arXiv:2603.03046v1 [cond-mat.mes-hall] 3 Mar 2026

磁性隧道结中混沌的电流控制及热涨落的影响

Ryo Tatsumi,[1, 2, *] Shinji Miwa,[3, 4] Hiroaki Matsueda,[1, 5] 和 Takahiro Chiba[1, 2, †]

[1] *Department of Applied Physics, Graduate School of Engineering,Tohoku University, Sendai, Miyagi 980-8579, Japan*[2] *Department of Information Science and Technology, Graduate School of Science and Engineering,Yamagata University, Yonezawa, Yamagata 992-8510, Japan*[3] *The Institute for Solid State Physics, The University of Tokyo, Kashiwa, Chiba 277-8581, Japan*
[4] *Trans-scale Quantum Science Institute, The University of Tokyo, Bunkyo, Tokyo 113-0033, Japan*
[5] *Center for Science and Innovation in Spintronics, Tohoku University, Sendai 980-8577, Japan*（日期: 2026年3月4日）

我们从理论上研究了热涨落作用下，具有垂直磁各向异性的磁隧道结（MTJ）中自旋转矩铁磁共振的混沌行为。通过基于朗道-利夫希茨-吉尔伯特方程计算李雅普诺夫指数，我们证明，由单轴磁各向异性和外磁场共同构成双阱势的磁隧道结，会呈现可通过直流偏置电流调控的混沌磁化动力学。此外，我们发现热涨落有助于诱发这种混沌磁化动力学，这种现象可视为噪声诱导混沌。本研究为利用自旋电子器件实现类脑计算奠定了基础，也加深了我们对磁化动力学中热涨落与混沌相互作用的理解。

引言。近年来，人们对物理系统的非线性与复杂动力学在类脑计算中的应用日益关注，包括混沌神经网络 [1–3], 储备池计算 [4–6],和概率计算 [7–9]。以往研究表明，当储备池计算的各个单元呈现“混沌边缘”时，通常能够获得较高的计算性能；“混沌边缘”是周期性状态与混沌状态之间的一种暂态 [1, 10–12]。得益于磁化丰富的非线性效应和快速响应，自旋电子器件已被积极用于类脑计算实验 [6–8, 13]。与此同时，针对自旋电子器件中非线性与混沌动力学的理论研究也在多个平台上积极开展，包括铁磁共振（FMR） [14–16], 自旋波 [17, 18], 磁涡旋器件 [19, 20],和自旋转矩振荡器 [21–23]。

在这些研究中，提出了磁性杜芬振子 [15, 16], ，其表现出由直流磁场和交流磁场控制的混沌磁化动力学。磁性杜芬振子的特征在于同宿轨道[24], ，该轨道是磁化动力学相空间中混沌的起源。同宿轨道位于由单轴磁各向异性和外加直流磁场构成的双阱势中。通过调节垂直于磁各向异性轴施加的直流磁场，可以移动同宿轨道的位置，从而调节混沌起始。尽管磁性杜芬振子对自旋电子器件具有重要的实用价值，但它需要同时调节交流磁场和直流磁场才能产生和控制混沌，这使其不太适合集成到纳米器件中。

磁性隧道结（MTJ） [25, 26]无需依赖额外的磁传感器，即可实现磁化态的电学输入与读出，因此非常适合小型化和集成。这些特性使其磁化动力学[27–32]受到广泛关注。由于磁隧道结的设计主要面向室温运行，因此研究其非线性动力学时，必须考虑热涨落（即随机力）的影响。迄今为止，人们已在各种物理系统中广泛研究了随机力作用下的非线性动力学 [33–39]。这些研究报道了多种现象，包括随机共振 [33–35], 、噪声诱导混沌 [36–38], 和噪声诱导有序 [39]。当随机力引入混沌系统时，混沌的稳定性便成为一个极为复杂的问题。然而，从在实际器件中利用强非线性或混沌动力学的角度来看，确保这些行为在噪声作用下仍保持稳健至关重要。

在本快报中，我们从理论上研究自旋转矩铁磁共振 [27, 28] 中基于具有垂直磁各向异性 [29–32]的磁隧道结的非线性和混沌磁化动力学。通过沿自由层的面内方向施加外部直流磁场，我们构建了类似于磁性杜芬振子的势能景观。当施加交流电流以驱动磁化时，混沌的出现通过李雅普诺夫指数 [40, 41] 以及相空间中的磁化轨迹得到确认。随后，我们考察直流和交流电流的大小如何经由自旋转移力矩影响混沌起始。特别是，我们发现直流电流可作为一种有效控制参数，能够抑制混沌行

* tatsumi.ryo.p6@dc.tohoku.ac.jp
† t.千叶@yz.山形-u.ac.jp

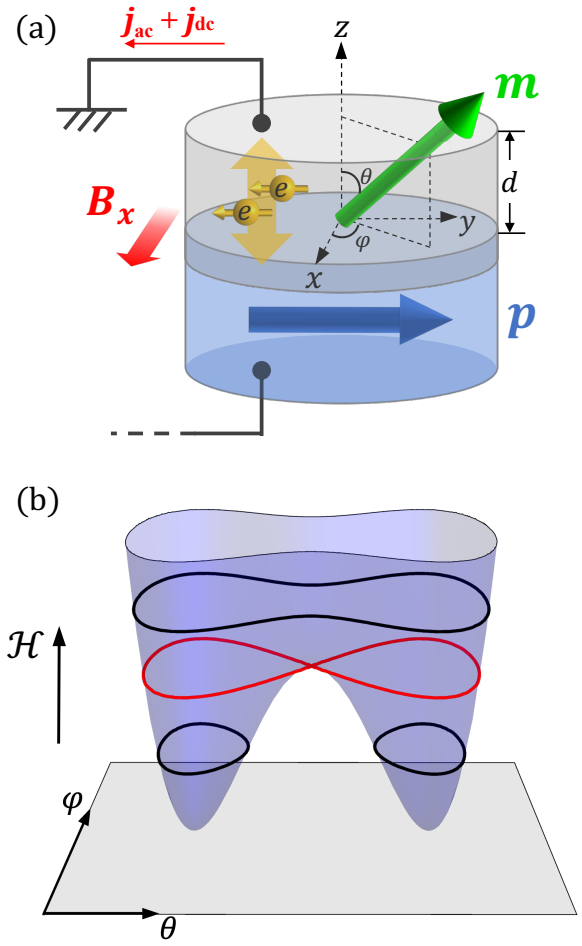


图 1. (a) 系统示意图。磁隧道结由自由层和其下方的参考层组成。沿 x 轴施加外加直流磁场 B_x，单轴磁各向异性场 B_K 沿 z 轴取向。自由层中磁化矢量的极角和方位角分别记为 θ 和 φ，磁化矢量记为 $\boldsymbol{m}$。参考层中沿 y 轴的磁化矢量表示为 $\boldsymbol{p}$。沿 z 方向施加的交流和直流电流会产生自旋转移力矩。(b) 当 $B_x = 32$ mT 和 $B_{\rm ani} = 41.9$ mT 时，磁隧道结的哈密顿量（$\mathcal{H}$）景观。红色能量等高线为同宿轨道，该轨道始于并终于同一个鞍点。

为。此外，我们将热涨落作为随机磁场加以考虑，表明它们有助于激发磁化并增强混沌动力学。

混沌模型与机制。我们介绍该系统：如图所示，它是一个磁隧道结，由具有易磁化单轴 z 轴的磁化自由层和位于平面内的磁化参考层组成。1。单位矢量，记作 $\boldsymbol{m}$ 和 $\boldsymbol{p}$，分别表示自由层和参考层中的磁化。参考层中的磁化被钉扎在 y轴上，并在电流沿 z方向施加时产生自旋转移力矩。自由层中的磁化动力学由 Landau–Lifshitz–Gilbert（LLG）方程描述：

$$\frac{d\boldsymbol{m}}{dt} = -\gamma \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{B}_{\rm eff} - \gamma\tau(\boldsymbol{m}, j)\boldsymbol{m} \times (\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{m}) + \alpha \boldsymbol{m} \times \frac{d\boldsymbol{m}}{dt}, \tag{1}$$

其中，γ 为旋磁比，α 为吉尔伯特阻尼常数。随后，哈密顿量可表示为

$$\mathcal{H} = -\gamma M_s \left(B_x m_x + \frac{1}{2} B_{\rm ani} m_z^2 \right), \tag{2}$$

且有效磁场为

$$\boldsymbol{B}_{\rm eff} = -\frac{1}{M_s}\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \boldsymbol{m}} = B_x \boldsymbol{e}_x + B_{\rm ani} m_z \boldsymbol{e}_z \tag{3}$$

其中 $\{\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z\}$ 是分别沿笛卡尔坐标轴方向的单位矢量。B_x 是沿 x轴施加的直流磁场，$B_{\rm ani} = B_{\rm K} - \mu_0 M_{\rm s}$ 是总磁各向异性场，由 $B_{\rm K}$ 和 $\mu_0 M_{\rm s}$（μ_0 是真空磁导率）构成的界面[29–32] 场和形状各向异性场。方程（1）右侧第二项描述自旋转移力矩，其因子为 [22]

$$\tau(\boldsymbol{m}, j) = \frac{\hbar j}{2eM_s d}\frac{\eta}{1 + \eta^2 \boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{p}}, \tag{4}$$

其中，$\hbar$、e、d、j 和 η 分别是狄拉克常数、元电荷、自由层厚度、沿 z轴的界面电流密度以及电流的自旋极化。界面电流密度j 由两部分组成

$$j = j_{\rm dc} + j_{\rm ac}\cos(2\pi f t), \tag{5}$$

其中，$j_{\rm dc}$ 是界面直流电流密度，$j_{\rm ac}$和 f 分别表示界面交流电流密度的振幅和频率。由于因子τ的作用，在直流电流存在时，磁化的自振荡及其在相空间中对应的极限环可能出现。本文采用以下参数：$\gamma = 1.76\times10^{11}$ T^{-1} s^{-1}、$d = 2$ nm、$\eta = 0.537$、$\mu_0 M_{\rm s} = 1.821$ T、$\alpha = 0.05$和$B_{\rm K} = 1.862$ T。这些数值代表了具有垂直磁化自由层、由 CoFeB/MgO 结构构成且厚度为几纳米的磁隧道结的典型参数 [22, 29]。人们普遍认为，$B_{\rm K}$ 具有巨大数值的基本原理是金属-绝缘体界面处 Fe-3d 与 O-2p 轨道的杂化。

为了计算磁化动力学和李雅普诺夫指数，我们将式（1）表示为极坐标形式

如下

$$\begin{aligned}\frac{d\theta}{dt} &= \gamma B_\varphi(\theta,\varphi,t) + \alpha\gamma B_\theta(\theta,\varphi,t) + \gamma\tau_\theta(\theta,\varphi,z),\\ \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{1}{\sin\theta}\left[-\gamma B_\theta(\theta,\varphi,t) + \alpha\gamma B_\varphi(\theta,\varphi,t) + \gamma\tau_\varphi(\theta,\varphi,z)\right],\\ \frac{dz}{dt} &= 2\pi f,\end{aligned} \tag{6}$$

其中，B_θ 和 B_φ 分别表示有效磁场 $\boldsymbol{B}_{\text{eff}}$的 θ 和 φ 分量，而 τ_θ 和τ_φ 表示自旋转移力矩项的相应分量。

$$\begin{aligned}B_\theta(\theta,\varphi,t) &= (B_x + B_x^{\text{th}}(t))\cos\theta\cos\varphi\\ &\quad + (B_{\text{ani}}\cos\theta + B_y^{\text{th}}(t))\sin\theta - B_z^{\text{th}}(t)\sin\theta,\\ B_\varphi(\theta,\varphi,t) &= -(B_x + B_x^{\text{th}}(t))\sin\varphi + B_y^{\text{th}}(t)\cos\varphi,\\ \tau_\theta(\theta,\varphi,z) &= \tau(\theta,\varphi,z)\cos\theta\sin\varphi,\\ \tau_\varphi(\theta,\varphi,z) &= \tau(\theta,\varphi,z)\cos\varphi.\end{aligned} \tag{7}$$

其中 $B_i^{\text{th}}(t)$ 表示高斯随机磁场的第 i个分量，该分量代表热涨落。$B_i^{\text{th}}(t)$ 满足 $\langle B_i^{\text{th}}(t)\rangle = 0$ 且$\langle B_i^{\text{th}}(t)B_j^{\text{th}}(s)\rangle = \sigma^2\delta_{ij}\delta(t-s)$ [42, 43], 其中

$$\sigma = \sqrt{\frac{2\alpha k_{\text{B}}T}{\gamma M_s \mathcal{V}}}, \tag{8}$$

k_B、 T、 δ_{ij}和 $\delta(t)$分别表示玻尔兹曼常数、系统温度、克罗内克δ和狄拉克δ。假设自由层的体积 $\mathcal{V}$ 为 $\pi \times 120 \times 120 \times 2$ nm^3。我们使用 Julia 1.10 中的 DifferentionalEquation程序包，通过龙格-库塔法模拟磁化动力学。

与磁性杜芬振子中的情形一样，混沌机制可以通过非谐磁势 [15, 16]所形成的同宿轨道来理解。由于单轴磁各向异性场和直流磁场的作用，x–z 平面（即沿 θ轴）上会出现双阱势，而沿 y轴则会形成单势阱（见图1（b））。鞍点位于（θ，φ）=（$\pi/2$，0）。从该鞍点出发并最终返回该点的轨道由此产生；这些轨道即为同宿轨道。当状态因驱动力和阻尼项的作用而被激发至受扰同宿轨道所形成的奇异吸引子时，杜芬振子和磁性杜芬振子都会表现出混沌行为。因此，我们在磁隧道结中产生或控制混沌的策略如下：施加交流电流，将磁化激发至同宿轨道，并在该轨道周围形成奇异吸引子。通过调节直流电流，我们可以使磁化态发生偏移，从而改变其与该轨道之间的距离，并使奇异吸引子消失。

混沌的电流控制及热涨落的影响。

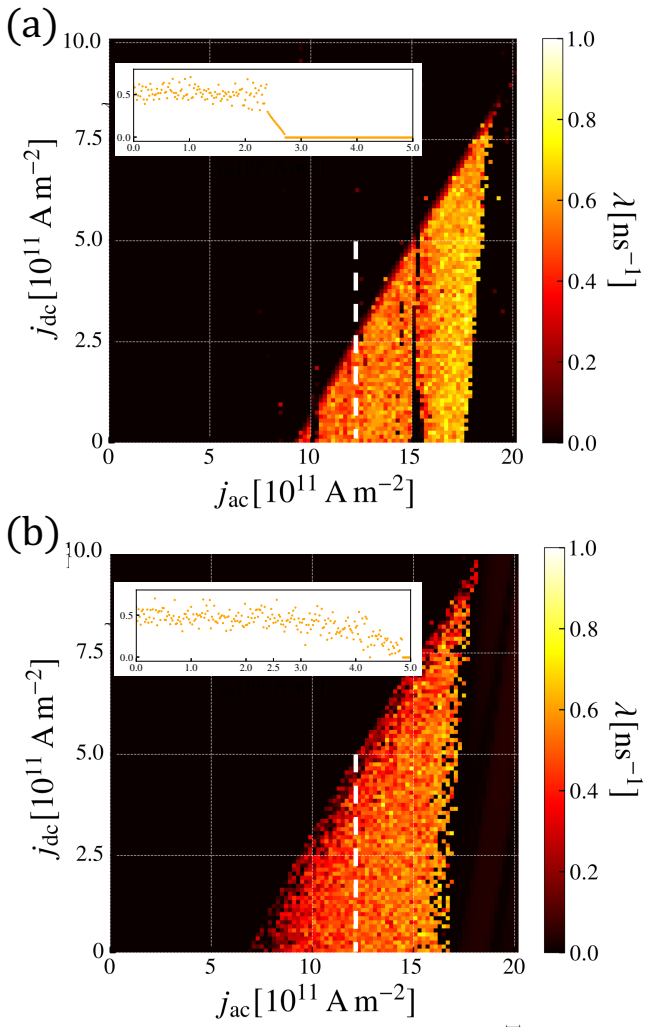


图 2. 李雅普诺夫指数热图 λ作为直流电流密度 j_{dc} 和交流电流密度幅值 j_{ac} 的函数，其中 (a) $\sigma = 0$ 和 (b) $\sigma = 0.366$ （对应于室温）。

为确认混沌的存在并阐明直流电流对磁化动力学的影响，我们通过数值计算李雅普诺夫指数。图2(a)展示了在 j_{ac} 频率为 $f = 0.57$吉赫兹且无热涨落时，李雅普诺夫指数随交流电流密度 j_{dc} 的变化。频率 f 选择为最能有效促进混沌的频率 [44]。在该图中，$\lambda > 0$ （亮区）表示磁化动力学处于混沌状态，而 $\lambda = 0$对应极限环。正如预期，施加交流电流后，磁化会呈现混沌动力学。事实上，如图3(a)所示，交流电流使磁化态从势阱底部激发出来。另一方面，在图2(a)中，直流电流提高了混沌动力学开始出现所需的交流电流阈值振幅。请注意，一些具有李雅普诺夫指数的暗区

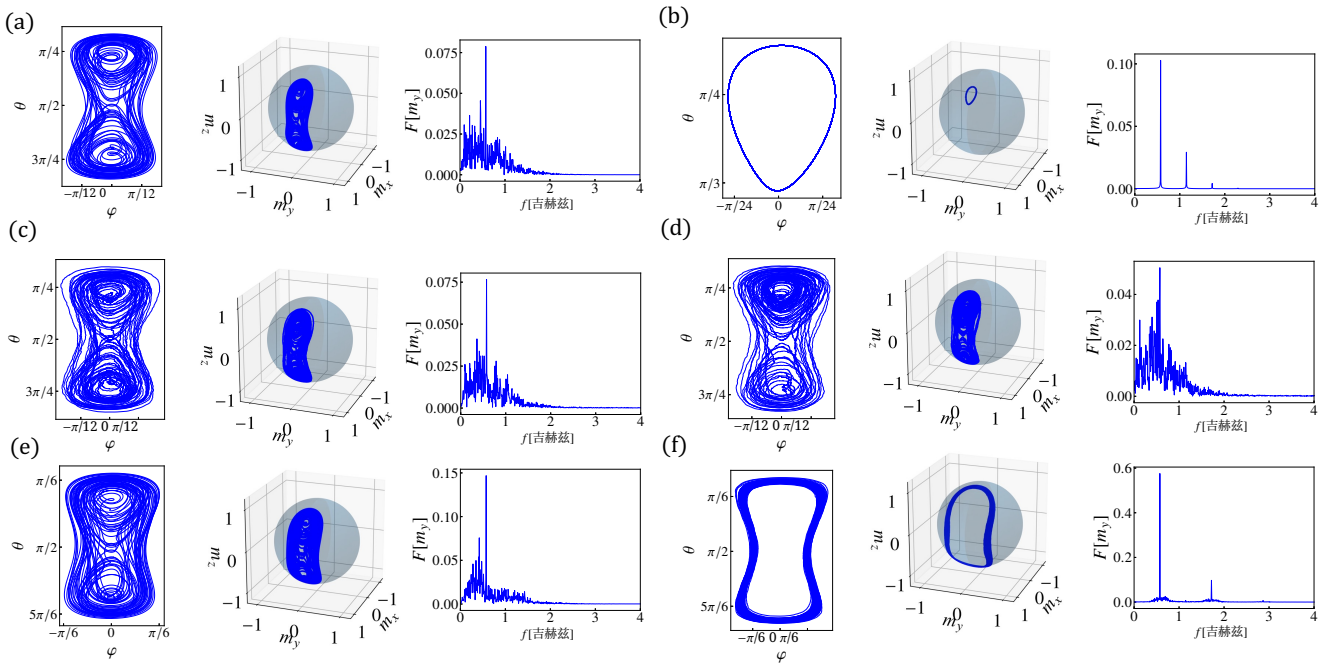


图3. 磁化动力学及其对应的傅里叶谱。左图显示了θ 和 φ 的相空间中的磁化轨迹。中图展示了由（m_x，m_y，m_z）表示的三维实空间轨迹。右图显示了磁化 m_y的 y分量的傅里叶谱。参数如下：（a）、（c） $j_{\rm ac} = 1.2 \times 10^{12}\,\mathrm{Am}^{-2}$, $j_{\rm dc} = 0$；（b）、（d） $j_{\rm ac} = 1.2 \times 10^{12}\,\mathrm{Am}^{-2}$, $j_{\rm dc} = 2.9 \times 10^{11}\,\mathrm{Am}^{-2}$；以及（e）、（f） $j_{\rm ac} = 1.75 \times 10^{12}\,\mathrm{Am}^{-2}$, $j_{\rm dc} = 2.9 \times 10^{11}\,\mathrm{Am}^{-2}$。面板（a）、（b）和（e）显示未考虑热涨落（$\sigma = 0$）时的结果，而面板（c）、（d）和（f）则包含室温下的热涨落（$\sigma = 0.366$）。

出现在混沌区域之间，例如在（$\lambda = 0$，$j_{\rm ac}$，$j_{\rm dc}$）$=$ (15，0)附近。这种现象称为“周期窗口” [45]，在许多呈现混沌的动力系统中都能观察到。在图2(a)中，可以清楚地看到混沌状态与极限环状态之间的边界。

图2(b) 显示了室温下存在随机磁场时的李雅普诺夫指数热图，即 $T = 300$。比较图2(a) 和 (b)，由于热涨落，边界变得不那么清晰，并向左移动。混沌区域参数范围的变化不仅表明奇异吸引子能够抵御随机力，也表明随机力有助于激发磁化，进而引发混沌动力学。由于亮区的边界变得模糊，“混沌边缘”也可能变得不明显。值得注意的是，关于受随机力作用的杜芬振子的若干研究报告指出，随机力能够促进混沌动力学的出现 [37, 38]。因此，磁隧道结在受到随机力作用时表现出与杜芬振子相似的行为。

接下来，我们通过磁化轨迹考察直流电流和随机力的作用。图3展示了磁化在相空间中的动力学行为，以及磁化 y分量的傅里叶谱 m_y，该分量可通过自旋转矩二极管效应借助隧道磁阻效应进行检测

效应[25–27]。图3(a) 展示了由交流电流密度驱动、在双阱势上运动的混沌动力学 $j_{\rm ac} = 1.2 \times 10^{12}\,\mathrm{Am}^{-2}$，且不含直流电流。该轨迹覆盖了相空间的广阔区域，傅里叶谱也较宽。当施加直流电流时，会出现极限环，并伴随若干傅里叶峰；如图 3(b) 所示，混沌动力学在相空间中消失。这是因为直流电流沿 y 轴产生自旋转移力矩，使磁化保持在双阱势的一侧。因此，直流电流使系统难以触及同宿轨道，从而抑制混沌动力学。从动力系统理论的角度看，直流电流充当分岔参数，会改变相空间中吸引子的定性结构，例如极限环或奇异吸引子。图 3(c) 展示了室温下受随机力作用的磁化动力学。如图 2 和3所示，混沌动力学对随机力具有鲁棒性，表明在实验中观测到混沌是可行的。此外，当随机力作用于原本不具有混沌的状态时，会出现类似奇异吸引子的结构，如图 3 (d) 所示，从而引发混沌动力学。这种现象称为噪声诱导混沌，已有关于杜芬振子的研究报告过这一现象 [37, 38]。从物理上看，随机力可视为额外的能量源

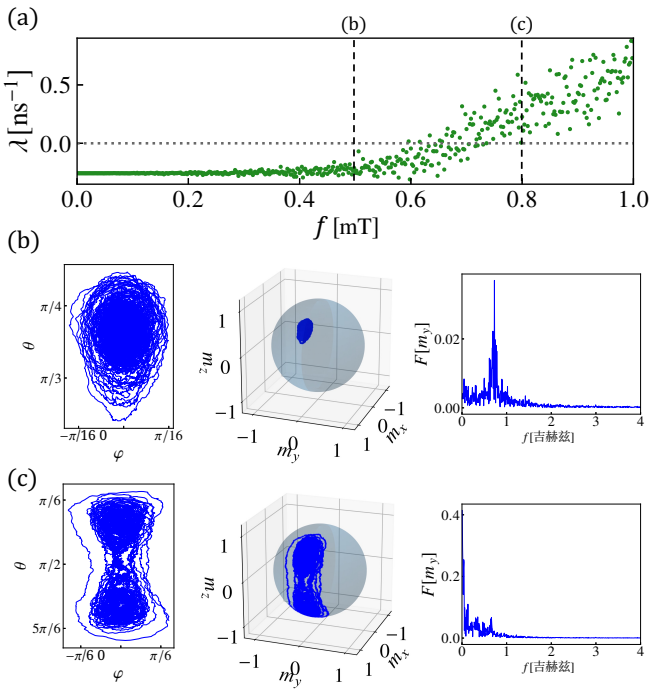


图4. 仅由随机力驱动的磁化动力学。(a) 李雅普诺夫指数 λ 随噪声强度 σ 的变化。对于 $\sigma \gtrsim 0.6$，动力学表现出混沌行为。(b)、(c) 磁化轨迹及其对应的傅里叶谱，其中 (b) $\sigma = 0.5$ 对应自由层半径为 88 nm 的情况，(c) $\sigma = 0.8$ 对应半径为 55 nm 的情况。

它推动磁化态在相空间中趋向同宿轨道，从而导致混沌动力学的出现。这就是为什么热涨落会降低混沌阈值。

此外，我们展示了噪声诱导有序现象，即随机力抑制混沌的典型特征（如奇异吸引子和对初始条件的高度敏感性）的现象。图3(e) 展示了 $j_{\mathrm{ac}} = 1.75 \times 10^{12}$ A m^{-2}和 $j_{\mathrm{dc}} = 2.9 \times 10^{11}$ Am^{-2}时的混沌动力学。引入热涨落后，轨迹不再在相空间中杂乱无章地游走；相反，图3(f) 中出现了模糊的周期性轨迹。傅里叶谱包含两个主峰及其周围的边带。在此模型中，能量等高线与同宿轨道直接相关。因此，可以将这一现象解释为热涨落充当了有效能量源。随机力将磁化态推至同宿轨道之上，并阻止奇异吸引子在这些轨道周围出现。因此，通过同宿轨道分析混沌的发生，有助于阐明自旋转矩或随机磁场等因素在产生混沌行为中的物理作用。由此，磁隧道结模型不仅能够在实验上展示简单的混沌磁化动力学，还能展示动力系统领域中已知的各种噪声诱导现象。

随机驱动混沌。在这里，我们展示了完全由热涨落驱动的混沌磁化动力学。由于该系统是一个受随机力作用的二维自治系统，李雅普诺夫指数的评估方法与图2有所不同。我们采用相空间（θ, φ）$\in \mathbb{R}^2$中定义的范数。值得注意的是，随机力可视为相空间中的第三维，这使混沌得以出现。图4(a) 展示了李雅普诺夫指数随随机力标准差 σ的变化关系。随着 σ 增大，李雅普诺夫指数也随之增大，并在 $\sigma = 0.6$附近变为正值。这表明，在较弱随机力作用下，轨迹被吸引至势能最低点，系统保持稳定。根据图4(b)，磁化被限制在势阱的一侧。相反，当 $\sigma = 0.8$时，图4(c) 中的磁化在双阱势之间反复翻转，李雅普诺夫指数也变为正值。这表明，同宿轨道赋予了完全由随机力驱动的磁化动力学以混沌特征，即对初始状态的敏感性。这一现象说明，受热涨落驱动的随机磁隧道结中的磁化动力学 [7–9] 呈现出某些混沌行为特征。

结论。 总之，我们从理论上分析了磁隧道结中由交流电流和直流电流控制的非线性与混沌动力学。自由层的垂直磁各向异性和外加直流磁场在相空间中产生同宿轨道，从而引发混沌行为。交流电流激发磁化并诱导混沌动力学，而直流电流则使磁化偏离同宿轨道，进而抑制混沌。为评估混沌抵御热涨落的稳健性，我们考察了随机力如何影响混沌磁化动力学的产生。我们发现，混沌不仅在存在随机力时仍然持续，而且随机力还有助于激发磁化并促进混沌行为，这表明可以通过实验检测到混沌磁化动力学。此外，这一结果与原始杜芬振子 [45, 46], 的研究发现一致，进一步印证了这两个系统之间的类比。尤其是，在随机动力系统中受到广泛研究的噪声诱导混沌与有序现象也得到了观测。此外，我们评估了仅由随机力驱动的磁化动力学中的混沌特性。根据李雅普诺夫指数，随着随机力方差的增大，系统对初始条件变得更加敏感，这是混沌动力学的典型特征。这表明随机磁隧道结也能够表现出混沌动力学的特性。这项工作不仅推动了利用混沌的自旋电子器件的实际应用，也有助于深入理解热涨

落与磁化动力学中混沌之间的相互作用。

致谢。作者感谢 H. Chiba 和 T. Yamamoto 提供的宝贵讨论。本研究得到 JSPS KAKENHI（JP22K14591、24K00916 和 25H02105）的支持。R. T. 感谢东北大学 GP-Spin项目的支持。H. M. 感谢东北大学 CSIS 的支持。

数据可用性。

由于在本研究项目条款范围内，准备、存储和托管数据在技术上不可行和/或成本过高，因此支持本信件研究结果的数据在发表时不公开。经合理请求，可从作者处获取这些数据。

[1] K. Aihara、T. Takabe 和 M. Toyoda，《混沌神经网络》，Physics Letters A 144，333（1990）。[2] T. Yamada、K. Aihara 和 M. Kotani，《混沌神经网络与旅行商问题》，载于 *Proceedings of 1993 International Conference on Neural Networks (IJCNN-93-Nagoya, Japan)* 2 1993 ，第（）卷，第 1549–1552 页，第 2 卷。[3]C. Pan、Q. Hong 和 X. Wang，《一种新型忆阻混沌神经元电路及其在用于联想记忆的混沌神经网络中的应用》，IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems 40，521（2021）。[4] G. Tanaka、T. Yamane、J. B. H´eroux、R. Nakane、N. Kanazawa、S. Takeda、H. Numata、D. Nakano 和 A. Hirose，《物理储备池计算的最新进展：综述》，Neural Networks 115，100（2019）。[5] Y. Paquot、F. Duport、A. Smerieri、J. Dambre、B. Schrauwen、M. Haelterman 和 S. Massar，《光电子储备池计算》，《科学报告》2，287（2012）。[6] J. Torrejon、M. Riou、F. A. Araujo、S. Tsunegi、G. Khalsa、D. Querlioz、P. Bortolotti、V. Cros、K. Yakushiji、A. Fukushima、 *et al.*，《采用纳米尺度自旋电子振荡器的神经形态计算》，Nature 547，428（2017）。[7] S. Bhatti、R. Sbiaa、A. Hirohata、H. Ohno、S. Fukami 和 S. Piramanayagam，《基于自旋电子学的随机存取存储器：综述》，Materials Today 20，530（2017）。[8] K. Y. Camsari、B. M. Sutton 和 S. Datta，《用于概率自旋逻辑的 P比特》，Applied Physics Reviews 6，https://doi.org/10.1063/1.5055860（2019）。[9] W. Lee、H. Kim、H. Jung、Y. Choi、J. Jeon 和 C. Kim，《使用真随机混沌振荡器 P比特的无相关大规模概率计算》，《科学报告》15，8018（2025）。[10] R. Legenstein 和 W. Maass，《混沌边缘与神经回路模型计算性能的预测》，Neural Networks 20，323（2007）。[11] J. Boedecker、O. Obst、J. T. Lizier、N. M. Mayer 和 M. Asada，《混沌边缘处回声状态网络中的信息处理》，Theory in Biosciences 131，205（2012）。[12] N. Bertschinger 和 T. Natschl¨ager，《循环神经网络混沌边缘处的实时计算》，Neural Computation 16，1413（2004）。[13] T. Furuta、K. Fujii、K. Nakajima、S. Tsunegi、H. Kubota、Y. Suzuki 和 S. Miwa，《利用磁性隧道结中的自旋动力学进行储备池计算的宏磁学模拟》，Phys. Rev. Appl. 10，034063（2018）。[14] I. D. Mayergoyz、G. Bertotti 和 C. Serpico，*Nonlinear magnetization dynamics in nanosystems* 2009 （Elsevier，）。[15] R. Tatsumi、T. Chiba、T. Komine 和 H. Matsueda，磁性杜芬振子中的混沌磁化动力学，Phys. Rev. E 111，064202 (2025)。[16] T. Chiba，磁振子克尔非线性对软模磁振子-极化激元的影响，AIP Advances 16, 025228 2026( )。[17] Z. Wang, A. Hagerstrom, J. Q. Anderson, W. Tong, M. Wu, L. D. Carr, R. Eykholt 和 B. A. Kalinikos，磁性薄膜反馈环中的混沌自旋波孤子，Physical Review Letters 107, 114102 (2011)。[18] A. B. Ustinov, A. V. Kondrashov, I. Tatsenko, A. A. Nikitin 和 M. P. Kostylev，有源环形振荡器中自旋波混沌的逐步发展，Physical Review B 104, L140410 (2021)。[19] S. Petit-Watelot, J.-V. Kim, A. Ruotolo, R. M. Otxoa, K. Bouzehouane, J. Grollier, A. Vansteenkiste, B. Van de Wiele, V. Cros 和 T. Devolder，磁涡旋振荡中的公度性与混沌，Nature Physics 8, 682 2012( )。[20] K. Horizumi, T. Chiba 和 T. Komine，交流磁场诱导的双盘结构圆形磁性纳米盘中的混沌涡旋动力学，日本磁学会志 49, 42 (2025)。[21] Z. Li, Y. C. Li 和 S. Zhang，直流和交流电流作用下自旋阀的动态磁化态：同步、改变与混沌，Physical Review B 74, 054417 (2006)。[22] T. Yamaguchi, N. Akashi, K. Nakajima, S. Tsunegi, H. Kubota 和 T. Taniguchi，垂直磁化自由层自旋转矩振荡器中的同步与混沌，Physical Review B 100, 224422 (2019)。[23] T. Taniguchi, N. Akashi, H. Notsu, M. Kimura, H. Tsuka- hara 和 K. Nakaji ma，反馈电流引发的纳米磁体混沌，Physical Review B 100, 174425 (2019)。[24] S. Wiggins，*Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos* 2003 （Springer，）。[25] S. Yuasa, T. Nagahama, A. Fukushima, Y. Suzuki 和 K. Ando，单晶 Fe/MgO/Fe 磁性隧道结中的室温巨磁阻，Nature materials 3, 868 (2004)。[26] J.-G. J. Zhu 和 C. Park，磁性隧道结，Materials today 9, 36 (2006)。[27] A. Tulapurkar, Y. Suzuki, A. Fukushima, H. Kubota, H. Maehara, K. Tsunekawa, D. Djayaprawira, N. Watan- abe 和 S. Yuasa，磁性隧道结中的自旋力矩二极管效应，Nature 438, 339 (2005)。[28] J. C. Sankey, P. M. Braganca, A. G. F. Garcia, I. N. Kriv- orotov, R. A. Buhrman 和 D. C. Ralph，单个纳米磁体中由自旋转移驱动的铁磁共振，Physical Review Letters 96, 227601 (2006)。[29] H. Kubota, K. Yakushiji, A. Fukushima, S. Tamaru, M. Konoto, T. Nozaki, S. Ishibashi, T. Saruya, S. Yuasa, T. Taniguchi, *et al.*，基于垂直磁化自由层和面内磁化极化层的磁性隧道结的自旋转矩振荡器，

（2013）。[30] M. Tsujikawa 和 T. Oda，大垂直磁各向异性 Pt/Fe/Pt(001) 表面中的有限电场效应：第一性原理研究，Physical Review Letters 102, 247203 (2009)。[31] S. Iihama, S. Mizukami, H. Naganuma, M. Oogane, Y. Ando 和 T. Miyazaki，通过光学检测磁化进动动力学测量 ta/cofeb/mgo(ta)薄膜的吉尔伯特阻尼常数，Physical Review B 89, 174416 (2014)。[32] D. M. Lattery, D. Zhang, J. Zhu, X. Hang, J.-P. Wang 和 X. Wang，具有高热稳定性的垂直磁化 w/cofeb/mgo 薄膜中的低吉尔伯特阻尼常数，《科学报告》8, 13395 (2018)。[33] R. Benzi, A. Sutera 和 A. Vulpiani，随机共振的机制，《物理学杂志A：数学与一般》14, L453 (1981)。[34] L. Gammaitoni, P. H¨anggi, P. Jung 和 F. Marchesoni，随机共振，Rev. Mod. Phys. 70, 223 (1998)。[35] A. S. Pikovsky 和 J. Kurths，噪声驱动的可激发系统中的相干共振，Physical Review Letters 78, 775 (1997)。[36] A. R. Bulsara, W. C. Schieve 和 E. W. Jacobs，弱朗之万噪声扰动系统中的同宿混沌，Phys. Rev. A 41, 668 (1990)。[37] C. Gan，双势阱杜芬振子中的噪声诱导混沌，Nonlinear Dynamics 45, 305 (2006)。[38] Y. Lei, M. Hua 和 L. Du，广义杜芬系统中有色噪声诱导混沌的起始，Nonlinear Dynamics 89, 1371 (2017)。[39] F. Gassmann，噪声诱导的混沌—有序转变，Physical Review E 55, 2215 (1997)。[40] A. Pikovsky 和 A. Politi，*Lyapunov exponents: a tool to explore complex dynamics*（剑桥大学出版社，2016）。[41] I. Shimada 和 T. Nagashima，耗散动力系统遍历问题的数值求解方法，《理论物理进展》61, 1605 (1979)。[42] R. H. Koch, J. A. Katine 和 J. Z. Sun，纳米磁体中自旋转移开关的时间分辨反转，Physical Review Letters 92, 088302 (2004)。[43] T. Taniguchi 和 H. Imamura，具有单轴各向异性的铁磁材料的热开关率，Physical Review B 85, 184403 (2012)。[44] 参见补充材料 [URL]，其中提供了不同情况下李雅普诺夫指数的理论依据和数值计算。[45] S. H. Strogatz, *Nonlinear dynamics and chaos: with ap-plications to physics, biology, chemistry, and engineering*（Chapman and Hall/CRC，2024）。[46] I. Kovacic 和 M. J. Brennan, *The Duffing equation: nonlinear oscillators and their behaviour*（约翰·威立父子出版公司，2011）。

补充材料：磁性隧道结中混沌的电流控制及热涨落的影响

I. 李雅普诺夫指数

李雅普诺夫指数被广泛用于分析非线性动力学，并用于证明对初始条件的敏感性，即混沌的特征。正文中的式（5）所示LLG方程可视为一个三维动力系统 $\boldsymbol{x}=(\theta,\ \varphi,\ z)\in\mathbb{R}^3$。由于相空间局部类似于欧几里得度量和范数 $||\boldsymbol{x}||=\sqrt{\Sigma_{i=1}^{3}x_i^2}$，两条轨迹 $\boldsymbol{x}(t)$ 和 $\tilde{\boldsymbol{x}}(t)$ 之间的距离定义为 $\delta(t)=||\boldsymbol{x}(t)-\tilde{\boldsymbol{x}}(t)||$。$\delta(t)$ 在长期演化中，当 $\delta(0)\to 0$ 时，表征了轨迹的不稳定性。邻近轨迹的发散率由（最大）李雅普诺夫指数描述

$$\lambda=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln\frac{\delta(t)}{\delta(0)}. \tag{9}$$

如果 $\lambda>0$ 表示该动力系统是混沌的，而 $\lambda=0$ 表示该动力系统是一个极限环。我们使用Shimada–Nagashima方法计算李雅普诺夫指数 [41]。

II. 混沌的频率依赖性

在这里，我们通过计算李雅普诺夫指数，考察交流电流频率对混沌起始的影响。图 5 给出了李雅普诺夫指数随交流电流密度 j_{ac} 及其频率f 在不含 j_{dc} 和 σ时的热图。该模型的共振频率可根据势能最低点 [15]处的雅可比矩阵

$$f_r=\frac{\gamma}{2\pi}\sqrt{B_K^2-B_x^2}\approx 0.76\ \mathrm{GHz}\qquad (B_x>B_K). \tag{10}$$

如图5所示，混沌不仅出现在共振条件附近，也出现在较宽的频率范围内f。交流电流的阈值振幅会随频率 f 的变化而显著改变。特别是，最低阈值出现在 $f=0.57$ 吉赫兹处，这也是我们在正文中使用 $f=0.57$ 吉赫兹的原因。

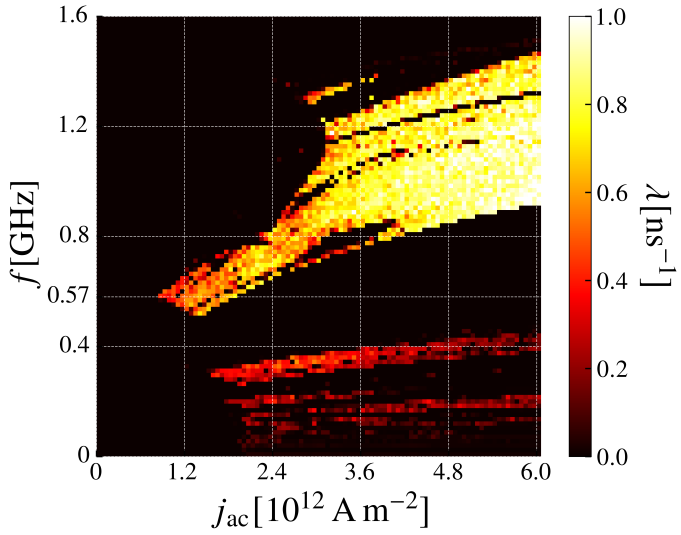


图 5. 李雅普诺夫指数 λ 随交流电流密度幅值 j_{ac} 和交流电流频率 f变化的热图。

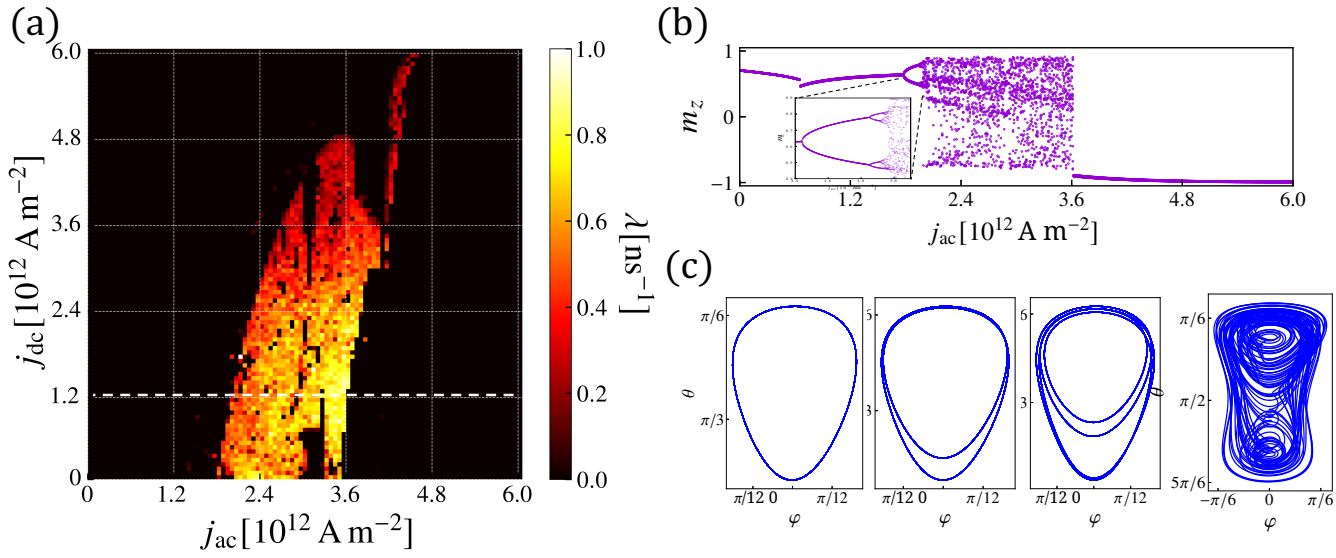


图 6。（a）共振条件下，李雅普诺夫指数 λ 随直流电流密度 j_{dc} 和交流电流密度幅值 j_{ac} 变化的热图，其中周期性力的频率为 0.76 吉赫兹。（b）交流电流密度幅值 j_{ac}的分岔图。（c）分别对应 $j_{ac} = 4.0, 4.5, 4.9$ 和 $6.0 \times 10^{12}\,Am^{-2}$的磁化轨迹。

III. 共振处的磁化动力学

在这里，我们通过计算李雅普诺夫指数和分岔图，考察共振频率为 $f_r = 0.76$ 吉赫兹时交流电流作用下的磁化动力学。分岔图可以表明该动力学是周期性的还是非周期性的。由于系统受周期为 $T_r = 1/f_r$ 的交流电流驱动，因此预计其在时间上呈现周期为 T_r 的周期边界条件。因此，我们使用定义为 $m_y^* = m_y(t_0 + nT_r)|n \in \mathbb{N}$ 的频闪映射构建分岔图，其中 t_0 是瞬态时间。换言之，我们将 m_y 在时间周期 T_r 下的取值绘制为 j_{ac}的函数。分岔图有助于我们理解周期性如何随控制参数变化。

图 6(a) 显示了李雅普诺夫指数随交流电流密度 j_{ac} 和直流电流密度 j_{dc} 变化的热图，其中 $f = f_r = 0.76$ 吉赫兹和 $\sigma = 0$。即使在共振条件下，直流电流也会提高混沌起始所需交流电流的阈值振幅。尽管交流电流与直流电流的阈值振幅之间未发现线性关系，但仍可观察到混沌区与极限环区之间的清晰边界。图6(b) 展示了磁化动力学的分岔图。插图突出了系统开始表现出混沌行为的区域，并表明磁化动力学的周期发生反复倍增。因此，我们得出结论：在磁隧道结系统中出现混沌之前，可以观察到倍周期分岔。这种分岔被称为著名的通向混沌的路径，在杜芬振子中也可观察到。图 6(c) 中的解显示了时间周期为 $1/f_r$、$2/f_r$ 和 $4/f_r$ 的周期轨道，以及混沌轨迹。这些结果证实，在混沌出现之前，双阱势一侧内运动的周期会发生反复倍增。