锯齿持久性：神经对时变刺激的反应 i

Yuri Gardinazzi[1,2], Alessio Ansuini[1], Eugenio Piasini[3], Fabio Anselmi[2], 和 Matteo Biagetti*[1]

[1]Area Science Park，Padriciano 99，的里雅斯特[2]的里雅斯特大学数学、信息学与地球科学系，Via Economo 12/3，的里雅斯特[3]SISSA，Via Bonomea265，的里雅斯特

arXiv:2603.03037v1 [math.AT] 3 Mar 2026

摘要

我们使用拓扑数据分析研究 Sensorium 2023 数据集中的神经群体活动。该数据集记录了数千个小鼠视觉皮层神经元对多种视频刺激的反应。针对每段视频，我们根据神经元活动逐帧构建立方复形，并应用锯齿持久同调来捕捉拓扑结构随时间的演变。我们使用持久性景观概括这些动态，从而获得时间特征的紧凑向量化表征。我们重点关注一维拓扑特征——数据中的环，它们反映了神经共同激活的协同周期性模式。为检验这些特征所含信息，我们对不同视频的重复试次进行聚类，依据的是由此得到的拓扑神经表征。结果表明，这些拓扑描述符能够可靠地区分对不同刺激的神经反应。本研究揭示了不断演变的神经元活动与可解释的拓扑特征之间的联系，推动了拓扑数据分析在复杂动力系统神经编码研究中的应用。

1 引言

神经科学的一项根本挑战，是理解有关外部世界以及动物内部状态和目标的信息如何在大脑中编码。现代电生理和成像记录技术能够以单细胞分辨率同时记录大量神经元的活动，并推动了用于分析神经元活动的集体模式及其表征属性的方法的发展 [1]。

这项研究的核心概念之一是神经流形——即在高维神经状态空间中对群体活动进行的低维几何嵌入 [2]。实验和理论研究表明，神经元活动通常位于此类流形上，其结构反映了潜在的任务变量，例如视觉皮层物体识别中的物体身份 [3, 4, 5]。神经流形学习方法——包括线性方法（如主成分分析）和非线性方法（如 Isomap、UMAP）——已被用于深入研究多种系统，例如小鼠 [6] 和斑马鱼 [7], 的头部方向环路、网格细胞 [8], 、多个物种的运动区域 [9, 10] ，以及秀丽隐杆线虫运动期间的头部神经节 [11]。

除了对神经流形进行几何刻画之外，拓扑数据分析 通过关注形状不变量而非坐标，提供了另一层理解。持久同调——拓扑数据分析中的一项关键技术——以稳健、抗噪声的方式捕捉多尺度拓扑特征（如环和空腔） [12, 13]。已有若干研究在计算神经科学的背景下使用这些工具（例如 [14, 15]）。然而，经典的持久同调

*联系邮箱：matteo.biagetti@areasciencepark.it

假定一种静态 点云滤过。相比之下，神经元活动会动态演化，尤其是在时变刺激或行为条件下。锯齿持久同调 [16] 将持久性扩展到允许添加和删除点的序列；在我们的语境中，这些点即随时间变化的神经元活动，从而能够直接追踪拓扑结构如何随之变化。

在这项工作中，我们利用之字形持久性分析 Sensorium 2023 数据集中的群体响应 [17], 。该数据集记录了小鼠观看灰度视频时视觉皮层的神经元活动。我们开发了一套处理流程，逐帧处理每段视频对应的神经元活动，并将其转化为反映神经元活动的动态拓扑形状序列。随后，我们使用之字形持久性追踪这些形状随时间的变化，重点关注神经共同激活的周期性模式。我们使用持久性景观总结这些不断演变的特征 [18], ，从而以紧凑的向量化表示呈现拓扑结构随时间的变化。

我们的实验探讨了三个问题：(A) 对同一只小鼠重复呈现不同视频时，锯齿描述符能否区分这些视频？(B) 这些描述符是否包含有关粗略视频类别（例如，自然场景、高斯、波浪）的信息？(C) 这些描述符是否包含小鼠身份信息？结果表明：

(A1) 不同视频的重复呈现能够可靠地按各自影片进行聚类，在不同视频类型中均取得较高的调整兰德指数 [19] 。(A2) 对每段视频内的帧顺序进行打乱后，聚类性能大幅下降，表明时间顺序至关重要。对空间网格进行随机打乱（按平面、按视频分别处理）会使性能下降至接近随机水平，表明空间连续性同样至关重要。(B) 使用我们的描述符训练线性分类器来预测视频类型，所得准确率略高于随机水平。(C) 使用我们的描述符训练线性分类器进行小鼠识别，所得准确率仅略高于随机水平。

总体而言，这些结果表明，对逐帧活动场应用之字形持久性，可以获得紧凑且易于解释的拓扑特征，并为特定动态刺激提供信息。这种方法为未来研究开辟了一个很有前景的方向：将拓扑数据分析扩展到捕捉神经表征的时间结构，并有望应用于不同的行为情境、脑区，或研究随时间发生的学习与适应。

2 数据集

Sensorium 2023 电影数据集 [17] 包含来自行为状态下小鼠视觉皮层的双光子钙成像数据，这些数据是在反复播放视频片段期间记录的。对于每只小鼠，研究人员在初级视觉皮层的多个成像平面（z 切片）上同步记录神经元活动。该数据集针对每个视频帧提供各平面中所有记录到的神经元的单次试验荧光响应，以及细胞体的二维空间坐标和行为数据（例如瞳孔直径、跑步机速度）。

我们考虑训练集发布版本中的 5 只小鼠的一个子集。我们选取属于以下类别的视频：NATURALISTIC, GAUSSIAN, WAVES 和 MOVING DOT。每个类别包含不同的视频，并有多次重复呈现。[1] 在这个子集中，每次扫描包含 10 z 个成像平面，每个平面平均约有 800 个神经元，因此每只小鼠对应数千个单元。刺激是以固定帧率呈现的灰度视频；数据集作者已对反应进行预处理，并使其与刺激帧时间对齐。[2]

[1]更多详情请参见附录 A。[2]我们的分析未纳入行为数据，而这些数据有助于更细致地考察神经反应。我们将此留待未来研究。

我们按以下方式组织数据：对于每只小鼠 a、平面 p、视频 v 和帧 t，提取该平面内各神经元的单次试验神经反应向量 $r_{a,p,v}(t)$。我们仅保留属于活动视频的帧（排除试次间空白）。为进行后续分析，我们将 r 转换为 $\delta_{a,p,v}(t) = (r_{a,p,v}(t) - \bar{r}_{a,p,v})/\bar{r}_{a,p,v}$，其中平均值是对帧求得的，因此 δ 是归一化后的反应，其取值范围从 -1（无反应）到任意正值，并且在每只小鼠的平均反应处为零。每个 δ 都使用分段三次样条插值映射到二维网格上。这些逐帧网格是立方复形的输入，供下文介绍的锯齿流程使用。

3 方法

我们根据逐帧二维活动网格（每个 z-平面一个）构建一系列复形，并通过之字形持久性提取其不断演变的拓扑特征。

对于每只小鼠 a、平面 p、视频 v和帧 t，我们都有一个位于固定二维网格上的二维活动$\delta_{a,\ p,\ v}(t)$（见第2节）。我们通过选取数值超过阈值 $\delta_{\text{threshold}} = 0$（即高于跨帧每个神经元均值的活动）的所有网格点（及其关联的边/正方形），构建超水平集立方复形$\mathcal{K}_{a,\ p,\ v}(t)$。由此，每帧得到一个二维立方复形。[3]

为便于使用计算之字形持久性的公开可用代码[4]，我们将每个$\mathcal{K}_{a,\ p,\ v}(t)$映射为单纯复形：将每个活动正方形的角点集闭合为一个抽象单纯形，然后取其2-骨架：

$$\mathcal{S}_{a,p,v}(t) \;=\; \mathrm{Sk}_2\Big(\bigcup\{C \texttt{ active (square/edge/vertex) at } t\}\, \langle V(C)\rangle,\Big). \tag{1}$$

这里，C 遍历活动立方胞腔（顶点、边、正方形），$V(C)$表示其网格角顶点的集合，而 $\langle V(C)\rangle$ 表示以 $V(C)$为顶点的抽象单纯形（在单纯形树中，插入 $\langle V(C)\rangle$会自动插入其所有面）。具体而言，我们：(i) 插入所有顶点（0-单形）；(ii) 插入所有活动网格边（1-单形）；(iii) 对每个角点为 v_{00}，v_{10}，v_{01}，v_{11}的活动正方形，插入3-单形 $[v_{00}, v_{10}, v_{01}, v_{11}]$，并保留其2-骨架。这并非对正方形进行三角剖分，而是一种抽象的“闭包”，它会添加两条对角线以及四个角点之间的所有三角形面。[5]

为每一帧建立单纯复形后，我们现在通过在中间步骤取交集，构造一个覆盖连续帧的交错序列：

$$\mathcal{S}_{a,p,v}(t_1) \;\hookleftarrow\; \mathcal{S}_{a,p,v}(t_1) \cap \mathcal{S}_{a,p,v}(t_2) \;\hookrightarrow\; \mathcal{S}_{a,p,v}(t_2) \;\hookleftarrow\; \cdots \tag{2}$$

这种“交集锯齿”与我们的实现相符，其中偶数层包含相邻帧的公共单形。我们使用基于 [23] 针对神经网络层的实现编写的代码，在该序列上计算维度为 1 的锯齿持久同调（H_1）。每个 H_1 锯齿条形码都映射为随时间索引变化的持久性景观 Λ_k，其中 k 表示景观层。我们以 50 的分辨率对景观进行采样，并保留前 5 个景观层（$k = 1$，.....，5），从而为每个平面生成一个 250维向量。

4 实验

我们评估锯齿描述符能否在三种设置下捕获刺激信息：(A) 对同一小鼠观看的同一视频类型中不同视频的重复呈现进行聚类；(B) 对同一小鼠观看的视频类型进行分类；以及 (C) 跨小鼠分类。每个试次均表示为一个 2500 维向量，该向量通过拼接 10 z成像平面得到。

[3]立方复形也已用于时变功能性磁共振成像（功能性磁共振成像），参见 [20]。[4]我们结合使用 Dionysus2 [21] 和 fastzigzag [22]，详情见附录 B。[5]有关该算法的详情及对这一选择的讨论，请参阅附录 B。

聚类方案 (A)。 对于给定的小鼠和视频类型，我们对该类型中不同视频的重复呈现进行聚类。聚类前，我们将所有数据向量归一化至范围 $[0, 1]$，并通过在待评估的合并数据集上拟合主成分分析，将维度降至 10 维。随后，我们应用凝聚层次聚类（沃德连接法，欧几里得距离），并将聚类数设为真实标签中的类别数。性能以调整兰德指数报告，其随机水平为 ≈ 0)，并报告 20 次重采样的均值 $\pm$ 标准差。每次重采样中，我们抽取平衡子集（条件允许时通常每类抽取 10 个样本）。作为一致性检验，我们进行两种不同的测试：(i) 在每个视频内对帧进行置换，且在各成像平面间采用相同的置换方式（破坏时间顺序，同时保留逐帧空间结构）；(ii) 对每个视频的每个成像平面上的像素值进行一次置换（破坏空间连续性，同时基本保留边缘活动统计量）。这些实验的结果见表1。[6]

条件	基线调整兰德指数	帧乱序调整兰德指数	网格打乱调整兰德指数
自然场景	0.945 ± 0.107	0.194 ± 0.118	0.180 ± 0.153
高斯	0.702 ± 0.156	0.018 ± 0.024	0.081 ± 0.072
波浪	0.619 ± 0.197	-0.005 ± 0.011	0.028 ± 0.004

表1：小鼠 2–10 在 20 次运行中的聚类调整兰德指数（均值 $\pm$ 标准差）。基线使用未处理的数据。帧打乱是在每个视频内打乱帧的顺序。网格打乱则是在每个视频中对每个平面的像素打乱一次。

分类方案 (B) 视频类型。对于给定的小鼠，我们训练一个线性逻辑回归分类器，根据 2500 维描述符预测视频类型（例如，自然场景、高斯、波浪）。我们创建分层的 80/20 训练/测试划分，并在 5 个随机划分上重复此过程；得到的交叉验证准确率为 $\mathbf{0.69 \pm 0.06}$。我们还报告每个类别的 F1分数，以及汇总各划分测试集预测结果得到的混淆矩阵（见附录 C 中的图7）。

分类方案（C）小鼠身份。我们同样训练了一个线性逻辑回归分类器，使用 2500 维描述符预测小鼠身份，并汇集 5 只小鼠观看所选类型视频的所有可用数据。由于数据集构建方式确保同一视频不会在不同小鼠之间共享，这项任务检验描述符是否主要反映个体小鼠特征。在这种情况下，交叉验证准确率为 $\mathbf{0.36 \pm 0.03}$。汇总混淆矩阵见附录 C 中的图7。

5 结果与结论

我们提出了一种将锯齿持久同调应用于逐帧神经群体活动的处理流程。在 Sensorium 2023 上， H_1 基于持久性景观的锯齿描述符能够稳健地区分同一只小鼠观看的单个视频的重复呈现（调整兰德指数较高； ≈ 0.94 自然场景、 ≈ 0.70高斯、 ≈ 0.62 波浪），但对刺激类型的区分能力有限（准确率为 $\approx 70\%$）。两项对照实验表明，时间顺序和空间连续性至关重要：打乱帧顺序会使聚类效果崩溃，而打乱空间网格则会使性能趋近于随机水平。对观看互不重叠影片的小鼠进行分类时，小鼠识别的准确率仅略高于随机水平（$\approx 35\%$），这表明该方法对小鼠特异性特征的敏感度有限。

在方法上，我们通过用抽象单纯形封闭活动方格并保留其 2-骨架，将立方复形转换为单纯复形；这可能会导致细胞之间连接过密，并加速环填充。未来的工作将比较这一选择与三角剖分方案和立方替代方案。该分析

[6]在附录 C 中，我们列出了针对多只小鼠的更广泛结果，其中还包括其他指标（簇识别准确率和调整互信息）。

还可以通过纳入行为数据加以改进，从而总体上减少神经反应中无法解释的方差。总体而言，我们的结果表明，神经群体中的时间分辨的循环协调模式携带刺激特异性信息，而之字形持久性可以提取并量化这些信息。

致谢

M.B. 感谢 Mathieu Carri`ere 和 Karthik Viswanathan 对 zigzag 实现所提供的有益反馈。M.B.、Y.G. 和 F.A. 感谢 Nikos Karantzas 在项目早期阶段就该数据集进行的讨论。Y.G. 得到 Programma Nazionale della Ricerca（PNR）资助项目 J95F21002830001 的支持，项目名称为“FAIR-by-design”。E.P. 部分得到编号为 2022XE8X9E 的 PRIN 项目（CUP:G53D23004590001）以及 SISSA 2023 年 5x1000 IRPEF 资金的资助。

我们感谢为开展本文所报告的研究而提供使用的 Area Science Park 超级计算平台 ORFEO，以及数据工程实验室工作人员的技术支持。

参考文献

[1] S. Saxena 与 J. P. Cunningham，“迈向神经群体学说”，当代观点 i n 神经生物学**55**（2019年4月）103–111.[2] J. A. Gallego、M. G. Perich、L. E. Miller 和 S. A. Solla，“用于运动控制的神经流形”，*Neuron* **94** 第5期，（2017年）978–984.[3] J. J. DiCarlo、D. Zoccolan 和 N. C. Rust，“大脑如何解决视觉物体识别 ?”

Neuron **73** 第3期，（2012年2月）415–434。[4] S. Chung 和 L. F. Abbott，《神经群体几何：理解生物和人工神经网络的一种方法》，*Current Opinion in Neurobiology* **70**（2021年10月）137–144。[5] M. G. Perich、D. Narain 和 J. A. Gallego，《大脑的神经流形视角》，*NatureNeuroscience* **28** 第8期，（2025年8月）1582–1597。[6] R. Chaudhuri、A. S. Ger˙shon 和 H. Sompolinsky，《行为与神经表征的内在维数》，***Annual Review of Neuroscience*42**（2019）381–410。[7] L. Petrucco、H. Lavian、Y. K. Wu、F. Svara、V. ˇStih 和 R. Portugues，《斑马鱼朝向方向回路的神经动力学与结构》，*Nature Neuroscience* **26** 第5期，（2023年5月）765–773。[8] R. J. Gardner、E. Hermansen、M. Pachitariu、Y. Burak、N. A. Baas、B. A. Dunn、M.-B. Moser 和 E. I. Moser，《网格细胞群体活动的环面拓扑》，*Nature***602** 第7895期，（2022年2月）123–128。[9] P. Gao、E. Trautmann、B. M. Yu、G. Santhanam、S. Ryu、K. V. Shenoy 和 S. Ganguli，《多神经元维数、动力学与测量理论》，*bioRxiv*（2017）214262。[10] C. Fortunato、J. Bennasar-V´azquez、J. Park、J. C. Chang、L. E. Miller、J. T. Dudman、M. G. Perich 和 J. A. Gallego，《行为期间神经群体活动的基础是非线性流形》，2024年4月。[11] C. Brennan 和 A. Proekt，《守恒的宏观动力学定量模型可预测未来运动指令》，*eLife***8**（2019年7月）e46814。

[12] H. Edelsbrunner、D. Letscher 和 A. Zomorodian，《拓扑持久性与简化》，计算机科学基础第*41*届年度研讨会论文集（2000）454–463。[13] G. Carlsson，《拓扑与数据》，美国数学学会通报**46**第2期，（2009）255–308。[14] C. Giusti、E. Pastalkova、C. Curto 和 V. Itskov，《团拓扑揭示神经相关性中的内在几何结构》，美国国家科学院院刊 **112**第44期，（2015）13455–13460。[15] M. W. Reimann、M. Nolte、M. Scolamiero、K. Turner、R. Perin、G. Chindemi、P. D-lotko、R. Levi、K. Hess 和 H. Markram，《结合成空腔的神经元团为结构与功能之间缺失的联系提供了线索》，计算神经科学前沿 **第11卷 - 2017**（2017）。https://www.frontiersin.org/journals/computational-neuroscience/articles/10.3389/fncom.2017.00048。[16] G. Carlsson、V. de Silva 和 D. Morozov，《锯齿持久同调与实值函数》，计算几何年度研讨会论文集（2009）247–256。[17] P. Turishcheva、P. G. Fahey、L. Hansel、R. Froebe、K. Ponder、M. Vystr˘cilov´a、K. F. Willeke、M. Bashiri、E. Wang、Z. Ding、A. S. Tolias、F. H. Sinz 和 A. S. Ecker，《通过视频预测大规模小鼠视觉皮层活动的动态感觉器竞赛》，2024。https://arxiv.org/abs/2305.19654。[18] P. Bubenik，《使用持久性景观进行统计拓扑数据分析》，机器学习研究杂志**16** 第1期，（2015）77–102。[19] L. J. Hubert 和 P. Arabie，《比较划分》，分类杂志**2**（1985）193–218。https://api.semanticscholar.org/CorpusID:189915041。[20] B. Rieck、T. Yates、C. Bock、K. Borgwardt、G. Wolf、N. Turk-Browne 和 S. Krishnaswamy，《使用立方持久性揭示时变功能磁共振成像数据的拓扑》，载于第*34*届神经信息处理系统国际会议论文集，NIPS '20。Curran Associates Inc.，美国纽约州雷德胡克，2020。[21] D. Morozov，《Dionysus2》，2012。https://www.mrzv.org/software/dionysus2/。[22] T. K. Dey 和 T. Hou，《锯齿持久性的快速计算》，载于第*30*届欧洲算法研讨会（*ESA 2022*），S. Chechik、G. Navarro、E. Rotenberg 和 G. Herman 编，第244卷莱布尼茨国际信息学会议论文集（*LIPIcs*），第43:1–43:15页。Schloss Dagstuhl – 莱布尼茨信息学中心，德国达格斯图尔，2022。https://drops.dagstuhl.de/entities/document/10.4230/LIPIcs.ESA.2022.43。[23] Y. Gardinazzi、K. Viswanathan、G. Panerai、A. Cazzaniga、M. Biagetti、等，《大语言模型中的持久拓扑特征》，载于第四十二届国际机器学习大会。2025。

A 关于 Sensorium（2023）的更多信息

在此　本节将进一步介绍本研究中使用的 Sensorium 数据集 [17]。

视频类别。 对于每只小鼠， ≈ 700 均提供视频及其对应的神经反应和行为元数据。这些视频按重复条目分组。不同小鼠的视频类型各不相同，我们选取 4 种视频类型，并将其标记为 Naturalistic、Gaussian、 Waves 和 Moving Dot。图1展示了每种类型的一帧示例。每组重复视频通常各包含 10 个样本。每段视频包含 324 帧，其中最后 24 帧为空白帧。每帧视频的格式为 (36,64) 灰度图像。

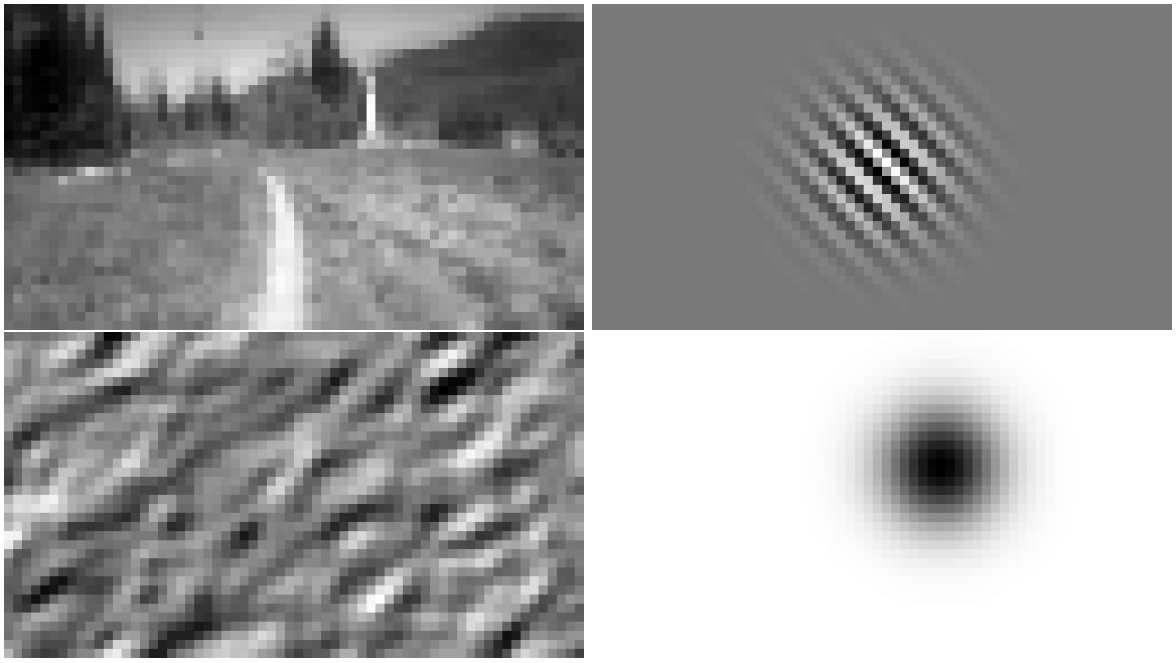


图1：本研究中所考察的每种视频类型的中间帧： Naturalistic （左上）、Gaussian （右上）、Waves（左下）、 Moving Dot （右下）。

空间采样与神经元位置几何结构。以一个具有代表性的小鼠–视频配对（小鼠2-10，视频34）为例，我们在图2中展示了三个投影平面（X–Y、X–Z、Y–Z）上的细胞位置。神经元分布在一组间距规则的z平面上；经过坐标归一化后，间距

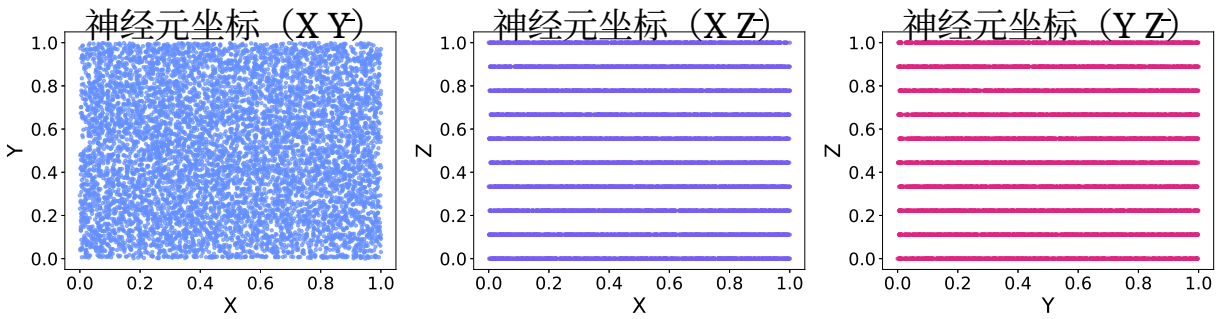


图2：**空间采样几何结构**。具有代表性的小鼠–视频配对的神经元位置，展示为三个投影：X–Y（左）、X–Z（中）和Y–Z（右）。可以看到层状排列、间距规则的z平面；各平面内的覆盖看起来均匀。坐标已归一化至成像体积。

相邻成像平面之间为 ≈ 0.11 （在距离图中标记为参考尺度）。各切片的平面内采样密度似乎相近：成对X–Y距离的分布相似

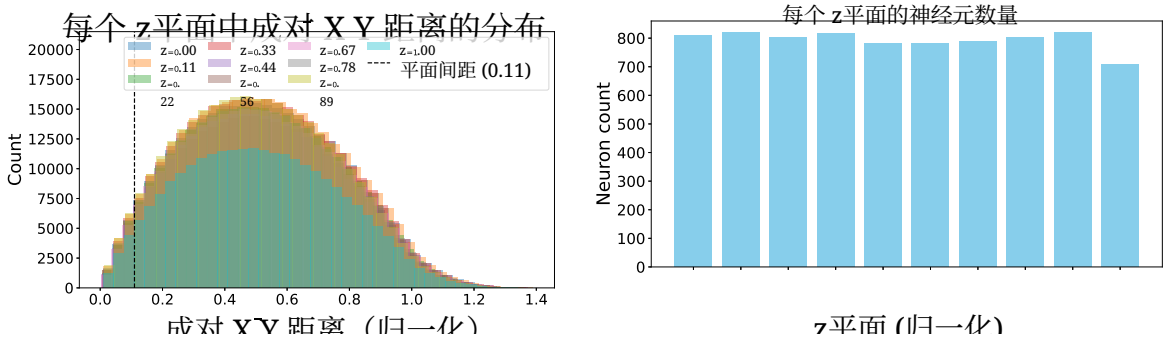


图3：左：**平面内采样密度**。每个z平面上神经元之间成对X–Y距离的分布（叠加直方图）。垂直虚线表示归一化的平面间间距（≈ 0.111），作为参考尺度。各成像平面上的分布相似，表明每个成像平面内的采样密度均匀。右：**深度采样平衡**。同一小鼠–视频配对中各z平面的神经元数量条形图。各平面上的细胞计数总体均衡，仅存在轻微差异，证实深度方向上的采样均匀。

对于每个 z平面，表明各成像平面内的覆盖相当均匀。各平面的细胞计数总体也较为均衡，沿 z 方向仅有轻微变化。图3展示了同一份样本案例的这些特征。我们还检查了相邻成像平面之间是否存在潜在重复项：只有两个 (x, y) 位置在不同 z 处重复出现，且其荧光时间序列在数值上无法区分，说明重复检测极少，在数据集规模上可以忽略不计。

神经反应。 对于每个神经元，我们使用与视频帧时间锁定的单试次荧光轨迹。上述重复项检查证实，当一个细胞意外地被相邻成像平面同时捕获时，其活动轨迹完全相同，这正如预期。在主要分析中，我们使用插值到二维网格上的逐帧反应；为了进行描述，按平面展示原始轨迹和简单汇总数据，有助于说明试次结构以及不同神经元和深度之间的变异性，见图4。

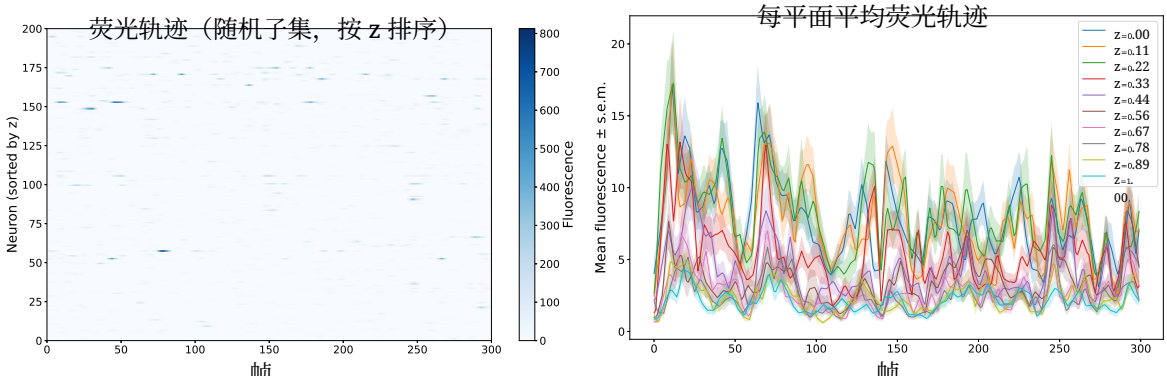


图4：左：**荧光反应概览**。 随机选取的200个神经元的单试次荧光轨迹热图，按z平面排序。每一行代表一个神经元，每一列代表视频帧。这展示了成像体积内神经反应的多样性及其时间结构。右：**各平面平均荧光动态**。 每个z平面的平均荧光轨迹（实线）和标准误（阴影区域），展示了反应动态随深度的变化，以及神经元和成像平面之间的变异性。

B 锯齿算法

下面介绍完整的处理流程。图5展示了各个步骤的示意图。算法如下：

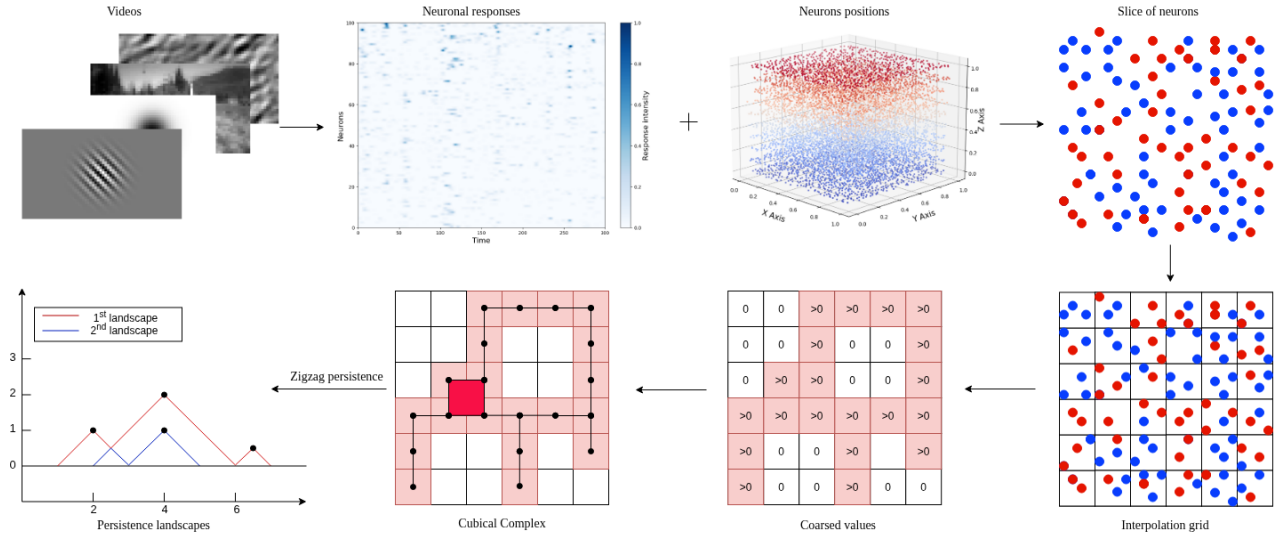


图5：完整锯齿流程的示意图。

对于每只小鼠 a、视频 v、成像平面 p 和帧 t，我们加载插值活动网格 $r_{a,\,p,\,v}(t)$，并将其转换为逐像素活动 $\delta_{a,\,p,\,v}(t)$，使每个像素以零为中心，并使阈值$\delta > 0$ 对应于该成像平面和视频中的高于平均值的活动。

为了探究描述符使用了哪些信息，我们可以选择应用：

- 帧顺序打乱 $t \mapsto \pi(t)$（在所有成像平面中保持一致），以扰乱时间顺序，同时保留每帧的空间结构；

- 固定空间置换 π per $(i,\ z)$，以打乱所有帧中的网格索引，破坏空间连续性，同时基本保留边缘活动统计量。

逐帧复形与单纯形适配器。 对于每一帧 t，我们构建一个由活跃像素组成的二值掩码（$\delta > 0$），并构造相应的二维立方单元（活跃顶点、网格边和单位正方形）。为了与处理单纯复形的锯齿软件对接，我们使用抽象闭包将这个立方复形映射为单纯复形 S_t：(i) 将所有活跃顶点作为 0-单形、所有活跃网格边作为 1-单形插入；(ii) 对于每个具有四个网格角顶点的活动方格，将这四个顶点上的抽象 3-单形插入，并仅保留其 2-骨架（因此会添加两条对角线和所有三角形面）。这并非三角剖分；这样做会产生过度连接，以确保各帧之间的二维面保持一致，并使计算稳定。顶点标识符采用网格坐标，因此可以在时间序列中识别相同的单形。

交错在　　相交锯齿。 我们通过在中间　　te 步骤：

$$\mathcal{S}_1 \hookleftarrow \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 \hookrightarrow \mathcal{S}_2 \hookleftarrow \mathcal{S}_2 \cap \mathcal{S}_3 \hookrightarrow \cdots \hookleftarrow \mathcal{S}_{T-1} \cap \mathcal{S}_T \hookrightarrow \mathcal{S}_T. \tag{3}$$

交集是使用全局顶点标签对单形进行的集合论交集。这样便可得到有效的包含映射锯齿，捕捉相邻帧之间单形的增减，同时确保映射定义良好。

之字形持久性与向量化。 我们使用两个公共库对序列X 计算 H_1 之字形持久同调：

算法 1 逐帧神经元活动网格的之字形持续同调处理流程

输入： 所有索引对应的视频列表；z平面数量 Z；网格大小 n_{grid}；每个视频、每个成像平面的插值活动网格，形状为 $(n_{\mathrm{grid}}, n_{\mathrm{grid}}, T)$；景观参数 (R, k)。

对于 所有索引中的每个视频索引 i **执行**
  对于 每个 z平面 $z = 0, \ldots\ldots, Z-1$ **执行**
    路径 $\leftarrow$: (i, z) 对应的插值活动网格路径
    如果路径不存在**则**
      继续
    结束如果
    $r \leftarrow$ 加载活动网格 $(n_{\mathrm{grid}}, n_{\mathrm{grid}}, T)$
    $\delta \leftarrow$归一化(r) ▷ $\delta_{a,z,i}(T) = (r_{a,z,i}(T) - \bar{r}_{a,z,i})/\bar{r}_{a,z,i}$
    可选对照：帧打乱 $t \mapsto \pi(t)$；通过固定空间置换进行网格扰乱 p per (i, z)
    复形 $\leftarrow$ [ ]
    对于 $t = 1, \ldots, T$ **do**
      掩码 $\leftarrow [\delta(T) > 0]$
      根据掩码构建在 T 处活跃的立方胞腔：顶点、网格边、单位正方形
      通过抽象闭包适配器构建单纯复形 $\mathcal{S}_t$ ：
        将所有活跃顶点作为 0-单形插入
        将所有活跃网格边作为 1-单形插入
        对于每个以 v_{00}， v_{10}， v_{01}， v_{11} 为角点的活动方格：
          在这四个顶点上插入抽象 3-单形，并仅保留其 2-骨架
      将 $\mathcal{S}_t$ 追加到复形
    结束循环
    构建交错锯齿序列：
      $X \leftarrow [\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_2, \ldots, \mathcal{S}_{T-1} \cap \mathcal{S}_T, \mathcal{S}_T]$
    f，次encodeZigzagFiltration(X)
    bars $\leftarrow$Fast ZigZag$(f$, 次$)$
    柱状图 $H_1 \leftarrow$ 选择维度(bars, ,1)
    将 bars H_1 向量化为持久性景观：采样 R 个点，保留 k 层
    保存 (i, z) 的逐平面描述符
  结束 for
结束 for

- DIONYSUS2 [21]，该库提供数据结构和例程，用于编码之字形过滤及其时间索引（出生/死亡层）；

- FASTZIGZAG [22]，它将之字形过滤转换为辅助复形的等价非之字形滤过，高效计算标准持久性，并将区间映射回之字形设置，以获得 H_1 条形码。

这种代码与算法的组合使得每个数据向量在单个 CPU 上的计算时间约为 150 毫秒，也就是说，处理完一只小鼠的完整处理流程（$\approx$ 700视频刺激）大约需要 100 分钟。

拓扑描述符。每个 H_1 条形码都映射为持久性景观 Λ_k ，并在时间索引上按均匀网格采样；在我们的实验中，我们使用 $R = 50$ 个采样点和 $k = 5$ 个景观层，从而为每个成像平面生成一个250维向量。试次级描述符将所有成像平面串联起来。图6展示了小鼠 2-10 在单个 z成像平面上的一个代表性数据向量，涵盖完整的

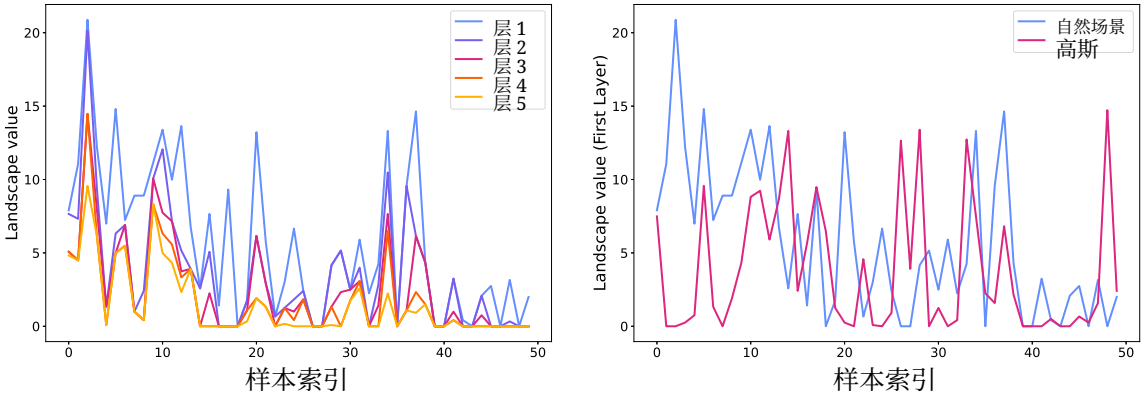


图 6：**代表性的持久景观向量**。左：每条曲线展示单次试次和单个z平面中前五个景观层（Λ_k）之一，概括神经元活动中拓扑循环（H_1）随时间变化的显著性。右：每条曲线展示与自然场景视频和高斯视频对应的试次中单个 z平面的第一景观层（Λ_1）。所有试次均来自小鼠 2-10。

自然场景视频的250维向量，以及自然场景视频与高斯视频之间第一层景观的比较。

C 补充结果

本节列出补充结果，以补充正文中列出的结果。

聚类方案（A）。对于聚类实验，我们在全部 5 只小鼠上运行处理流程，结果见表2；表中还纳入了通过聚类进行分类的准确率作为一项指标。我们没有对此进行对照类型检查。结果总体上与表1中小鼠2-10的结果一致。

分类方案（B）：视频类别。这里列出了所有小鼠各类别的 F1分数，以及预测正确视频类别任务的交叉验证准确率，见表3。此外，我们展示了小鼠 2-10 在 5 个训练/测试划分上的汇总混淆矩阵，见图7左侧面板。[7]

分类方案（C）：小鼠身份。这里展示了小鼠身份分类任务在 5 个训练/测试划分上的汇总混淆矩阵，见图7右侧面板。

[7]注：汇总混淆矩阵与交叉验证分数之间的准确率差异，是因为后者采用折均准确率；在类别不平衡且数据集较小的情况下（如本例），这种指标更可靠。列出汇总混淆矩阵是为了便于解释。

小鼠2-10		
条件	基线调整兰德指数	基线准确率
自然场景	0.945 ± 0.118	0.955 ± 0.076
高斯	0.702 ± 0.156	0.837 ± 0.104
波浪	0.603 ± 0.218	0.799 ± 0.126
小鼠 2-9		
条件	基线调整兰德指数	基线准确率
自然场景	0.734 ± 0.161	0.863 ± 0.103
高斯	0.820 ± 0.141	0.921 ± 0.071
移动点	0.463 ± 0.239	0.720 ± 0.148
小鼠 11-10		
条件	基线调整兰德指数	基线准确率
自然场景	0.791 ± 0.185	0.884 ± 0.117
波浪	0.423 ± 0.225	0.683 ± 0.128
移动点	0.982 ± 0.069	0.993 ± 0.026
小鼠 3-5		
条件	基线调整兰德指数	基线准确率
自然场景	0.911 ± 0.098	0.963 ± 0.044
波浪	0.446 ± 0.196	0.706 ± 0.120
移动点	0.791 ± 0.078	0.921 ± 0.031
小鼠6-9		
条件	基线调整兰德指数	基线准确率
自然场景	0.912 ± 0.138	0.955 ± 0.081
高斯	0.953 ± 0.067	0.983 ± 0.025

表2：所有小鼠的聚类调整兰德指数和准确率（20次运行的均值 ±标准差） .

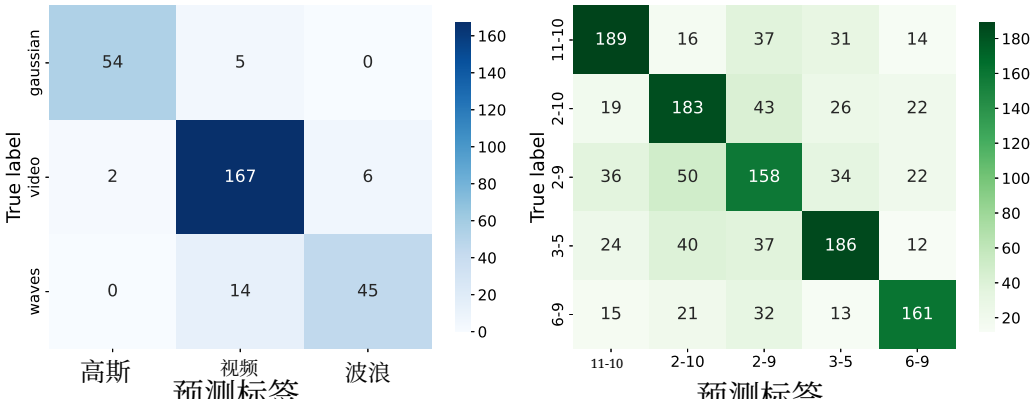


图7：5种训练/测试划分的汇总混淆矩阵。左侧：视频类型。右侧：小鼠身份。

小鼠 2-10		
类别	**F1**	**支持度**
自然场景	0.88	35
高斯	0.82	12
波浪	0.78	12
交叉验证准确率： 0.686 ± 0.055		

小鼠 2-9		
类别	**F1**	**支持度**
自然场景	0.95	37
高斯	0.96	12
移动点	0.83	11
交叉验证准确率： 0.743 ± 0.064		

小鼠 11-10		
类别	**F1**	**支持度**
自然场景	0.93	35
高斯	0.86	11
移动点	0.91	12
交叉验证准确率： 0。721 ± 0.115		

小鼠 3-5		
类别	**F1**	**支持度**
自然场景	0.89	36
波浪	0.73	12
移动点	0.82	12
交叉验证准确率： 0.672 ± 0.056		

小鼠 6-9		
类别	**F1**	**支持度**
自然场景	1.0	37
高斯	1.0	12
交叉验证准确率： 0.888 ± 0.064		

表3：单次训练/测试划分中每只小鼠各类别的 F1 分数和支持数。交叉验证准确率是在 5 次训练/测试划分上进行的。