arXiv:2603.03041v1 [math.AG] 3 Mar 2026

关于具有杜瓦尔奇点的德尔佩佐曲面的余正则性

Konstantin Loginov 与 Andrey Trepalin

摘要。我们计算具有杜瓦尔奇点的德尔佩佐曲面的余正则性。为此，我们研究1度德尔佩佐曲面与椭圆纤维化之间的关系。结果表明，具有正余正则性的德尔佩佐曲面对应于具有某些特殊性质的等平凡椭圆纤维化。我们还证明了关于特征零的非代数闭域上德尔佩佐曲面之余正则性的若干结果。我们的结果证实了如下预期：“大多数”德尔佩佐曲面的余正则性为0，而具有正余正则性的德尔佩佐曲面则具有某些特殊性质。

目录

1. 引言2. 预备知识 3. 德尔佩佐曲面于 $\mathbb{C}$4. 1
非闭域上的德尔佩佐曲面 5. 问题 参考文献 5
8
18
23
24

1. 引言

除非另有说明，我们在特征为 $\mathbb{K}$ 的代数闭域0 上工作。正规射影簇 X 称为Fano簇，如果其反典范类 $-K_X$ 是丰富的 $\mathbb{Q}$-Cartier除子。研究Fano簇的一种自然方法，是考察其（多重）反典范线性系 $|-lK_X|$，其中 $l \geqslant 1$。在维数不超过3 时，线性系 $|-K_X|$ 中光滑元的存在性由V. Shokurov [Sh80], 所确立，由此引出了光滑法诺三维簇分类的归纳方法。考察 $|-lK_X|$中的奇异元也很有意义。事实表明，这些元的奇点与这些线性系中光滑元就其模而言的变化有关。

为了衡量 $|-K_X|$ 的元素可能有多么“奇异”，人们引入了以下不变量。光滑簇上约化简单正规交叉除子 D 的 对偶复形 是

2010数学主题分类: 14J45.关键词: Fano簇、余正则性、补、对偶复形、椭圆纤维化。

一个衡量该除子组合复杂性的拓扑空间。利用奇点消解，这一定义可以推广到对数典范对的情形。

射影簇的正则度 $\operatorname{reg}(X)$这一概念 X 由 V. Shokurov 在 [Sh00]中引入。根据定义，它是给定 Fano簇上对数典范补的对偶复形维数的最大值，参见定义 2.3。可以说，正则度衡量给定的 Fano簇距离成为例外的程度。后者意味着任意对数典范补实际上都是川俣对数终端的。与之对偶的概念——余正则性

$$\operatorname{coreg}(X) = \dim X - \operatorname{reg}(X) - 1,$$

是在 [Mo24]中定义的。维数为 n 的簇的余正则度是集合 $\{0, \dots, n\}$中的一个整数。举例来说，托里克簇上所有环面不变除子的和给出一个1-补，这表明托里克簇的余正则度等于0。

近年来，Fano簇正则度的研究备受关注，参见 [Mo24], [FFMP25], [LPT25] 及其中的参考文献。在 [ALP24] 中，计算了光滑3维 Fano簇的余正则度。结果表明，“大多数”光滑 Fano 三维簇的余正则度为0。根据 [Zha25]可知，在任何光滑3维 Fano簇的变形族中，都存在一个余正则度为0的元素。对于德尔佩佐曲面，有以下简单结果。

命题 *1.1*（[*ALP24*，命题 *2.3*]）。设 $\mathbb{K}$ 为特征 *0* 的代数闭域。设 X 为定义在 $\mathbb{K}$ 上、次数为 $d = (-K_X)^2$ 的光滑德尔佩佐曲面。若 $d \geqslant 2$，则 X的余正则性为 *0*。一般的具有 $d = 1$ 的光滑德尔佩佐曲面的余正则性为 *0*。对于次数 *1* 的特殊光滑德尔佩佐曲面 X，有余正则度$(X) = 1$。

在命题 1.1 中，“特殊”一词意味着线性系 $|-K_X|$ 不含节点曲线，从而 $|-K_X|$ 中的所有奇异元均为尖点曲线（参见引理 3.4）。这一条件可以换一种方式重新表述，从而使我们能够将命题 1.1推广到轻微奇异的德尔佩佐曲面情形，即具有杜瓦尔奇点的德尔佩佐曲面。

对任意次数为1的、至多具有杜瓦尔奇点的德尔佩佐曲面，都可以典范地关联一个相对极小椭圆纤维化 $\phi_Y\colon\ Y \to \mathbb{P}^1$。为此，需要考虑线性系 $|-K_X|$ 的唯一基点的爆破，随后作最小解消。在 $|-K_X|$ 中的奇异元与椭圆纤维化 ϕ_Y的奇异纤维之间存在对应关系，我们将在下文回顾。利用这一对应，命题1.1可以改述如下（回顾：一个椭圆纤维化被称为等变，如果它的所有光滑纤维都同构）：

命题1.2. 设 $\mathbb{K}$ 为特征0的代数闭域。设 X 为定义在 $\mathbb{K}$上的光滑德尔佩佐曲面 X。则要么余正则度（X）$= 0$，要么下列等价条件成立：

- $(-K_X)^2 = 1$ 且椭圆纤维化 ϕ_Y 是等变的，
- 线性系 $|-K_X|$ 中的所有光滑元都同构，
- 余正则度 $(X) = 1$.

命题1.2表明，Fano簇 X 的余正则性可能与 $|-K_X|$中光滑元的变化有关。回顾一下，对于满足$(-K_X)^2 \geqslant 3$的德尔佩佐曲面 X，$-K_X$ 是很 ample 的，并定义了一个嵌入 $X \subset \mathbb{P}^d$，其中 $d = (-K_X)^2$。因此，由命题1.2 可知，计算余正则度的问题与研究所有光滑超平面截面均同构的射影簇有关。后者是一个经典

问题，参见例如 [Beau90] 关于超曲面的情形。我们的第一个主要结果如下（记Sing(X) 为 X的所有奇点组成的集合）：

定理 1.3。 设 $\mathbb{K}$ 是特征为 0 的代数闭域。设 X 是定义在 $\mathbb{K}$ 上、次数为 $d=(-K_X)^2$ 且具有杜瓦尔奇点的德尔佩佐曲面。若 $d\geqslant 2$，则

$$\operatorname{coreg}(X)=\operatorname{coreg}_1(X)=0.$$

若 $d=1$，记其对应的椭圆纤维化为 ϕ_Y： $Y\to\mathbb{P}^1$。则 余正则度$(X)=0$ 当且仅当以下情形之一成立：

- ϕ_Y 不是等变的，
- ϕ_Y 是等变的，并且
$$\operatorname{Sing}(X)\in\{2D_4, D_4+2A_1\}.$$

否则，余正则度$(X)=1$。

定理 1.3 符合“多数”Fano簇的余正则度为0这一预期。关于第一余正则度余正则度$_1(X)$，见定义2.3。我们还证明了定理1.3的一个版本，该版本以奇点构型 Sing(X)表述。

定理 1.4。 设 $\mathbb{K}$ 是特征为0的代数闭域。设 X 是定义在 $\mathbb{K}$上的次数为1 且具有杜瓦尔奇点的德尔佩佐曲面。那么

- 或者余正则度$(X)=1$，且 X 具有以下奇点构型之一：$-\operatorname{Sing}(X)\in\{E_8, E_7+A_1, E_6+A_2\}$，此时 $\rho(X)=1$；或者$-\operatorname{Sing}(X)\in\{E_6, D_4+A_2, D_4, 3A_2, 2A_2, A_2, 4A_1, \varnothing\}$，此时 $\rho(X)>1$，
- 或 余正则度$(X)=0$。

我们指出，具有定理 1.4所述奇异纤维构型的曲面也可能具有余正则度 0。我们有这类皮卡数为1的曲面实例，见评注 3.17 和 3.19。另一方面，我们预计皮卡数大于 1时也存在这类余正则度为 0 的曲面。我们还注意到，“ 大多数 ”du Val 德尔佩佐曲面的余正则度为 0。例如，当皮卡数为 1 时，任意次数的 du Val 德尔佩佐曲面上可能的奇点构型有27种，见 [Ye02]，而其中只有 4 种构型对应存在曲面 X，其 余正则度$(X)=1$。

我们注意到，在一个次数为 1且具有杜瓦尔奇点的德尔佩佐曲面上， X $|-K_X|$的一个元素是约化且不可约的，并且至多包含 X的一个奇点，参见引理 3.4。关于此情形下 X 的奇点与 ϕ_Y 的奇异纤维之间的对应关系，见表 1。注意该对应关系并非双射，见评注 3.5。不过，利用这一对应关系，我们可以用椭圆纤维化 ϕ_Y的奇异纤维来表述定理 1.4 。我们采用 Kodaira 分类中关于椭圆纤维化奇异纤维的记号。用 j 表示j曲面 ϕ_Y 的纤维的 -不变量，它是底空间 $\mathbb{P}^1$上的一个函数。

定理1.5。 设 $\mathbb{K}$ 为特征0的代数闭域。设 X 为定义在 $\mathbb{K}$ 上的次数1 德尔佩佐曲面，且具有杜瓦尔奇点。当且仅当椭圆纤维化 ϕ_Y 为等变纤维化，并具有以下奇异纤维构型之一时，余正则度$(X)=1$ ：

$$j=0: \quad II+II^*, IV+IV^*,\ 2II+IV^*,\ II+IV+I_0^*,\ 3II+I_0^*,\ 3IV,\ 2II+2IV,\ 4II+IV,\ 6II;$$
$$j=1728: \quad III+III^*,\ 4III.$$

特别地，当且仅当 ϕ_Y 的奇异纤维属于以下情形之一时，有 余正则度$(X) = 1$ 且 $\rho(X) = 1$：

$$II + II^*, \qquad III + III^*, \qquad IV + IV^*. \tag{1.1}$$

具有构型（1.1）之一的椭圆曲面是极值的，这意味着其 Mordell–Weil 群是有限的。这类曲面具有许多有趣的性质，参见 [MP86] 及其参考文献。此外，根据定理 1.5，具有正余正则性的德尔佩佐曲面在如下意义下是特殊的。它们的 j-函数在底上等于 0 或 1728，这对应于具有复乘的椭圆曲线，见命题3.11。相应的椭圆纤维化 $\phi_Y\colon Y \to \mathbb{P}^1$ 容许一个自同构，该自同构在 ϕ_Y 的一般纤维上诱导复乘。

回顾：卡拉比–丘对 (X, D)，其中 dim $X = n$ 容许环面模型，如果 (X, D) 保正双有理等价于 $(\mathbb{P}^n, H_0 + \cdots + H_n)$；保正双有理等价的概念见定义 2.1。我们称一个 Fano 簇容许环面模型，如果它容许一个 1-补 D，使得对 (X, D) 具有环面模型。注意，若 Fano 簇 X 具有环面模型，则 X 必为有理的。在 [GHK15 的引理 1.13] 中证明了：有理曲面 X 容许环面模型当且仅当余正则度$_1(X) = 0$。因此，利用命题 1.1，我们得到一般的光滑德尔佩佐曲面容许环面模型。在 [EFM24 的定理 3.3] 中证明了：对于“大多数”具有杜瓦尔奇点且皮卡秩为 1 的德尔佩佐曲面，环面模型存在，见注3.26。换言之，作者计算了皮卡秩为 1 的 du Val 德尔佩佐曲面的余正则度 $_1(X)$。我们将他们的结果推广到具有杜瓦尔奇点且皮卡数任意的德尔佩佐曲面的情形。

定理 1.6。设 $\mathbb{K}$ 是特征0的代数闭域。设 X 是定义在 $\mathbb{K}$上的具有杜瓦尔奇点的德尔佩佐曲面。那么，余正则度$_1(X) = 1$ （这等价于不存在 X的环面模型）当且仅当$(-K_X)^2 = 1$，且以下条件之一成立：

(1) ϕ_Y 是等变的；*(2)* 或者 X 同构于以下某个曲面

$$X_1'(D_5 + A_1), \quad or \quad X_1'(D_6), \tag{1.2}$$

在例 *3.24*中描述。曲面 (1.2) 具有特殊的奇点构型。此外，对于曲面 (1.2)，相应的椭圆纤维化 ϕ_Y 不是等变的，余正则度$_1(X) = 1$，并且 余正则度(X) =余正则度$_2(X) = 0$。

回顾一下，*Looijenga* 对是一个对数典范曲面对 (X, D)，满足 X 光滑且有理，并且余正则度 $_1(X) = 0$ 在该对 (X, D)上取到。这类对是深入研究的对象，参见 [Fr15]及其中的参考文献。可以说，Looijenga 对推广了带有节点反典范截面的光滑德尔佩佐曲面。

关于光滑 Fano 三维簇存在托里克模型的结果，参见 [LMV24]。文中证明，一般的有理光滑 Fano 三维簇都存在托里克模型。 [Du22] 猜想，指标为一且余正则度为 0 的三维有理卡拉比–丘对（X, D）存在托里克模型。 [EFM24], 提出了该猜想的一个高维类似物：若（X, D）是一个指标为一、余正则度为 0 的有理 n 维卡拉比–丘对，满足 $\mathcal{D}(X, D) \simeq S^{n-1}$，且边界除子 D 的任一层都是有理的，则（X, D）存在托里克模型。理解

给定簇上托里克模型的存在性与反典范元变化之间的关系，将会很有意思。

当德尔佩佐曲面 X 定义在特征为 0 且非代数闭的域上时，余正则性的定义仍然有意义，见注 2.4。我们证明如下结果。

定理 1.7。 设 X 是定义在特征为0的域 $\mathbb{K}$ 上的 *du Val* 德尔佩佐曲面。进一步假设

- 或者 $(-K_X)^2 \geqslant 5$,
- 或者 $(-K_X)^2 \geqslant 3$ 且 $X(\mathbb{K}) \neq \varnothing$。

则 余正则度 (X) = 余正则度$_1(X) = 0$。

本文组织如下：第2节回顾德尔佩佐曲面的几何与余正则性的若干标准定义和基本结果。第3节研究定义在域 $\mathbb{C}$上的至多具有杜瓦尔奇点的德尔佩佐曲面，并计算其余正则度。第4 节研究定义在非代数闭域上的至多具有杜瓦尔奇点的德尔佩佐曲面，并证明这类曲面余正则性的一些结果。最后，第5 节提出若干与本文结果相关的开放问题。

致谢。感谢 Alexander Kuznetsov 和 Yuri Prokhorov 与我们进行了有益的讨论。此外，我们也感谢匿名审稿人提出的许多宝贵建议。

2. 预备知识

除非另有说明，本节均在特征为 $\mathbb{K}$ 的代数闭域0上进行。我们采用极小模型纲领（简称 MMP）的语言，参见例如 [KM98]。

2.1. **收缩**。 所谓收缩，是指正规簇之间满足 $f_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Y$ 的满态射 $f\colon X \to Y$。特别地， f 具有连通纤维。所谓纤维化，是指满足 $\dim Y < \dim X$ 的收缩$f\colon X \to Y$。

2.2. 对与奇点。一个对 (X, D) 由正规簇 X 与边界$\mathbb{Q}$-除子 D组成，其系数属于 $[0, 1]$，且 $K_X + D$是 $\mathbb{Q}$-Cartier。设 $\phi\colon W \to X$为双有理压缩，并设 (X, D) 为一个对。记 $K_W + D_W = \phi^*(K_X + D)$。素除子 E在 W上关于 (X, D) 的对数不一致为 $1 - \operatorname{coeff}_E D_W$，并记作 $a(E, X, D)$。若对每一个 E 以及每一个双有理压缩 ϕ， $a(E, D, B)$ 均为 $\geqslant 0$（相应地 > 0）（相应地， $\geqslant 1$），则称 (X, D) 是对数典范的，或简称为对数典范（相应地 KLT（奇点））（相应地，典范）。

设 (X, D) 是一个对数典范对。那么，相对于对 (X, D)，有效 $\mathbb{Q}$-Cartier $\mathbb{Q}$-除子 B 的对数典范阈值 定义为

$$\operatorname{lct}(X, D; B) = \sup\{\lambda \in \mathbb{Q} \mid (X, D + \lambda B) \text{ is lc}\}.$$

定义 2.1。 设 (X, D) 和 (Y, D_Y) 是两个对。若存在一个交换图表，使这两个对在保典范类的双有理意义下等价，则称它们是

$$\begin{array}{ccc} & (V, D_V) & \\ {\scriptstyle\phi}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle\psi} \\ (X, D) & \dashrightarrow^{\alpha} & (Y, D_Y) \end{array} \tag{2.1}$$

其中 α 是双有理映射，ϕ 和 ψ 是双有理压缩，$\phi_*(D_V) = D$，$\psi_*(D_V) = D_Y$，并且

$$K_V + D_V = \phi^*(K_X + D) = \psi^*(K_Y + D_Y).$$

注意，此处的 D_V 不一定是边界，因为它可能具有负系数。在前述情形中，我们写作 $(X, D) \simeq_{\mathrm{cbir}} (Y, D_Y)$。给定如上所述的 (X, D) 和 $\alpha\colon X \dashrightarrow Y$，存在唯一的除子 D_Y，使得 $(X, D) \sim_{\mathrm{cbir}} (Y, D_Y)$。除子 D_Y 称为 Y 上 D 的*crepant*变换。

2.3. **补与卡拉比–丘对**。设 (X, D) 是一个对数典范对。若 $K_X + D \sim_{\mathbb{Q}} 0$，则称 (X, D) 为卡拉比–丘对（简称*CY* 对）。此时，D 称为 K_X 的 $\mathbb{Q}$-补。若对某个 N 有 $N(K_X + D) \sim 0$，则称 D 是 K_X 的一个 N-补。

2.4. **对偶复形与余正则性**。 设 $D = \sum D_i$ 是光滑簇 X上的 Cartier 除子。回忆一下，若 D 具有简单正规交叉 （简称 snc），则其所有分支 D_i 均光滑，并且 D 中的任意一点都有一个开邻域，在解析拓扑下，该邻域与坐标超平面的并解析等价。

定义 2.2。 设 $D = \sum_{i=1}^{r} D_i$ 是光滑簇 X上的简单正规交叉除子。对偶复形 记作 $\mathcal{D}(D)$，是一个正则 CW 复形（更准确地说，是一个 Δ-复形，因此具有自然的分段线性结构），其构造如下。

- v_Z 是 $\mathcal{D}(D)$的单形，与任意子集 $I \subseteq \{1, \dots, r\}$所对应的交集$\bigcap_{i\in I} D_i$的不可约分支 Z 一一对应，并且 v_Z的维数等于 $\#I - 1$。
- 粘合映射的构造如下。对于任意子集 $I \subseteq \{1, \dots, r\}$，令 $Z \subset \bigcap_{i\in I} D_i$为任意一个不可约分支；对于任意 $j \in I$，令 W 为包含 Z的 $\bigcap_{i\in I\setminus\{j\}} D_i$的唯一分支。于是，粘合映射是将 v_W 包含到 v_Z 中的映射，其中 v_W 是 v_Z 的一个面，且该面不包含顶点v_j。

注意，$\mathcal{D}(D)$ 的维数不超过 $\dim X - 1$。若 $\mathcal{D}(D)$ 为空，则定义 $\dim \mathcal{D}(D) = -1$。接下来，对于由 $D^{=1}$ 给出的除子 D，我们用 D 表示其系数为一的分支的约化和。对于一个对数典范对数卡拉比 – 丘对 (X, D)，定义 $\mathcal{D}(X, D)$ 为 $\mathcal{D}(D_Y^{=1})$，其中 $f\colon (Y, D_Y) \to (X, D)$ 是 (X, D) 的对数消解，使得公式

$$K_Y + D_Y = f^*(K_X + D)$$

得到满足。已知 $\mathcal{D}(D_Y^{=1})$ 的分段线性同胚类不依赖于对数消解的选择，参见 [dFKX17，命题 11]。关于卡拉比–丘对的对偶复形拓扑的更多结果，参见 [KX16]。

2.5. **余正则性**。我们回顾一下正则度的概念，该概念首次在 [Sh00，第 7 节9] 中引入，随后又在 [Mo24], [ALP中得到进一步研究。

定义 2.3. 设 X 是维数为 n的正规射影簇，使得典范除子 K_X 为 $\mathbb{Q}$-Cartier。所谓 $\mathcal{D}(X,D)$，是指对数典范对 (X,D) 的对偶复形。对于 $l \geqslant 1$，我们用如下公式定义 X 的第 l 正则度

$$\mathrm{reg}_l(X) = \max\{\dim \mathcal{D}(X,D) \mid D \in \frac{1}{l}|-lK_X|\}. \tag{2.2}$$

在此情形下， D 是 K_X 的一个 l-补。于是 X 的正则度 为

$$\mathrm{reg}(X) = \max_{l\geqslant 1}\{\mathrm{reg}_l(X)\}.$$

注意，$\mathrm{reg}(X) \in \{-1,0,\ldots,n-1\}$，其中按约定，空集的维数为 -1。 X 的余正则性 定义为数

$$\mathrm{coreg}(X) = n-1-\mathrm{reg}(X).$$

为方便起见，对任意 $l \geqslant 1$，我们还定义 $\mathrm{coreg}_l(X) = n-1-\mathrm{reg}_l(X)$，从而

$$\mathrm{coreg}(X) = \min_{l\geqslant 1}\{\mathrm{coreg}_l(X)\}.$$

注 2.4. 若 X 定义在特征零且非代数闭的域 $\mathbb{K}$ 上，则为定义 $\mathrm{coreg}(X)$，可采用类似于 [LPT25，定义 2.1.1，注 2.1.4] 的 G-余正则性定义，其中 G是 $\mathbb{K}$ 在 $\mathbb{K}$上的伽罗瓦群。等价地，在 (2.2) 中可以只考虑线性系 $|-lK_X|$ 中定义在 $\mathbb{K}$上的元素。这一情形将在第 4 节中讨论。若基域 $\mathbb{K}$ 具有正特征，则对偶复形是否与一个对的保典等价类的代表元无关尚不清楚。假定答案是肯定的，我们提出问题 5.6，另见 [Mo24, 4.10] 以及 [dFKX17, 31]。

引理 2.5. 设 X 和 Y 是正规射影簇，且 $f\colon Y \to X$ 是一个双有理态射。则对任意 $l \geqslant 1$，有 余正则度 $_l(Y)$ $\geqslant$ 余正则度 $_l(X)$，并且 余正则度 (Y) $\geqslant$ 余正则度 (X)。特别地，若 余正则度 $(Y) = 0$，则 余正则度 (X) $= 0$。

证明。 设 l 是一个正整数，并令 (Y,D) 为一个卡拉比–丘对，在该对上余正则度 $_l(Y)$ 取得。则 $(X, f(D))$ 是一个卡拉比–丘对，并且对偶复形 $\mathcal{D}(Y,D)$ 与 $\mathcal{D}(X, f(D))$ 同胚。因此，余正则度 $_l(Y)$ $\geqslant$余正则度 $_l(X)$，且余正则度 (Y) $\geqslant$余正则度 (X)。□

我们将反复使用以下重要结果，它可以用于判断余正则性何时为正。

定理 2.6 ([FFMP25，定理 4])。 设 X 是定义在特征 0 的代数闭域上的 ***klt Fano*** 簇。则若 余正则度(X) $= 0$，则 余正则度$_1(X)$ $= 0$ 或 余正则度$_2(X)$ $= 0$。

2.6. **德尔佩佐曲面**。我们回顾德尔佩佐曲面的一些众所周知的性质。所谓域 $\mathbb{K}$ 上的德尔佩佐曲面，是指在 $\mathbb{K}$ 上的正规射影曲面 X，且其具有充分反典范 Cartier 除子 $-K_X$。如果德尔佩佐曲面具有典范奇点，我们就称其具有杜瓦尔奇点。

定理 2.7（参见 [HW81]）。设 X 是完美域 $\mathbb{K}$上的具有杜瓦尔奇点的德尔佩佐曲面。令 $d=(-K_X)^2$。设 $\Phi\colon X \dashrightarrow \mathbb{P}^d$是由线性系 $|-K_X|$给出的有理映射。以下断言成立：

(1) 若 $d\geqslant 3$，则 $-K_X$ 很 *ample*，因此 Φ 是一个嵌入；*(2)* 若 $d\geqslant 2$，则 $|-K_X|$ 无基点，因此 Φ 是一个态射；*(3)* 若 $d=3$，则 $\Phi(X)$ 是 $\mathbb{P}^3$ 中的三次曲面；*(4)* 若 $d=2$，则 X 是 $\mathbb{P}(1,1,1,2)$ 中的一个次数为 4 的超曲面；*(5)* 若 $d=1$，则 $|-K_X|$ 是一个椭圆铅笔，其基点集由一点 $O\notin \mathrm{Sing}(X)$ 组成，并且 $|-K_X|$ 中的每条曲线在 O 处都不可约且光滑；*(6)* 若 $d=1$，则 X 是 $\mathbb{P}(1,1,2,3)$ 中的一个次数为 6 的超曲面。

注 2.8. 若定理 2.7 中的域 $\mathbb{K}$ 的特征为 0，则若 $d=2$ 我们有 Φ 是 $\mathbb{P}^2$ 的双覆盖，其分支曲线为可能可约的四次曲线；$d=1$，则 $|-2K_X|$定义了一个双覆盖 $X\to\mathbb{P}(1,1,2)\subset\mathbb{P}^3$，其分支曲线为一条六次曲线。

回顾　称一个弱德尔佩佐曲面为满足 $-K_Z$ 数值有效且大的一张光滑曲面。

引理 2.9（参见 [Dol12，命题 8.1。23]）。设 X 是一个弱德尔佩佐曲面，且 $f\colon Y\to X$是将 X 在一点处爆破所得 P，该点定义在完美域 $\mathbb{K}$上。若 P 不位于一条 (-2)-曲线上，且 $K_X^2\geqslant 2$ 那么 Y 是一个弱德尔佩佐曲面。

对于完美域 $\mathbb{K}$ 上具有杜瓦尔奇点的奇异德尔佩佐曲面 X，可以考虑其奇点的极小解消 $\pi\colon Z\to X$，其中 Z 是一个弱德尔佩佐曲面。以下引理说明，可以研究弱德尔佩佐曲面的余正则性，而非相应奇异德尔佩佐曲面的余正则性，反之亦然。

引理 2.10。设 X 是特征0 的域 $\mathbb{K}$ 上具有杜瓦尔奇点的奇异德尔佩佐曲面 X，且 $\pi\colon Z\to X$ 是其奇点的极小解消。那么对于任意 $l\geqslant 1$，有 余正则度 $_l(X)=$余正则度 $_l(Z)$，并且 余正则度 $(X)=$余正则度 (Z)。

证明。对于任意 $l\geqslant 1$，由引理 2.5 可得余正则度 $_l(Z)\geqslant$余正则度 $_l(X)$。此外，对于 X 上任意一个卡拉比–丘对 (X,D)，对 $(Z,f^*(D))$ 也是一个卡拉比–丘对，因为 X 的奇点是典范的。因此，对偶复形 $\mathcal{D}(X,D)$ 和 $\mathcal{D}(Z,f^*(D))$ 同胚，且余正则度 $_l(Z)\leqslant$余正则度 $_l(X)$。于是，余正则度 $_l(Z)=$余正则度 $_l(X)$，且余正则度 $(X)=$余正则度 (Z)。□

在代数闭任意特征域上定义的德尔佩佐曲面上可能出现的杜瓦尔奇点构型已在 [St21] 中描述。

3. 复数域上的德尔佩佐曲面

本节将计算在特征零代数闭域 $\mathbb{K}$ 上定义的具有杜瓦尔奇点的德尔佩佐曲面的余正则性。根据勒夫谢茨原理，我们可以假设 $\mathbb{K}=\mathbb{C}$。

引理 3.1. 设　X 是一个次数为 $d\geqslant 2$的 *du Val* 德尔佩佐曲面。那么 余正则度$(X)=$余正则度$_1(X)=0$.

证明。我们可以吹起 $d-2$ 上的一般点 X，从而得到一个 Y 次数为 2、具有杜瓦尔奇点的德尔佩佐曲面，以及一个态射 $h\colon Y\to X$，参见引理 2.9。因此，利用引理 2.5，我们可以从一开始就假设次数 $(-K_X)^2=2$。由定理 2.7，线性

系统 $|-K_X|$给出一个双覆盖 $g\colon X \to \mathbb{P}^2$，其分歧沿着一条约化四次曲线 $C \subset \mathbb{P}^2$。假设 C 不是四条直线的并。那么 C 有一个次数至少为 2 的分支 C'。考虑一条与 C'相切的一般直线 L。我们断言，$g^*L \sim -K_X$且 $\dim \mathcal{D}(X, g^*L) = 1$。事实上，这由以下事实可得：$g^*L$ 是一条有节点的反典范曲线，在 X 上不经过 X 的奇点（因为 L 不经过 C的奇点）。

考虑 C 为四条直线的并的情形。注意，C 为交于一点的四条直线的情形是不可能的。事实上，在这种情况下，我们会得到一个形如

$$w^2 + xy(x-y)(x-ay) = 0, \qquad a \in \mathbb{C},$$

的奇点，而该奇点不是杜瓦尔奇点。我们可以取一条经过 C的恰好一个节点的、一般的直线 D。于是，g^*L 是一条具有一个节点的不可约有理曲线，并且 $g^*L \sim -K_X$。因此，$\operatorname{coreg}(X) = \operatorname{coreg}_1(X) = 0$。□

Now 我们处理具有杜瓦尔奇点的1度德尔佩佐曲面的情形 .

注记3.2。注意，线性系 $|-K_X|$中的一般元素 C是一条光滑椭圆曲线，因此 $\dim \mathcal{D}(X, C) = 0$。这意味着 $0 \leqslant \operatorname{coreg}_1(X) \leqslant 1$以及 $0 \leqslant \operatorname{coreg}(X) \leqslant 1$。

我们约定在本节余下部分使用以下记号。

典范对应3.3. 设 X 是具有杜瓦尔奇点的德尔佩佐曲面。根据定理 2.7，线性系 $|-K_X|$ 有一个基点 P，它是 X上的一个非奇异点。爆破该点后，我们得到一个曲面 X'以及一个态射 $f\colon X' \to X$。线性系 $|-K_{X'}|$定义了一个态射 $\phi\colon X' \to \mathbb{P}^1$，其一般纤维是椭圆曲线。我们用 Y表示 X'的奇点的极小解消。置 $h\colon Y \to X$。考虑诱导态射 $\phi_Y\colon Y \to \mathbb{P}^1$。注意，$\phi_Y$是带有一个截面的椭圆纤维化，该截面是 f-例外的（-1）-曲线。注意，ϕ_Y 是相对极小的。我们在下图中总结这些记号（这里$\pi\colon Z \to X$ 是 X的最小解消）：

$$\begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & Z \\ \downarrow & \overset{h}{\searrow} & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ X' & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow{\scriptstyle \phi} & \swarrow & \\ \mathbb{P}^1 & & \end{array} \tag{3.1}$$

引理 3.4。设 X 是一个次数为1 且至多具有杜瓦尔奇点的德尔佩佐曲面。$|-K_X|$中的元素都是约化且不可约的曲线。对于给定的曲线 $C \in |-K_X|$，X 至多有一个奇点属于 C。

证明。设 $C \in |-K_X|$。第一个结论可由定理 2.7或方程 $C(-K_X) = (-K_X)^2 = 1$推出。我们证明第二个结论。考虑双覆盖

$$g\colon X \to \mathbb{P}(1,1,2) \subset \mathbb{P}^3$$

由线性系 $|-2K_X|$给出。于是 g沿一条算术亏格为4的曲线 $R \subset \mathbb{P}(1,1,2)$分歧，该曲线是 $\mathbb{P}^3$中二次锥面 $\mathbb{P}(1,1,2)$与三次曲面的交。注意 R

不经过 $\mathbb{P}(1,1,2)$的顶点，且 X 的奇点对应于 R的奇点。 C 与锥面 $\mathbb{P}(1,1,2)$的一条直纹 F 的交数等于3，因此 C至多有一个奇点属于 F。映射 g限制在 $|-K_X|$的任一元素上，诱导出 $\mathbb{P}(1,1,2)$的一条直纹 F的双覆盖，并在 $F\cap C$及锥面的顶点处分歧，从而结论成立。□

我们回顾 X 上的奇点与 ϕ_Y 的奇异纤维之间的对应关系（此处 A_0表示一个光滑点），例如参见 [St21, 表 3]。我们采用椭圆纤维化奇异纤维的 Kodaira 分类记号，例如参见 [BHPVdV04，§V.7，V.10]

Kodaira 型	I_0	$I_n,\ n\geqslant 1$	II	III	IV	I_0^*	$I_n^*,\ n\geqslant 1$	IV^*	III^*	II^*
Du Val 奇点	A_0	A_{n-1}	A_0	A_1	A_2	D_4	D_{4+n}	E_6	E_7	E_8
$1-$对数典范阈值$(Y;F)$	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{6}$
$\chi(F)$	0	n	2	3	4	6	$6+n$	8	9	10
$j(F)$	$\in\mathbb{C}$	∞	0	1728	0	$\in\mathbb{C}$	∞	0	1728	0

表 1. ϕ_Y 的奇异纤维与 X的奇点之间的对应关系

注 3.5. 请注意，对于 ϕ_Y 上给定类型的奇异纤维， X 上存在唯一一种对应的 du Val 奇点类型。对于奇点 A_0、 A_1、 A_2，反之则不成立。更确切地说，光滑点 A_0 对应于类型为 I_0、 I_1 和 II 的纤维，奇点 A_1 对应于类型为 I_2 和 III 的纤维，而奇点 A_2 对应于类型为 I_3 和 IV 的纤维。对于 X 上的其他类型的奇点， Y 上都有唯一对应的纤维类型。

引理 3.6. 设 X 是一个次数为 1 、至多有杜瓦尔奇点的德尔佩佐曲面。当且仅当 ϕ_Y 有一个类型为 I_n、$n\geqslant 1$ 的纤维时，成立 余正则度 $_1(X)=0$ 。

此外，如果 ϕ_Y 有一个类型为 I_n 或 I_n^* 的纤维，其中 $n\geqslant 1$，那么 余正则度 $(X)=0$。

证明。注意，对于任意 $D\in|-K_X|$，都存在 ϕ_Y 的一个纤维 F，使得 $D=h(F)$，其中 h 如 (3.1) 中所述。因此，余正则度 $_1(X)$ 完全由 ϕ_Y 的纤维类型决定，见注 3.5。容易看出，对于 ϕ_Y 的一个纤维 F，有 $\dim\mathcal{D}(Y,F)=\dim\mathcal{D}(X,h(F))=1$，当且仅当 F 的类型为 $I_n, n\geqslant 1$。因此，余正则度 $_1(X)=0$，当且仅当 ϕ_Y 有一个类型为 $I_n, n\geqslant 1$ 的纤维。

若 ϕ_Y 有一个类型为 I_n^* 的纤维 F，其中 $n\geqslant 1$，则对于一般的光滑纤维 F'，对 $(Y,\ \frac{1}{2}F+\frac{1}{2}F')$ 是对数典范的，并且 $\dim\mathcal{D}(Y,\ \frac{1}{2}F+\frac{1}{2}F')=1$。因此，余正则度$(X)=0$。这就证明了第二个断言。□

推论 3.7. 若 X 具有类型为 A_n 的奇点（当 $n\geqslant 3$ 时），或类型为 D_m 的奇点（当 $m\geqslant 5$ 时），则余正则度 $(X)=0$。

证明。若 X 具有类型为 A_n 的奇点（当 $n\geqslant 3$ 时），或类型为 D_m 的奇点（当 $m\geqslant 5$ 时），则 ϕ_Y 具有类型为 I_{n+1} 或 I_{m-4}^* 的纤维（分别对应），参见注记 3.5。因此 余正则度 $(X)=0$，由引理 3.6。□

命题 3.8. 设 X 是次数为1、至多具有杜瓦尔奇点的德尔佩佐曲面。则余正则度 $(X)>0$ 蕴含 ϕ_Y 是等变的。

若 $\phi_Y\colon\ Y\to\mathbb{P}^1$ 是等变的，则 余正则度 $_1(X)=1$。

证明。根据引理 3.4，ϕ_Y： $Y \to \mathbb{P}^1$ 的纤维不是重纤维。j-不变函数在 $\mathbb{P}^1$ 上有极点，当且仅当 ϕ_Y 的相应纤维对于 $n \geqslant 1$具有 I_n 或 I_n^* 型，见表 1。假设 ϕ_Y： $Y \to \mathbb{P}^1$ 不是等变的，则 j 有极点，并且存在一个纤维 F，满足 $j(F) = \infty$。根据引理 3.6，余正则度（X）$= 0$。

假设 ϕ_Y 是等变的，因此 $j \in \mathbb{C}$。特别地， ϕ_Y 没有 I_n 型的纤维， $n \geqslant 1$，并且由引理 余正则度 $_1(X)$ $= 1$ 可知 3.6。 □

注 3.9。 根据表 1，命题 1.1 可表述如下：次数为 X 1 的光滑德尔佩佐曲面 的余正则度为 1，当且仅当相应的椭圆纤维化 ϕ_Y: $Y \to \mathbb{P}^1$是等变的（且其 j-不变量等于 0）。否则， X 的余正则度为 0。

注 3.10。 注意，对于拓扑欧拉示性数 $\chi(Y)$，有 $\chi(Y) = 12$；同时， $\chi(Y)$ 等于 ϕ_Y 的奇异纤维的 $\chi(F)$ 之和。因此，若 ϕ_Y 是等变的，且具有给定的 j-不变量，则可利用表 1 计算 ϕ_Y 的奇异纤维构型的各种可能性。我们列出以下可能性；例如，记作 $IV + 4II$ 表示 ϕ_Y 有一个 Kodaira 型为 IV 的奇异纤维、4 个 Kodaira 型为 II 的奇异纤维，且没有其他奇异纤维。

- 若 $j \neq 0$ 且 $j \neq 1728$，则唯一可能的构型是 $2I_0^*$。
- 若 $j = 0$，则可能的构型为 $II^* + II$、 $IV^* + IV$、 $IV^* + 2II$、 $2I_0^*$、 $I_0^* + IV + II$、$I_0^* + 3II$、 $3IV$、$2IV + 2II$、 $IV + 4II$、 $6II$。
- 若 $j = 1728$，则可能的构型为 $III^* + III$、 $2I_0^*$、 $I_0^* + 2III$、 $4III$。

请注意，这些构型的列表是众所周知的，例如可见于 [Mi90，第 4]节。

我们将使用以下众所周知的结果。

命题 3.11 （参见[Sil94，例 1.3.1 和 1.3.2]）。具有 $j = 0$ （分别具有$j = 1728$）的椭圆曲线由以下魏尔斯特拉斯方程给出：

$$w^2 = z^3 + a, \quad a \neq 0 \qquad (resp, \quad w^2 = z^3 + bz, \quad b \neq 0). \tag{3.2}$$

这些椭圆曲线具有复乘，并且具有阶为6 （分别为4）的自同构。它们可以表示为商 $\mathbb{C}/\Lambda$ ，其中 Λ 是 $\mathbb{C}$中的艾森斯坦数（分别为高斯数）格。

现在我们想考察等平凡椭圆纤维化的不同情形 ϕ_Y 并描述相应的德尔佩佐曲面 X，其余正则度（X）$= 1$。注意，对应于 $2I_0^*$ 两个 D_4-奇点的构型 X 可能取 j的任意值 [。实际上，这一情形已在Mo24的例 3 中讨论过，13], 并且在这种情况下有余正则度（X）$= 0$ 。为方便读者，我们证明余正则度（X）$= 0$ 这一事实。

命题 3.12。 设 X 是一个次数为1且具有两个 D_4-奇点的德尔佩佐曲面。则余正则度$_1$（X）$= 1$，余正则度 $_2$（X）$= 0$，因此余正则度（X）$= 0$。

证明。 包含 ϕ_Y 的两个奇异纤维 D_4-奇点具有类型 I_0^*，且没有其他奇异纤维，因为 $\chi(I_0^*) = 6$，并且 $2\chi(I_0^*) = \chi(Y) = 12$。因此 余正则度 $_1(X) = 1$ 由引理 3.6。

为计算 余正则度 $_2(X)$，考虑 [ChP08第 8] 节中的 X在 $\mathbb{P}(1,\ 1,\ 2,\ 3)$ 的方程（参见其中的大表）：

$$w^2 = z(z + xy)(z + axy), \qquad a \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}.$$

我们看到，Cartier除子 $D = \{z = 0\}$ 属于线性系 $|-2K_X|$，并经过 X 的两个奇点，其坐标分别为 $P_1 = (1 : 0 : 0 : 0)$ 和 $P_2 = (0 : 1 : 0 : 0)$。对于由 $z = w = 0$ 给出的约化不可约曲线 D'，有 $D = 2D'$。我们来验证对 $(X,\ D')$ 是对数典范的，并且在 P_i 上存在一个对数不一致为 0 的除子 E。我们可以在 $\mathbb{P}(1,\ 1,\ 2,\ 3)$ 的仿射图表 $\mathbb{C}^3$ 中，在 P_i 附近进行计算。经过坐标变换后，X 和 D 的方程如下：

$$w^2 = xz(z + x), \qquad D = \{z = 0\},$$

$\sim$ 和 P_i 是原点。考虑原点 ψ 处的爆破：$\mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$。在爆破后的图表 $z \mapsto xz, \sim w \mapsto xw,$ $x \mapsto x$ 中计算，可得 X 的严格变换 X 的方程如下：

$$w^2 = xz(z + 1),$$

~这就是普通二重点的方程。D' 的原像 $D' = \psi|^*_{\widetilde{X}} D'$ 由方程 $xz = 0$~ ~给出，因此（$X,\ D'$）是严格对数典范的。于是，（$X,\ D'$）是对数典范的，并且在 P_i上存在一个对数不一致为 0 的除子 E。因此，$\mathrm{coreg}(X) = \mathrm{coreg}_2(X) = 0$，如所声称。□

因此我们看到，若 $\mathrm{coreg}(X) = 1$，则 ϕ_Y 是等变的，其 j-不变量为 0 或 1728。对于这些情形，我们需要以下命题。

命题 3.13。设 X 是一个次数为1 且具有杜瓦尔奇点的德尔佩佐曲面。考虑双覆盖 g：$X \to \mathbb{P}(1,\ 1,\ 2)$，其分歧曲线为 $R \sim 6L$，其中 L 是$\mathrm{Cl}(\mathbb{P}(1,\ 1,\ 2)) = \mathbb{Z}$的正生成元。假设 R不可约。设 D是 $|-2K_X|$ 中的一个元素，且不能写成 $D = D_1 + D_2$的形式，其中 $D_i \in |-K_X|$。则$(X, \frac{1}{2}D)$是 KLT（奇点）的。

因此，要么 X 具有 D_n 型奇点，其中 $n \geqslant 5$且余正则度$(X) = 0$；要么余正则度(X) =余正则度$_1(X)$。

Proof。根据定理 2.7，曲面 X可在 $\mathbb{P}(1,\ 1,\ 2,\ 3)$ 中由以下方程给出 ：

$$w^2 + z^3 + zf_4(x, y) + f_6(x, y) = 0, \tag{3.3}$$

其中，$f_i(x,\ y)$ 是次数为 i 的齐次多项式。

的方程 $z + g_2(x,\ y) = 0$，因为 D不是形如 $D_1 + D_2$的形式，其中 $D_i \in |-K_X|$。将此方程代入 (3.3)，得到方程

$$w^2 = g_6(x, y)$$

在 $\mathbb{P}(1,\ 1,\ 3)$ 中。注意，g_6 是非零多项式，这是由 R 不可约这一假设推出的，因此 $g(D)$ 不是 R 的分支。注意，$\mathbb{P}(1,\ 1,\ 3)$ 的奇点不属于 D。在覆盖 D 且同构于 $\mathbb{C}^2$ 的图中，经过解析坐标变换后，D 的方程变为

$$w^2 = x^a, \qquad w^2 = y^b,$$

其中 $a \geqslant 1, b \geqslant 1$。我们得出结论，对 $(X,\ \frac{1}{2}D)$ 这一对的对数典范阈值大于 $_{12}$。换言之，$(X,\ \frac{1}{2}D)$ 是 KLT（奇点）。

若 X 在 $n \geqslant 5$ 时有一个类型为 D_n 的奇点，则由推论 3.7 得 $\operatorname{coreg}(X) = 0$。否则，对于满足 $D = D_1 + D_2$ 和 $-D_i \in |-K_X|$ 的对 $(X, \frac{1}{2}D)$，有 $\dim \mathcal{D}(X, \frac{1}{2}D) \leqslant 0$，参见表 1。根据定理 2.6，这意味着 $\operatorname{coreg}(X) = \operatorname{coreg}_1(X)$，从而得证。□

3.1. **具有 $j = 0$ 的等平凡纤维化**。现在证明，对于等平凡 ϕ_Y，若满足 $j = 0$，则几乎总是满足命题 3.13的假设。

引理 3.14。设 X 是一个具有杜瓦尔奇点、次数为1 的德尔佩佐曲面，其对应的椭圆纤维化 ϕ_Y 是等平凡的，且具有 j-不变量0。那么，双覆盖 g的分歧曲线 R： $X \to \mathbb{P}(1、1、2)$ 要么不可约，要么 X 有两个 D_4-奇点。

证明。若 ϕ_Y是等平凡的，且 $j = 0$，则方程（3.3）在 $\mathbb{P}(1, 1, 2, 3)$ 中具有如下形式（参见命题 3.11）

$$w^2 + z^3 + f_6(x, y) = 0.$$

分歧除子 R 在 $\mathbb{P}(1,1,2)$ 中由方程 $z^3 + f_6(x, y) = 0$ 给出。注意，曲线 R 不可约当且仅当多项式 $z^3 + f_6(x, y)$ 不可约。

假设 $z^3 + f_6(x, y)$ 可约。则它有一个不可约因子 $z + p(x, y)$，因此 $(-p(x, y))^3 + f_6(x, y) = 0$。于是 $f_6(x, y)$ 是 $p(x, y)$ 的立方，而 $p(x, y)$ 是次数 2 的齐次多项式。经过坐标变换后，有两种可能：要么 $p(x, y) = x^2$，要么 $p(x, y) = xy$。前一种情形不可能，因为由方程给出的曲面 X

$$w^2 + z^3 + x^6 = 0$$

有一个奇点 $w = z = x = 0$，它不是 du Val 奇点。在后一种情形中，X由方程 $w^2 + z^3 + x^3y^3 = 0$ 给出，且 X 是次数为 1 、带有两个 D_4 奇点的德尔佩佐曲面，这可通过转到仿射图看出，参见命题 3.12 的证明。□

现在我们能够得到以下命题，其中计算了当 ϕ_Y 与 $j = 0$ 等变时的余正则度（X）。

命题 3.15. 设 X 是一个具有杜瓦尔奇点、次数为1 的德尔佩佐曲面，且其对应的椭圆纤维化 ϕ_Y 与 j 等变，且不变量为 0。若 X 有两个 D_4 奇点，则余正则度（ X ） $= 0$。否则余正则度（ X ） $= 1$。

证明。若 X 有两个 D_4 奇点，则由命题 3.12，余正则度（X） $= 0$。否则，由引理 3.14，双覆盖 g: $X \to \mathbb{P}(1, 1, 2)$ 的分歧曲线 R 不可约，因此由命题 3.13 和 3.8，余正则度（X） $=$余正则度 $_1$（X） $= 1$。□

注记 3.16. 不难在方程中找到 $f_6(x, y)$

$$w^2 + z^3 + f_6(x, y) = 0$$

给出次数 1 且具有杜瓦尔奇点的德尔佩佐曲面 X，使得相应的椭圆纤维化 ϕ_Y 是等变的，且对 ϕ_Y 的不同奇异纤维构型，其 j-不变量为 0。这是因为 j-不变量为 0 的可能奇异纤维类型由 $f_6(x, y)$的根的重数决定。我们将这些数据汇集于下表，其中 $\rho(X)$表示 X 的皮卡数，$\dim M$ 表示此类曲面的模空间的维数。

ϕ_Y的纤维	奇点(X)	$f_6(x,\ y)$	余正则度 (X)	$\rho(X)$	维数 M
II^*+II	E_8	x^5y	1	1	0
IV^*+IV	E_6+A_2	x^4y^2	1	1	0
IV^*+2II	E_6	$x^4y(x-y)$	1	3	0
$2I_0^*$	$2D_4$	x^3y^3	0	1	0
$I_0^*+IV+II$	D_4+A_2	$x^3y^2(x-y)$	1	3	0
I_0^*+3II	D_4	$x^3y(x-y)(x-ly)$	1	5	1
$3IV$	$3A_2$	$x^2y^2(x-y)^2$	1	3	0
$2IV+2II$	$2A_2$	$x^2y^2(x-y)(x-ly)$	1	5	1
$IV+4II$	A_2	$x^2y(x-y)(x-ly)(x-my)$	1	7	2
$6II$	$\varnothing$	$xy(x-y)(x-ly)(x-my)(x-ny)$	1	9	3

表 2. 具有 $j=0$ 的等平凡椭圆纤维化的奇异纤维

注意，若 $\rho(X)\leqslant 3$，则具有给定奇异纤维构型的曲面是唯一的；而对 $\rho(X)\geqslant 5$，有 $\dim M=\frac{1}{2}(\rho(X)-3)$。

注 3.17. 奇点构型并不能唯一确定曲面 X（以及椭圆纤维化 ϕ_Y），因为一般情况下 ϕ_Y 可能不是等变的，也可能是等变的且具有 $j\neq 0$。例如，命题 $2D_4$ 构造了一个一维曲面族，其构型为 j，且具有不同的-不变量3.12。

具有唯一 E_8-奇点的曲面也可以产生奇异纤维集合 II^*+2I_1，对应于 ϕ_Y。此时 ϕ_Y 不是等变的，且有两个节点纤维，因此 余正则度 $(X)=0$。可以验证，这样的 X 是唯一的，其方程可由 $\mathbb{P}(1,\ 1,\ 2,\ 3)$（参见 [ChP08, 注 B.5]）

$$w^2+z^3+x^4z+x^5y=0.$$

具有 E_6 和 A_2 奇点的曲面也可以产生一组奇异纤维 $IV^*+I_3+I_1$，对应于 ϕ_Y。在这种情况下，ϕ_Y 不是等变的，并且有一个节点纤维，因此 余正则度 $(X)=0$。这类曲面的存在性 X 已在 [Ye02], 中得到证明，见表 4.1。事实上，可以写出一个显式方程，X 使得具有奇异纤维的曲面 IV^*+IV 对应于 ϕ_Y 是它的特化：

$$w^2+z^3-3x^3(x+4y)z+2x^4(x^2+6xy+6y^2)=0.$$

3.2. **具有 $j=1728$ 的等平凡纤维化。** 我们考虑剩下的情形 $j=1728$。若 X 是一个次数为 1 的德尔佩佐曲面，且 ϕ_Y 是等变的，其 j-不变量为 1728，则 3.3 中的方程（$\mathbb{P}(1,\ 1,\ 2,\ 3)$）具有如下形式（参见命题 3.11）

$$w^2+z^3+f_4(x,y)z=0,$$

其中 $f_4(x,\ y)$ 是一个 4 次齐次多项式。

双覆盖的分歧曲线 R $g\colon\ X\to\mathbb{P}(1,\ 1,\ 2)$ 在此情形下是可约的，因此我们无法应用命题 3.13。所以根据注记3.10，我们必须考虑 ϕ_Y 的四种奇异纤维构型。对于这些构型，我们需要找出 X 的显式方程。我们从下面的注记开始。

注 3.18. 我们在方程中找到 $f_4(x,y)$

$$w^2+z^3+f_4(x,y)z=0$$

从而得到一个次数为 1 的德尔佩佐曲面 X，其具有杜瓦尔奇点，并且对于 ϕ_Y 的不同奇异纤维构型，相应的椭圆纤维化 ϕ_Y 是等变的，且其 j-不变量为 1728。为此，注意到 j-不变量为 1728 的可能奇异纤维类型与 $f_4(x,y)$ 的根的重数一一对应。我们将这些数据汇总在下表中。

ϕ_Y的纤维	Sing(X)	$f_4(x,y)$	X的余正则度	$\rho(X)$	M的维数
III^*+III	E_7+A_1	x^3y	1	1	0
$2I_0^*$	$2D_4$	x^2y^2	0	1	0
I_0^*+2III	D_4+2A_1	$x^2y(x-y)$	0	3	0
$4III$	$4A_1$	$xy(x-y)(x-ly)$	1	5	1

表3. 具有 $j=1728$ 的等平凡椭圆纤维化的奇异纤维

还需注意，若 $\rho(X)\leqslant 3$，则具有给定奇异纤维构型的曲面是唯一的；而对于 $\rho(X)\geqslant 5$，有 $\dim M=\frac{1}{2}(\rho(X)-3)$。

注记 3.19。奇点构型并不能唯一确定曲面 X（以及椭圆纤维化 ϕ_Y），因为在一般情况下 ϕ_Y 可以不是等变的，或者可以是等变的且带有 $j\neq 1728$。例如，构型为 $2D_4$ 且 j-不变量不同的曲面的一维族在命题 3.12中构造。

具有 E_7 和 A_1 奇点的曲面也可以给出奇异纤维组 $III^*+I_2+I_1$（对于 ϕ_Y）。在这种情况下，ϕ_Y 不是等变的，并且有一个节点纤维，因此 余正则度（X）$=0$。这样的曲面 X 的存在性在 [Ye02], 中得到证明，参见表 4.1。事实上，可以写出 X 的一个显式方程，使得具有奇异纤维 III^*+III（对于 ϕ_Y）的曲面是它的特化：

$$w^2+z^3-3x^3(x+2y)z+2x^5(x+3y)=0.$$

对于 $2I_0^*$ 的情形，余正则度在命题 3.12中计算，其他情形则在引理 3.21、3.22 和 3.23中讨论。为了计算这些情形下的 余正则度（X），我们需要以下引理。

引理 3.20。设 $x\in X$ 是一个 *du Val* 奇点的芽。若 $x\in X$ 的类型为 D_n，则 $x\in X$ 不存在非平凡的1-补（此处非平凡意为 $D\not\sim 0$）。若 $x\in X$ 的类型为 E_n，则 $x\in X$ 不存在余正则度为0的补。

证明。第一个断言由 [Mo24，命题 3.11] 得出。第二个断言源于类型为 E 的奇点是例外的这一事实，这意味着对于任意除子 D，对 (X,D) 在 $x\in X$ 上至多有一个对数差异为 0 的例外除子。事实上，若 (X,D) 是余正则度为 0 的补，则在 (X,D) 的对数消解 (Y,D_Y) 中，$D_Y^{=1}$ 内会有两条相交曲线 E_1 和 E_2。将 E_1 与 E_2 的交点爆破后，我们会得到 $x\in X$ 上另一条对数差异为 0 的曲线。矛盾，由此证明完毕。□

引理 3.21. 设 X 是一个次数为1 的德尔佩佐曲面 X，具有杜瓦尔奇点，且相应椭圆纤维化 ϕ_Y 的奇异纤维构型为 $III+III^*$。特别地，Sing$(X)=E_7+A_1$。于是coreg$(X)=1$。

证明. 根据 o 注记 3.18，曲面 X 由以下方程给出，该方程定义在 $\mathbb{P}(1,1,2,3)$中：

$$w^2+z(z^2+x^3y)=0.$$

根据命题 3.8，我们有余正则度$_1(X) = 1$。我们证明余正则度$_2(X) = 1$。X的奇点坐标为 $P_1 = (0:1:0:0)$ 和 $P_2 = (1:0:0:0)$。在$(1, 1, 2, 3)$的仿射图 $\mathbb{C}^3$ 中，包含 P_1 （分别为 P_2）的图上， X 的方程变为

$$w^2 + z^3 + x^3z = 0$$

and

$$w^2 + z^3 + yz = 0,$$

分别。考虑除子 D 其方程为 $z = 0$ 且经过点 P_1 和 P_2。由引理3.20可知，对$(X, \frac{1}{2}D)$ 在 P_1附近的余正则度不可能为0 。通过直接计算可知，$(X, \frac{1}{2}D)$ 在 P_2附近的余正则度不为0 。

对于对$(X, \frac{1}{2}B)$其中 $B \neq D$， $B \in |-2K_X|$，以及 $B = \{z + f_2(x, y) = 0\}$，仿照命题3.13 的证明可得$(X, \frac{1}{2}B)$ 是 KLT（奇点）对。因此余正则度$_2(X) = 1$，所以余正则度$(X) = 1$。□

引理 3.22。 设 X 是一个次数为1 且具有杜瓦尔奇点的德尔佩佐曲面 X，其对应椭圆纤维化 ϕ_Y 的奇异纤维构型为 $I_0^* + 2III$。特别地，<*style id='9'>Sing*$(X) = D_4 + 2A_1$。那么$\mathrm{coreg}(X) = 0$。

证明。 根据备注 3.18，曲面 X 由以下方程给出，定义在 $\mathbb{P}(1,1,2,3)$中：

$$w^2 + z(z^2 + x^2y(x - y)) = 0$$

我们断言，在这种情况下，coreg$(X) = 0$ 。注意，分歧曲线 R 在 $\mathbb{P}(1, 1, 2)$ 中由方程 $z(z^2 + x^2y(x - y)) = 0$ 给出。因此 R 由两个不可约分支 $C_1 \sim H$和 $C_2 \sim 2H$ 组成，其中 H 是 $\mathbb{P}(1, 1, 2) \subset \mathbb{P}^3$的一个超平面截面。于是 C_1 是光滑曲线，而 C_2在点 $(0:1:0)$ 处有一个节点，该点是 D_4奇点的像。此外， $C_1 \cdot C_2 = 2H^2 = 4$，因此 C_1 与 C_2 横截相交于另外两点 P_1 和 P_2 。考察这一对 $(X, \frac{1}{2}g^*(C_1))$，我们得出 coreg$(X) = 0$。□

引理 3.23. 设 X 是一个次数为 1 的德尔佩佐曲面 X ，具有杜瓦尔奇点，且相应椭圆纤维化的奇异纤维构型 ϕ_Y 为 $4III$。特别地，$\mathrm{Sing}(X) = 4A_1$。于是$\mathrm{coreg}(X) = 1$。

证明. 根据备注 3.18，曲面 X 由以下方程在 $\mathbb{P}(1,1,2,3)$中给出：

$$w^2 + z(z^2 + xy(x - y)(x - ly)) = 0$$

我们断言 coreg$(X) = 1$。由命题 3.8 可知，coreg$_1(X) = 1$ 。分歧曲线 R是可约的。因此，我们只需考虑由方程 $z + f_2(x, y) = 0$给出的除子 D。在此情形下，通过对 X 的奇点进行爆破的局部计算，我们得到 coreg$_2(X) = 1$。由此可得 coreg$(X) = 1$。□

现在我们已准备好证明本截面的主定理。

定理 1.3 的证明。由命题 1.1，我们可以假设 X 不是光滑的。由引理 3.1，若$(-K_X)^2 \geqslant 2$，则余正则度$_1(X) = 0$。因此我们可以假设$(-K_X)^2 = 1$。我们将使用典范对应3.3。特别地，用 $\phi_Y\colon Y \to \mathbb{P}^1$ 表示相应的椭圆纤维化。若 ϕ_Y 不是等变的，则由命题 3.8，余正则度$(X) = 0$ 。因此我们可以假设 ϕ_Y

是等变的，且 j-函数在底 $\mathbb{P}^1$ 上为常数。在此情形下余正则度 $_1(X) = 1$。关于 ϕ_Y 的可能奇异纤维构型列于注3.10。

若 $j \notin \{0, 1728\}$，则 ϕ_Y的奇异纤维构型为 $2I_0^*$。在此情形下，由命题 3.12 可知余正则度$(X) = 0$。假设 $j = 0$。我们在第 3.1 节处理这一情形。在命题 3.15 中，我们给出此类曲面满足余正则度$(X) = 1$ 的判别准则。这些曲面可能的方程在注 3.16 中给出。假设 $j = 1728$。我们在第 3.2 节处理这一情形。这些曲面可能的方程在注 3.18 中给出。我们在命题 3.12 以及引理 3.21、3.22 和 3.23 中考虑所有可能情形。

我们得出结论：余正则度$(X) = 0$当且仅当要么 ϕ_Y 不是等变的，要么 ϕ_Y 是等变的且 Sing$(X) \in \{2D_4, D_4 + 2A_1\}$。否则，余正则度$(X) = 1$。至此证明完毕。□

定理 1.4 的证明（分别对应定理 1.5）由定理 1.3 的证明推出，需牢记表 2 和表 3 中列出的 X（分别为 ϕ_Y的奇异纤维）上的奇点构型。由注 3.17 和 3.19可知，存在次数为 1、皮卡秩为 1 、余正则度为 0 且具有给定奇点构型的 du Val 德尔佩佐曲面。

定理 1.6 的证明。由引理 3.1，若 $(-K_X)^2 \geqslant 2$，则余正则度$_1(X) = 0$，因此 X 由 [GHK15，引理 1.13]可知具有环面模型。因此，我们可以假设 $(-K_X)^2 = 1$。假设 ϕ_Y 不是等变的。那么， j-不变函数在 $\mathbb{P}^1$上有一个极点，因此 ϕ_Y 有一个类型为 I_n 或 I_n^*的纤维，其中 $n \geqslant 1$，见表 1。若第一种情况成立，则由引理 3.6 可知，余正则度$_1(X) = 0$ ，这等价于存在一个由 [GHK15，引理 1.13]给出的环面模型。

假设 ϕ_Y 有一个类型为 I_n^*的纤维，其中 $n \geqslant 1$，且对于 $n \geqslant 1$不存在类型为 I_n 的纤维。根据表 1，这意味着 X 具有一个 D_m奇点，其中 $m \geqslant 5$。利用表 1 以及 $\chi(Y) = 12$这一事实，我们得到 ϕ_Y的奇异纤维仅可能具有以下构型：

$$I_1^* + III + II, \qquad I_2^* + 2II, \qquad I_2^* + IV, \qquad I_3^* + III, \qquad I_4^* + II. \tag{3.4}$$

根据 [Mi90], ，(3.4) 中最后三种情形不会出现。在前两种情形中，j不变量函数的次数分别为 1 和 2。特别地，对于这类曲面，椭圆纤维化 ϕ_Y 不是等变的。例3.24表明，这类曲面确实存在。若 X 是例 3.24 中的两个曲面之一，则 coreg$_1(X) = 1$，且 coreg$_2(X) =$ coreg$(X) = 0$ （最后一个等式由定理1.5与定理 2.6结合得到）。

反之，若 ϕ_Y 是等变的，则 ϕ_Y 没有 I_n 或 I_n^*型纤维，其中 $n \geqslant 1$。由引理3.6可知，这意味着余正则度$_1(X) = 1$。证明完成。□

例3.24。我们将 $X_1'(D_5 + A_1)$（分别地， $X_1'(D_6)$）记为这样一种 du Val 德尔佩佐曲面：其奇点构型为 $D_5 + A_1$（分别地， D_6），且具有额外性质，即相应的椭圆纤维化 ϕ_Y 具有奇异纤维构型 $I_1^* + III + II$ （分别地，$I_2^* + 2II$）。

曲面 $X_1'(D_5 + A_1)$ 的一个例子由以下在 $\mathbb{P}(1, 1, 2, 3)$ 中的方程给出：

$$w^2 + z^3 - 3(x - y)xy^2z + 2(x - y)x^2y^3 = 0.$$

我们来证明：对于由该方程给出的曲面 X，其相伴的椭圆纤维化 ϕ_Y 具有奇异纤维构型 $I_1^* + III + II$。 $z^3 - 3(x - y)xy^2z + 2(x - y)x^2y^3$的判别式等于

$$4 \cdot 27(x - y)^3x^3y^6 - 27 \cdot 4(x - y)^2x^4y^6 = -108(x - y)^2x^3y^7.$$

因此， ϕ_Y有三条奇异纤维，其 $\chi(F)$分别等于2、3和7，且 j-不变量函数的次数为1。这仅对奇异纤维构型 $I_1^* + III + II$成立（见表 1）。

An 曲面 $X_1'(D_6)$ 的一个例子由 $\mathbb{P}(1，1、2，3)$ 中的以下方程给出：

$$w^2 + z^3 - 3(x^2 - y^2)y^2z + 2(x^2 - y^2)xy^3 = 0.$$

让我们证明，对于由此方程给出的曲面 X ，其相应的椭圆纤维化 ϕ_Y 具有奇异纤维构型 $I_2^* + 2II$。 $z^3 - 3(x^2 - y^2)y^2z + 2(x^2 - y^2)xy^3$ 的判别式等于

$$4 \cdot 27(x^2 - y^2)^3y^6 - 27 \cdot 4(x^2 - y^2)^2x^2y^6 = -108(x^2 - y^2)^2y^8.$$

因此， ϕ_Y 有三个奇异纤维，其 $\chi(F)$ 分别等于 2、2 和 8，并且 j-不变量函数的次数为 2。这仅可能对应于奇异纤维构型 $IV^* + II + I_2$ 和 $I_2^* + 2II$ （见表 1）。注意， X 具有一个自同构 $(x： y： z： t) \mapsto (ix： -iy： z： t)$，它置换了由 $x = y$ 和 $x = -y$ 给出的奇异纤维。因此，这些纤维具有相同的类型，构型 $IV^* + II + I_2$ 不可能，而构型 $I_2^* + 2II$ 在 X 上可以实现。

注记3.25. 记 $X_1(2D_4)$为具有两个 D_4-奇点的次数 1 du Val 德尔佩佐曲面，记 $X_1'(E_8)$、 $X_1'(E_7 + A_1)$、 $X_1'(E_6 + A_2)$为具有相应奇点构型且在 $|-K_X|$中没有节点元的曲面。正如 [ChP08]（另见 [Vir24]）所证明的，曲面 $X_1'(E_8)$、$X_1'(E_7 + A_1)$、 $X_1'(E_6 + A_2)$和 $X_1(2D_4)$具有无限自同构群。事实上，它们是仅有的具有无限自同构群的次数 1 du Val 德尔佩佐曲面。

注3.26. 在 [EFM24，定理3.3], 中证明了，任何皮卡秩为1的德尔佩佐曲面，除了

$$X_1'(E_8), \qquad X_1'(E_7 + A_1), \qquad X_1'(E_6 + A_2), \qquad X_1(2D_4) \tag{3.5}$$

均与余正则性为0的某个对克雷潘特等价，而这些例外曲面与任何环面对都不克雷潘特等价。换言之，作者计算了余正则度 $_1(X)$ 对于皮卡秩为1的 du Val 德尔佩佐曲面。3.5所示的曲面是仅有的皮卡秩为1且相应椭圆纤维化 ϕ_Y 为等变的 du Val 德尔佩佐曲面。因此， [EFM24定理3.3] 与定理1.6一致。还要注意，曲面（3.5）是仅有的不能由其奇点构型唯一确定的皮卡秩为1的 du Val 德尔佩佐曲面，见 [Ye02]。

4. 非闭域上的德尔佩佐曲面

本节讨论定义在 $\mathbb{K}$ 特征为0 的域上的德尔佩佐曲面，该域不一定是代数闭的。值得注意的是，在 [LPT25] 中，作者考察了此情形的几何类比，即定义在 $\mathbb{C}$上并带有一个自同构群 G作用的德尔佩佐曲面。

我们从以下命题开始。

命题 4.1。 设 $\mathbb{K}$ 是一个特征为0的域，且 X 是定义在 $\mathbb{K}$ 上、次数6或更高且至多具有杜瓦尔奇点的德尔佩佐曲面。则 余正则度 (X) $=$ 余正则度$_1(X)$ $= 0$。

证明。 设 $d=(-K_X)^2$ 是德尔佩佐曲面的次数。我们考虑 d 从 6 到 9 的所有可能取值。

假设 $d=6$。那么， X 上直线与奇点的构型有六种可能（见 [Dol12，表 8。4]）。令 $Z\to X$ 为奇点的极小解消。

首先，考虑 X 是环曲面的 $\mathbb{K}$-形式的情形（这些情形在 [Dol12表 8 中标记为 (i)、(ii)、(ii') 和 (iii') 4]）。若 X 属于类型 (i)，则 X 非奇异，且六条 (-1)-曲线的并 D构成一个由横截相交直线组成的六边形。此外， $D\in|-K_X|$。因此，$(X,\ D)$ 是一个对数典范对，并且 X 的余正则度 $_1(X)=0$。

对于情形 (ii)，考虑 E 上由 (-1)- 和 (-2)-曲线组成的并 Z。于是有 $(-K_Z-E)^2=0$，而线性系 $|-K_Z-E|$在 Z上给出一个圆锥曲线丛结构。对于一般的 $F\in|-K_Z-E|$，对 $E+F$是对数典范的。因此，由引理 2.10 可得 $_1$的余正则度(X) $=$，且 Z 的余正则度 $_1(Z)=0$。

对于情形 (ii') 与 (iii')， Z 上负曲线的构型不是对称的。我们的意思是，由自交数 -1与 -2 标记的相应加权对偶图（在情形 (ii') 与 (iii') 中它同胚于一条线段）不容许非平凡自同构。因此 $Z(\mathbb{K})\neq\varnothing$，且 Z 是 $\mathbb{K}$-有理的。从而 Z 与 X 是环曲面，而 X 中一个环面的补 D 是一条反典范曲线。所以 (X,D) 是一个对数典范对，并且余正则度 $_1(X)=0$。

若 X 具有类型 (i')，则 Z 是 $\mathbb{P}^2$ 在位于一条直线 L上的三个几何点处的吹起。若 Q 是任意一条横截地与 L 相交的不可约圆锥曲线，则对 $D=L+Q$ 而言，对 $(\mathbb{P}^2,D)$ 是对数典范的。可以考虑 D 在 Z上的 crepant变换 D_Z，并看出

$$\dim\mathcal{D}(Z,D_Z)=\dim\mathcal{D}(\mathbb{P}^2,D)=1.$$

因此，由引理 2.10 可知，余正则度 $_1(X)$ $=$余正则度 $_1(Z)=0$。

若 X 为类型 (iii)，则 Z 是由Hirzebruch曲面 $\mathbb{F}_2$ 在圆锥曲线丛 $\mathbb{F}_2\to\mathbb{P}^1$的一条纤维 F 上两个几何点处吹起得到的。若 E 是一个 (-2)-截面，且 C 是 $|-K_X-E-F|$ 中的任意不可约曲线，则对于 $D=C+E+F$，对 $(\mathbb{F}_2,D)$ 是对数典范的。考虑 D 在 Z上的 crepant变换 D_Z，可见 dim $\mathcal{D}(Z,D_Z)$ $=$dim $\mathcal{D}(\mathbb{F}_2,D)$ $=1$。因此，由引理 2.10 可知，余正则度 $_1(X)$ $=$余正则度 $_1(Z)=0$。

现在假设 $7\leqslant d\leqslant 9$。可以在 Z 的 $d-6$ 个几何点处吹起，得到一个次数为 W 的弱德尔佩佐曲面 6，由引理 2.9可知。反典范线性系 $|-K_W|$ 将 W映到一个曲面 Y，其奇点至多为杜瓦尔奇点。我们已证明 余正则度 $_1(Y)$ $=0$。因此余正则度 $_1(X)$ $=0$，因为由引理 2.10 和 2.5 可知

$$\operatorname{coreg}_1(X)=\operatorname{coreg}_1(Z)\leqslant\operatorname{coreg}_1(W)=\operatorname{coreg}_1(Y)=0.$$

若 $d=7$，则 X 是 $\mathbb{K}$-有理的，并且可以在 Z 上任取一个不位于 (-2)-曲线上的 $\mathbb{K}$-点进行吹起。

若 $d=8$ 且 $X\cong\mathbb{F}_1$，则 X 是 $\mathbb{K}$-有理的，我们可以采用与情形 $d=7$ 相同的推理。若 $Z\cong\mathbb{F}_2$，则可以找到一对定义在 $\mathbb{K}$ 上的几何点，它们既不位于圆锥曲线丛 $\mathbb{F}_2\to B$ 的纤维上，也不位于 (-2)-曲线上。将这对点吹起后，得到一个次数 6 的德尔佩佐曲面。

若 $X\cong\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$，则我们可以分别找到 $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ 在第一和第二个因子上的投影的纤维的两对 A_1、 A_2 和 B_1、 B_2，使得除子 $D=A_1+B_1+A_2+B_2$定义在 $\mathbb{K}$上。因此，余正则度 $_1(X)=0$。

若 $d = 9$，则 X 是一个塞韦里–布劳尔曲面，并且存在三个定义在 $\mathbb{K}$ 上的几何点，它们不共线。吹起这三个点所得的曲面是一个次数为 6 的德尔佩佐曲面。按照上述论证，我们得到余正则度(X) =余正则度$_1(X)$ $= 0$。证明至此完成。□

注4.2。 请注意，在几何情形下， G次数 9 和8的德尔佩佐曲面的0 余正则性可能对某些群 G （见 [LPT25，命题 2 和 4.2。5]）。

4.1. **三次曲面**。 现在我们转而讨论次数为 3 或更高且至多具有杜瓦尔奇点的德尔佩佐曲面情形。请注意，次数为3的德尔佩佐曲面是 $\mathbb{P}^3$中的三次曲面，因此研究这类曲面更为方便。此外，我们可以应用引理 2.9和2.5 ，将次数为 4 或更高的德尔佩佐曲面情形归约为三次曲面情形。

首先，我们想研究三次曲面的几何性质。因此可以假设域 $\mathbb{K}$是代数闭的。设 X 是 $\mathbb{P}^3$中的一个三次曲面。那么， $|-K_X|$ 的任意元素 D 都是 X 与一个平面的交。只有在以下三种情形下，对 $(X,\ D)$ 的余正则性才能达到 0：

- D 是一条节点三次曲线；
- D 是由一条不可约圆锥曲线和一条直线组成，且该直线与这条圆锥曲线在两点处横截相交；
- D 是三条没有公共点的直线。

注意，在所有这些情形中， D 都至少包含一个奇点。将这样一个点记为 P。那么，要么 P在 X上是奇点，要么 P在 X和 $D = X \cap T_P X$上是光滑点，其中 $T_P X$是 X 在 P处的切平面。

反过来，对于一个光滑点 $P \in X$，交集 $D = X \cap T_P X$ 总是一条在 P处有奇点的平面三次曲线。对于 D ，还有此前未列出的三种可能性：

- D 是一条尖点三次曲线；
- D 是由一条不可约圆锥曲线和一条与其相切的直线组成的并；
- D 是三条经过同一点的直线（在这种情况下， D 可以包含一条双直线或三重直线）。

在所有这些情况下，对 (X, D) 都不是对数典范的。注意，这三种情形恰好描述了 P 是抛物点的情形： X （见 [Dol12，第 1.1 节5] 中的定义）。特别地，对于 P上的 X 光滑非抛物点，$D = X \cap T_P X$ 对 (X, D) 是对数典范的，且对偶复形 $\mathcal{D}(X, D)$ 是一维的。

定义 4.3 节。 对于多项式 $F(x_1, \ldots, x_n)$，记 $H(F)$ 为其海森矩阵 F ：

$$H(F) = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} \right).$$

超曲面 的海森曲面 $\mathrm{He}(X)$ 定义为方程 X： $\det H(F) = 0$，其中 F是定义 X的多项式，参见 [Dol12，第 1.1 节。4]。

根据 [Dol12，第 1.1 节。5] 我们推导出以下引理。

引理 4.4. 设 $\mathbb{K}$ 是特征为 0 的域，并设 X 是定义在 $\mathbb{K}$ 上、至多具有杜瓦尔奇点的次数为 3 的德尔佩佐曲面。则存在开子集 $U \subset X$，使得对任意 $P \in U$，点 P 在 X 上光滑，并且对 $D = X \cap T_P X$，对 (X, D) 是对数典范的，且对偶复形 $\mathcal{D}(X, D)$ 是一维的。

证明。令 $U = X \setminus \mathrm{He}(X)$。则由 [Dol12，命题 1.1.19]，$U$ 的任意点在 X 上光滑。此外，U 的任意点都不是抛物点，因为由[Dol12，定理 1.1.20]，所有抛物点都包含在 $\mathrm{He}(X)$ 中。因此，对任意 $P \in U$ 和 $D = X \cap T_P X$，对 (X, D) 是对数典范的，且对偶复形 $\mathcal{D}(X, D)$ 是一维的。□

现在我们可以证明本节的主要结果。

定理 4.5。设 $\mathbb{K}$ 是特征为0的域，并设 X 是定义在 $\mathbb{K}$上的次数3或更高、至多具有杜瓦尔奇点的德尔佩佐曲面，满足 $X(\mathbb{K}) \neq \varnothing$。那么

$$\operatorname{coreg}(X) = \operatorname{coreg}_1(X) = 0.$$

证明。曲面 X 由 [Man74，定理 29.4 和 30]，可知是单有理的，因为 $X(\mathbb{K}) \neq \varnothing$ 且 $\mathbb{K}$是完美且无限的。因此 $X(\mathbb{K})$ 是稠密的。

假设 $(-K_X)^2 = 3$成立。则对于引理 4.4 中构造的开子集，有 $U(\mathbb{K}) \neq \varnothing$，因为 $\mathbb{K}$是无限的。任意一个 $\mathbb{K}$-点 P在 U中都是 X上的光滑点，并且对于 $D = X \cap T_P X$，对 (X, D) 是对数典范的，且对偶复形 $\mathcal{D}(X, D)$ 是一维的。因此，余正则度 $_1(X) = 0$。

现在假设 $d = (-K_X)^2 > 3$。考虑奇点的一个极小解消 $Z \to X$，其中 Z 是一个弱德尔佩佐曲面。令 R 为 X 上一组 (-2)-曲线的并。由于 $X(\mathbb{K})$ 稠密且 $\mathbb{K}$ 是无限集，因此开子集 $U = X \setminus R$ 中存在一个 $\mathbb{K}$-点 P。根据引理 2.9，可以在 P 处吹起 Z，得到一个次数为 $d-1$ 的弱德尔佩佐曲面。重复此过程 $d-3$ 次，即可得到一个次数为 3 的弱德尔佩佐曲面 W。反典范线性系 $|-K_W|$ 将 W 映到一个至多具有杜瓦尔奇点的三次曲面 Y 上。我们已证明 $\operatorname{coreg}_1(Y) = 0$。因此，$\operatorname{coreg}_1(X) = 0$，因为根据引理 2.10 和 2.5，有

$$\operatorname{coreg}_1(X) = \operatorname{coreg}_1(Z) \leqslant \operatorname{coreg}_1(W) = \operatorname{coreg}_1(Y) = 0.$$

证明完毕。□

现在我们可以证明定理 1.7。

定理 *1.7* 的证明。设 $\mathbb{K}$ 是一个特征 0 的域，且 X 是定义在 $\mathbb{K}$ 上、次数为 d 且至多具有杜瓦尔奇点的德尔佩佐曲面。若 $d \geqslant 6$，则由命题 余正则度 $_1(X) = 0$ 得 4.1。

若 $d = 5$，则众所周知 $X(\mathbb{K}) \neq \varnothing$。因此，由定理 余正则度 $_1(X) = 0$ 得 4.5。此外，若 $d \in \{3, 4\}$ 且 $X(\mathbb{K}) \neq \varnothing$，则由定理 余正则度 $_1(X) = 0$ 得 4.5。证明完成。

□

在以下例子中，我们将说明定理 4.5 的条件不能弱化。首先，我们将说明定理 4.5 的断言对无有理点的三次曲面并不成立。

例 4.6. 设 $\mathbb{K}$ 是一个特征为 0 的域，且包含一个次数为 3 的非平凡单位根。假设存在一个定义在 $\mathbb{K}$ 上的非平凡塞韦里–布劳尔曲面 V。那么根据 [Vik24a 引理 3.4]，由元素 b 和 c 生成的群 $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$ 通过双正则自同构作用于 V。此外，根据 [Vik24a 引理 3.10]，b 的不动点 p_1、p_2、p_3 以及 c 的不动点 $\overline{p}_4$、p_5、$\overline{p}_6$ 在 $_V = V \times_{\mathbb{K}} \mathbb{K} \cong \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$ 上处于一般位置。

设 $\mathbb{L}$ 是 $\mathbb{K}$ 的一个极小扩张，使得所有点 p_i 都定义在 $\mathbb{L}$ 上。我们断言 $\mathrm{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{K}) \cong (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$。事实上，点 p_1 定义在一个次数为 3 的扩张 $\mathbb{F}/\mathbb{K}$ 上。因此，点 $p_2 = c(p_1)$ 和 $p_3 = c^2(p_1)$ 定义在 $\mathbb{F}$ 上。类似地，点 p_4、p_5 和 p_6 分别定义在一个次数为 3 的扩张 $\mathbb{F}'/\mathbb{K}$ 上。

假设 $\mathbb{F} = \mathbb{F}'$。那么，经过点 p_1 和 p_4的直线 L，以及与 L 伽罗瓦群 $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}/\mathbb{K})$-共轭的两条直线，都经过同一点 P（考虑 $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$ 在 $\mathbb{P}^2_{\mathbb{K}} \cong V$上的正则作用即可验证）。因此，点 P定义在 $\mathbb{K}$ 上，但 $V(\mathbb{K}) = \varnothing$。由此矛盾可知 $\mathbb{F} \neq \mathbb{F}'$，且所有点 p_i 都定义在次数为 9 的扩张 $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ 上。

设 $X \to V$是对六个点 p_i吹起所得的曲面。那么，X 是一个无有理点三次曲面，其上所有直线都定义在 $\mathbb{L}$上。因此，X 与平面 H 的任意截面要么是光滑三次曲线，要么是三条共轭直线，因为其他奇异三次曲线总有一个 $\mathbb{K}$-点。然而，$X_{\mathbb{L}}$ 上的六组三条伽罗瓦群 $\mathrm{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{K})$-不变直线并不共面。因此，$X$ 的任意平面截面都是光滑三次曲线，且余正则度 $\mathrm{coreg}_1(X) = 1$。

现在我们考虑正特征域。

例 4.7（参见 [Vik24b]）。考虑一个定义在有限域 X 上的三次德尔佩佐曲面 $\mathbb{F}_2$，其方程为：

$$x^2t + y^2z + yz^2 + xt^2 = 0.$$

这个曲面颇为特别，因为它有 45 个定义在 $\mathbb{F}_2$ 上的埃卡特点（事实上，定义在 $\mathbb{F}_4$ 上），这是这类点可能达到的最大数量；它还有 15 个定义在 $\mathbb{F}_2$ 上的埃卡特点，这同样是可能的最大值。

我们断言 $\mathrm{coreg}_1(X) = 2$。事实上，在 $\mathbb{P}^3_{\mathbb{F}_2}$中恰有 15 个平面。因此，对于任意平面 H，交集 $D = X \cap H$ 是三条经过同一个埃卡特点的直线组成的三元组，而对 (X, D) 不是对数典范的。

此外，在域 $\mathbb{F}_2$ 上，曲面 $X = X \times_{\mathbb{F}_2} \overline{\mathbb{F}_2}$ 同构于费马三次曲面

$$x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = 0.$$

可以直接验证，X 的任意截面要么是光滑三次曲线，要么是尖点三次曲线，要么是一个不可约圆锥曲线与一条和该圆锥曲线相切的直线的并，要么是三条经过同一点的直线组成的三元组。因此 $\mathrm{coreg}_1(X) = 1$。

最后，让我们来看次数 2 的德尔佩佐曲面。

例 4.8。考虑定义在 $\mathbb{R}$ 上、由方程给出的次数 2 的德尔佩佐曲面 X

$$x^4 + y^4 + z^4 - w^2 = 0$$

在 $\mathbb{P}(1,1,1,2)$ 中。设 $R \subset \mathbb{P}^2$ 为双覆盖 $X \to \mathbb{P}^2$ 的分歧曲线。注意 $X(\mathbb{R}) \neq \varnothing$，但 $R(\mathbb{R}) = \varnothing$。

我们断言，余正则度$_1(X) = 1$。事实上，元素 $C \in |-K_X|$ 要么不可约，要么有两个不可约分支（这可由 $C \cdot (-K_X) = 2$推出）。余正则性为 0 的元素 $C \in |-K_X|$要么是节点不可约曲线，要么是两条在两点处横截相交的(-1)曲线。这样，我们就会在 R上得到一个 $\mathbb{R}$点，或者在 R上得到一对伽罗瓦共轭点。后一种情况可通过直接计算排除。因此，余正则度 $_1(X) = 1$。

例 4.9。 我们可以修改例 4.8，并避开条件 $R(\mathbb{K}) = \varnothing$。考虑一个定义在 X 上的德尔佩佐曲面 $\mathbb{Q}$，其方程为

$$x^4 + y^4 - z^4 - w^2 = 0$$

在 $\mathbb{P}(1, 1, 1, 2)$ 中。于是 $X(\mathbb{Q}) \neq \varnothing$，且 $R(\mathbb{Q}) \neq \varnothing$。但 R 上只有四个 $\mathbb{Q}$-点，而这些点的切线对应于成对相切的（-1）-曲线，这些曲线位于 X 上。此外，通过直接计算可验证，$\operatorname{coreg}_1(X) = 1$。

注 4.10。 在例 4.9 中，曲线 R 只包含有限多个 $\mathbb{K}$-点。注意，如果 $R(\mathbb{K})$ 是无限的，且 R 是光滑的，那么可以仿照引理 3.1的证明进行论证，并证明 余正则度 $_1(X) = 0$。

注 4.11。 注意，例 4.6、4.7、4.8 和 4.9 中构造的曲面，其余正则性等于 1 或 2，它们都是特殊的，并具有某些极值性质。例如，这些曲面都具有较大的自同构群。特别地，例 4.7中给出的三次曲面的自同构群，分别是在 $\mathbb{F}_2$ 和 $\mathbb{F}_2$上定义的光滑三次曲面中最大的。 –

5. 问题

本节假设所有簇均定义在特征0的代数闭域上，尽管在更一般的情形下也可以提出相同的问题。鉴于定理1.6，我们先提出一个自然的问题。

问题 5.1. 设 X 是一个对数终端德尔佩佐曲面。条件余正则度$(X) = 0$ 或存在环面模型，能否用 X上反典范曲线族的等变性来刻画（或许除去一个有界例外族）？

我们的结果还可以推广到高维情形。我们先提出一个与此相关的问题。

问题 5.2. 是否存在一个光滑或轻微奇异的 Fano 三维簇 X，使得 $|-K_X|$ 中的所有光滑元都同构？X 的余正则度是多少?

根据 [Beau02，命题 5.4]，，当 X 光滑且 $-K_X$ 很 ample 时，问题5.2 的答案是否定的。对于一般的光滑 Fano 三维簇，若 $-K_X$ 不是很 ample，则可从 [ALP24], 推出问题5.2 的答案是否定的；例如，参见一般次数为 [ALP24引理 8 的证明，其中2] 所讨论的是次数为2的素法诺三维簇。我们预期，对于光滑法诺三维簇，问题5.2 的答案是否定的。另一方面，很容易举出一个光滑法诺三维簇的例子，它与一个等变椭圆纤维化双有理。

例5.3. 考虑一个光滑的三维 Veronese双锥 X，即由 $\mathbb{P}(1, 1, 1, 2, 3)$中的六次方程定义的光滑 Fano簇。在 [ALP24 的引理 5.7] 中证明了，这样的一般 X 具有余正则度 0。注意， X 存在一个映射 $\phi\colon X \dashrightarrow \mathbb{P}^2$，它由线性系 $|-\frac{1}{2}K_X|$给出，且其一般纤维是椭圆曲线。将线性系$|-\frac{1}{2}K_X|$的唯一基点消解后，映射 ϕ便成为一个态射。当且仅当 X 的方程具有以下形式时， ϕ的所有光滑纤维都彼此同构：

$$w^2 = z^3 + f(x_1, x_2, x_3),$$

其中 f 是一个次数为 6 的齐次多项式。在这种情况下， [ALP24 的引理 5.7] 的证明中给出的论证不适用，因此我们只能得到如下界 余正则度$(X) \leqslant 1$。事实上，若我们选取两个一般元素 D_1, $D_2 \in |-\frac{1}{2}K_X|$，那么 $(X,\ D = D_1 + \bar{D}_2)$ 的对偶复形是一个线段。注意，一般的 X 是非有理的。在这种情况下，计算 余正则度(X) 将会很有意思。

注意，根据 [ALP24], , 条件 $\mathrm{reg}(X) = 0$ 仅当 Fano 三维簇的皮卡秩为 1时才成立；或者对照 [IP99] 的记号，它属于变形族 2.1 或 10.1。

问题 5.4。 定理1.6 能否推广到三维情形？换言之，能否将光滑或轻微奇异的有理 Fano 三维簇的以下性质联系起来：不存在环面模型；余正则度为正；若 X 双有理等价于一个椭圆纤维化 $f\colon Y \to S$ 则 f 是等变的。

关于这一问题 Fano 三维簇何时与椭圆纤维化双有理等价，文献 [Ch07对此进行了讨论。].

一般原则是，余正则度越大，所讨论的簇就越“例外”。特别是，这类“例外”簇可能具有较大的自同构群。这一观察在若干具体例子中得到了印证，见例 4.6、4.7、4.8 和 4.9。我们提出以下问题。

问题 5.5. 假设 X 是定义在域 $\mathbb{K}$上的光滑德尔佩佐曲面。假设余正则度$_{\mathbb{K}}(X) = 2$。 X 的自同构群在定义于 $\mathbb{K}$上、具有给定次数的德尔佩佐曲面中是否为极大?

我们使用的余正则性定义适用于定义在（不一定代数闭的）特征0的域上的簇，见定义2.3与注记2.4。了解同一套定义在正特征域的情形下是否仍然适用将会很有意思，参见讨论 [Mo24，4.10]。我们提出一个关于正特征下余正则性的问题。

问题 5.6. 余正则性的概念在正特征下是否有良好定义？定理2.6 在正特征下是否成立?

在第3节中，我们利用椭圆纤维化理论计算了定义在 $\mathbb{C}$上的 du Val 德尔佩佐曲面的余正则性。我们预期这一方法对定义在正特征域上的 du Val 德尔佩佐曲面同样适用。具体而言，与 du Val 德尔佩佐曲面相关联的（拟）椭圆纤维化的研究已在 [St21]中完成。然而，在正特征下显式方程会变得更为复杂。因此，我们提出如下问题。

问题 5.7. 计算在正特征域上定义的 du Val 德尔佩佐曲面的余正则性。

参考文献

[ALP24] A.Avilov, L. Loginov, V. Przyjalkowski, 光滑 *Fano* 三维簇的余正则性, Commun. Number Theory Phys. 9 (3), 509–577, 2024. [Beau90] A. Beauville, 关于超平面截面是 `常模的超曲面, 收录于《格罗滕迪克纪念文集》第一卷, Progr. Math. 第86卷，第121–133页。Birkh¨auser 波士顿，波士顿，马萨诸塞州，1990。附录由 David Eisenbud 和 Craig Huneke 撰写。

[Beau02] A. Beauville, Fano 三维簇与 K3曲面，arXiv:math/0211313, 2002. [BHPVdV04] W. P. Barth, K. Hulek, C. A. M. Peters, and A. Van de Ven,《紧复曲面》，《数学及其交叉领域成果》第4卷。第3辑：现代数学综述丛书。Springer-Verlag，柏林，第二版，2004. [Ch
07] 71 4 765 862, I.
2007
Cheltsov, 加权三维Fano超曲面上的椭圆结构，Izv. Math., ( ), – .[ChP
08] 18, I.
1118 1144, 2008
Cheltsov, Yu. Prokhorov, 具有无限自同构群的德尔佩佐曲面，Geom. Funct. Anal. – . [dFKX17] T. de Fernex, J. Koll´ar, C. Xu, 奇点的对偶复形，载于《高维代数几何：纪念川又雄二郎教授六十华诞》，Adv. Stud. Pure Math., 74, Math. Soc. Japan, 东京，103–129, 2017. [Dol12] I.V. Dolgachev,《经典代数几何：现代视角》，剑桥大学出版社，2012. [EFM
24] 2404 05878, J.
2024
Enwright, F. Figueroa, J. Moraga, 双有理复杂度为零的对数Calabi–Yau对，arXiv: . .[Du22] T. Ducat, 保体积等价下的四次曲面。arXiv:2212.02151, 2022. [FFMP25] F. Figueroa, S. Filipazzi, J. Moraga, J. Peng, Fano簇的补与余正则性, Forum of Mathematics, Sigma, 13:e39, 2025. [Fr15] R. Friedman, 反典范对的几何，arXiv:1502.02560, 2015. [GHK15] M. Gross, P. Hacking, S. Keel, 对数Calabi–Yau曲面的镜像对称，Publications Math´ematiques de l'IH´ES, 122, 65–168, 2015. [HW81] F. Hidaka, K. Watanabe, 具有丰富反典范除子的正规Gorenstein曲面，Tokyo J. Math., 4 (2), 1981. [IP99] V. A. Iskovskikh, Yu. G. Prokhorov,《代数几何 V：Fano簇》。数学百科全书，第47册。Springer, 1999. [KM98] J. Koll´ar, S. Mori,《代数簇的双有理几何》，与 C. H. Clemens 和 A. Corti 合作。由1998年日文原版译出。Cambridge Tracts in Mathematics, 134，剑桥大学出版社，剑桥，1998. [KX16] J. Koll´ar, C. Xu, Calabi–Yau对的对偶复形，Invent. Math. 205 (3), 527–557, 2016. [LMV24] K. Loginov, J. Moraga, A. Vasilkov, 光滑 Fano 三维簇的环面模型，arXiv:2407.09420, 2024. [LPT25] K. V. Loginov, V. V. Przyjalkowski , A. S. Trepalin, 德尔佩佐曲面的 G-余正则性。Trudy Matem- aticheskogo Instituta imeni V.A. Steklova, 329, 132–164, 2025. [Man74] Yu. Manin, 三次形式：代数、几何、算术，载于：North-Holland Mathematical Library，第4卷，North-Holland Publishing Co., 阿姆斯特丹-伦敦；American Elsevier Publishing Co., 纽约，1974. [Mi90] R. Miranda, 有理椭圆曲面的 Persson 奇异纤维列表，Math. Z. 205, 191–211, 1990. [Mo24] J. Moraga, Fano簇的余正则性，Geometriae Dedicata, 218, 文章编号40，2024. [MP86] R. Miranda, U. Persson, 极值有理椭圆曲面，Math. Z. 193, 537–558, 1986. [Sil94] J. H. Silverman,《椭圆曲线算术进阶专题》。Graduate Texts in Mathematics，第151卷，Springer-Verlag，纽约，1994. [Sh80] V. V. Shokurov, Fano 3-维簇的一般反典范除子的光滑性。Math. USSR Izvestija, 14 (2), 1980. [Sh00] V. V. Shokurov, 曲面上的补，Journal of Mathematical Sciences, 102, 3876–3932, 2000. [St21] C. Stadlmayr, 德尔佩佐曲面上会出现哪些有理二重点？，´Epijournal de G´eom´etrie Alg´ebrique, 5, 文章编号17，2021. [Vik24a] A. Vikulova, 有理数域上塞韦里–布劳尔曲面的双有理自同构群，Int. Math. Res. Not., 24, 14638–14654, 2024. [Vik24b] A. Vikulova, 特征2有限域上的最对称光滑三次曲面，Finite Fields Appl., 98, 论文编号102470, 2024. [Vir24] N. Virin, Du Val del Pezzo曲面的自同构，Sbornik: Mathematics, 215 (12), 1582—1606, 2024. [Ye02] Q. Ye, 关于Gorenstein对数del Pezzo曲面.. Japan. J. Math. (N.S.), 28 (1), 87–136, 2002. [Zha25] O. Zhakupov, 关于余正则性为零的光滑 Fano 三维簇。European Journal of Mathematics 11 (4), 84, 2025.

Konstantin Loginov 俄罗斯科学院斯捷克洛夫数学研究所，俄罗斯莫斯科。
AGHA实验室，莫斯科物理技术学院。loginov@mi-ras.ru

Andrey Trepalin 俄罗斯科学院斯捷克洛夫数学研究所，俄罗斯莫斯科。
trepalin@mccme.ru