overset{\varepsilon}{}N_2=0.$

我们定义

$$\mathcal{H}^\varepsilon=-\Theta\frac{d^3w_0}{dx^3},\tag{4.19}$$

and

$$r^\varepsilon=A_\theta\left[\left(\frac{\partial X}{\partial y}-1\right)\frac{dw_0}{dx}-\varepsilon\left(\frac{\partial\Theta}{\partial y}-X\right)\frac{d^2w_0}{dx^2}-\varepsilon^2\Theta\frac{d^3w_0}{dx^3}\right].$$

因此，函数 ϕ^ε 满足以下边值问题

$$\begin{cases} -\mathcal{L}(\phi^\varepsilon) + \phi^\varepsilon = \varepsilon F^\varepsilon + \mathcal{J}^\varepsilon \ \ in\ R^\varepsilon; \\ \mathcal{B}(\phi^\varepsilon) = \varepsilon^2 \mathcal{H}^\varepsilon N_1 + r^\varepsilon N_1 \ \ on\ \ \partial R^\varepsilon, \\ \phi^\varepsilon(\cdot,\theta) \qquad 2\pi - \text{periodic}. \end{cases} \tag{4.20}$$

现在我们考虑问题 (4.20) 的变分形式：求 $\phi^\varepsilon \in H^1_{per}(R^\varepsilon, \cos\ \theta)$，使得

$$\begin{aligned} a_\varepsilon(\phi^\varepsilon, \psi) = &\int_{R^\varepsilon} F^\varepsilon \psi \cos\theta \ d\varphi d\theta + \frac{1}{\varepsilon}\int_{R^\varepsilon} \mathcal{J}^\varepsilon \psi \cos\theta \ d\varphi d\theta \\ &+\varepsilon \int_{\partial R^\varepsilon} \mathcal{H}^\varepsilon N_1 \psi \cos\theta \ dS + \frac{1}{\varepsilon}\int_{\partial R^\varepsilon} r^\varepsilon N_1 \psi \cos\theta \ dS. \end{aligned} \tag{4.21}$$

注意，函数 ϕ^ε 必须满足关于 ε 的一致先验估计。事实上，若在 (4.21) 中取 $\psi = \phi^\varepsilon$，则得到：

$$\begin{aligned} |||\phi^\varepsilon|||^2_{H^1(R^\varepsilon,cos\theta)} =& |a_\varepsilon(\phi^\varepsilon, \phi^\varepsilon)| \le ||\phi^\varepsilon||_{L^2(R^\varepsilon,\cos\theta)} ||F^\varepsilon||_{L^2(R^\varepsilon,\cos\theta)} + \frac{1}{\varepsilon}||\phi^\varepsilon||_{L^2(R^\varepsilon,\cos\theta)} ||\mathcal{J}^\varepsilon||_{L^2(R^\varepsilon,\cos\theta)} \\ &+\varepsilon ||\phi^\varepsilon||_{L^2(\partial R^\varepsilon,\cos\theta)} ||\mathcal{H}^\varepsilon N_1||_{L^2(\partial R^\varepsilon,\cos\theta)} + \frac{1}{\varepsilon}||\phi^\varepsilon||_{L^2(\partial R^\varepsilon,\cos\theta)} ||r^\varepsilon N_1||_{L^2(\partial R^\varepsilon,\cos\theta)}. \end{aligned} \tag{4.22}$$

为了估计 $a_\varepsilon(\phi^\varepsilon, \phi^\varepsilon)$，我们需要对 F^ε, $\mathcal{J}^\varepsilon$, $\mathcal{H}^\varepsilon$ 和 r^ε 得到精确的不等式。根据它们的定义，显然这些估计可由对 w_0, X 和 Θ 所得到的估计推出。由于 f 是光滑函数，根据经典正则性结果，均匀化问题的解 w_0 具有足够的正则性，其直到四阶的导数均属于 $L^\infty(0, 2\pi)$。注意，对于 X 和 $\Theta \in H^1(Y^*)$，类似的结论也成立。

$$\begin{aligned} \|F^\varepsilon\|_{L^2(R^\varepsilon,\cos\theta)} \le& \left\| \frac{d^3 w_0}{dx^3}\left(X - 2\frac{\partial\Theta}{\partial y}\right) - X\frac{dw_0}{dx}\right\|_{L^2(R^\varepsilon,\cos\theta)} + \varepsilon \left\|\Theta\left(\frac{d^4 w_0}{dx^4} - \frac{d^2 w_0}{dx^2}\right)\right\|_{L^2(R^\varepsilon,\cos\theta)} \\ \le& \left\|\frac{d^3 w_0}{dx^3}\right\|_{L^\infty}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{L}}\|X\|_{L^2(Y^*)} + 2\sqrt{\frac{\varepsilon}{L}}\left\|\frac{\partial\Theta}{\partial y}\right\|_{L^2(Y^*)}\right) + \sqrt{\frac{\varepsilon}{L}}\|X\|_{L^2(Y^*)}\left\|\frac{dw_0}{dx}\right\|_{L^\infty} \\ &+\varepsilon\sqrt{\frac{\varepsilon}{L}}\|\Theta\|_{L^2(Y^*)}\left(\left\|\frac{d^4 w_0}{dx^4}\right\|_{L^\infty} + \left\|\frac{d^2 w_0}{dx^2}\right\|_{L^\infty}\right) \le C_1\sqrt{\varepsilon} + C_2\sqrt{\varepsilon} + C_3\varepsilon\sqrt{\varepsilon} \le K_0\sqrt{\varepsilon}. \end{aligned}$$

因此，由于 X 的周期性以及命题 4.2，我们可知存在一个与 ε 无关的常数 K_0，使得

$$\|F^\varepsilon\|_{L^2(R^\varepsilon,\cos\theta)} \le K_0\sqrt{\varepsilon}. \tag{4.23}$$

此外，根据式 (4.18) 中 $\mathcal{J}^\varepsilon$ 的定义以及命题 4.2，我们可以得到 $\mathcal{J}^\varepsilon$ 的一个估计。为此，我们将对构成 $\mathcal{J}^\varepsilon$ 的各项分别进行估计。对于 (4.18) 中的第一项，有

$$\left\|A_\theta \frac{dw_0}{dx}\frac{\partial^2 X}{\partial y^2}\right\|_{L^2(R^\varepsilon,\cos\theta)} \le \sqrt{\frac{\varepsilon}{L}}\|A_\theta\|_{L^\infty(R^\varepsilon)}\left\|\frac{dw_0}{dx}\right\|_{L^\infty(R^\varepsilon)}\left\|\frac{\partial^2 X}{\partial y^2}\right\|_{L^2(Y^*)}.$$

现在我们来计算

$$\|A_\theta\|_{L^\infty(R^\varepsilon)} = \sup_{(\varphi,\theta)\in R^\varepsilon}\left(\frac{1}{\cos^2\theta} - 1\right) = \left(\frac{1}{\cos^2(\varepsilon g_1)} - 1\right) = A_\theta(\varepsilon g_1),$$

其中 g_1 定义于（1.3）中。因此，

$$\left\| A_\theta \frac{dw_0}{dx} \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} \right\|_{L^2(R^\varepsilon, \cos\theta)} \leq \sqrt{\frac{\varepsilon}{L}} C_1 A_\theta (\varepsilon g_1).$$

考虑第二项，可得

$$\left\| \tan\theta \frac{dw_0}{dx} \frac{\partial X}{\partial z} \right\|_{L^2(R^\varepsilon, \cos\theta)} \leq \sqrt{\frac{\varepsilon}{L}} \|\tan\theta\|_{L^\infty(R^\varepsilon)} \left\| \frac{dw_0}{dx} \right\|_{L^\infty(R^\varepsilon)} \left\| \frac{\partial X}{\partial z} \right\|_{L^2(Y^*)},$$

且 $\|\tan^\theta\|_{L^\infty(R^\varepsilon)} = \sup_{(\varphi,\theta)\in R^\varepsilon} \tan\theta = \tan(\varepsilon g_1)$。因此，

$$\left\| \tan\theta \frac{dw_0}{dx} \frac{\partial X}{\partial z} \right\|_{L^2(R^\varepsilon, \cos\theta)} \leq \sqrt{\frac{\varepsilon}{L}} C_2 \tan(\varepsilon g_1).$$

对于其余各项，有

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{d^2 w_0}{dx^2} A_\theta \left(1 - 2\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2}\right) \right\|_{L^2(R^\varepsilon, \cos\theta)} &\leq \left\| \frac{d^2 w_0}{dx^2} \right\|_{L^\infty(R^\varepsilon)} \|A_\theta\|_{L^\infty(R^\varepsilon)} \left(1 + 2\sqrt{\frac{\varepsilon}{L}} \left\| \frac{\partial X}{\partial y} \right\|_{L^2(Y^*)}\right) \\
&+ \left\| \frac{d^2 w_0}{dx^2} \right\|_{L^\infty(R^\varepsilon)} \|A_\theta\|_{L^\infty(R^\varepsilon)} \sqrt{\frac{\varepsilon}{L}} \left\| \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} \right\|_{L^2(Y^*)} \\
&\leq \sqrt{\frac{\varepsilon}{L}} C_3 A_\theta(\varepsilon g_1),
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
\left\| A_\theta \frac{d^3 w_0}{dx^3} \left(2\frac{\partial \Theta}{\partial y} - X\right) \right\|_{L^2(R^\varepsilon, \cos\theta)} &\leq \left\| A_\theta \frac{d^3 w_0}{dx^3} \right\|_{L^\infty(R^\varepsilon)} \sqrt{\frac{\varepsilon}{L}} \left(2 \left\| \frac{\partial \Theta}{\partial y} \right\|_{L^2(Y^*)} - \|X\|_{L^2(Y^*)}\right) \\
&\leq \sqrt{\frac{\varepsilon}{L}} C_4 A_\theta(\varepsilon g_1).
\end{aligned}$$

我们还有

$$\begin{aligned}
\left\| \tan\theta \frac{d^2 w_0}{dx^2} \frac{\partial \Theta}{\partial z} \right\|_{L^2(R^\varepsilon, \cos\theta)} &\leq \sqrt{\frac{\varepsilon}{L}} \|\tan\theta\|_{L^\infty(R^\varepsilon)} \left\| \frac{d^2 w_0}{dx^2} \right\|_{L^\infty(R^\varepsilon)} \left\| \frac{\partial \Theta}{\partial z} \right\|_{L^2(Y^*)} \\
&\leq \sqrt{\frac{\varepsilon}{L}} C_5 \tan(\varepsilon g_1).
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
\left\| A_\theta \Theta \frac{d^4 w_0}{dx^4} \right\|_{L^2(R^\varepsilon, \cos\theta)} &\leq \sqrt{\frac{\varepsilon}{L}} \|A_\theta\|_{L^\infty(R^\varepsilon)} \left\| \frac{d^4 w_0}{dx^4} \right\|_{L^\infty(R^\varepsilon)} \|\Theta\|_{L^2(Y^*)} \\
&\leq \sqrt{\frac{\varepsilon}{L}} C_6 A_\theta(\varepsilon g_1).
\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{J}^\varepsilon\|_{L^2(R^\varepsilon, \cos\theta)} &\leq \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{\frac{\varepsilon}{L}} C_1 A_\theta (\varepsilon g_1) + \sqrt{\frac{\varepsilon}{L}} C_2 \tan(\varepsilon g_1) + \sqrt{\frac{\varepsilon}{L}} C_3 A_\theta(\varepsilon g_1) \\
&+ \varepsilon \left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{L}} C_4 A_\theta(\varepsilon g_1) + \sqrt{\frac{\varepsilon}{L}} C_5 \tan(\varepsilon g_1) \right) + \varepsilon^2 \sqrt{\frac{\varepsilon}{L}} C_6 A_\theta(\varepsilon g_1) \qquad (4.24) \\
&\leq c_1 A_\theta(\varepsilon g_1) \sqrt{\varepsilon} \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon + \varepsilon^2\right) + c_2 \tan(\varepsilon g_1) \sqrt{\varepsilon}(1 + \varepsilon).
\end{aligned}$$

应用泰勒级数展开，我们得到：

$$A_\theta\left(\varepsilon g_1\right)=\left(\varepsilon g_1\right)^2+\frac{2}{3}\left(\varepsilon g_1\right)^4+\cdots$$

and

$$\tan(\varepsilon g_1)=\varepsilon g_1+\frac{1}{3}\left(\varepsilon g_1\right)^3+\cdots$$

将这些代入（4.24），得到：

$$\begin{aligned}\|\mathcal{J}^\varepsilon\|_{L^2(R^\varepsilon,\cos\theta)}&\leq c_1\left(\left(\varepsilon g_1\right)^2+\frac{2}{3}\left(\varepsilon g_1\right)^4+\cdots\right)\sqrt{\varepsilon}\left(1+\frac{1}{\varepsilon}+\varepsilon+\varepsilon^2\right)\\&\quad+c_2\left(\varepsilon g_1+\frac{1}{3}\left(\varepsilon g_1\right)^3+\cdots\right)\sqrt{\varepsilon}(1+\varepsilon)\\&\leq C_1'\varepsilon^2\sqrt{\varepsilon}\left(1+\frac{1}{\varepsilon}+\varepsilon+\varepsilon^2\right)+C_2'\varepsilon\sqrt{\varepsilon}(1+\varepsilon)\leq K_1\varepsilon\sqrt{\varepsilon}.\end{aligned}\tag{4.25}$$

注意，K_0 和K_1 取决于L （X的范数、 Θ 和 $\partial_y\Theta$ 在$L^2(Y^*)$中的范数的周期），以及dw^0dx 、$d^2w_0dx^2$ ，$d^3w_0dx^3$ 和$d^4w_0\ dx^4$ 在$L^\infty(0,2\pi)$中的范数。

现在，将 $\partial\mathrm{R}^\varepsilon$的振荡部分记为 $\partial_0\mathrm{R}^\varepsilon=\{(\varphi_1,\varepsilon g(\varphi_1/\varepsilon)),0<\varphi_1<2\pi\}$，固定部分记为 $\partial\mathrm{f}\,\mathrm{R}^\varepsilon=\{(\varphi_1,0),0<\varphi_1<2\pi\}$，并将 $\partial\mathrm{R}^\varepsilon$的侧边部分记为 $\partial_l\mathrm{R}^\varepsilon=\{(0,\theta_1),\ 0<\theta_1<\varepsilon g(0)\}\cup\{(2\pi,\theta_1),0<\theta_1<\varepsilon g(1/\varepsilon)\}$。由（4.19）可得：

$$\begin{aligned}||\mathcal{H}^\varepsilon N_1||^2_{L^2(\partial R^\varepsilon,\cos\theta)}&=\int_{\partial R^\varepsilon}\left|\Theta\left(\frac{\varphi_1}{\varepsilon},\frac{\theta_1}{\varepsilon}\right)\frac{d^3w_0}{dx^3}(\varphi_1)N_1(\varphi_1,\theta_1)\right|^2\cos\theta dS\\&\leq\left|\left|\frac{d^3w_0}{dx^3}\right|\right|^2_{L^\infty(0,2\pi)}\left(\int_{\partial_0R^\varepsilon}|\Theta|^2dS+\int_{\partial_fR^\varepsilon}|\Theta|^2dS\right)\\&\leq K_2\left(\sum_{k=1}^{1/\varepsilon L}\varepsilon\int_0^L|\Theta(y,g(y))|^2dy+\sum_{k=1}^{1/\varepsilon L}\varepsilon\int_0^L|\Theta(y,0)|^2dy\right)\\&\leq\frac{K_2}{L}||\Theta||^2_{L^2(\partial Y^*)}.\end{aligned}$$

注意，常数 $K_2=||d^3w^3{}^0||_{L^\infty dx(0,2\pi)}$ 与 ε 无关，并且我们利用了 Θ 的周期性，得到 $\int_{\partial lR_\varepsilon}|\Theta(\frac{\varphi}{\varepsilon},\frac{\theta}{\varepsilon})|^2dS=0$。因此，存在一个与 ε 无关的 常数 $K_2>0$，使得

$$||\mathcal{H}^\varepsilon N_1||_{L^2(\partial R^\varepsilon,cos\theta)}\leq\widetilde{K_2}.\tag{4.26}$$

此外

$$\begin{aligned}\|r^\varepsilon\|_{L^2(\partial R^\varepsilon,\cos\theta)}&\leq\|A_\theta\|_{L^\infty(0,2\pi)}\left(\left\|\frac{\partial X}{\partial y}\right\|_{L^2(\partial R^\varepsilon,\cos\theta))}+1\right)\left\|\frac{dw_0}{dx}\right\|_{L^\infty(0,2\pi)}\\&\quad+\varepsilon\|A_\theta\|_{L^\infty(0,2\pi)}\left(\left\|\frac{\partial\Theta}{\partial y}\right\|_{L^2(\partial R^\varepsilon,\cos\theta))}+\|X\|_{L^2(\partial R^\varepsilon,\cos\theta))}\right)\left\|\frac{d^2w_0}{dx^2}\right\|_{L^\infty(0,2\pi)}\\&\quad+\varepsilon^2\|A_\theta\|_{L^\infty(0,2\pi)}\|\Theta\|_{L^2(\partial R^\varepsilon,\cos\theta))}\left\|\frac{d^3w_0}{dx^3}\right\|_{L^\infty(0,2\pi)}\\&\leq CA_\theta\left(\varepsilon g_1\right)\sqrt{\varepsilon}\left(1+\varepsilon+\varepsilon^2\right)\leq C\left(\left(\varepsilon g_1\right)^2+\frac{2}{3}\left(\varepsilon g_1\right)^4+\cdots\right)\sqrt{\varepsilon}\left(1+\varepsilon+\varepsilon^2\right)\\&\leq\widetilde{K_3}\varepsilon^{5/2}.\end{aligned}$$

因此

$$\|r^{\varepsilon}N_1\|_{L^2(\partial R^{\varepsilon},\cos\theta)} \leq \widetilde{K_3}\varepsilon^{5/2}. \tag{4.27}$$

因此,

$$\begin{aligned}
|||\phi^{\varepsilon}|||^2_{H^1(R^{\varepsilon},cos\theta)} &= |a_{\varepsilon}(\phi^{\varepsilon},\phi^{\varepsilon})| \\
&\leq ||\phi^{\varepsilon}||_{L^2(R^{\varepsilon},\cos\theta)}||F^{\varepsilon}||_{L^2(R^{\varepsilon},\cos\theta)} + \frac{1}{\varepsilon}||\phi^{\varepsilon}||_{L^2(R^{\varepsilon},\cos\theta)}||\mathcal{J}^{\varepsilon}||_{L^2(R^{\varepsilon},\cos\theta)} \\
&+ \varepsilon||\phi^{\varepsilon}||_{L^2(\partial R^{\varepsilon},\cos\theta)}||\mathcal{H}^{\varepsilon}N_1||_{L^2(\partial R^{\varepsilon},\cos\theta)} + \frac{1}{\varepsilon}||\phi^{\varepsilon}||_{L^2(\partial R^{\varepsilon},\cos\theta)}||r^{\varepsilon}N_1||_{L^2(\partial R^{\varepsilon},\cos\theta)} \\
&\leq ||\phi^{\varepsilon}||_{L^2(R^{\varepsilon},\cos\theta)}K_0\sqrt{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon}||\phi^{\varepsilon}||_{L^2(R^{\varepsilon},\cos\theta)}K_1\varepsilon\sqrt{\varepsilon} \\
&+ \varepsilon||\phi^{\varepsilon}||_{L^2(\partial R^{\varepsilon},\cos\theta)}||\mathcal{H}^{\varepsilon}N_1||_{L^2(\partial R^{\varepsilon},\cos\theta)} + \frac{1}{\varepsilon}||\phi^{\varepsilon}||_{L^2(\partial R^{\varepsilon},\cos\theta)}||r^{\varepsilon}N_1||_{L^2(\partial R^{\varepsilon},\cos\theta)}.
\end{aligned}$$

现在，我们已具备估计 $a_{\varepsilon}(\phi^{\varepsilon},\phi^{\varepsilon})$ 所需的全部条件。由 (4.23)、(4.25)、(4.27) 和 (4.26)，根据 (4.22) 可得

$$|||\phi^{\varepsilon}|||^2_{H^1(R^{\varepsilon},\cos\theta)} \leq \sqrt{\varepsilon}\,(K_0+K_1)\,||\phi^{\varepsilon}||_{L^2(R^{\varepsilon},\cos\theta)} + \left(\varepsilon\widetilde{K_2} + \varepsilon^{3/2}\widetilde{K_3}\right)||\phi^{\varepsilon}||_{L^2(\partial R^{\varepsilon},\cos\theta)}.$$

因此，所需结果可由以下事实得出，其证明见 [6]: 若 $\psi \in H^1(R^{\varepsilon},cos\theta)$，则存在一个与 ε 无关的常数 C，使得

$$||\psi||_{L^2(\partial R^{\varepsilon},cos\theta)} \leq C\varepsilon^{-1/2}||\psi||_{H^1(R^{\varepsilon},cos\theta)}.$$

Thus

$$\begin{aligned}
|||\phi^{\varepsilon}|||^2_{H^1(R^{\varepsilon},\cos\theta)} &\leq \sqrt{\varepsilon}\,(K_0+K_1)\,||\phi^{\varepsilon}||_{L^2(R^{\varepsilon},\cos\theta)} + \left(\varepsilon\widetilde{K_2} + \varepsilon^{3/2}\widetilde{K_3}\right)C\varepsilon^{-1/2}||\phi^{\varepsilon}||_{H^1(R^{\varepsilon},\cos\theta)} \\
&\leq \sqrt{\varepsilon}K||\phi^{\varepsilon}||_{H^1(R^{\varepsilon},\cos\theta)}.
\end{aligned}$$

□

5 总结

在定理 3.2 中建立弱收敛之后，下一步自然是分析方程 1.1 中含有非线性项 $f(u)$ 的半线性问题的解的收敛性。此外，还可以探讨向抛物型问题和双曲型问题的延拓。另外，研究球面上高度振荡区域中的拉普拉斯-贝尔特拉米算子的谱性质，或许有助于深入了解相关演化方程的平衡解集合。最后，还可以考虑一般流形上的类似振荡问题。

致谢：第三位作者获得了高等教育人员改进协调机构（CAPES）的资助，并部分获得圣保罗州研究基金会（FAPESP）202/14075-6项目的资助。

参考文献

[1] J. M. Arrieta, A. N. Carvalho, M. C. Pereira 和 R. P. Silva，具有高振荡边界的薄域中的半线性抛物型问题，《非线性分析》，**74** (2011)，第15期，5111-5132。

[2] J. M. Arrieta, J. C. Nakasato 和 M. Villanueva-Pesqueira，具有不同阶振荡边界的三维薄域中的均匀化，《非线性分析》，**251** (2025)，论文编号 113667，共 19 页。[3] S. R. M. Barros 和 M. C. Pereira，反应项集中于边界的薄域中的半线性椭圆方程，《数学分析与应用杂志》**441** (2016)，第 1 期，375–392。[4] A. Bensoussan、J.-L. Lions、G. Papanicolaou，周期结构的渐近分析，数学研究丛书，*5*，North-Holland Publishing Co.，阿姆斯特丹-纽约，1978。[5] D. Cionarescu 和 P. Donato，均匀化导论，牛津数学应用讲座丛书**17** 克拉伦登出版社，牛津大学出版社，纽约，1999。[6] D. Cionarescu 和 J. S. J. Paulin，网格结构的均匀化，*Srpinger-Verlag*，1980。[7] D. Grieser，数理物理、整体分析与谱几何中的细管，纯粹数学研讨会论文集**77** (2008)，565–593。[8] J. K. Hale 和 G. Raugel，薄域上的反应扩散方程，纯粹与应用数学杂志(9)**71**(1992)，第 1 期，33–95。[9] Z. Lu 和 J. Rowlett，塌缩域的特征值与漂移拉普拉斯算子，数学研究快报**19** (2012)，第 3 期，627–648。[10] M. C.Pereiraand R.P. Silva，高振荡薄域中纽曼问题的误差估计，离散与连续动力系统，**33** (2013)，第 2 期，803–817。[11] M. C. Pereira 和 R. P. Silva，关于薄域上的 p-拉普拉斯算子的若干评注，非线性偏微分方程及其应用进展**86**，Birkhäuser/Springer，查姆，(2015)，389–403。[12] M. E. Taylor，偏微分方程，1. 基础理论，Springer，1996。