arXiv:2603.03058v1 [math.PR] 3 Mar 2026

无限维粗糙路径的签名通用逼近

SONJA COX、ASMA KHEDHER、THIJS MAESSEN

Abstract. 我们建立了适用于无穷维几何粗糙路径的通用逼近定理，也就是说，我们证明了定义在无穷维弱几何 H¨older 连续粗糙路径空间上的连续函数，可以由关于路径签名的线性函数逼近。决定连续性与紧性的底层拓扑可以是范数拓扑，也可以是弱-* 拓扑。尽管要在弱-* 拓扑下建立通用逼近定理需要付出更多努力，但这一设定能够确保在范数有界集上一致逼近。建立通用逼近定理的动机，在于希望逼近由随机偏微分方程解导出的量。更具体地说，我们的通用逼近定理为一种新方法奠定了基础，例如在 Heath–Jarrow–Morton–Musiela框架下对远期利率进行定价。

1. Introduction

本文的目标是为无穷维弱几何 *H¨older* 连续粗糙路径建立一条通用逼近定理（通用逼近定理）。更具体地说，我们证明：此类路径上的连续函数可以在紧集上由关于路径签名为线性的函数一致逼近。路径 $x\colon [0,T] \to E$ 的签名是区间 $[0,T]$ 上的一列无穷迭代积分（参见，例如，[LCL07]）。粗糙路径理论为低正则性路径（例如随机微分方程的解）无歧义地定义这些迭代积分提供了严格框架（参见，例如，[FV10、FH20]）。此外，弱几何粗糙路径的概念保证：签名上两个线性泛函的乘积仍是签名上的一个线性泛函，从而使线性泛函的集合成为一个代数——这是 Stone–Weierstrass 定理的一个关键要素，而该定理是我们的通用逼近定理的骨干。

广义而言，通用逼近定理可以视为针对特定情形定制的斯通–魏尔施特拉斯定理的应用；它们提供了一种利用较简单函数构成的代数，在紧集上一致逼近连续函数的方法。这类结果之所以受到关注，有几个原因：较简单的函数在数学上可能更易于处理，和／或在计算上可能更易于实现。事实上，通用逼近定理的一项重要应用领域是机器学习，在这一领域，通用逼近定理保证前馈神经网络能够在紧集上一致逼近连续函数。在更详细地讨论这些应用之前，我们先简要介绍关于路径签名的通用逼近定理的现有文献。

关于有限维路径签名的连续函数的通用逼近定理，例如已在 [LNPA20b 的命题 4.5]以及 [CGSF23 的定理 2.12] 中针对连续半鞅建立，并在 [CPSF25] 中针对具有 c`adl`ag 路径的随机过程建立。一个全局通用逼近定理，即超越通常在紧集上的逼近结果，已在 [CST26 的第 5] 章中利用签名连续函数的加权空间得到证明。这些结果为机器学习中的强大应用奠定了基础；签名已被用于时间序列中的特征提取 [GLKF13],、稀疏回归方法 [Gra13], ，以及路径依赖泛函的数据驱动预测与学习 [LLN13、LNSV$^+$24、BFZ24]。

在粗糙路径框架下研究通用逼近定理的另一个动机，是其与随机微分方程（SDE）的联系。具体而言，在适当的光滑性假设下，由（伊藤／斯特拉托诺维奇）布朗粗糙路径驱动的

粗微分方程（RDE）可得到相应（伊藤／斯特拉托诺维奇）随机微分方程的强解（见 [FH20, 定理 9.1] or[FV10, 定理 17.3]）。此外，在类似的光滑性条件下，RDE 的解可表示为底层粗糙路径上的连续映射（见 [FH20, 定理 8.5] or [FV10, 定理 10.26]）。这意味着，通用逼近定理可用于将随机微分方程的解视为底层布朗粗糙路径的函数，并对其进行一致逼近。基于这一视角，数学金融中的若干应用以签名模型取代经典随机微分方程模型，其中系数取为底层过程（通常为半鞅，称为基础过程）的签名的线性泛函。这类表述尤其适用于应用签名的通用逼近定理，例如在数学金融中用于计算期权价格；相关研究已在有限维情形下展开，参见例如 [BHRS23, CGSF23, KLPA20, LNPA19, PASS20, LNPA20b, AJG25, CGMSF25]及其中的参考文献。 [CO22, 定理 21 和 26] 提供了无限维情形下的一个初步通用逼近定理。

研究签名连续函数的通用逼近定理的另一个动机是，这类通用逼近定理能够给出一些条件，使得随机粗糙路径的签名期望能够完全刻画其分布；类似结果可参见 [CO22], 和 [CL16] 。沿用这一思路，我们的主要结果表明，随机粗糙路径的分布能够由签名的某些线性泛函 的期望完全刻画——具体而言，是下文代数 (2) 中元素的期望。

然而，这项工作的核心动机，是希望将上述关于随机微分方程逼近的方法扩展到随机偏 微分方程（随机偏微分方程）。这要求我们考虑取值于无限维（Banach）空间的路径。这一更广泛的研究范围源于数学金融中的应用。例如，在债券和商品市场中，期货价格的动态在 Heath–Jarrow–Morton（HJM）框架下通过随机偏微分方程建模 [BK14, BK15, CKK22a, CKK22b, CCK24, HKK25, CDPGSF25, BKK25]。利用粗糙布朗路径签名上的线性泛函逼近此类随机偏微分方程，是一种强有力的工具：它既能实现对市场数据的高效校准，也能计算这一框架下的期权价格。我们认为，我们的工作首次对无限维签名的通用逼近定理进行了全面而深入的分析。

在介绍主要结果之前，我们先简要讨论一些关键概念。取值于（无限维）巴拿赫空间 E 中的路径签名见 [LCL07]。回顾一下，取值于 $\mathbb{R}^d$的路径的 n重迭代积分取值于 $\mathbb{R}^{n\times d}$。然而，当我们考虑取值于巴拿赫空间 E中的路径时，取值于 E的路径的 n重迭代积分取值于一个拓扑张量空间 $\bigotimes_{j=1}^{n}{}_{\|\cdot\|_n} E =: E^{\otimes n}$，而且张量范数 $\|\cdot\|_n$的选择有一定自由度。依照 [LCL07，定义 1.25] ，我们确定了所谓的容许 张量范数族，另见下文定义 2.1。可容许张量范数族的例子包括:

(1) E 是希尔伯特空间，且张量范数为希尔伯特张量范数,
(2) E 是巴拿赫空间，且张量范数为射影张量范数或内射张量范数。

对于 $\alpha \in (0,1)$、 $T>0$ 和 E ，设某个实巴拿赫空间配备了可容许张量范数族，我们用 $\mathscr{C}^\alpha([0,T],E)$ 表示 α-H¨older 连续的 E 值粗糙路径空间，另见下文第 2.2 节。此外，令

$$S(\cdot)_{[0,T]}\colon \mathscr{C}^\alpha([0,T],E) \to \bigoplus_{n=0}^{\infty} E^{\otimes n} \tag{1}$$

即为 签名映射（也称为 *Lyons* 提升）；也就是说， $S(\cdot)_{[0,T]}$将一个取值于 H¨older 连续E空间的粗糙路径 $\mathbf{x}$映射为 $S(\mathbf{x})_{[0,T]}$，即 $\mathbf{x}$在 $[0,T]$上的 n 重迭代积分序列,

$n \in \mathbb{N}$ （另见第 2.3 节）。最后，我们用 $(E^*)^{\otimes_a n}$ 表示E^*的代数 n张量积，其中E^*是 E 的对偶空间（见附录 E），并约定 $(E^*)^{\otimes_a 0} = \mathbb{R}$。
我们的出发点是如下定理，它本质上是斯通–魏尔施特拉斯定理的直接推论（另见下文定理 3.4）：

定理 1.1. 设 E 为实巴拿赫空间，设 τ 为 $\mathscr{C}^\alpha$ 上的豪斯多夫拓扑$([0,T]; E)$，设 K 为 τ-紧集，并设 D 为 $\bigoplus_{n=0}^{\infty}(E^*)^{\otimes_a n}$ 的子空间，使得

(1) 对任意 $l \in D$， $K \ni x \mapsto \langle S(x)_{0,T}, l\rangle$ 是 τ-连续映射，

(2) 每当 $x \neq x'$ 且 $x,x' \in K$ 时， $S(x)_{0,T} \neq S(x')_{0,T}$，*(3)* $1 = (1, 0, \dots) \in D$，*(4)* D 分离 $\bigoplus_{n=0}^{\infty} E^{\otimes n}$ 中的点，*(5)* 对所有 l，$l' \in D$，存在一个 $l'' \in D$，使得

$$\forall \mathbf{x} \in K\colon \langle S(\mathbf{x})_{0,T}, l\rangle \langle S(\mathbf{x})_{0,T}, l'\rangle = \langle S(\mathbf{x})_{0,T}, l''\rangle .$$

那么，对于任意 τ-连续函数 $f\colon K \to \mathbb{R}$ 以及所有 $\epsilon > 0$，存在 $l \in D$ 使得

$$\sup_{\mathbf{x}\in K} |\langle S(\mathbf{x})_{0,T}, l\rangle - f(\mathbf{x})| < \epsilon.$$

换言之，定理 1.1 确保我们可以用以下代数中的元素逼近定义在 $\mathscr{C}^\alpha([0,T], E)$ 的某些紧子集上的连续函数：

$$\mathscr{A} = \{\langle S(\cdot)_{[0,T]}, l\rangle\colon l \in D\}. \tag{2}$$

我们简要讨论假设（1）-（5）。假设（3）仅仅确保 $\mathscr{A}$ 处处非零，而假设（1）确保 $\mathscr{A}$ 中的元素实际上是连续映射。假设（5）确保 $\mathscr{A}$ 确实是一个代数。如果我们将范围限制在所谓的弱几何 粗糙路径上，则满足这一性质，参见第 2.4 节，即 $K \subset \mathscr{C}_g^\alpha([0,T]; E)$。假设（2）和（4）保证 $\mathscr{A}$ 能在 K 中分离点。由于 $D \subseteq \oplus_{n=0}^{\infty}(E^*)^{\otimes_a n}$，我们通常要求 E 具有逼近性质，以确保假设（4）成立。如果考虑时间扩展路径，则假设（2）得到满足，参见第 2.5 节。

目前的关键问题是，我们尚未指定 τ 定理 1.1 中的拓扑。事实上，我们运用定理 1.1，为以下两种情形建立通用逼近定理：

(I) τ 是由 α-H¨older 度量 $\varrho_\alpha^{\mathrm{hom}}$诱导的拓扑，见第 3.2 节，

(II) τ 是所谓的 i^*-拓扑，这种拓扑继承自一个适当选取的 H¨older 空间上的弱*-拓扑，见第 3.3 节。

情形（I）中的通用逼近定理可直接由定理 1.1、上述关于假设（1）-（5）的讨论，以及签名映射是$\varrho_\alpha^{\mathrm{hom}}$-连续的这一事实推出，参见 [LCL07，定理 3.10]。

情形（II）需要多得多的工作——第 4–6 节将证明该情形下的通用逼近定理。不过，这种情形有一个很大的优点：巴拿赫-阿劳格鲁定理保证 $\varrho_\alpha^{\mathrm{hom}}$**-有界集在** i^* **拓扑**下相对紧，也就是说，紧集更容易识别。这里我们想强调的是，尽管 H¨older 空间 $C^\alpha([0,T], \mathbb{R}^d)$ 在 $\alpha > \beta$ 时紧嵌入 $C^\beta([0,T], \mathbb{R}^d)$，但若将 $\mathbb{R}^d$ 替换为无限维空间 E，这一结论便不再成立。

关于情形（II）的证明，有几点值得说明：首先，空间 $\mathscr{C}^\alpha([0,T]; E)$ 不是线性空间（迭代积分与逐点求和不可交换）。因此， $\mathscr{C}^\alpha([0,T]; E)$ 上不存在弱-* 拓扑；取而代之的是，我们将 $\mathscr{C}^\alpha([0,T]; E)$ 嵌入一个（线性） H¨older 空间，并从中继承弱 -* 拓扑；我们将由此得到的拓扑称为

i^*-拓扑。第 4 节和第 5 节讨论这一构造，并给出 H¨older 空间预对偶的显式表示。请注意，i^* 拓扑的构造要求拓扑张量空间 $E^{\otimes n}$ 具有预对偶；特别是，在这种情形下，通常没有意义考虑内射张量范数。最后，关于签名映射 $S(\cdot)_{[0,T]}$ 关于 i^* 拓扑连续的证明，可见于 [CST26]在情形 $E = \mathbb{R}^d$。这一证明不能直接推广到无限维情形（这与 $C^\alpha([0,T], E)$ 不能 紧嵌入 $C^\beta([0,T], E)$ 有关），但我们可以借助精心选择的“投影”将问题化归到有限维情形。详情请参见第 6 节。

与有限维情形中的类似结果相比，尤其是与 [CST26], 中的结果相比，为了得出我们的通用逼近定理，我们必须克服若干挑战。我们已经提到，需要在拓扑张量空间中进行研究，这大大增加了技术难度。此外，在无限维情形下，类群元素的两种刻画——它们使我们能够定义弱几何路径——未必等价。尽管如此，[CST26] 仍然给予了我们重要启发，不过其中有些对象的处理方式有所不同：在 [CST26] 中，（弱）几何粗糙路径被定义为取值于类群元素、关于 Carnot–Carath´eodory 度量满足 H¨older 连续性的路径，并给出了预对偶的一种替代构造 $C^\alpha([0,T], E)$。在无限维情形下，Carnot–Carath´eodory 度量在 $G(E)$ 的所有元素上并非有限（参见注 2.23 ），因此需要用另一种齐次范数替代（例如参见 [FV10，定义 7.34]）。我们认为，我们的方法更为直接。

1.1. **展望**。 受有限维情形的启发，一个自然的未来研究方向是探究在何种情形下，可将随机偏微分方程解释为由与无限维布朗运动或无限维Ornstein–Uhlenbeck过程相关联的（斯特拉托诺维奇）粗糙路径所驱动的随机微分方程。进而可以研究该随机微分方程的解映射是否（关于相应的拓扑）连续依赖于底层粗糙路径。确立这种连续性将使我们能够应用通用逼近定理，例如用以逼近Heath–Jarrow–Morton–Musiela框架中的模型，并探索能源市场中的最优控制问题。特别地，用无限维粗糙路径之签名的线性泛函来逼近随机偏微分方程解的函数，将使我们能够处理二次型最优控制问题，这与 [LNPA20a]中的有限维情形类似。我们的通用逼近定理还为构造如下无限维波动率模型提供了依据：其波动率算子取为无限维布朗粗糙路径之签名的线性映射。

未来研究的另一个方向是，将针对几何粗糙路径范数有界集的通用逼近定理扩展为适用于整个粗糙路径空间的全局通用逼近定理。这可以通过利用 [CST26 第5]节中开发的加权函数空间来控制无穷远处的增长。全局通用逼近定理将确保这些逼近对所有输入路径都一致有效，而不仅限于高概率集或截断集，从而夯实潜在应用的理论基础。具体而言，这将为上述应用提供全局逼近保证：逼近 HJMM 框架中的模型，以及构建算子值随机波动率模型。

1.2. **文章结构**。 第 2 节简要介绍无穷维粗糙路径及其签名。在介绍了所有相关概念后，我们于第 3 节给出主要结果 —— 通用逼近定理（ UATs ）。其余各节则包含证明关于弱 -* 拓扑的通用逼近定理所需的内容：由于 H¨older 连续几何粗糙路径空间不是线性空间（两条路径之和不满足陈恒等式），我们将该空间嵌入一个 H¨older 空间，并通过这一嵌入继承弱-* 拓扑——相关内容见第 5 节；预对偶空间的刻画见第 4 节。最后，第 6 节讨论 Lyons 提升的弱-* 连续性；该提升是构造给定粗糙路径签名的

映射。附录 A–E 汇集了拓扑张量空间的相关内容。

1.3. 记号。令 $\mathbb{N} = \{0, 1, \ldots\}$ 和 $\mathbb{N}_{>0} = \{1, 2, \ldots\}$。向量空间 V的代数对偶记作 V^*，巴拿赫空间 $(E, \|\cdot\|_E)$ 的拓扑对偶记作 $(E^*, \|\cdot\|_{E^*})$。设 X，Y为巴拿赫空间，$\mathscr{L}(X, Y)$ 表示从 X到 Y的有界线性算子所构成的巴拿赫空间，并赋予算子范数；令 $\mathscr{L}(X) := \mathscr{L}(X, X)$。对于巴拿赫空间 E 中允许存在预对偶的一个网 $\{x_\lambda\}_{\lambda\in I}$，我们用 $x_\lambda \overset{*}{\rightharpoonup} x \in E$ 表示该网在弱-* 拓扑下收敛到 x。

巴拿赫空间 E 上的张量代数 $T((E))$ 以及相关代数 $T_1((E)))$、$T_0((E))$ 和$T_a(F)$，均在第 2.1 节中定义。我们用 $\hat{\otimes}$ 表示张量代数上的乘积，见定义 2.3。

对于 $n, m \in \mathbb{N}$，我们用 $\mathrm{Sh}(n, m)$ 表示所有 (n, m)-洗牌置换的集合，见定义 2.19。

关于 $\mathscr{C}^{\alpha,\ n}([0,T];\ E)$ 和 $\mathscr{C}^{\alpha}([0,T];\ E)$（H¨older 连续乘性泛函空间）的定义，见第 9 页。关于 $\mathscr{C}^{\alpha,}_{g}{}^{n}([0,T];\ E)$ 和 $\mathscr{C}^{\alpha}_{g}([0,T];\ E)$（弱几何 H¨older 连续乘性泛函空间）的定义，见第 2.4 节。

i^*-拓扑在定义 3.15 中引入。

2. A brief introduction to signatures and rough paths in infinite dimensions

签名与粗糙路径是密切相关的概念，迭代积分在两者中都发挥着重要作用。为了更详细地说明这一点，我们先介绍光滑实值路径 x 的迭代积分：$[0,T] \to \mathbb{R}$。x 的 1 次迭代积分在区间 $[s,t]$ 上定义为 $\mathbf{x}^{(1)}_{s,t} = \int_s^t \mathrm{d}x_r = x_t - x_s$, $0 \le s \le t \le T$。对于 $k \ge 2$，x 的 k 次迭代积分在区间 $[s,t]$ 上定义为

$$\mathbf{x}^{(k)}_{s,t} = \int_s^t \int_s^{t_k} \cdots \int_s^{t_2} \mathrm{d}x_{t_1} \ldots \mathrm{d}x_{t_k}, \quad 0 \le s \le t \le T. \tag{3}$$

签名理论的核心在于，整个路径 x 的性质都被其签名高效地编码；即取值于 $\mathbb{R}$ 的序列 $\{\mathbf{x}^{(k)}_{0,T}\}_{k\in\mathbb{N}}$。

粗糙路径理论讨论的是这样的情形：x不够光滑，无法明确地定义迭代积分；特别是，当 x不可微，但仍为某个 $\alpha \in$ 下的α-H¨older 连续时（0,1）。在这种情况下，已证明，只要能够以某种方式指定 区间 $[s,t]$ 上的迭代积分，直至 $\lfloor 1/\alpha \rfloor$ 阶对所有 $0 \le s \le t \le T$，就足以明确地得到更高阶的迭代积分。这个过程称为 *Lyons* 提升 （见 [LCL07，定理 3.7]）；它为再次通过签名来编码整个路径的性质铺平了道路。

请注意，规定迭代积分比乍看起来更自然：例如，对于连续半鞅（它们通常对所有 $\alpha \in [0, \frac{1}{2}$ 都是 α-H¨older 连续的，但也不会更光滑），1 次迭代积分由伊藤积分法给出（既可以在伊藤意义下定义，也可以在斯特拉托诺维奇意义下定义）。

现在来看一个取值于 $\mathbb{R}^d$ 的路径 x：$[0,T] \to \mathbb{R}^d$，我们发现 $(\mathbb{R}^d)^{\otimes k} (= \mathbb{R}^{kd})$ 是 $\mathbf{x}^{(k)}_{s\ t}$, 的自然状态空间，其中 k 次迭代积分定义在 $[s,t]$ 上：我们有

$$\mathbf{x}^{(k)}_{s,t} = \int_s^t \int_s^{t_1} \cdots \int_s^{t_k} \mathrm{d}x_{t_{k+1}} \otimes \ldots \otimes \mathrm{d}x_{t_1} \tag{4}$$

将这一思想推广到取值于无穷维实巴拿赫空间 E的路径时，我们会面临这样一个事实：积分涉及取极限；尽管 $(\mathbb{R}^d)^{\otimes k}$ 在任意张量范数下都是完备的，但代数张量空间 $\bigotimes_{j=1}^{k+1}{}_a E$却不再如此。因此，

k次迭代积分的自然状态空间是一个拓扑张量空间 $\bigotimes_{j=1}^{k+1}{}_{\|\cdot\|}E$。无限维情形的挑战之一在于，不同的张量范数会产生不同的拓扑张量空间，因此必须确定哪些张量范数是合适的。

本文探讨签名理论在无穷维随机微分方程（以及随机偏微分方程）中的应用。具体而言，我们将签名理论应用于无穷维粗糙路径。因此，我们首先简要介绍无限维签名与粗糙路径。对于不熟悉无穷维拓扑张量空间的读者，请参阅附录 A，其中提供了概述。第 2.1 节介绍定义签名所需的相关结构；第 2.2 节讨论粗糙路径所需的相关结构。第 2.3 节讨论 Lyons 提升。第 2.4 节讨论弱几何粗糙路径，粗略来说，这类粗糙路径遵循乘积法则。最后，第 2.5 节讨论所谓的时间扩展粗糙路径。总之，我们只介绍展示结果所必需的最基本内容；关于这一主题的更详细介绍可参见 [FH20、FV10、LCL07] 等文献。

2.1. **张量代数与乘性泛函。** 无限维签名的自然结构是张量代数，见下文定义 2.3。该代数结构旨在囊括迭代积分的 *Chen* 关系。为了理解这一关系，注意如果 $x\colon [0,T]\to\mathbb{R}^d$ 是光滑的，那么对于所有 $r,\ s,\ t\in[0,T]$ 都有：

$$\mathbf{x}_{s,t}^{(2)}=\mathbf{x}_{s,r}^{(2)}+\mathbf{x}_{s,r}^{(1)}\otimes\mathbf{x}_{r,t}^{(1)}+\mathbf{x}_{r,t}^{(2)}. \tag{5}$$

高阶迭代积分也满足类似的恒等式，而 Chen 关系则通过张量代数关系来描述这些恒等式。满足 Chen 关系的张量代数元素称为乘性泛函，见下文定义 2.6。

如上所述，如果 E 是实巴拿赫空间，且 $x\colon [0,T]\to E$ 是光滑的，那么 k 重迭代积分 x 取值于拓扑张量空间 $\bigotimes_{j=1}^{k}{}_{\|\cdot\|}E$ （见定义 A.4）。选择张量范数时必须考虑一些技术问题：按照 [LCL07，定义 1.25]，我们假设讨论的是[1]

定义 2.1. 设 E 为实巴拿赫空间，对于 $n\in\mathbb{N}_{>0}$，设 $\|\cdot\|_n$ 为代数张量空间 $E^{\otimes_a n}$ 上的一个范数（见定义 A.1）。若 $\{\|\cdot\|_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ 是一个对称强交叉范数族，我们就称其为的可容许张量范数族，并令 $E^{\otimes n}:=\bigotimes_{i=1}^{n}{}_{\|\cdot\|_n}E$, $n\in\mathbb{N}_{>0}$。我们约定 $E^{\otimes 0}=\mathbb{R}$。

注 2.2. 在下文中，每当需要对偶空间中的元素参与检验时，我们通常还需要张量范数是合理的 （见定义 A.6），甚至需要满足更强的强一致 条件（见定义 A.14）。需要这些附加条件时，我们会明确说明。

定义 2.3 （张量代数，参见例如 [LCL07]中的定义 2.4）。 设 E 为实巴拿赫空间，且 $\{\|\cdot\|_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ 为 E的一个可容许张量范数族。则张量形式级数空间 $T((E))$定义为以下序列构成的空间：

$$T((E)):=\{\mathbf{a}\mid\mathbf{a}=(\mathbf{a}^{(0)},\mathbf{a}^{(1)},\ldots)\text{ with }\mathbf{a}^{(n)}\in E^{\otimes n}\text{ for all }n\in\mathbb{N}\}.$$

设$\mathbf{a}=(\mathbf{a}^{(0)},\ \mathbf{a}^{(1)},\ \ldots\ldots)$ 和$\mathbf{b}=(\mathbf{b}^{(0)},\ \mathbf{b}^{(1)},\ \ldots\ldots)$ 是张量形式级数。我们将它们的加法和乘法定义为

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}:=(\mathbf{a}^{(0)}+\mathbf{b}^{(0)},\mathbf{a}^{(1)}+\mathbf{b}^{(1)},\ldots),$$

[1]严格来说， [LCL07] 中的假设略弱一些，不过这在实践中似乎并无影响。详情请参见注 A.10。

and

$$\mathbf{a}\hat{\otimes}\mathbf{b} \coloneqq (\mathbf{c}^{(0)}, \mathbf{c}^{(1)}, \ldots), \tag{6a}$$

其中对所有 $n \geq 0$

$$\mathbf{c}^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{a}^{(i)} \otimes \mathbf{b}^{(n-i)}. \tag{6b}$$

（注意，对于所有 $c \in \mathbb{R}$，我们设 $c \otimes \mathbf{x} = \mathbf{x} \otimes c = c\mathbf{x}$，$\mathbf{x} \in E^{\otimes n}$, $n \in \mathbb{N}$。）对于加法和乘法的单位元，我们分别记为$\mathbf{0} \coloneqq (0,0,\ldots)$和 $\mathbf{1} = (1,0,0,\ldots)$。配备上述加法和乘法的空间$T((E))$称为（在 E上的）张量代数 。

设 E为实巴拿赫空间，设 x: $[0,T] \to E$光滑，且 $s,t \in [0,T]$。令$\mathbf{x}_{s,t}^{(0)} = 1$（我们稍后会说明这一约定），并定义$\mathbf{x}_{s,t}^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}_{>0}$为 x 在 $[s,t]$ 上的 n重迭代积分（见（4）），则可得 $\{\mathbf{x}_{s,t}^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是张量代数中的一个元素（所涉及的张量范数为交叉范数，这一事实保证了迭代积分存在）。

然而，有时我们只想考虑前 n 个迭代积分。为此，我们引入截断张量代数：

定义 2.4（截断张量代数，参见例如 [LCL07] 中的定义 2.5）。设 E 为实巴拿赫空间，且 $\{\|\cdot\|_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ 为 E 上的可容许张量范数族。则我们定义 $T^{(n)}(E)$，即阶数为 n 的截断张量代数，为以下序列空间：

$$T^{(n)}(E) \coloneqq \{\mathbf{a} \mid \mathbf{a} = (\mathbf{a}^{(0)}, \mathbf{a}^{(1)}, \ldots, \mathbf{a}^{(n)}) \text{ with } \mathbf{a}^{(i)} \in E^{\otimes i} \text{ for all } 0 \leq i \leq n\}.$$

或者，我们可以将理想 $B_n(E)$定义为

$$B_n(E) = \{\mathbf{a} \in T((E)) \mid \mathbf{a}^{(0)} = \ldots = \mathbf{a}^{(n)} = 0\},$$

然后令 $T^{(n)}(E) = T((E))/B_n(E)$。截断张量代数继承了张量代数的代数结构。

注 2.5。截断张量代数 $T^{(n)}(E)$ 也可以解释为一个直和：

$$T^{(n)}(E) = \mathbb{R} \oplus E \ldots \oplus E^{\otimes n}.$$

这种解释使我们可以立即在 $T^{(n)}(E)$ 上赋予一个范数，从而使其成为巴拿赫空间。

上文引入的代数结构使我们能够高效地编码上述*Chen*关系。

定义2.6（乘性泛函，参见例如 [LCL07]中的定义3.1）。设 E 为一个实巴拿赫空间，设 $\{\|\cdot\|_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ 为 E的一个可容许张量范数族，并设$\mathbf{x}$: $[0,T]^2 \to T((E))$（或$\mathbf{x}$: $[0,T]^2 \to T^{(n)}((E))$）。则$\mathbf{x}$称为乘性泛函，如果它满足Chen关系，即如果

$$\mathbf{x}_{s,t} = \mathbf{x}_{s,u}\hat{\otimes}\mathbf{x}_{u,t}, \quad s,u,t \in [0,T]. \tag{7}$$

注意，Chen关系要求$\mathbf{x}^{(0)} \equiv 1$，这引出了如下定义：

定义 2.7。设 E为一个实巴拿赫空间，且 $\{\|\cdot\|_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$是 E上的一个可容许张量范数族。我们定义

$$T_1((E)) \coloneqq \{\mathbf{a} \in T((E)) \mid \mathbf{a}^{(0)} = 1\}$$

and

$$T_1^{(n)}((E)) \coloneqq \{\mathbf{a} \in T^{(n)}(E) \mid \mathbf{a}^{(0)} = 1\}.$$

A cChen关系的一个推论是，对于乘性泛函 $\mathbf{x}$ 和 $s,\ t \in [0,T \qquad]$

$$\mathbf{x}_{t,s} = (\mathbf{x}_{s,t})^{-1},$$

其中，逆是相对于张量积而言的。对于$T_1((E))$或 $T_1^{(n)}$ (E)中的所有元素，该逆均存在，并且可以显式构造：

命题2.8 (摘自 [LCL07]的第 2.2.1 节。设 E 是一个实巴拿赫空间，且 $\{\| \nmid_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ 是 E的一个可容许张量范数族。设$\mathbf{a}$ 是 $T_1((E))$或$T_1^{(n)}$ (E)中的一个元素，则$\mathbf{a}$ 相对于张量积的逆为

$$\mathbf{a}^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} (\mathbf{1}-\mathbf{a})^{\hat{\otimes} i}. \tag{8}$$

证明。首先注意，等式 (8) 中的无穷级数定义良好，因为该序列中的每一项都只是有限多个非零元素之和。令$\mathbf{b} \coloneqq (\mathbf{1} - \mathbf{a})$，则这等价于

$$(\mathbf{1}-\mathbf{b})\hat{\otimes}\sum_{i=0}^{\infty}\mathbf{b}^{\hat{\otimes} i} = \left(\sum_{i=0}^{\infty}\mathbf{b}^{\hat{\otimes} i}\right)\hat{\otimes}(\mathbf{1}-\mathbf{b}) = \mathbf{1}$$

□

下文中我们还将使用代数张量代数；我们将其视为作用于张量代数上的泛函的自然空间。代数张量代数与定义 2.3 中的张量代数之间的关键区别在于，代数张量代数是各代数张量空间的直和，即由简单张量的线性组合构成的向量空间（不带拓扑）。

定义 2.9。 设 F 是一个向量空间。其代数张量代数 $T_a(F)$ 和截断代数张量空间 (F) 定义如下：

$$T_a(F) \coloneqq \bigoplus_{i=0}^{\infty} F^{\otimes_a i} \quad \text{and} \quad T_a^{(n)}(F) \coloneqq \bigoplus_{i=0}^{n} F^{\otimes_a i},$$

其中， $F^{\otimes_a i}$ 表示 F的 i阶代数张量幂。

注意，若 E是巴拿赫空间，$\{\|\cdot\|_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$是 E上的可容许张量范数族，且$F \subseteq E^*$，则 $T_a(F)$中的元素可表示 $T((E))$的（代数）对偶空间中的元素。事实上，我们定义

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle \coloneqq \left\langle \mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{y}\right\rangle, \quad \mathbf{y} \in F^{\otimes_a i}, \mathbf{x} \in T((E))$$

（张量范数为交叉范数这一事实保证了上述定义是良定义的）。通过线性性，该定义可扩展到$\mathbf{y} \in T_a(F)$。

2.2. **α-H¨older 范数与 $\varrho_\alpha^{\mathbf{hom}}$-度量**。 要将乘性泛函解释为粗糙路径，必须施加正则性条件。这些正则性条件通常用 p-变差或 α-H¨older 连续性来表达；在我们的工作中，我们采用后者。

定义2.10 （α-H¨older 连续性，参见例如 [FV10] 中的定义 5.1）。设 $0 < \alpha \le 1$，且 $(E, \|\cdot\|)$ 是一个实巴拿赫空间。对于任意路径 $x\colon\ [s,t] \to E$，我们定义 α-H¨<style id='20}older 系数

$$\|x\|_{C^\alpha} \coloneqq \sup_{s\le u<v\le t} \frac{\|x_u - x_v\|}{|v-u|^\alpha}. \tag{9}$$

如果一条路径具有有限的 α-H¨older 系数，则称其为 α-H¨<style id='7'}older 连续。所有此类函数构成的向量空间记为 $C^\alpha([s,t];E)$。此外，我们将空间 $C_0^\alpha([s,t];E)$ 定义为

$$C_0^\alpha([s,t];E) \coloneqq \{x \in C^\alpha([s,t];E) \mid x(s) = 0\}.$$

在此空间上， α-H¨older 系数是一个范数。

也可以分别针对 $\alpha > 1$ 定义这些概念，但这并没有实际用途，因为属于此类的函数将是常数，参见 [FV10，命题 5.2]。

将 α-H¨older 连续性的定义推广到多重可乘泛函，基本上有两种方式。其一，直接针对签名的高阶项定义这些概念（例如参见 [FH20]）；其二，在截断张量代数 $T^{(n)}(E)$ 上定义一种新的度量，然后考察关于这一新度量的 H¨older 连续性（例如参见 [CST26]）。两种方法得到的是同一组泛函，并且可以证明，与之相关的 H¨older 系数是等价的（例如参见 [FV10 的导论，第 8]，章；尽管其中只讨论了有限维情形，该论证仍然成立）。在本文中，我们采用第一种方法。

定义 2.11（齐次 α-H¨older 度量，参见例如定义 2.1 [FH20]）。设 E 为一个实巴拿赫空间，$\{\|\cdot\|_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ 为 E上的一个可容许张量范数族。设$\mathbf{x}$、$\mathbf{y}$: $[0,T]^2 \to T^{(n)}(E)$ 为乘性泛函（参见定义 2.6），且 $0 < \alpha \leq 1$。则阶数为 n 的齐次 α-H¨*older* 度量 $\varrho_\alpha^{\mathrm{hom}}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ 定义为

$$\varrho_\alpha^{\mathrm{hom}}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \coloneqq \max_{1\leq i\leq n} \sup_{u,v\in[0,T],u\neq v} \left(\frac{\|\mathbf{x}_{u,v}^{(i)} - \mathbf{y}_{u,v}^{(i)}\|_i}{|v-u|^{i\alpha}} \right)^{1/i}.$$

若乘性泛函 x 的齐次 α-H¨*older* ‘范数’ [2] $\|\mathbf{x}\|_{\mathscr{C}^\alpha}$有限，则称其为 α-H¨*older* 连续，其中

$$\|\mathbf{x}\|_{\mathscr{C}^\alpha} \coloneqq \max_{1\leq i\leq n} \sup_{u,v\in[0,T],u\neq v} \left(\frac{\|\mathbf{x}_{u,v}^{(i)}\|_i}{|v-u|^{i\alpha}} \right)^{1/i}.$$

The 所有这些阶数为 n的 α-H¨older 连续乘性泛函组成的集合定义为 y

$$\mathscr{C}^{\alpha,n}([0,T];E) \coloneqq \{\mathbf{x}\colon [0,T]^2 \to T^{(n)}(E) \mid \mathbf{x} \text{ is a multiplicative functional and } \|\mathbf{x}\|_{\mathscr{C}^\alpha} < \infty\}.$$

除非另有说明，我们假设该空间配备由度量 $\varrho_\alpha^{\mathrm{hom}}$诱导的拓扑。在特殊情形下，省略 $n = \lfloor 1/\alpha \rfloor$，$n$ （关于此情形为何特殊，参见第 2.3 节），且该空间记为

$$\mathscr{C}^\alpha([0,T];E) \coloneqq \mathscr{C}^{\alpha,\lfloor 1/\alpha \rfloor}([0,T];E).$$

2.3. **Lyons 提升与签名**。如本节引言中所述，Lyons 提升提供了一种方法，可将乘性泛函 $\mathbf{x} \in \mathscr{C}^\alpha([0,T];E)$ 提升为 $\mathscr{C}^{\alpha,n}([0,T];E)$ 中的乘性泛函，其中 $n > \lfloor 1/\alpha \rfloor$:

定理/定义 2.12。设 E 为实巴拿赫空间，$\{\|\cdot\|_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ 为 E 的可容许张量范数族。设 $0 < \alpha \leq 1$，设 $n \in \mathbb{N}_{>0}$ 满足 $n \geq \lfloor 1/\alpha \rfloor$，并设 $\pi\colon T^{(n)}(E) \to T^{(\lfloor 1/\alpha \rfloor)}(E)$ 为自然投影。那么存在唯一的 ϱ_α^{hom}连续映射

$$S^n\colon \mathscr{C}^\alpha([0,T];E) \to \mathscr{C}^{\alpha,n}([0,T];E),$$

使得对于所有 s、$t \in [0,T]$ 以及所有 $x \in \mathscr{C}^\alpha([0,T];E)$，都有 $\pi(S^n(x)_{s,t}) = x_{s,t}$。此外，存在一个 $C > 0$，使得对于所有 $x \in \mathscr{C}^\alpha([0,T];E)$，都有 $\|S^n(x)\|_{\mathscr{C}^\alpha} \leq C\|x\|_{\mathscr{C}^\alpha}$。映射 S^n 称为 *Lyons*映射。

[2]这种说法多少有些名不副实，因为乘性泛函的集合并非线性空间。

证明。这实质上就是 [LCL07 的定理 3，7]，尽管该文使用了不同的记号。取 $\omega(s,t) = C'(t-s)^\alpha$ 作为 [LCL07 定理 3 中使用的控制 ω，即可看出这一点；其中 C' 是一个依赖于 $\mathbf{x} \in \mathscr{C}^\alpha([0,T]; E)$ 的常数。□

由于 Lyons 提升的构造对第 6 节很重要，我们在此简述其构造。该构造使用归纳法。事实上，对于 $n = \lfloor 1/\alpha \rfloor$，映射就是恒等映射。假设映射 S^n 存在，则映射 S^{n+1} 按如下方式构造：首先，对于 $\mathbf{x} \in \mathscr{C}^\alpha([0,T]; E)$，定义 $\tilde{\mathbf{x}}: [0,T]^2 \to T^{(n+1)}(E)$ 如下：

$$\tilde{\mathbf{x}} := (S^n(\mathbf{x}), 0), \tag{10}$$

其中 $0 \in E^{\otimes(n+1)}$。对于 $s < t$ 以及 $D = (t_1, \ldots, t_N)$（它们是 $[s,t]$ 的一个分割），我们定义

$$\tilde{\mathbf{x}}^D_{s,t} := \tilde{\mathbf{x}}_{s,t_1} \hat{\otimes} \ldots \hat{\otimes} \tilde{\mathbf{x}}_{t_N,t};$$

$\mathbf{x}$ 在 (s, t) 处的 Lyons 提升由以下极限给出

$$S^{n+1}(\mathbf{x})_{s,t} := \lim_{|D|\to 0} \tilde{\mathbf{x}}^D_{s,t}.$$

当 $s > t$ 时，$\mathbf{x}_{s,t}$ 的构造与此类似。有关该映射为何收敛到所需结果的详细证明，请参见 [LCL07，定理 3.7]。

备注 2.13。定理/定义 2.12 中 Lyons 提升的构造也允许我们定义类似的映射 $S^n: \mathscr{C}^{\alpha,k}([0,T]; E) \to \mathscr{C}^{\alpha,n}([0,T]; E)$，对于 $\lfloor \frac{1}{\alpha} \rfloor < k < n$。尽管这些映射的定义域不同，但可以将它们视为“同一个”映射，因此将对它们使用相同的记号。特别地，对于任意 $\mathbf{x} \in \mathscr{C}^{\alpha,k}([0,T]; E)$，我们有

$$S^n(\mathbf{x}) = S^n(\pi(\mathbf{x})),$$

其中 π 是自然投影 $\pi: T^{(k)}(E) \to T^{\lfloor \frac{1}{\alpha} \rfloor}(E)$ 到 $\pi: \mathscr{C}^{\alpha,k}([0,T]; E) \rightarrowtail \mathscr{C}^\alpha([0,T]; E)$ 的延拓。

由于我们可以将 $\mathscr{C}^\alpha([0,T]; E)$ 中的一条路径提升到任意高阶 n 的 $\mathscr{C}^{\alpha,n}([0,T];]E)$ 中，因此也可以将其提升到取值于张量代数 $T((E))$ 的路径。在这种情况下，我们用 S 表示该映射。对象 $S(\mathbf{x})$ 仍然是一个乘性泛函（参见[LCL07]中的定理 3.7）。它的主要用途在于考察 $S(\mathbf{x})_{0,T}$，这个对象称为 $\mathbf{x}$ 的签名：

定义 2.14（签名）。设 E 为一个实巴拿赫空间，并设 $\{\|\cdot\|_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ 为 E 的一个可容许张量范数族。设 $0 < \alpha \leq 1$，设 $\mathbf{x} \in \mathscr{C}^\alpha([0,T]; E)$，并设 $s,t \in [0,T]$。则称对象 $S(\mathbf{x})_{s,t} \in T((E))$ 为 $\mathbf{x}$ 在 (s,t) 处的签名。

签名 $S(\mathbf{x})_{0,T}$ 包含了关于乘性泛函 $\mathbf{x}$ 的大量信息，但并不能完全刻画它。例如，若一条路径到达某一点，再以完全相同的方式返回，则其签名为 $\mathbf{1}$。特别地，这样一条路径的签名与保持常值的路径的签名无法区分。另一个例子是，彼此互为重参数化的两个乘性泛函具有相同的签名。这两种情形都是所谓树状等价的例子。已经证明，映射 $\mathbf{x} \mapsto S(\mathbf{x})$ 在树状等价意义下是单射的，见 [BGLY16，定理 1.1]。通过考虑时间扩展粗糙路径，有时可以消除树状等价，见第 2.5 节。

2.4. 弱几何粗糙路径。 从头构造粗糙路径时，通常会借助例如伊藤或斯特拉托诺维奇随机微积分来规定迭代积分。后者的一个优点是，由此得到的微积分满足经典链式法则，例如，$d[W(t)^2] = 2W(t) \circ dW(t)$。对于粗糙路径，“满足经典链式法则”这一概念可以通过对洗牌泛函进行检验来形式化编码：要求 $\mathbf{x} \in T((E))$ 满足

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}' \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \sqcup\!\sqcup \mathbf{y}' \rangle, \quad \mathbf{y}, \mathbf{y}' \in T_a(E^*) \tag{11}$$

（洗牌积 $\sqcup\!\sqcup$ 的定义见定义 2.19，详情见下文注释 2.20）。著名的陈定理指出，对于有限维粗糙路径，性质 (11) 等价于要求$\mathbf{x}_{s,t}$对所有 $s,t \in [0,T]$都是“群样”的；满足这些等价条件的路径称为弱几何 （见下文定义 2.17 和 2.24；粗略地说，如果存在一个由 E 生成的自由李代数中的 X ，使得$\mathbf{x} \in T_1((E))$等于 $X\exp(X)$，则称其为“群样”）。陈定理的一个推论是，可以运用李理论中的工具和技巧来分析弱几何路径。为求完整起见，我们指出，文献中也有几何粗糙路径 这一概念；这类粗糙路径可以作为提升可微路径的 $\|\cdot\|_{\mathscr{C}^\alpha}$-极限得到。不过，这一概念在我们的工作中并不起重要作用。

我们简要探讨弱几何粗糙路径在本文框架中的重要性。首先，性质 (11) 是我们逼近结果的核心，因为它实质上意味着，对粗糙路径的低阶项施加泛函所得的多项式，可以表示为高阶项的线性泛函。遗憾的是，在无限维情形下，满足条件 (11) 是否等价于具有群样性质尚不明确，而文献中许多关于弱几何粗糙路径的结果实际上都依赖于“群样”性质。因此，我们需要陈定理的一个无限维类比：事实上，我们证明，如果状态空间 E 满足逼近性质，且所涉及的交叉范数强一致（见下文定义 A.14 和命题 2.22），那么这两个概念等价。

我们首先引入“群样”元素的概念。为此，我们借用了李群和李代数理论中的术语（例如“指数映射”和“括号运算”）。然而，我们讨论的是无限维情形，并不打算深入无穷维李群的技术细节。因此，我们不严格地界定其背后的李代数/李群结构，而只强调相关空间中与本文工作有关的性质（但参见 [GNS22，第 2] 节，以了解更严谨的论述）。

设 E 是一个实巴拿赫空间，并设 $\{\|\cdot\|_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ 是适用于 E的可容许张量范数族。记 $T_0((E))$ 为 $T((E))$ 中满足 $\mathbf{x}^0 = 0$的元素，而 $T_{(n)\,0}(E)$ 的定义类似。我们将 $T_0((E))$ 视为与‘李群’$T_1((E))$ 相对应的‘李代数’，其‘李括号’定义为

$$[\mathbf{x},\mathbf{x}'] = \mathbf{x}\hat{\otimes}\mathbf{x}' - \mathbf{x}\hat{\otimes}\mathbf{x}', \qquad \mathbf{x},\mathbf{x}' \in T_0((E)). \tag{12}$$

请注意，虽然李群和李代数结构并未得到严格定义，但括号运算$[\cdot,\cdot]$: $T_0((E)) \times T_0((E)) \to T_0((E))$ 是一个定义良好的交替双线性映射，并满足雅可比恒等式。此外，我们可以定义‘指数映射’ exp: $T_0((E)) \to T_1((E))$，它形式上描述了从 $\mathbf{1} \in T_1((E))$ 出发、沿着 $\mathbf{x} \in T_0((E))$ 方向在 $T_1((E))$ 中的流：

定义 2.15 （指数映射与对数映射）。 设 E 是一个实巴拿赫空间， E 配备可容许张量范数族 $\{\|\cdot\|_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ 。我们通过经典幂展开定义指数映射 exp: $T_0((E)) \to T_1((E))$ ：

$$\exp(\mathbf{x}) \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{x}^{\hat{\otimes}n}}{n!}, \tag{13}$$

对任意$\mathbf{x} \in T_0((E))$，该定义是良定义的，因为序列中的每一项都是有限多个非零元素之和。类似地，我们将对数映射 log: $T_1((E)) \to T_0((E))$ 定义为

$$\log(\mathbf{x}) \coloneqq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}(1-\mathbf{x})^{\hat{\otimes}n}, \tag{14}$$

对任意$\mathbf{x} \in T_1((E))$，该定义同样是良定义的，因为序列中的每一项都是有限多个非零元素之和。对于截断张量代数 $T^{(n)}(E)$，指数映射和对数映射的定义类似。

可以验证，上述定义的指数映射和对数映射互为逆映射。包含 E 的「李代数」 $T_0((E))$ 的最小子代数（将 E 视为 $T((E))$ 的子空间时）称为李级数空间：

定义 2.16（李级数，参见例如 [CDLL16] 中的定义 2.7）。设 E 为实巴拿赫空间，$\{\|\cdot\|_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ 为 E的可容许张量范数族。对于任意 $n, m \in \mathbb{N}_{>0}$ 以及任意$\mathbf{x} \in E^{\otimes n}$,$\mathbf{x}' \in E^{\otimes m}$，定义李括号

$$[\mathbf{x}, \mathbf{x}'] = \mathbf{x} \otimes \mathbf{x}' - \mathbf{x}' \otimes \mathbf{x}.$$

此外，对于 $n \geq 2$，我们将空间 $\mathscr{M}^{(n)}(E)$ 定义为

$$\mathscr{M}^{(n)}(E) \coloneqq \overline{\operatorname{span}\{[x_1, [x_2, \ldots, [x_{n-1}, x_n]]] \mid x_i \in E\}}.$$

我们还定义

$$\mathscr{M}^{(1)}(E) \coloneqq E \quad \text{and } \mathscr{M}^{(0)}(E) \coloneqq \{0\}.$$

我们将李级数空间 $\mathrm{Lie}(E)$ [或 $\mathrm{Lie}_n(E)$] 定义为由满足以下条件的元素 $\mathbf{x} \in T_0((E))$[或 $\mathbf{x} \in T_0^{(n)}(E)$] 构成的空间：对于任意 $m \in \mathbb{N}$ [或 $0 \leq m \leq n$]，均有 $\mathbf{x}^{(m)} \in \mathscr{M}_{(n)}(E)$。

我们现在将类群元素等同于李级数在指数映射下的像：

定义 2.17（类群元素，参见例如 [CDLL16] 中的定义 2.9）. 设 E 为一个实巴拿赫空间，并设 $\{\|\cdot\|_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ 为 E 的一个可容许张量范数族。我们将 类群元素 的集合定义为李级数集合在指数映射下的像。

$$G(E) \coloneqq \exp(\mathrm{Lie}(E)). \tag{15}$$

类似地，对于 $n \in \mathbb{N}$，我们令

$$G^n(E) \coloneqq \exp(\mathrm{Lie}_n(E)).$$

注记 2.18. 由 $\exp\big|_{T_0^{(n)}(E)}\colon T_{(n)\,0}(E) \to T_{(n)\,1}(E)$ 是微分同胚（[CDLL16，定理 2.4]）以及坎贝尔–贝克–豪斯多夫–戴因金公式这一事实可知，若 $\mathfrak{g} \subseteq T_{(n)\,0}$是闭李子代数，则 $\exp(\mathfrak{g})$ 是 $T_1^{(n)}$ 的闭子群（关于张量积），参见 [CDLL16，推论 2.6]。特别地，$G^n(E)$ 是闭群，从而 $G(E)$ 是闭群。

正如本节引言中所述，“满足经典链式法则”这一概念可以通过对洗牌泛函进行检验来编码。现在我们将这一陈述表述得更加精确。

定义 2.19（洗牌积，参见例如 [LCL07] 第 2.2.3 节）。设 F 为一个向量空间。那么，对于每个 $n, m \in \mathbb{N}$，我们定义洗牌积 $\sqcup\!\sqcup\colon F^{\otimes_a n} \times F^{\otimes_a m} \to F^{\otimes_a (n+m)}$ 如下

$$\mathbf{y} \sqcup\!\sqcup \mathbf{y}' \coloneqq \sum_{\sigma \in \mathrm{Sh}(n,m)} P_{\sigma^{-1}}(\mathbf{y} \otimes \mathbf{y}'),$$

其中 $\mathbf{y} \in F^{\otimes_a n}$, $\mathbf{y}' \in F^{\otimes_a m}$, P_σ 是定义 A.12 中定义的置换映射，而 $\mathrm{Sh}(n, m)$ 是所有 (n, m)-洗牌置换的集合，也就是所有满足$\sigma(1) < \ldots < \sigma(n)$ 和 $\sigma(n+1) < \ldots < \sigma(n+m)$ 的 $\{1, \ldots, n+m\}$ 的置换 σ。注意，洗牌积可扩展为双线性映射 $\sqcup\!\sqcup\colon T_a(F) \times T_a(F) \to T_a(F)$。

注记 2.20（参见 [CGSF23] 中的定义 2.2）。 洗牌积的另一种等价定义是通过归纳给出的：首先，对于 $c, c' \in \mathbb{R}, \mathbf{y} \in^{\otimes_a n}, n \in \mathbb{N}$，我们设

$$c \sqcup\!\sqcup c' := cc', \qquad \mathbf{y} \sqcup\!\sqcup c = c \sqcup\!\sqcup \mathbf{y} := c\mathbf{y}.$$

接下来，对于 $\mathbf{y}_1 \in F^{\otimes_a n}$，$\mathbf{y}_1' \in F^{\otimes_a m}$，$y_2$，$y_2' \in F$，$n$，$m \in \mathbb{N}$，我们定义

$$(\mathbf{y}_1 \otimes y_2) \sqcup\!\sqcup (\mathbf{y}_1' \otimes y_2') := ((\mathbf{y}_1 \otimes y_2) \sqcup\!\sqcup \mathbf{y}_1') \otimes y_2' + (\mathbf{y}_1 \sqcup\!\sqcup (\mathbf{y}_1' \otimes y_2')) \otimes y_2. \tag{16}$$

通过归纳法和多线性延拓，这些规则定义了洗牌积 $\sqcup\!\sqcup$：$F^{\otimes_a n} \times_{F^{\otimes_a m}} \to F^{\otimes_a (n+m)}$，对所有 n，$m \in \mathbb{N}$均成立。

洗牌积使我们能够定义一类称为弱类群似的元素。当 E 是有限维时，群样与弱类群似这两个概念相同（这称为陈定理），因此文献中其他地方并未使用“弱类群似”这一术语。在无限维情形下，这些概念通常是否相同尚不明确，但命题 2.22 给出了二者相同的条件。

定义 2.21（弱群状元素，参见 [LCL07]中的定义 2.18）。 设 E 是一个实巴拿赫空间，且 $\{\|\cdot\|_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ 是 E的一个可容许张量范数族。于是，我们将弱群状元素空间 $G_w(E)$定义为满足下述条件的$\mathbf{x} \in T((E))$ 的集合

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}' \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \sqcup\!\sqcup \mathbf{y}' \rangle, \tag{17}$$

对于所有 $\mathbf{y}$，$\mathbf{y}' \in T_a(E^*)$。类似地，对于 $n \in \mathbb{N}$，我们将 $G_w^{(n)}(E)$ 定义为满足方程（17）的元素 $\mathbf{x} \in T^{(n)}(E)$ 的集合，其中方程（17）对所有满足 $\deg(\mathbf{y}) + \deg(\mathbf{y}') \le n$ 的 $\mathbf{y}$，$\mathbf{y}' \in T^{(n)}(E)$ 均成立；这里 $\deg(\mathbf{z})$ 表示$\mathbf{z}$中非零项的最高阶。

命题 2.22。设 E 是实巴拿赫空间，$\{\|\cdot\|_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ 是 E 的可容许张量范数族。则 $G(E) \subseteq G_w(E)$，并且对于任意 $n \in \mathbb{N}$，$G^{(n)}(E) \subseteq G_w^{(n)}(E)$。此外，若 E 具有逼近性质，且 $E^{\otimes n}$ 上的范数是强一致交叉范数，则有等式

$$G_w(E) = G(E),$$

类似地，对于任意 $n \in \mathbb{N}$，$G^{(n)}(E) = G_w^{(n)}(E)$。

证明。 参见附录 D。 □

注 2.23. 并非无穷维中的所有类群元素都能像有限维情形那样表示为连续有限变差路径的提升。因此，Carnot–Carath´eodory 度量并非对所有类群元素都是有限的。更多细节请读者参阅 [GNS22]。

在识别出类群元素之后，我们可以定义弱几何粗糙路径。

定义 2.24（弱几何粗糙路径，参见例如 [LCL07]中的定义 3.14）. 设 E为实巴拿赫空间，设 $\{\|\cdot\|_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ 为 E的可容许张量范数族，设$n \in \mathbb{N}$，并设 $\alpha \in (0, 1]$。则弱几何粗糙路径 空间 $\mathscr{C}^{\alpha}_{,g}{}^{n}([0,T]; E)$ 是乘性泛函 $\mathbf{x} \in \mathscr{C}^{\alpha,n}([0,T]; E)$ 的集合，使得对所有 $s, t \in [0,T]$，我们有$\mathbf{x}_{s,t} \in G^{(n)}(E)$（参见定义 2.17）。若 $n = \lfloor 1/\alpha \rfloor$，我们去掉 n，并将该空间记为 $\mathscr{C}^{\alpha}_g([0,T]; E)$

弱几何粗糙路径的 Lyons 提升 S^n（见定义 2.12）仍是弱几何的，这一点在 [CDLL16 的推论 3.9]中得到证明：

定理 2.25（[CDLL16]中的推论 3.9）。 设 E 为实巴拿赫空间，$\{\|\cdot\|_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$为 E的可容许张量范数族，$\alpha \in (0, 1]$ 且 $n \in \mathbb{N}$、$n \ge \lfloor 1/\alpha \rfloor$。那么，*Lyons* 提升 S^n 将弱几何粗糙路径映射为弱几何粗糙路径：

$$S^n(\mathscr{C}^{\alpha}_g([0,T]; E)) \subseteq \mathscr{C}^{\alpha,n}_g([0,T]; E).$$

2.5. **时间扩展粗糙路径**。 如第 2.3 节末尾所述，路径的签名包含了乘性泛函的大部分相关信息，但并未完整描述它，因为它无法区分所谓的树状等价路径。在 [CGSF23] 中，时间扩展签名被用来解决这一问题（参见 [CGSF23]中的引理 2.6）。其思路是，将粗糙路径 $\mathbf{x}$ 及其对应路径 $t \mapsto x(t)$ 扩展为粗糙路径 $\tilde{\mathbf{x}}$，其对应路径为 $t \mapsto (t, x(t))$，见下文命题 2.29。这种时间扩展粗糙路径的签名是对该路径的完整刻画，见下文命题 2.30。换言之，映射 $\mathbf{x} \mapsto S(\tilde{\mathbf{x}})$ 是单射。为简便起见，我们只考虑 $\alpha > \frac{1}{3}$ 上具有 α-Hölder 正则性的乘性泛函。

–

巴拿赫空间上的粗糙路径的时间延拓本身也是取值于 $\mathbb{R} \oplus E$ 中的粗糙路径；后者在赋予例如范数 E 后是一个巴拿赫空间

$$|||(t,x)||| = |||t,x|||_1 := \left(|t|^2 + \|x\|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (t,x) \in \mathbb{R} \oplus E. \tag{18}$$

因此，为了定义这样的时间延拓，我们还需要 $\mathbb{R} \oplus E$ 上的可容许张量范数族$\{|||\cdot|||_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$。此外，这两个张量范数族必须满足以下兼容性条件：

假设 2.26. 设 E 是一个实巴拿赫空间，且 $\{\|\cdot\|_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ 是 E 的可容许张量范数族。设 $\mathbb{R} \oplus E$ 是赋予范数 (18) 的巴拿赫空间，且$\{|||\cdot|||_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ 是 E 的可容许张量范数族。设 $j\colon (\mathbb{R} \oplus E) \otimes_a (\mathbb{R} \oplus E) \to \mathbb{R} \oplus E \oplus E \oplus (E \otimes_a E)$ 定义为 $j((t,x) \otimes (s,y)) = (ts, ty, sx, x \otimes y)$，其中 $t, s \in \mathbb{R}$ 和 $x, y \in E$（并通过线性性将其延拓至整个定义域）。假设 j 可延拓为一个同胚$j\colon (\mathbb{R} \oplus E) \otimes (\mathbb{R} \oplus E) \to \mathbb{R} \oplus E \oplus E \oplus (E \otimes E)$.

注记 2.27。 由于我们正在处理 $\alpha > \frac{1}{3}$，因此只需要 $\|\cdot\|_1$、$\|\cdot\|_2$ 和 $|||\cdot|||_2$ 的相容性；对于 $\alpha \le \frac{1}{3}$，则需要对范数 $\|\cdot\|_1$、……、$\|\cdot\|_{\lfloor 1/\alpha \rfloor}$ 和 $|||\cdot|||_2$、……、$|||\cdot|||_{\lfloor 1/\alpha \rfloor}$ 给出类似的相容性陈述。

遗憾的是，无法显而易见地从 E 上的一族张量范数，以规范方式构造出 $\mathbb{R} \oplus E$ 上的一族相容张量范数，并保证其保留强一致交叉范数性质；而该性质在定理 3.6 等结果中是必需的，参见 E.1 节。不过，特别重要的那些张量范数满足所需的相容条件：

引理 2.28。 设 E 是一个实巴拿赫空间，并在 $\mathbb{R} \oplus E$ 上赋予范数 (18)。那么，若 E 和 $\mathbb{R} \oplus E$ 上的张量范数族均由射影 *[单射]*张量范数给出，则假设 *2.26* 成立。此外，若 E 是希尔伯特空间，且 E 和 $\mathbb{R} \oplus E$ 上的张量范数族均由希尔伯特张量范数给出，则假设 *2.26* 也成立。

证明见 E.2 节。以下命题保证可以构造时间延拓粗糙路径：

命题 2.29 (时间扩展粗糙路径，参见 [CGSF23])。 设 $\frac{1}{3} < \alpha \le 1$，并且假设 *2.26* 成立。那么对于任意 $\mathbf{x} \in \mathscr{C}^\alpha([0,T];\ E)$（其中我们在 E 的张量积上赋予 $\{\|\cdot\|_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$），可以定义时间延拓粗糙路径 $\hat{\mathbf{x}}_{s,t} \in \mathscr{C}^\alpha([0,T];\ \mathbb{R} \oplus E)$（其中我们在 $\mathbb{R} \oplus E$ 的张量积上赋予 $\{|||\cdot|||_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$），使得对于 π，自然投影（由假设 *2.26* 可知其存在）

$$\pi : (\mathbb{R} \oplus E, (\mathbb{R} \oplus E)^{\otimes 2}) \to (E, E^{\otimes 2}),$$

并且对于任意 $s, t \in [0,T]$，我们有

$$\pi(\hat{\mathbf{x}}_{s,t}) = \mathbf{x}_{s,t},$$

and

$$\langle \hat{\mathbf{x}}_{s,t}, (1,0) \rangle = t - s,$$

其中，我们以显然的方式将 $(1,0)$ 解释为 $(\mathbb{R}\oplus E)^*$ 中的一个元素。此外，存在一个常数 $C\in(0,\infty)$，它仅依赖于 T 和 α，使得

$$\|\mathbf{x}_{s,t}\|_{\mathscr{C}^\alpha}\le\|\hat{\mathbf{x}}_{s,t}\|_{\mathscr{C}^\alpha}\le C\max(\|\mathbf{x}_{s,t}\|_{\mathscr{C}^\alpha},1). \tag{19}$$

证明。对于 $\hat{\mathbf{x}}$ 的一阶分量，我们令

$$\hat{\mathbf{x}}^{(1)}_{s,t}:=(t-s,\mathbf{x}_{s,t}).$$

对于第二分量，注意到根据 [LCL07，定理 1.16]，，Young积分

$$\int_s^t(u-s)dx_u\quad\text{and}\quad\int_s^t(x_u-x_s)du,\quad s,t\in[0,T], \tag{20}$$

是良定义的，而且有界于 $C(t-s)^{1+\alpha}$，其中某个 $C>0$ 仅依赖于α 和 T。因此，我们令

$$\hat{\mathbf{x}}^{(2)}_{s,t}=\left(\tfrac{1}{2}(t-s)^2,\int_s^t(u-s)dx_u,\int_s^t(x_u-x_s)du,\mathbf{x}^{(2)}_{s,t}\right)\quad s,t\in[0,T],$$

根据假设 2.26，这可以解释为一个取值于 $(\mathbb{R}\oplus E)\otimes(\mathbb{R}\oplus E)$ 的过程；此外，界 (19) 显然成立。最后，注意到映射 $\hat{\mathbf{x}}:\ [0,T]^2\to T^{(2)}(E)$ 是一个乘性泛函，这是 Young 积分可加性的结果。□

下面的命题保证，时间延拓粗糙路径的签名（见定义 2.14）能够唯一确定该路径。我们给出有限维路径的相应结果（[CGSF23，引理 2.6]）的一种替代证明；事实上，若要将该证明推广到无限维情形，就需要假设 $\bigotimes_{j=1}^{n}{}_a E^*$ 在$E^{\otimes n}$中区分点 $n\in\mathbb{N}$。我们的证明依赖于这样一个事实：粗糙路径的签名平凡，当且仅当它是树状的 [HL10，BGLY16]。

命题 2.30。设 E 为实巴拿赫空间，$\{\|\cdot\|_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ 为 E的可容许张量范数族。进一步假设，对于所有 $n,m\in\mathbb{N}$，$\|\cdot\|_{m+n}$ 相对于 $E^{\otimes m}\otimes_a E^{\otimes n}$ 是合理交叉范数（见定义 A.6）。设 $0<\alpha\le 1$，$\phi\in E^*$，并令 A 为 $\mathscr{C}_g^\alpha([0,T];\ E)$ 的任意子集，使得对于所有 $s,t\in[0,T]$ 以及 $\mathbf{x}\in A$，均有

$$\langle\mathbf{x}_{s,t},\phi\rangle=t-s. \tag{21}$$

那么对于 $\mathbf{x},\mathbf{x}'\in A$，有 $S(\mathbf{x})_{0,T}=S(\mathbf{x}')_{0,T}$ 当且仅当 $\mathbf{x}=\mathbf{x}'$。

证明。取任意两个元素 $\mathbf{x},\mathbf{x}'\in A$，满足 $S(\mathbf{x})_{0,T}=S(\mathbf{x}')_{0,T}$，并定义 $\mathbf{z}\in\mathscr{C}_g^\alpha([0,2T];\ E)$，使得 $\mathbf{z}=\pi_{\lfloor 1/\alpha\rfloor}\tilde{\mathbf{z}}$，其中 $\pi_{\lfloor 1/\alpha\rfloor}:\ T((E))\to T^{\lfloor\frac{1}{\alpha}\rfloor}(E)$ 是自然投影，并且

$$\tilde{\mathbf{z}}_{0,t}=\begin{cases}S(\mathbf{x})_{0,t}, & t\in[0,T];\\ S(\mathbf{x})_{0,T}\hat{\otimes}S(\mathbf{x}')_{T,2T-t}, & t\in(T,2T],\end{cases}$$

根据陈恒等式，这完全确定了 $(\mathbf{z}_{s,t})_{s,t\in[0,T]}$。由注 2.18 可知，$\mathbf{z}$ 是弱几何的，而 $\mathbf{z}$ 的 Hölder 正则性也很容易验证。根据 Lyons 提升的唯一性（见定理 2.12），可类似地得到 $S(\mathbf{z})_{0,t}=\hat{\mathbf{z}}_{0,t}$，对所有 $t\in[0.2T]$均成立。

特别地，有 $S(\mathbf{z})_{0,2T}=\mathbf{1}$。由 [BGLY16，第 1.1] 定理可知，$\mathbf{z}$ 是树状的，即存在一个 $\mathbb{R}$-树 τ以及连续映射 $\varphi:\ [0,2T]\to\tau$，$\psi:\ \tau\to T^{(\lfloor 1/\alpha\rfloor)}(E)$，使得

$$\mathbf{z}_{0,t}=(\psi\circ\varphi)(t),\quad t\in[0,2T]. \tag{22}$$

事实上，τ 是一个 $\mathbb{R}$-树，这尤其意味着（参见 [Bes01，定义 2.1]），如果 $\varphi|_{[0,T]}$ 是一个嵌入（即单射），那么 $\varphi([0,T])\subseteq\varphi([T,2T])$（因为 $\{\varphi(0)\ \varphi(T)\}\subseteq\varphi([T,2T])$）。由（21）、$\mathbf{z}_{0,t}=\mathbf{x}_{0,t}$ 对 $t\in[0,T]$成立这一事实，以及（22），可知 $\varphi|_{[0,T]}$是一个嵌入。

现在我们将证明，如果$\mathbf{x} \neq \mathbf{x}'$，那么 $\varphi([0,T]) \not\subseteq \varphi([T,2T])$，由此我们得出$\mathbf{x} = \mathbf{x}'$。

事实上，若 $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}'$，则（再次由陈恒等式以及 $\mathbf{x}_{0,T} = \mathbf{x}'_{0,T}$ 这一事实）存在 $t \in (0,T)$，使得 $\mathbf{x}_{0,t} \neq \mathbf{x}'_{0,t}$。此外，由方程（21），对于所有满足 $s \neq t$ 的 $s \in [0,T]$，我们有 $\mathbf{x}_{0,t} \neq \mathbf{x}'_{0,s}$。特别地，对于所有 $s \in [0,T]$，$\mathbf{x}_{t,T} \hat{\otimes} \mathbf{x}'_{T,s} \neq \mathbf{1}$，由此可得，对于所有 $s \in [T,2T]$，我们有

$$\mathbf{z}_{0,s} = \mathbf{x}_{0,t} \hat{\otimes} \mathbf{x}_{t,T} \hat{\otimes} \mathbf{x}'_{T,2T-s} \neq \mathbf{x}_{0,t} = \mathbf{z}_{0,t}. \tag{23}$$

特别地，

$$\varphi(t) \neq \varphi(s), \quad s \in [T,2T], \tag{24}$$

因此 $\varphi([0,T]) \not\subseteq \varphi([T,2T])$。 □

3. Main results: universal approximation theorems for Banach space valued geometric rough paths

上一节已经介绍了所有必要概念，现在我们可以阐述主要结果：关于弱几何乘法函数 $\mathbf{x} \in \mathscr{C}_g^\alpha([0,T]; E)$ 的通用逼近定理，其中 E 是巴拿赫空间。具体而言，在第 3.1 节中，我们为 $\mathscr{C}_g^\alpha([0,T]; E)$ 的紧子集建立一个抽象的通用逼近定理，见定理 3.4（此处的“紧”指的是一种尚待指定的拓扑！）。定理 3.4 本质上是斯通–魏尔斯特拉斯定理的直接推论。在第 3.2 节中，我们展示定理 3.4 如何导出关于 $\mathscr{C}_g^\alpha([0,T]; E)$ 中范数紧集的一致逼近的显式结果，见定理 3.6 和推论 3.8。在第 3.3 节中，我们再次运用定理 3.4，在 $\mathscr{C}^\alpha$ 的范数有界集上得到一个通用逼近定理（这些集合相对于类似弱*的拓扑是紧的），见下文的定理 3.16 和推论 3.17。需要注意的是，定理 3.4 和定理 3.6 的证明相对直接，而定理 3.16 的证明则需要用到第 4–6 节中给出的所有结果。

3.1. 基于斯通–魏尔斯特拉斯定理的几何粗糙路径抽象通用逼近定理。

我们首先回顾与本文设定相关的 Stone–Weierstrass 定理版本。注意，给定一个拓扑空间 (X, τ_X)，我们用 $C(X;\mathbb{R})$ 表示从X 到 $\mathbb{R}$ 的连续函数空间。

定义 3.1。 [点分离] 设 (X,τ_X) 是一个拓扑空间，且 $\mathscr{A} \subset C(X;\mathbb{R})$。那么，若对任意 $x, y \in X$，都存在 $a \in \mathscr{A}$ 使得$a(x) \neq a(y)$，则称 $\mathscr{A}$ 在 X 上是点分离的。

定义 3.2。 [处处非零] 设 (X,τ_X) 是一个拓扑空间，且 $\mathscr{A} \subset C(X;\mathbb{R})$。那么，若对每个 $x \in X$ 都存在 $a \in \mathscr{A}$ 使得 $a(x) \neq 0$，则称 $\mathscr{A}$ 是处处非零的。

定理 3.3（斯通–魏尔斯特拉斯，见 [Sto48]，，另见[CST26]中的定理 3.2）。 设(X,τ_X) 是一个紧豪斯多夫空间，且 $\mathscr{A}$ 是 $C(X;\mathbb{R})$ 的子代数。那么，如果且仅如果 $\mathscr{A}$ 点分离且处处非零，$\mathscr{A}$ 在 $C(X;\tau_X)$ 中稠密（关于一致收敛）。

斯通–魏尔斯特拉斯允许为带签名的粗糙路径上的通用逼近定理提供一种一般形式。更具体地说，我们取 X 为 $\mathscr{C}_g^\alpha([0,T]; E)$的某个子集，并假设该代数由签名上的线性函数组成；即，我们假设存在一个 $D \subseteq T_a(E^*)$，使得代数 $\mathscr{A}$ 由

$$\mathscr{A} = \left\{ \mathscr{C}_g^\alpha([0,T];E) \ni \mathbf{x} \mapsto \langle S(\mathbf{x})_{0,T}, l \rangle : l \in D \right\} \tag{25}$$

由于 $X \subseteq \mathscr{C}_g^\alpha([0,T]; E)$，根据定理 2.25 结合命题 2.22（另见定义 2.21 和 2.24），我们有

$$\langle S(\mathbf{x})_{0,T}, l \rangle \left\langle S(\mathbf{x})_{0,T}, l' \right\rangle = \left\langle S(\mathbf{x})_{0,T}, l \sqcup\!\sqcup l' \right\rangle.$$

因此，只要 D 是一个在洗牌积下封闭的子空间， $\mathscr{A}$ 确实是一个代数。我们得到以下抽象一致逼近定理：

定理 3.4。 设 E 为实巴拿赫空间， $\{\|\cdot\|_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ 为 E上的可容许张量范数族。设 τ为 $\mathscr{C}_g^\alpha([0,T];\ E)$上的豪斯多夫拓扑，且 K为一个 τ-紧集，使得 $S(\mathbf{x})_{0,T} \neq S(\mathbf{x}')_{0,T}$ 只要$\mathbf{x} \neq \mathbf{x}'$，其中$\mathbf{x}$、$\mathbf{x}' \in K$。此外，设 D 为 $T_a(E^*)$ 的一个子空间，并满足以下性质：

(1) $\mathbf{1} \in D$, *(2)* D 在 $T((E))$中分离点，*(3)* D 对洗牌积封闭，且 *(4)* 对任意 $l \in D$， $K \ni \mathbf{x} \mapsto \langle S(\mathbf{x})_{0,T}, l\rangle$ 是一个 τ-连续映射。

那么，对于任意的 τ连续函数 $f\colon \mathscr{C}_g^\alpha([0,T];\ E) \to \mathbb{R}$ 以及所有 $\epsilon > 0$，都存在 $l \in D$使得

$$\sup_{\mathbf{x}\in K} |\langle S(\mathbf{x})_{0,T}, l\rangle - f(\mathbf{x})| < \epsilon.$$

证明。 这由斯通–魏尔斯特拉斯 定理得出。事实上，我们取 K 为紧集，取 $\tau|_K$ 为拓扑；由于 τ 是豪斯多夫的，该拓扑也是豪斯多夫的。代数 $\mathscr{A}$ 由 (25) 给出；注意，上面的假设 (4) 意味着 $\mathscr{A} \subseteq C(K;\mathbb{R})$，而定理 3.4 之前的讨论表明 $\mathscr{A}$确实是一个代数。假设 D 在$T((E))$上点分离，且 K 的每个元素都有唯一签名，这意味着 $\mathscr{A}$在K上点分离。处处非零性质由 $\mathbf{1} \in D$这一事实保证；注意，对所有$\mathbf{x} \in \mathscr{C}_g^\alpha([0,T];\ E)$， $\langle S(\mathbf{x})_{0,T}, \mathbf{1}\rangle = 1$。因此，该断言确由 3.3 得出。□

注记 3.5. 在本文中，所考虑的签名上的线性泛函均来自 $T_a(E^*)$的一个子集，其中 E 是底层巴拿赫空间。理论上，也可以考虑 $T(E)^*$中的一般泛函；对于这些泛函，证明 $T((E))$中的分离点（见定理 3.4 的第 2 项）或许更容易。然而， $T(E)^*$ 中的一般元素并不容易识别或参数化；在应用中，最好只使用 $T_a(E^*)$中的元素。

3.2. **几何粗糙路径范数紧集上的通用逼近定理**。 我们对上一节所证明的抽象通用逼近定理的第一个应用，是在$\mathscr{C}_g^\alpha([0,T];\ E)$上采用范数拓扑，也就是说，采用由第 2.2 节中引入的度量 $\varrho_\alpha^{\mathrm{hom}}$ 所导出的拓扑。这与有限维情形中通常采用的方法一致，参见例如 [CGSF23、CPSF25、LNPA20b]。

关于下述定理中的假设：可容许张量范数族的定义见定义 2.1，强一致交叉范数的定义见定义 A.14。根据命题 A.18 和 A.22，回忆一下，单射范数、投影范数和希尔伯特张量范数各自都构成一个强一致交叉范数的可容许张量范数族。若考虑时间扩展路径，则满足签名 S 在 K 上分离点这一假设，见第 2.5 节。代数张量代数 $T_a(G)$定义于定义 2.9。

定理 *3.6.* 设 E 是一个具有逼近性质的实巴拿赫空间，并设$\{\|\cdot\|_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$是定义在 E上的可容许张量范数族，且这些范数还是强一致交叉范数。设 G是 E^*的范数稠密子空间。设 $0 < \alpha \leq 1$, $T > 0$，且 $K \subseteq \mathscr{C}_g^\alpha([0,T];\ E)$ 是 ϱ_α^{hom}-紧的，并假设 $S(x)_{0,T} \neq S(x')_{0,T}$ 只要 $x \neq x'$, $x, x' \in K$。那么，对于任意 ϱ_α^{hom}连续函数 $f\colon \mathscr{C}_g^\alpha([0,T];\ E) \to \mathbb{R}$ 以及所有 $\epsilon > 0$，存在 $l \in T_a(G)$，使得

$$\sup_{\mathbf{x}\in K} |\langle S(\mathbf{x})_{0,T}, l\rangle - f(\mathbf{x})| < \epsilon.$$

证明。 这是定理 3.4 的直接应用，其中 τ 取由 $\varrho_\alpha^{\mathrm{hom}}$和$D = T_a(G)$生成的拓扑。假设 E 具有逼近性质且张量范数族强一致，是为了证明 $T_a(G)$能够分离 $T((E))$ 中的点；事实上，这可由命题 C.5 和引理 C.1 与命题 A.11 结合推出。集合 $T_a(G)$ 关于洗牌积封闭，并且根据定义包含 1 （见定义 2.19）。此外，定理 2.12（以及我们具有一个可容许张量范数族这一事实）意味着，形如以下形式的函数

$$\mathscr{C}_g^\alpha([0,T];E) \ni \mathbf{x} \mapsto \langle S(\mathbf{x})_{0,T}, l\rangle$$

对于所有 $l \in T_a(G)$都是连续的；事实上，对于所有 $l \in T_a(G)$，存在一个 $n \in \mathbb{N}$ ，使得$l \in T_a^{(n)}(G)$，因此 $\langle S(\cdot)_{0,\,T},\ l\rangle = \langle S^n(\cdot)_{0,\,T},\ l\rangle$。因此，定理 3.4 的所有条件均得到满足，结论成立。□

备注 3.7。 在定理 3.6 中考虑一个范数稠密集 G ，而不是简单地取 $G = E^*$，具有实际优势。事实上，如果 E 是一个可分希尔伯特空间，且 $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}_{>0}}$ 是 E的标准正交基，我们可以简单地取 G 为该基的线性张成。因此，我们所有的线性泛函都是形如$e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_n}$、 $n \in \mathbb{N}_{>0}$的对象的有限线性组合。

尽管难以明确识别 $\varrho_\alpha^{\mathrm{hom}}$-紧子集 $\mathscr{C}_g^\alpha([0,T];\,E)$，但波兰空间上博雷尔测度的紧性使我们能够得到关于随机粗糙路径的以下逼近结论：

推论 3.8. 设 E 是具有逼近性质的实巴拿赫空间，且$\{\|\cdot\|_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$是定义在 E上的可容许张量范数族，并且这些范数还是强一致交叉范数；设 G 是 E^*的范数稠密子空间。此外，假设存在一个$\phi \in E^*$以及一个（博雷尔）可测集 $A \subseteq \mathscr{C}_g^\alpha([0,T];\ E)$使得

$$\forall\, \mathbf{x} \in A, \forall\, 0 \le s \le t \le T\colon \quad \langle \mathbf{x}_{s,t}, \phi\rangle = t - s. \tag{26}$$

设 $0 < \alpha \le 1$、 $T > 0$。设$(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$是一个概率空间，且 $\mathbf{X}\colon \Omega \to \mathscr{C}_g^\alpha([0,T];\ E)$是可测且取值于可分子空间的，并进一步假设 $\mathbb{P}(\mathbf{X} \in A) = 1$。那么，对于任意 $\varrho_\alpha^{\mathrm{hom}}$连续函数 $f\colon \mathscr{C}_g^\alpha([0,T];\ E) \to \mathbb{R}$ 以及所有 $\epsilon > 0$，都存在一个 $l \in T_a(G)$ 使得

$$\mathbb{P}(|\langle S(\mathbf{X})_{0,T}, l\rangle - f(\mathbf{X})| < \epsilon) \ge 1 - \epsilon.$$

证明。 不失一般性，我们可以假设对于所有 $\omega \in \Omega$，$\mathbf{X} \in A$ 。根据假设 (26) 和命题 2.30，当 $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}'$、$\mathbf{x},\mathbf{x}' \in A$时，有 $S(\mathbf{x}) \neq S(\mathbf{x}')$。由于$\mathbf{X}$ 的取值属于 $\mathscr{C}_g^\alpha([0,T];\ E)$ 的一个可分子集，我们可以假设其取值属于一个完备可分度量空间。根据普罗霍罗夫定理（参见 [Bog07，定理 8.6.2]），这意味着诱导测度是紧的。换言之，对于所有 $\epsilon > 0$，存在一个紧集 $K_\epsilon \subseteq \mathscr{C}_g^\alpha([0,T];\ E)$，使得 $\mathbb{P}(\mathbf{X} \in K_\epsilon) \ge 1 - \epsilon$。随后对该集合 K_ϵ 应用定理 3.6。□

注 3.9。 回顾一下，第 2.5 节中引入的时间延拓提供了一种构造满足假设 (26) 的路径的方法。关于$\mathbf{X}$取值为可分值这一假设：一种方法是在几何粗糙路径的框架下开展研究，即研究能够在 $\varrho_\alpha^{\mathrm{hom}}$度量下由提升可微路径逼近的路径；这一空间是可分的。 [GNS22] 证明，当 E 是希尔伯特空间时，只要 $\frac{1}{3} < \alpha' < \alpha$， $\mathscr{C}_g^\alpha([0,T];\ E)$ 就连续嵌入到 α'-H¨older 连续几何粗糙路径空间中。另一种方法是利用这样一个事实：只要 $\alpha > \alpha'$ 且 E 可分，H¨older 空间 $C_0^\alpha([0,T];\ E)$ 就是 $C_0^{\alpha'}([0,T];\ E)$ 的一个可分子集。

注3.10. 在定理 3.6 中，我们假设 K 中的每个元素都有唯一签名。另一种做法是考虑 K上的商拓扑，参见例如 [CS24，第 1 节4]，，其中等价类由具有相同签名的粗糙路径组成。只要函数将等价类中的所有元素映射到同一个对象，那么在所选拓扑下连续的函数也会在商拓扑下连续。

3.3. **范数有界几何粗糙路径的通用逼近定理**。 针对范数紧集的通用逼近定理（即上文的定理 3.6）的主要缺点是，难以明确识别范数紧集。特别是，定理 3.6 通常无法“普遍地”应用，例如应用于某一整类随机偏微分方程的解。为克服这一问题，我们考虑 $\mathscr{C}_g^\alpha([0,T];\,E)$ 上的弱*型拓扑，而不采用由 $\varrho_\alpha^{\mathrm{hom}}$诱导的拓扑，并利用巴拿赫-阿劳格鲁定理建立一个适用于范数有界集的通用逼近定理，见下文定理 3.16。不过，这里有一个小困难：由于对乘性泛函施加了代数结构，$\mathscr{C}^{\alpha,\,n}([0,T];\,E)$ 并非巴拿赫空间。然而，$\mathscr{C}^{\alpha,\,n}([0,T];\,E)$ 可以解释为 H¨older 空间 $C_0^\alpha([0,T];\,T^{(n)}(E))$（见下文命题 3.14 ）的一个子集。因此，我们可以考虑 $\mathscr{C}_g^\alpha([0,T];\,E)$ 从 $C_0^\alpha([0,T];\,T^{(n)}(E))$ 继承的拓扑，见下文定义 3.15。

要使这一方法奏效，我们需要 E 具有预对偶 F，并且需要在代数张量空间 $F^{\otimes_a n}$ $(n\in\mathbb{N}_{>0})$ 上定义与 $E^{\otimes_a n}$ 上的张量范数相协调的张量范数。具体而言，我们作如下假设：

设定 3.11。 设 E 是一个实巴拿赫空间，其预对偶为 F ，并设 $\{\|\cdot\|_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ 和$\{\|\cdot\|_n^*\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ 分别是定义在 E和 F上的容许张量范数族，使得对于每个 $n\in\mathbb{N}_{>0}$， $F^{\otimes n}$ 都是 $E^{\otimes n}$的预对偶。

我们指出两个符合设定 3.11 的例子：

例 3.12。 设 E 是一个实希尔伯特空间，因此根据里斯表示定理，我们可以将 E^* 与 E等同。令 $\|\cdot\|_n$ 和 $\|\cdot\|_n^*$ $(n\in\mathbb{N}_{>0})$ 均为希尔伯特张量范数（见 A.4 节）。命题 A.22 保证这些张量范数组成容许族。此外，由于 $E^{\otimes n}$ 是一个希尔伯特空间，我们可以将其与 $(E^{\otimes n})^*$等同。

例 3.13。 设 E 为实巴拿赫空间，其预对偶为 F，并假设 E 具有逼近性质和拉东–尼科迪姆性质（分别参见定义 A.24 和 A.25）。令 $\|\cdot\|_n$（ $E^{\otimes_a n}$上的范数， $n\in\mathbb{N}_{>0}$）为射影张量范数，令 $\|\cdot\|_n^*$（ $F^{\otimes_a n}$上的范数， $n\in\mathbb{N}_{>0}$）为内射张量范数（参见 A.3 节）。根据命题 A.18，这些张量范数族是容许的。由于 E 具有拉东–尼科迪姆性质且满足逼近性质，命题 A.27 表明 $F^{\otimes n}$ 是 $E^{\otimes n}$, $n\in\mathbb{N}$ 的预对偶。回顾一下，若 E 是可分的，则它具有拉东–尼科迪姆性质，参见命题 A.26。

命题 3.14。 设 E 是一个实巴拿赫空间，$\{\|\cdot\|_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ 是 E的一个可容许张量范数族，且 $0<\alpha\le 1$。那么存在一个（单射的）包含映射

$$i\colon \mathscr{C}^{\alpha,n}([0,T];E)\hookrightarrow C_0^\alpha([0,T];T^{(n)}(E)).$$

此外，存在 $C>0$ 使得

$$\|i(\mathbf{x})\|_{C^\alpha}\le C\big(\|\mathbf{x}\|_{\mathscr{C}^\alpha}+1\big)$$

证明推迟到第 5 节。注意，设定 3.11 和下文的定理 4.4 意味着 $C_0^\alpha([0,T];\,T^{(n)}(E))$ 有一个预对偶。正如我们刚刚所证明的，$\mathscr{C}^{\alpha,n}([0,T];\,E)$ 可以视为 $C_0^\alpha([0,T];\,T^{(n)}(E))$ 的一个子集，因此，$C_0^\alpha([0,T];\,T^{(n)}(E))$ 上的弱-* 拓扑在 $\mathscr{C}^{\alpha,n}([0,T];\,E)$ 上诱导出一个拓扑，我们称之为 i^*-拓扑：

定义 3.15 （i^* 拓扑）。假设设定 3.11，令 $0<\alpha\le 1$，并令 $n\in\mathbb{N}_{>0}$。那么，借助命题 3.14 中定义的包含映射 i，我们将 $\mathscr{C}^{\alpha,n}([0,T];\,E)$ 视为 $C_0^\alpha([0,T];\,T^{(n)}(E))$ 的一个子空间，并将 i^*拓扑定义为 $\mathscr{C}^{\alpha,n}([0,T];\,E)$ 上相对于 $C_0^\alpha([0,T];\,T^{(n)}(E))$ 上的弱-* 拓扑所诱导的子空间拓扑。等价地，我们将 i^*拓扑定义为由所有函数 $m\circ i$生成的初始拓扑，其中 m 属于 $C_0^\alpha($ $[0,T];\,T^{(n)}(E))$ 的预对偶空间。

i^*拓扑的主要优点是，$\{\mathbf{x} \in \mathscr{C}^\alpha([0,T];\, E) \mid \|\mathbf{x}\|_{\mathscr{C}^\alpha} \le R\}$在此拓扑下是紧的。不过，这也有代价：由于 i^* 拓扑弱于范数拓扑，i^*-连续函数的集合小于 $\varrho_\alpha^{\mathrm{hom}}$-连续函数的集合。例如，映射

$$\mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}^{(k)}\|_{0,T}, \tag{27}$$

对于任何 $1 \le k \le n$，都不是 i^* 连续的。下文的评注 3.19 和 5.1 为识别 i^*-连续函数提供了关键见解。

我们首先给出该拓扑下通用逼近定理的一个更一般版本，随后给出适用于第 2.5 节所提供的时间扩展设定的推论。

定理 *3.16*。假设设定 *3.11*，令 $0 < \alpha \le 1$、T、$R > 0$，并令 G 为 F 的范数稠密子集。令 A 为 $\{x \in \mathscr{C}_g^\alpha([0,T];\, E) \mid \|x\|_{\mathscr{C}^\alpha} \le R\}$ 的一个 i^* 闭子集，使得当 $x \neq x'$、x、$x' \in A$ 时，$S(x) \neq S(x')$。那么，对于每个 i^*-连续函数 $f\colon A \to \mathbb{R}$ 以及每个 $\epsilon > 0$，都存在 $l \in T_a(G)$，使得

$$\sup_{\mathbf{x} \in A} |\langle S(\mathbf{x})_{0,T}, l\rangle - f(\mathbf{x})| < \epsilon.$$

证明。本证明应用定理 3.4。事实上，首先注意到，由于 $F^{\otimes n}$ 是 $E^{\otimes n}$的预对偶空间，它能分离 $E^{\otimes n}$、$n \in \mathbb{N}_{>0}$中的点。因此，截断代数张量代数 $T_{(n)}(F)$能分离截断代数张量代数 $T_{(n)}(E)$、$n \in \mathbb{N}_{>0}$中的点。由于我们处理的是可容许张量范数族，命题 A.11 蕴含$T_{(n)a}(G)$在 $T_{(n)}(F)$中范数稠密。因此，引理 C.1 蕴含 $T_a^{(n)}(G)$能分离$T^{(n)}(E)$中的点。根据定义，集合 $T_a(G)$对洗牌积封闭，且包含$\mathbf{1}$ 。

i^* 拓扑是豪斯多夫的，因为命题 3.14 中定义的包含映射是单射。命题 5.3 蕴含 $\{\mathbf{x} \in \mathscr{C}^\alpha([0,T];\, E) \mid \|\mathbf{x}\|_{\mathscr{C}^\alpha} \le R\}$是 i^*-紧的；又由于 A是此紧集的 i^* 闭子集，我们得出 A 是 i^*-紧的。命题 6.1 蕴含这些线性泛函是连续的；事实上，对于所有 $l \in T_a(G)$，存在一个 $n \in \mathbb{N}$使得 $l \in T_a^{(n)}(G)$，因此 $\langle S(\cdot)_{0,\,T},\ l\rangle = \langle S^n(\cdot)_{0,\,T},\ l\rangle$。因此，定理 3.4 的假设均得到满足，结论随即成立。□

结合定理 3.16 与命题 2.30，可得到以下推论。第 (2.5) 节中引入的时间扩展路径，提供了一种确保我们感兴趣的对象属于集合 A的方法。

推论 3.17. 假设设定 *3.11*，令 $0 < \alpha \le 1$, $T, R > 0$，并令 G 为 F的范数稠密子集。令 $\phi \in F$ 并考虑

$$A := \left\{\mathbf{x} \in \mathscr{C}_g^\alpha([0,T]; E) \;\middle|\; \langle \mathbf{x}_{\mathbf{s},\mathbf{t}}, \phi\rangle = t - s \text{ and } \|\mathbf{x}\|_{\mathscr{C}^\alpha} \le R\right\}.$$

那么，对于任意关于 i^* 拓扑连续的函数 $f\colon A \to \mathbb{R}$ 以及任意$\epsilon > 0$，存在 $l \in T_a(G)$ 使得

$$\sup_{\mathbf{x} \in A} |\langle S(\mathbf{x})_{0,T}, l\rangle - f(\mathbf{x})| < \epsilon.$$

证明. 由定理 3.16 和命题 2.30 可知，只需证明我们定义的集合 A是 i^* 闭的。为此，取 A中任意一个网 $\{\mathbf{x}_\lambda\}_{\lambda \in I}$，它收敛到$\{\mathbf{x}([0,T];\, E) \mid \|\mathbf{x}\|_{\mathscr{C}^\alpha} \le R\}$中的某个 $\mathbf{x}$ 。将 $t \mapsto \mathbf{x}_{0,t}$ 记作 $t \mapsto \mathbf{x}(t)$，利用注 5.1 给出的收敛刻画，即可得出 A确实是闭的。□

我们得到如下推论：对于 $\mathscr{C}_g^\alpha([0,T];\, E)$ 中期望有界的随机过程集，结论如下。这与推论 3.8 形成对照，后者适用于单个过程（且仅推广至紧过程集）。

推论 3.18。 假设设定 *3.11*，令 $0 < \alpha \leq 1, T > 0$，并令 G 为 F 的范数稠密子集。令 $\phi \in F$ 并考虑

$$A := \left\{ \mathbf{x} \in \mathscr{C}_g^\alpha([0,T]; E) \;\middle|\; \langle \mathbf{x}_{\mathbf{s},\mathbf{t}}, \phi \rangle = t - s \text{ and } \|\mathbf{x}\|_{\mathscr{C}^\alpha} \leq R \right\}.$$

设 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ 为一个概率空间，设 J 为一个指标集，并且对所有 $j \in J$，令 $\mathbf{X}_j \colon \Omega \to \mathscr{C}_g^\alpha([0,T]; E)$ 可测，并假设

$$\forall\, j \in J \colon \mathbb{P}(\mathbf{X}_j \in A) = 1 \qquad \text{and} \qquad \sup_{j \in J} \mathbb{E}\|\mathbf{X}_j\|_{\mathscr{C}^\alpha} =: M < \infty. \tag{28}$$

那么，对于任意函数 $f \colon \mathscr{C}_g^\alpha([0,T]; E) \to \mathbb{R}$，只要 $f|_{\{\mathbf{x} \in \mathscr{C}^\alpha([0,T];E) | \|\mathbf{x}\|_{\mathscr{C}^\alpha} \leq R\}}$ 对所有 $R > 0$ 都连续，并且对于任意 $\epsilon > 0$，都存在 $l \in T_a(G)$ 使得

$$\sup_{j \in J} \mathbb{P}(|\langle S(\mathbf{X}_j)_{0,T}, l \rangle - f(\mathbf{X}_j)| > \epsilon) < 1 - \epsilon.$$

证明。 由马尔可夫不等式可得 $\sup_{j \in J} \mathbb{P}(\|\mathbf{X}_j\|_{\mathscr{C}^\alpha} > M/\epsilon) \leq \epsilon$。应用推论 3.17 并取 $R = M/\epsilon$，即可得到所需结果。□

注 3.19。 由于弱-* 拓扑通常不可度量化，在证明连续性时，一般需要考虑网而非序列。不过请记住，若 X 是可分巴拿赫空间，则 X^* 上的弱-* 拓扑在范数有界集上可度量化。由注 4.3 可知，只要 F可分， $C_0^\alpha([0,T], F)$ 的预对偶便可分；在这种情况下， i^* 拓扑在范数有界集上可度量化。

4. The Banach space $C_0^\alpha([0,T]; E)$ and its predual

回顾一下， $C_0^\alpha([0,T]; E)$（其中 E为巴拿赫空间）是从 0 开始的 α-H¨older 连续 E值函数空间，见第 2.2 节。根据例如 [Wea18 的命题 2.3]，（其证明同样适用于空间 $C_0^\alpha([0,T]; E)$），我们知道，只要 E 是巴拿赫空间，赋予 $C_0^\alpha([0,T]; E)$ α-H¨older 系数 $\|\cdot\|_{C^\alpha}$ （见式 (9)）后，它就是一个巴拿赫空间。本节中，我们将显式表示 $C_0^\alpha([0,T]; E)$ 的预对偶，条件是 E 具有预对偶；我们构造的空间称为 Arens–Eells 空间，其构造直接改编自 [Wea18 第 3.1], 节，其中给出了 $C_0^\alpha([0,T]; \mathbb{R})$ 的构造。在本节中， E 始终是一个具有预对偶的实巴拿赫空间，该预对偶记为 F。

由于 $C_0^\alpha([0,T]; E)$ 是一个由区间 $[0,T]$ 到 E上的函数构成的空间，因此可以预期，其预对偶可表示为某个由 $[0,T]$ 到 F上的函数构成的空间。构造的第一步是确定一些“初等”函数。接下来，我们在这些初等函数上定义一个范数，使其与 α-H¨older 范数配合良好；然后，对初等函数集合关于此范数取完备化，即可得到所需的预对偶表示。

定义 4.1。 设 F为一个巴拿赫空间，且 $T > 0$。那么，分子 $m \colon [0,T] \to F$是一个具有有限支撑的函数，满足

$$\sum_{t_i \in \operatorname{supp} m} m(t_i) = 0.$$

所有分子的空间记作 $M([0,T]; F)$。对于 $t, s \in [0,T]$ 和 $y \in F$，我们定义$m_{t,s}^y \in M([0,T]; F)$ 为

$$m_{t,s}^y = (\mathbf{1}_{\{t\}} - \mathbf{1}_{\{s\}})y. \tag{29}$$

集合初等分子定义如下

$$EM([0,T]; F) = \{m_{t,s}^y \colon s, t \in [0,T],\, y \in F,\, \|y\|^* = 1\}. \tag{30}$$

任意分子都可以表示为初等分子的线性组合，但这种表示并不唯一。事实上，对于所有 $m \in M([0,T];\, F)$，我们都有

$$m = \sum_{t_i \in \operatorname{supp} m} m_{t_i,0}^{m(t_i)} = \sum_{t_i \in \operatorname{supp} m} \|m(t_i)\|\, m_{t_i,0}^{\|m(t_i)\|^{-1} m(t_i)}.$$

在右侧插入任意 $t \in (0,\ T]$ 即可立即得到 $m(t)$。在右侧插入 $t = 0$ 得到 $-\sum_{t_i \in (\text{支集 } m \setminus \{0\})} m(t_i)$，根据 $\sum_{t_i \in \text{支集}\, m} m(t) = 0$，它等于 $m(0)$。

在定义 $M([0,T];\, F)$ 上的范数之前，我们应牢记，$C_0^\alpha([0,T];\, E)$ 应为对偶空间。让 $x \in C_0^\alpha([0,T];\, E)$ 作用于分子 m 的一种自然方式是

$$\langle x, m \rangle := \sum_{t \in [0,T]} \langle x(t), m(t) \rangle \,. \tag{31}$$

注意，若 $m = \sum_{i=1}^n a_i m_{t_i,\ s_i}^{y_i}$，且 $m_{t_i,\ s_i}^{y_i} \in EM([0,T];\, F)$，则

$$|\langle x, m \rangle| \le \sum_{i=1}^n |a_i \langle x(t_i) - x(s_i), y_i \rangle| \le \sum_{i=1}^n |a_i| \|x(t_i) - x(s_i)\| \le \|x\|_{C^\alpha} \sum_{i=1}^n |a_i| |t_i - s_i|^\alpha. \tag{32}$$

这意味着，如果我们希望 α-H¨older 范数对应于对偶范数，就应定义如下范数。

命题/定义 4.2. 设 F 是一个巴拿赫空间，设 $T > 0$ 且设 $0 < \alpha \le 1$。则映射 $\|\cdot\|_{Æ,\alpha} \colon M([0,T];\, F) \to [0,\infty)$ 定义如下：

$$\begin{aligned} &\|m\|_{Æ,\alpha} \\ &= \inf \left\{ \sum_{i=1}^n |a_i| |t_i - s_i|^\alpha \;\middle|\; m = \sum_{i=1}^n a_i m_{t_i,s_i}^{y_i} \text{ and } m_{t_i,s_i}^{y_i} \in EM([0,T];F) \text{ for all } 1 \le i \le n \right\} \end{aligned}$$

定义了一个范数。此范数称为Arens–Eells 范数，通过在此范数下对 $M([0,T];\, F)$ 取完备化而得到的巴拿赫空间$Æ_\alpha([0,T];\, F)$称为Arens–Eells 空间。

证明。首先，Arens–Eells 范数定义良好，因为任意分子都可以写成初等分子的线性组合。三角不等式和齐次性直接由定义得出，因此我们只需证明当 $m \neq 0$时，$\|m\|_{Æ,\alpha} \neq 0$ 。

取 $m \in M([0,T];\, F)$ 使得 $m \neq 0$。方程 (32) 表明，对于任意 $x \in C_0^\alpha([0,T];\, E)$

$$|\langle x, m \rangle| \le \|x\|_{C^\alpha} \|m\|_{Æ,\alpha}.$$

因此，只需找到 $x \in C_0^\alpha([0,T];\, E)$，使得 $\langle x, m \rangle \neq 0$。分子 m 具有有限支撑，因此存在开区间 $(r,s) \subset [0,T]$ 恰好包含支撑中的一个元素 t。设 $g \in E$ 使得 $\langle g, m(t) \rangle \neq 0$，并设 $f \in C^\infty([0,T];\, \mathbb{R})$ 使得 $f(t) = 1$且 $\operatorname{supp}(f) \subseteq (r,s)$。则 $\langle gf, m \rangle = \langle g, m(t) \rangle \neq 0$，从而得证。□

注记 4.3. 注意，只要 F可分，空间 $Æ_\alpha([0,T];\, F)$ 就可分。事实上，设 F 可分，并令 $A \subseteq F$ 为 F中的可数稠密集。令 $D = \{k2^{-j}T \colon j \in \mathbb{N},\, 1 \le k \le 2^j\}$。考虑集合

$$\mathscr{D} = \left\{ \sum_{k=1}^n x_k \mathbf{1}_{\{s_k\}} \colon n \in \mathbb{N},\, x_1, \dots, x_n \in A,\, s_1, \dots, s_n \in D,\, \sum_{k=1}^n x_n = 0 \right\}. \tag{33}$$

显然，$\mathscr{D}$是可数的；我们进一步声称，$\mathscr{D}$在 $M([0,T];\, F)$中稠密。根据 Arens–Eells 空间的定义，这意味着 $\mathscr{D}$ 在 $Æ_\alpha([0,T];\, F)$中稠密。为验证这一点，设 $m \in M$；对于某个 $y_1,\ m = \sum_{k=1}^n y_k \mathbf{1}_{\{t_k\}}, \dots, y_n \in F$且 $t_1, \dots, t_n \in [0,T]$。给定 $\epsilon > 0$，取 $x_1, \dots, x_{n-1} \in D$，使得对所有 $1 \le i \le n-1$都有 $\|x_i - y_i\| \le \epsilon/2n$。令

$x_n = -\sum_{i=1}^{n-1} x_i$。设 $s_1, \dots, s_n$ 满足 $|s_i - t_i| \le (2\sum_{i=1}^n \|y_i\|)^{-1}\epsilon$。最后，定义 $m_\epsilon \in \mathscr{D}$ 为 $m_\epsilon = \sum_{k=1}^n x_i \mathbf{1}_{\{s_i\}}$。注意到

$$m - m_\epsilon = \sum_{k=1}^{n-1}(x_i - y_i)(\mathbf{1}_{\{t_i\}} - \mathbf{1}_{\{t_n\}}) + \sum_{k=1}^{n} y_i(\mathbf{1}_{\{t_i\}} - \mathbf{1}_{\{s_i\}})$$

容易验证 $\|m - m_\epsilon\|_{Æ,\alpha} \le \epsilon(T^\alpha + 1)$。

既然我们已经定义了 Arens–Eells 空间，我们希望证明其对偶空间是 $C_0^\alpha([0,T];\, E)$。我们还希望理解由 Arens–Eells 空间生成的 $C_0^\alpha([0,T];\, E)$ 上的弱* 拓扑。结果表明，在范数有界子集上，这对应于逐点弱* 收敛。这些内容都总结在下述定理中。

定理 4.4. 设 E 为具有预对偶 F 的实巴拿赫空间，并设 $0 < \alpha \le 1$。则 $C_0^\alpha([0,T];\, E)$ 同构于 $Æ_\alpha([0,T];\, F)$ 的对偶空间。此外，$C_0^\alpha([0,T];\, E)$ 中的 α-*H¨older* 范数有界网 $\{x_\lambda\}_{\lambda\in I}$ 在弱 -* 拓扑下收敛到 x，当且仅当对所有 $t \in [0,T]$，$x_\lambda(t) \overset{*}{\rightharpoonup} x(t)$。

证明。**第 1 部分：证明** $C_0^\alpha([0,T];\ E)$ **与** $Æ_\alpha([0,T];\ F)$ 的对偶空间同构。我们将给出映射

$$L_1 \in L((Æ_\alpha([0,T];F))^*, C_0^\alpha([0,T];E)) \text{ and } L_2 \in L(C_0^\alpha([0,T];E), (Æ_\alpha([0,T];F))^*),$$

然后证明 $L_1L_2 = \mathrm{id}_{C_0^\alpha([0,T];\ E)}$ 而 $L_2L_1 = \mathrm{id}_{(Æ_\alpha([0,T];\ F))^*}$。

我们首先注意到，对于 $t \in [0,T]$ 和 $\phi \in (Æ_\alpha([0,T];\, F))^*$，映射

$$F \ni y \mapsto \left\langle \phi, m_{t,0}^y \right\rangle$$

是 E 的一个元素（将其解释为 F^*）。由以下事实：$m_t^{y+y',\ 0} = m_t^{y,\ 0} + m_t^{y',\ 0}$ 对任意 $y, y' \in F$ 均成立，可知该映射确实是线性的。此外，对于任意 $y \in F$ 和 $t \in [0,T]$，$\|m_t^{y,\ 0}\|_{Æ,\ \alpha} \le \|y\| t^\alpha$，因此由 ϕ 的连续性可知该映射是连续的。接下来，我们定义

$$(L_1\phi)(t) := \left(y \mapsto \left\langle \phi, m_{t,0}^y \right\rangle\right), \quad t \in [0,T],\, \phi \in (Æ_\alpha([0,T];F))^*.$$

为了证明 $L_1\phi \in C_0^\alpha([0,T];\, E)$，固定一个 $\phi \in (Æ_\alpha([0,T];\, F))^*$。首先注意到 $(L_1\phi)(0) = 0$。接下来，根据定义，对于 $s,t \in [0,T]$ 和 $y \in F$，

$$\big((L_1\phi)(t) - (L_1\phi)(s)\big)(y) = \left\langle \phi, m_{t,0}^y \right\rangle - \left\langle \phi, m_{s,0}^y \right\rangle = \left\langle \phi, m_{t,s}^y \right\rangle.$$

由于 $\|m_{t,s}^y\|_{Æ,\alpha} \le \|y\|(t-s)^\alpha$ 且 ϕ 连续，我们有（其中 $\|\cdot\|_{Æ}^*$ 是 $(Æ_\alpha([0,T];\, F))^*$ 上的典范范数）

$$\|(L_1\phi)(t) - (L_1\phi)(s)\|_{C^\alpha} \le (t-s)^\alpha \|\phi\|_{Æ,\alpha}^*,$$

这表明 $L_1\phi$ 不仅是 α-H¨older 连续的，而且 $\|L_1\phi\|_{C^\alpha} \le \|\phi\|_{Æ,\alpha}^*$。因此，$L_1$ 有界且 $\|L_1\| \le 1$。

为了定义映射 $L_2\colon C_0^\alpha([0,T];\, E) \to (Æ_\alpha([0,T];\, F))^*$，我们先定义 α-H¨older 连续函数如何作用于分子上。如方程（31）所示，对于 $x \in C_0^\alpha([0,T];\, E)$，我们定义线性映射

$$m \mapsto \langle x, m\rangle := \sum_{t\in[0,T]} \langle x(t), m(t)\rangle, \tag{34}$$

对于任意 $m \in M([0,T];\, F)$。由方程 (32)，我们有 $m \in M([0,T];\, F)$

$$|\langle x, m\rangle| \le \|x\|_{C^\alpha}\|m\|_{Æ,\alpha},$$

这意味着，方程（34）中定义的映射可以唯一延拓为 $Æ_\alpha([0,T];\, F)$ 上的连续线性映射，其范数小于或等于 $\|x\|_{C^\alpha}$。我们定义 $L_2\colon C_0^\alpha([0,T];\, E) \to$

$(Æ_\alpha([0,T];\ F))^*$，即将 $x \in C_0^\alpha([0,T];\ E)$ 映射到方程（34）中定义的映射的延拓。由于 $\|L_2 x\|^*_{Æ,\ \alpha} \le \|x\|_{C^\alpha}$，对于 α-Hölder 连续的 x，我们有 $\|L_2\| \le 1$。

剩下要证明的是，映射 L_1 和 L_2 互为逆映射。取一个 $x \in C_0^\alpha([0,T];\ E)$。那么对于任意 $t \in [0,T]$，我们有

$$(L_1 L_2 x)(t) = \left(y \mapsto \left\langle L_2 x, m^y_{t,0} \right\rangle\right) = \left(y \mapsto \left\langle x, m^y_{t,0} \right\rangle\right) = (y \mapsto \langle x(t), y\rangle) = x(t),$$

其中等式分别根据 L_1 和 L_2的定义得出。这意味着 $L_1 L_2 x = x$。

取一个 $\phi \in (Æ_\alpha([0,T];\ F))^*$。对于任意 $t \in [0,T]$ 和 $y \in F$，我们有

$$(L_2 L_1 \phi)(m^y_{t,0}) = \left\langle (L_1\phi), m^y_{t,0} \right\rangle = \langle (L_1\phi)(t), y\rangle = \left\langle \phi, m^y_{t,0} \right\rangle, \tag{35}$$

其中等式同样分别根据 L_2 和 L_1的定义得出。形式为 $m^y_{t,0}$ span $M([0,T]:\ F)$ 的初等分子，因此方程（35）意味着 $L_2 L_1 \phi = \phi$。

这表明 L_1 和 L_2 确实互为逆映射，因此 $C_0^\alpha([0,T];\ E)$ 同构于 $Æ_\alpha([0,T];\ F)$ 的对偶空间。

第二部分：证明弱* 收敛等价于有界性和逐点收敛

从现在起，我们直接将元素 $x \in C_0^\alpha([0,T];\ E)$ 视为 $(Æ_\alpha([0,T];\ F))^*$ 的元素。我们要证明，$C_0^\alpha([0,T];\ E)$ 中的范数有界网 $\{x_\lambda\}_{\lambda\in I}$ 在弱-* 拓扑下收敛到 $x \in C_0^\alpha([0,T];\ E)$，当且仅当对所有 $t \in [0,T]$，$x_\lambda(t) \overset{*}{\rightharpoonup} x(t)$。

对于任意 $t \in [0,T]$ 和 $y \in F$，必有

$$\langle x_\lambda(t), y\rangle = \left\langle x_\lambda, m^y_{t,0} \right\rangle \to \left\langle x, m^y_{t,0} \right\rangle = \langle x(t), y\rangle,$$

因此，对所有 $t \in [0,T]$，$x_\lambda(t) \overset{*}{\rightharpoonup} x(t)$。

接下来，假设 $\{x_\lambda\}_{\lambda\in I}$ 在 α-Hölder 范数下有界，并且对所有 $t \in [0,T]$，$x_\lambda(t) \overset{*}{\rightharpoonup} x(t)$。由逐点弱* 收敛可知，对于任意 $t \in [0,T]$ 和 $y \in F$

$$\left\langle x_\lambda, m^y_{t,0} \right\rangle = \langle x_\lambda(t), y\rangle \to \langle x(t), y\rangle = \left\langle x, m^y_{t,0} \right\rangle.$$

任意分子 m 都是初等分子的线性组合，因此由上述结果可得$\langle x_\lambda,\ m\rangle \to \langle x,\ m\rangle$ 对所有 $m \in M([0,T];\ F)$ 均成立。由于分子在 $Æ_\alpha([0,T];\ F)$ 中稠密，我们可以应用引理 B.2，该引理表明 $x_\lambda \overset{*}{\rightharpoonup} x$，从而完成证明。□

5. The i^* topology on $\mathscr{C}^{\alpha,n}([0,T];E)$

回顾第 3.1 节，我们将 $i^*(\mathscr{C}_g^\alpha;\ E)$ 上的拓扑定义为通过自然嵌入从 $C_0^\alpha([0,T],\ T_{(n)}(E))$ 上的弱* 拓扑诱导的拓扑，具体参见命题 3.14 和定义 3.15。本节首先给出命题 3.14 的证明，随后证明 $\mathscr{C}_g^\alpha([0,T];\ E)$ 中的范数有界集确实是 i^* 紧的。

命题 *3.14* 的证明。我们定义映射 i 为

$$i(\mathbf{x})(s) := \mathbf{x}_{0,s} - \mathbf{1},$$

其中 $\mathbf{1} = (1,0,\dots,0)$。我们必须在此映射中减去$\mathbf{1}$，这一点虽显别扭，但为确保 $i(\mathbf{x})(0) = 0$ 是必要的。注意，只要映射 i 定义良好，它显然是单射。为证明 i定义良好，我们固定一个 $\mathbf{x} \in \mathscr{C}^{\alpha,n}([0,T];\ E)$，并证明 $i(x) \in C_0^\alpha([0,T];\ T_{(n)}(E))$。由于 $\mathbf{x}^{0,0}$ 等于 $(1,0,\dots,0)$，我们只需证明 $i(\mathbf{x})$ 确实是α-Hölder 连续的，这一点我们将与该命题的第二个陈述一并证明。也就是说，我们要证明存在某个 C，使得对所有 $s,t \in [0,T]$

$$\|\mathbf{x}_{0,t} - \mathbf{x}_{0,s}\|_{T^{(n)}(E)} \le C\big(\|\mathbf{x}\|_{\mathscr{C}^\alpha} + 1\big)|t-s|^\alpha,$$

其中 $\|\cdot\|_{T^{(n)}(E)}$ 范数由 $\|(\mathbf{x}^{(0)},\dots,\mathbf{x}^{(n)}\| = \|\mathbf{x}^{(0)}\|_{\mathbb{R}} + \dots + \|\mathbf{x}^{(n)}\|_n$ 给出（尽管任何与注 2.5 中的直和表示相容的范数均可）。这等价于证明存在某个 C，使得对所有 $1 \le i \le n$ 和 $s,t \in [0,T]$，我们有

$$\|\mathbf{x}^{(i)}_{0,t} - \mathbf{x}^{(i)}_{0,s}\|_i \le C\big(\|\mathbf{x}\|_{\mathscr{C}^\alpha} + 1\big)|t-s|^\alpha. \tag{36}$$

根据 Chen关系（见公式（7））， 我们有 $\mathbf{x}^{(i)}_{0,\,t} = \sum_{j=0}^{i} \mathbf{x}^{(j)}_{0,\,s} \otimes \mathbf{x}^{(i-j)}_{s,\,t}$，对所有 $1 \le i \le n$ 均成立，因此证明（36）等价于证明

$$\|\sum_{j=0}^{i-1} \mathbf{x}^{(j)}_{0,s} \otimes \mathbf{x}^{(i-j)}_{s,t}\|_i \le C\big(\|\mathbf{x}\|_{\mathscr{C}^\alpha} + 1\big)|t-s|^\alpha. \tag{37}$$

根据假设，我们有

$$\max_{1\le i\le n} \sup_{0\le s<t\le T} \frac{\|\mathbf{x}^{(i)}_{s,t}\|_i^{1/i}}{(t-s)^\alpha} = \|\mathbf{x}\|_{\mathscr{C}^\alpha},$$

参见定义 2.11。换言之，我们有

$$\|\mathbf{x}^{(i)}_{s,t}\|_i \le \|\mathbf{x}\|^i_{\mathscr{C}^\alpha}(t-s)^{i\alpha},$$

对于任意 $1 \le i \le n$ 和 $s,\ t \in [0,T]$。因此，存在某个 $C>0$（仅取决于 n、T 和 α），使得对所有 $0 \le j < i \le n$,

$$\|\mathbf{x}^{(i-j)}_{s,t}\|_{i-j} \le C\big(\|\mathbf{x}\|_{\mathscr{C}^\alpha} + 1\big)(t-s)^\alpha \quad \text{and} \quad \|\mathbf{x}^{(i)}_{0,s}\|_i \le C.$$

结合这两个不等式，我们得到公式（37）。 □

为避免引入过多记号，我们有时会省略记号中的 i。例如，对于 m （属于 $C_0^\alpha([0,T];\, T_{(n)}(E)$ 的预对偶）以及 $\mathbf{x} \in \mathscr{C}^{\alpha,n}([0,T];\, E)$，我们定义

$$\langle \mathbf{x}, m\rangle := \langle i(\mathbf{x}), m\rangle\,. \tag{38}$$

不过，需要稍作提醒：给定一个形如 $m_0^y{}_{,t}$ 的初等分子，其中 y 属于 $T^{(n)}(E)$ 的预对偶，且 $t \in [0,T]$（见公式（29）），人们可能会想写成

$$\left\langle \mathbf{x}, m^y_{0,t} \right\rangle = \langle \mathbf{x}_{0,t}, y\rangle\,,$$

但请注意，当 $y^{(0)} \neq 0$ 时，这种记法容易造成混淆，最好避免使用。

备注 5.1. 由定理 4.4 和命题 3.14 可知，若 $\{\mathbf{x}_\lambda\}_{\lambda\in I}$ 是$\mathscr{C}^{\alpha,n}([0,T];\, E)$ 中的一个网，且关于 $\|\cdot\|_{\mathscr{C}^\alpha}$ 有界，那么 $\{\mathbf{x}_\lambda\}_{\lambda\in I}$在 i^*-拓扑下是柯西网，当且仅当存在一个 $x \in C_0^\alpha([0,T];\, T_{(n)}(E))$，使得对所有$t \in [0,T]$，都有 $i(\mathbf{x}_\lambda)(t) \xrightarrow{*} x(t)$。

回想一下，我们赋予空间 $\mathscr{C}^{\alpha,n}([0,T];\, E)$ 一种“弱-*型”拓扑的动机，是希望范数有界集是紧的。事实确实如此：

命题 5.2. 假设设定 *3.11*。设 $0<\alpha\le 1$，设 $n \in \mathbb{N}_{>0}$，并设 $R>0$。则$\{\mathbf{x} \in \mathscr{C}^{\alpha,n}([0,T];\, E) \mid \|\mathbf{x}\|_{\mathscr{C}^{\alpha,n}} \le R\}$ 在 i^*-拓扑中是紧的。

证明。 为记号简洁性起见，我们定义 $B_R(\mathscr{C}^{\alpha,n}(E)) = \{\mathbf{x} \in \mathscr{C}^{\alpha,n}([0,T];\, E) \mid \|\mathbf{x}\|_{\mathscr{C}^{\alpha,n}} \le R\}$.
在此证明中，我们利用紧空间的闭集本身也是紧集这一事实。根据巴拿赫–阿劳格鲁定理，形如

$$\left\{\mathbf{x} \in C_0^\alpha([0,T]; T^{(n)}(E)) \mid \|\mathbf{x}\|_{C^\alpha} \le R'\right\}$$

的范数闭球是弱-* 紧的。因此，只需证明 $i(B_R(\mathscr{C}^{\alpha,n}(E)))$ 是这样一个范数闭 C^α 球的弱-* 闭子集。命题 3.14 的第二部分告诉我们，确实存在 R' 使得

$$i(B_R(\mathscr{C}^{\alpha,n}(E))) \subseteq \left\{\mathbf{x} \in C_0^\alpha([0,T]; T^{(n)}(E)) \mid \|\mathbf{x}\|_{C^\alpha} \leq R'\right\},$$

因此只需证明 $i(B_R(\mathscr{C}^{\alpha,\,n}(E)))$ 是弱-* 闭的。为此，我们利用这样一个事实：一个集合是闭集，当且仅当该集合中任意收敛网的极限仍属于该集合。假设我们有一个网 $\{\mathbf{x}_\lambda\}_{\lambda\in I}$，其取值于 $B_R(\mathscr{C}^{\alpha,\,n}(E))$，且 $i(\mathbf{x}_\lambda) \overset{*}{\rightharpoonup} x \in C_0^\alpha([0,T];\, T^{(n)}(E))$。为了证明存在一个 $\mathbf{x} \in \mathscr{C}^{\alpha,\,n}([0,T];\, E)$，使得 $x = i(\mathbf{x})$，我们对$s,\ t \in [0,T]$定义 $\mathbf{x}_{s,\,t}$ 为

$$\mathbf{x}_{s,t} := (x(s) + \mathbf{1})^{-1} \hat{\otimes} (x(t) + \mathbf{1}). \tag{39}$$

由于这个定义自动保证了 Chen关系，我们只需证明 $\|\mathbf{x}\|_{\mathscr{C}^{\alpha,\,n}} \leq R$。根据定义 2.11，这归结为证明对任意 $s,\ t \in [0,T]$ 和 $1 \leq i \leq n$，有

$$\|\mathbf{x}_{s,t}^{(i)}\| \leq R^i (s-t)^{i\alpha}.$$

固定 $1 < i \leq n$和 $s,\ t \in [0,T]$。等式 (39)（结合等式 (8)）意味着我们可以将 $\mathbf{x}_{s\,t}^{(i)}$，写成线性组合

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{s,t}^{(i)} &= \sum_{i_1+\ldots+i_k=i} c_{i_1,\ldots,i_k} \mathbf{x}_{0,s}^{(i_1)} \otimes \ldots \otimes \mathbf{x}_{0,s}^{(i_{k-1})} \otimes \mathbf{x}_{0,t}^{(i_k)} \\ &= \sum_{i_1+\ldots+i_k=i} c_{i_1,\ldots,i_k} \mathbf{x}^{(i_1)}(s) \otimes \ldots \otimes \mathbf{x}^{(i_{k-1})}(s) \otimes \mathbf{x}^{(i_k)}(t),\end{aligned}$$

其中常数 $c_{i_1,\ldots,i_k}$ 经过适当选取，且与 $\mathbf{x}$无关。对于 $(\mathbf{x}_\lambda)_{s\,t}^{(i)}$，，我们也有类似的表达式。我们回顾一下（见注 5.1），在 $C_0^\alpha([0,T];\, T^{(n)}(E))$ 中的弱-* 收敛意味着，对于任意 $u \in [0,T]$ 和 $0 \leq j \leq n$，$(\mathbf{x}_\lambda^{(j)})(u) \overset{*}{\rightharpoonup} \mathbf{x}^{(j)}(u)$。因此，反复应用引理 B.3（其中网由命题 3.14 可知范数有界）可得

$$i(\mathbf{x}_\lambda)^{(i_1)}(s) \otimes \ldots \otimes i(\mathbf{x}_\lambda)^{(i_{k-1})}(s) \otimes i(\mathbf{x}_\lambda)^{(i_k)}(t) \overset{*}{\rightharpoonup} x^{(i_1)}(s) \otimes \ldots \otimes x^{(i_{k-1})}(s) \otimes x^{(i_k)}(t),$$

因此

$$(\mathbf{x}_\lambda)_{s,t}^{(i)} \overset{*}{\rightharpoonup} \mathbf{x}_{s,t}^{(i)}. \tag{40}$$

由于范数在弱-* 收敛下是下半连续的（见引理 B.1），且 $\|\mathbf{x}_\lambda\|_{\mathscr{C}^{\alpha,\,n}} \leq R$，我们得到

$$\|\mathbf{x}_{s,t}^{(i)}\| \leq \liminf_{\lambda\in I} \|(\mathbf{x}_\lambda)_{s,t}^{(i)}\| \leq R^i (t-s)^{i\alpha},$$

这表明 $\mathbf{x} \in B_R(\mathscr{C}^{\alpha,n}(E))$，从而完成证明。

□

命题 5.2 表明，集合 $\{\mathbf{x} \in \mathscr{C}^{\alpha,n}([0,T];\, E) \mid \|\mathbf{x}\|_{\mathscr{C}^{\alpha,n}} \leq R\}$ 是紧的。现在我们证明，对于弱几何版本 $\{\mathbf{x} \in \mathscr{C}^{\alpha}_{,g}{}^{n}([0,T];\, E) \mid \|\mathbf{x}\|_{\mathscr{C}^{\alpha,n}} \leq R\}$（见定义 2.24），这一结论同样成立。

命题 5.3。假设设定 *3.11*，令 $0 < \alpha \leq 1$，$n \in \mathbb{N}_{>0}$，$R \in (0,\infty)$。则$\{\mathbf{x} \in \mathscr{C}^{\alpha}_{,g}{}^{n}([0,T];\, E) \mid \|\mathbf{x}\|_{\mathscr{C}^{\alpha,n}} \leq R\}$ 在 i^* 拓扑下是紧的。

证明。为简洁起见，我们定义 $B_R(\mathscr{C}^{\alpha}_{,g}{}^{n}(E)) := \{\mathbf{x} \in \mathscr{C}^{\alpha}_{,g}{}^{n}([0,T];\, E) \mid \|\mathbf{x}\|_{\mathscr{C}^{\alpha},n} \leq R\}$；集合 $B_R(\mathscr{C}^{\alpha,n}(E))$ 的定义类似。由于 $B_R(\mathscr{C}^{\alpha}_{,g}{}^{n}(E)) \subseteq B_R(\mathscr{C}^{\alpha,n}(E))$，我们可以应用命题 5.2，因此只需证明集合 $B_R(\mathscr{C}^{\alpha}_{,g}{}^{n}(E))$ 是 i^*-闭的。为此，只需证明：只要有一个网 $\{\mathbf{x}_\lambda\}_{\lambda\in I}$ 属于该空间且收敛到 $\mathbf{x}$，那么 $\mathbf{x}$ 也必定属于 $B_R(\mathscr{C}^{\alpha}_{,g}{}^{n}(E))$。

取一个收敛到 $\mathbf{x}$ 的这样的网。命题 5.2 蕴含 $\mathbf{x}$ 属于 $B_R(\mathscr{C}^{\alpha,g}{}^{n}(E))$，因此我们只需证明 $\mathbf{x}$ 的取值属于 $G^{(n)}(E)$（见定义 2.17）。

为此，我们注意到，引理 C.4 在设定 3.11 中同样成立，因为预对偶空间能够在对偶空间上分离点，而且代数张量空间构成预对偶空间的稠密子集。这意味着，当用设定 3.11 的假设替代一致交叉范数和逼近性质假设时，命题 2.22 中的等式仍然成立。因此，只要$\mathbf{x}$ 取值于 $G^{(n)}(E)$，且$\mathbf{x}_{s,t}$ 满足任意线性泛函 $y, y' \in T_a^{(n)}(F)$ 和 $s,t \in [0,T]$的洗牌积。换言之，我们需要

$$\left\langle \mathbf{x}_{s,t}, y \sqcup\!\sqcup y' \right\rangle = \left\langle \mathbf{x}_{s,t}, y \right\rangle \left\langle \mathbf{x}_{s,t}, \sqcup\!\sqcup y' \right\rangle .$$

然而，运用与命题 5.2 的证明相同的论证，我们可以得到公式 (40)成立，因此

$$\left\langle \mathbf{x}_{s,t}, y \sqcup\!\sqcup y' \right\rangle = \lim_{\lambda \in I} \left\langle (\mathbf{x}_\lambda)_{s,t}, y \sqcup\!\sqcup y' \right\rangle = \lim_{\lambda \in I} \left\langle (\mathbf{x}_\lambda)_{s,t}, y \right\rangle \left\langle (\mathbf{x}_\lambda)_{s,t}, y' \right\rangle = \left\langle \mathbf{x}_{s,t}, y \right\rangle \left\langle \mathbf{x}_{s,t}, y' \right\rangle ,$$

第二个等号用到了$\mathbf{x}_\lambda$ 是弱几何的这一点。这表明$\mathbf{x}_{s,t}$ 同样是弱几何的，因此证明完成。□

6. i^* continuity of Lyons lift

定理 3.16 的证明有一个关键要素：对于所有 $l \in T_a(F)$，映射

$$\mathbf{x} \mapsto \langle S(\mathbf{x})_{0,T}, l \rangle ,$$

限制在相对于 $\mathscr{C}^\alpha$ 范数有界的集合上时，是 i^* 连续的。这里 i^* 是定义 3.15 中的拓扑；另请注意，本节始终假设设定 3.11。众所周知，Lyons 提升相对于 $\varrho_\alpha^{\mathrm{hom}}$度量是连续的（参见 [LCL07，定理 3.10] 或第 2.3 节），但它相对于 i^* 拓扑的连续性并非显而易见，本节的目标就是证明这一点。更具体地说，我们将证明一个略强的结论：Lyons 提升 S^n, $n \in \mathbb{N}_{>0}$ 在相对于 $\mathscr{C}^\alpha$ 范数有界的集合上是 i^* 到 i^*连续的。之所以证明更强的结论，是因为 Lyons 提升是通过一个涉及整条路径的归纳步骤定义的，而我们需要证明连续性在归纳步骤中得以保持。

命题 *6.1*（*Lyons* 提升的 i^* 到 i^* 连续性）。假设设定 *3.11*，设 $\alpha > 0, n \in \mathbb{N}_{>0}$满足 $n \geq \lfloor 1/\alpha \rfloor$, $R > 0$, 并令 $S^n : \mathscr{C}^\alpha([0,T]; E) \to \mathscr{C}^{\alpha,n}([0,T]; E)$ 为 *Lyons* 提升（见定理 *2.12*）。那么，映射 S^n 限制在 $\{x \in \mathscr{C}^\alpha([0,T]; E) \mid \|x\|_{\mathscr{C}^\alpha} \leq R\}$ 上时是 i^*到 i^*连续的。特别地，形如 $x \mapsto \langle x_{0,T}, y \rangle := \langle S^n(x)_{0,T}, y \rangle$ 的映射，其中 $y \in T^{(n)}(F)$，限制在 $\{x \in \mathscr{C}^\alpha([0,T]; E) \mid \|x\|_{\mathscr{C}^\alpha} \leq R\}$上时是 i^*连续的。

对于 $E = \mathbb{R}^d$ ($d \in \mathbb{N}_{>0}$) 的情形，命题 6.1 的证明可见 [CST26], , 其中他们结合了 [CST26, Theorem A.4] 与 [FV10, Theorem 9.10]。由于目前尚不清楚如何将该证明改编到取值于 E 的路径这一情形，我们转而说明如何将取值于 E 的路径情形化归为取值于 $\mathbb{R}^d$ 的情形。下文的引理 6.2 和 6.3 是关键要素。此外，为方便读者，我们还给出了 $E = \mathbb{R}^d$ 情形下命题 6.1 的简明证明。也就是说，我们改编了 [CST26] 中的证明，使其适用于我们的目的（见第 28 页）。命题 6.1 的证明见第 28 页。

首先，为了记号简洁性，我们定义集合

$$B_R(\mathscr{C}^\alpha(E)) := \{\mathbf{x} \in \mathscr{C}^\alpha([0,T]; E) \mid \|\mathbf{x}\|_{\mathscr{C}^\alpha} \leq R\} , \tag{41}$$

其中 $R > 0$。集合 $B_R(\mathscr{C}^{\alpha,\ n}(E))$、 $B_R(\mathscr{C}^\alpha(\mathbb{R}^d))$ 和 $B_R(\mathscr{C}^{\alpha,\ n}(\mathbb{R}^d))$，其中 $R > 0$, $n \in \mathbb{N} \cap [\lfloor 1/\alpha \rfloor, \infty)$ 以及 $d \in \mathbb{N}_{>0}$，均以类似方式定义。

引理 6.2。 假设设定 *3.11*，令 $\alpha > 0$，并令 $n \in \mathbb{N} \cap [\lfloor 1/\alpha \rfloor, \infty)$。假设 $S^{(n)}|_{B_R(\mathscr{C}^\alpha(E))}$ 对所有 $R > 0$ 均为 i^* 到 i^* 的连续映射，并且假设

$$B_R(\mathscr{C}^{\alpha,n}(E)) \ni \mathbf{x} \mapsto \langle S^{n+1}(\mathbf{x}), m_{0,s}^{y_1 \otimes \ldots \otimes y_{n+1}} \rangle \tag{42}$$

对所有 $y_1, \ldots, y_{n+1} \in F$, $s \in [0,T]$ 和 $R > 0$, $m_{0\,s}^{y_1 \otimes \ldots \otimes y_{n+1}}$, 均为 i^* 连续， $m_{0\,s}^{y_1 \otimes \ldots \otimes y_{n+1}}$, 是形如 (29) 的分子，且配对 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 由 (38) 给出。则 $S^{(n+1)}|_{B_R(\mathscr{C}^\alpha(E))}$ 对所有 $R > 0$均为 i^*到 i^* 连续。

该引理的证明推迟到本节末尾。

引理 6.3. 设设定 *3.11* 成立，令 $\alpha > 0$, $R > 0$, $n \in \mathbb{N} \cap [\lfloor 1/\alpha \rfloor, \infty)$，令 $y_1, \ldots, y_{n+1} \in F$，并设 $\mathbf{y} = y_1 \otimes \ldots \otimes y_{n+1}$。则存在一个 $e \in \mathbb{R}^{n+1}$ 和一个 i^* 到 i^* 的连续映射

$$\pi^{\mathbf{y}} \colon \mathscr{C}^{\alpha,n}([0,T];E) \to \mathscr{C}^{\alpha,n}([0,T];\mathbb{R}^{n+1})$$

使得

$$\left\langle S^{n+1}(\mathbf{x}), m_{0,t}^{\mathbf{y}} \right\rangle = \left\langle S^{n+1}(\pi^{\mathbf{y}}(\mathbf{x})), m_{0,t}^{e} \right\rangle \tag{43}$$

对于所有 $t \in [0,T]$ 以及所有 $\mathbf{x} \in \mathscr{C}^{\alpha,\,n}([0,T];\ E)$（注意，上方第二个 S^{n+1} 表示 $\mathbb{R}^{n+1}$ 值路径的 *Lyons* 提升）。此外， $\pi^{\mathbf{y}}$ 映射将 $\mathscr{C}^{\alpha,\,n}([0,T];\ E)$中的范数有界集映射到 $\mathscr{C}^{\alpha,\,n}([0,T];\ \mathbb{R}^{n+1})$中的范数有界集。

该引理的证明也推迟到本节末尾。

命题 *6.1* 的证明。 命题 6.1 的证明可由引理 6.2 和 6.3、该命题对 $E = \mathbb{R}^d$ $(d \in \mathbb{N})$ 成立这一事实（见下文）以及归纳论证立即得出。□

命题 *6.1* 在 $E = \mathbb{R}^d$ 情形下的证明。 对于 $\alpha' < \alpha$，我们有，对于 $1 \le i \le n$, $s,\ t \in [0,T]$以及 $\mathbf{x} \in \mathscr{C}^{\alpha,\,n}([0,T];\ \mathbb{R}^d)$

$$\frac{\|\mathbf{x}_{s,t}^{(i)}\|_i}{(s-t)^{i\alpha'}} = \frac{(s-t)^{i\alpha}}{(s-t)^{i\alpha'}} \frac{\|\mathbf{x}_{s,t}^{(i)}\|_i}{(s-t)^{i\alpha}} \le T^{i(\alpha-\alpha')} \frac{\|\mathbf{x}_{s,t}^{(i)}\|_i}{(s-t)^{i\alpha}}.$$

因此，对于每个 $\alpha' < \alpha$，都有包含关系 $\mathscr{C}^{\alpha,\,n}([0,T];\ \mathbb{R}^d) \subseteq \mathscr{C}^{\alpha',\,n}([0,T];\ \mathbb{R}^d)$，因而我们可以赋予空间 $\mathscr{C}^{\alpha,\,n}([0,T];\ \mathbb{R}^d)$ 由 $\varrho_{\alpha'}^{\mathrm{hom}}$度量（见定义 2.11）生成的子空间拓扑。回忆一下，根据 [LCL07 定理 3.10]（另见第 2.3 节），Lyons 提升

$$S^n \colon \mathscr{C}^{\alpha'}([0,T];\mathbb{R}^d) \to \mathscr{C}^{\alpha',n}([0,T];\mathbb{R}^d)$$

对所有 $\alpha' > 0$, $d \in \mathbb{N}_{>0}$ 和所有 $n \in \mathbb{N} \cap [\lfloor 1/\alpha' \rfloor, \infty)$ 都是 $\varrho_{\alpha'}^{\mathrm{hom}}$连续的。因此，只需证明：对于任意 $n \in \mathbb{N}_{>0} \cap [\lfloor 1/\alpha' \rfloor, \infty)$、 $R \in \mathbb{R}$ 和 $\alpha' < \alpha$，限制在 $B_R(\mathscr{C}^{\alpha,\,n}(\mathbb{R}^d))$ 上的 i^* 拓扑与限制在该集合上的 $\varrho_{\alpha'}^{\mathrm{hom}}$度量拓扑一致（注意，当 α' 被 α 替换时，情况并非如此）。这等价于证明恒等映射

$$\mathrm{id} \colon \left(B_R(\mathscr{C}^{\alpha,n}(\mathbb{R}^d)), \varrho_{\alpha'}^{\mathrm{hom}} \right) \to \left(B_R(\mathscr{C}^{\alpha,n}(\mathbb{R}^d)), i^* \right),$$

是一个同胚。注意，当 $\mathbb{R}^d$ 被一个无限维巴拿赫空间替代时，该映射并非同胚（即使限制在范数有界集上，弱-* 拓扑也不与范数拓扑一致）。

我们首先证明恒等映射是连续的。由于恒等映射的定义域上具有度量拓扑，只需证明：每当序列 $\{\mathbf{x}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$关于 $\varrho_{\alpha'}^{\mathrm{hom}}$度量收敛到 $\mathbf{x}$时，它也在 i^* 拓扑中收敛。关于 $\varrho_{\alpha}^{\mathrm{hom}}$度量收敛的一个直接结果是，对于所有 $s,t \in [0,T]^2$， $\{(\mathbf{x}_m)_{s,t}\}_{m\in\mathbb{N}}$ 都收敛到$\mathbf{x}_{s,t}$。因此，由定理 4.4 和注 5.1 可知，$\{\mathbf{x}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$在 i^* 拓扑中收敛到 $\mathbf{x}$ 。

为了证明恒等映射的逆映射也是连续的，我们采用相同的策略。由于将 i^* 拓扑限制在 $B_R(\mathscr{C}^{\alpha,\ n}(\mathbb{R}^d))$ 上后是可度量化的（见注 3.19），只需证明：每当序列 $\{\mathbf{x}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ 在 i^* 拓扑中收敛到 $\mathbf{x}$ 时，它也关于 $\varrho_\alpha^{\mathrm{hom}}$度量收敛。我们在证明命题 5.2 中的公式 (40) 时使用的论证在这里同样适用，因此再次有

$$(\mathbf{x}_m)^{(i)}_{s,t} \to (\mathbf{x})^{(i)}_{s,t} \tag{44}$$

对所有 $i \le n$和 $s,\ t \in [0,T]^2$。我们声称，借助 Arzel`a–Ascoli 型论证，可以得到

$$\sup_{s,t\in[0,T]} |(\mathbf{x}_m)^{(i)}_{s,t} - (\mathbf{x})^{(i)}_{s,t}| \to 0; \tag{45}$$

我们将此论断的证明推迟到本证明的末尾。假设此论断成立，利用 $\|\mathbf{x}_m\|_{\mathscr{C}^{\alpha,\ n}}$，$\|\mathbf{x}_m\|_{\mathscr{C}^{\alpha,\ n}} \le R$对所有 $m \in \mathbb{N}$，有

$$\begin{aligned}\sup_{s,t\in[0,T]} \left|\frac{(\mathbf{x}_m)^{(i)}_{s,t} - (\mathbf{x})^{(i)}_{s,t}}{(t-s)^{i\alpha'}}\right| \le& \sup_{s,t\in[0,T]} \left|\frac{(\mathbf{x}_m)^{(i)}_{s,t} - (\mathbf{x})^{(i)}_{s,t}}{(t-s)^{i\alpha}}\right|^{\frac{\alpha'}{\alpha}} \left|(\mathbf{x}_m)^{(i)}_{s,t} - (\mathbf{x})^{(i)}_{s,t}\right|^{1-\frac{\alpha'}{\alpha}} \\ \le& (2R)^{\frac{\alpha'}{\alpha}} \left(\sup_{s,t\in[0,T]} |(\mathbf{x}_m)^{(i)}_{s,t} - (\mathbf{x})^{(i)}_{s,t}|\right)^{1-\frac{\alpha'}{\alpha}},\end{aligned}$$

当 $m \to \infty$时，它趋于零。这表明恒等映射的逆映射是连续的。

为证明公式（45），我们先注意到，对于任意 $s,\ s',\ t,\ t'$和$\mathbf{z} \in B_R(\mathscr{C}^{\alpha,\ n}(E))$，利用 Chen关系（见公式（7）），有

$$\mathbf{z}_{s',t'} = \mathbf{z}_{s',s} \hat{\otimes} \mathbf{z}_{s,t} \hat{\otimes} \mathbf{z}_{t,t'},$$

因此，

$$\mathbf{z}^{(i)}_{s',t'} = \sum_{j=0}^{i} \sum_{k=0}^{i-j} \mathbf{z}^{(j)}_{s',s} \otimes \mathbf{z}^{(i-j-k)}_{s,t} \otimes \mathbf{z}^{(k)}_{t,t'}.$$

因此，差$\mathbf{z}^{(i)}_{s',t'} - \mathbf{z}^{(i)}_{s,t}$可以写成若干项之和，其中每一项都包含一个阶数至少为 1 的$\mathbf{z}_{s',s}$ 分量或$\mathbf{z}_{t,t'}$分量。我们还注意到，可以对其进行如下界定

$$\|\mathbf{z}^{(j)}_{s',s}\|_j \le R(s-s')^{j\alpha}$$

对任意 $1 \le j \le i$，均成立；对$\mathbf{z}^{(i)}_{s,t}$也有类似结论。因此，对所有 $\epsilon > 0$，存在一个仅依赖于 R、n和 ϵ的 $\delta > 0$，使得只要 $|s-s'|, |t-t'| < \delta$，就有

$$\|\mathbf{z}^{(i)}_{s',t'} - \mathbf{z}^{(i)}_{s,t}\|_i < \tfrac{\epsilon}{3}, \tag{46}$$

由方程（44）可知，对于任意有限分割 D 和 $\epsilon > 0$，我们都可以找到 N，使得对所有 $m \ge N$

$$\sup_{s,t\in D} \|(\mathbf{x}_m)^{(i)}_{s,t} - (\mathbf{x})^{(i)}_{s,t}\|_i < \tfrac{\epsilon}{3}. \tag{47}$$

为了证明方程（45）的断言，我们可以利用 $\epsilon' = \frac{\epsilon}{3}$，结合方程（46）和（47），采用三 ϵ 论证，并取网格尺寸小于 δ的分割 D 。-具体而言，对于任意 $s',t' \in [0,T]$，我们可以找到 $s,t \in D$，使得 $|s-s'|$, $|t-t'| < \delta$，因此，

$$\|(\mathbf{x}_m)^{(i)}_{s',t'} - \mathbf{x}^{(i)}_{s',t'}\|_i \le \|(\mathbf{x}_m)^{(i)}_{s',t'} - (\mathbf{x}_m)^{(i)}_{s,t}\|_i + \|(\mathbf{x}_m)^{(i)}_{s,t} - \mathbf{x}^{(i)}_{s,t}\|_i + \|\mathbf{x}^{(i)}_{s,t} - \mathbf{x}^{(i)}_{s',t'}\|_i < \tfrac{\epsilon}{3} + \tfrac{\epsilon}{3} + \tfrac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

这就证明了公式（45），因此证明完毕。

□

引理 *6.2* 的证明。注意，对于每个 $R>0$，都存在一个 $R' \geq R$，使得

$$S^n(B_R(\mathscr{C}^\alpha(E))) \subseteq B_{R'}(\mathscr{C}^{\alpha,n}(E))$$

（参见定理 2.12 和注 2.13）。鉴于根据假设，对于所有 $R>0$，$S^n|_{B_R(\mathscr{C}^\alpha(E))}$ 关于 i^* 到 i^* 是连续的，因此只需证明，对于所有 $R>0$，$S^{n+1}|_{B_R(\mathscr{C}^{\alpha,n}(E))}$ 关于 i^* 到 i^* 是连续的。

设 (X,τ) 是一个拓扑空间，并设 B 是一个巴拿赫空间。回顾一下，映射 $f\colon X \to B^*$ 关于 τ 到弱-* 连续，当且仅当对于所有 $b \in B$，$b \circ f$ 都是 τ 连续的，例如参见 [Voi20，定理 1.2]。鉴于定理 4.4 和定义 3.15，只需证明该映射

$$B_R(\mathscr{C}^{\alpha,n}(E)) \ni \mathbf{x} \mapsto \left\langle S^{n+1}(\mathbf{x}), m \right\rangle$$

对于所有 $m \in Æ_\alpha([0,T];\, T_{(n+1)}(F))$ 以及所有 $R>0$，都是 i^* 连续的。

回忆定义 4.1 和定义 4.2，分子的集合在 $Æ_\alpha([0,T];\, T_{(n+1)}(F))$ 中（按范数）稠密。因此，根据引理 B.2，只需证明映射

$$B_R(\mathscr{C}^{\alpha,n}(E)) \ni \mathbf{x} \mapsto \left\langle S^{n+1}(\mathbf{x}), m \right\rangle$$

对每个分子 m 都是 i^*-连续的。由于分子是初等分子的线性组合，且连续函数的线性组合仍然连续，因此实际上只需证明映射

$$B_R(\mathscr{C}^{\alpha,n}(E)) \ni \mathbf{x} \mapsto \left\langle S^{n+1}(\mathbf{x}), m^y_{0,s} \right\rangle$$

对每个初等分子 $m^y_{0,s}$ 以及所有 $R>0$ 都是 i^*-连续的，其中 $y \in T^{(n+1)}(F)$ 且 $s \in [0,T]$。

最后，给定 $y \in T_{(n+1)}(F)$，我们写作 $y = y' + \tilde{y}$，其中 $y' \in F^{\otimes(n+1)}$ 且 $\tilde{y} \in T^{(n)}(F)$。这意味着 $m^y_{0,s} = m^{y'}_{0,s} + m^{\tilde{y}}_{0,s}$。我们可以将 $m^{\tilde{y}}_{0,s}$ 视为 $Æ_\alpha([0,T];\, T^{(n)}(F))$ 的一个元素，因此有

$$\left\langle S^{n+1}(\mathbf{x}), m^{\tilde{y}}_{0,s} \right\rangle = \left\langle \mathbf{x}, m^{\tilde{y}}_{0,s} \right\rangle,$$

根据 i^* 拓扑的定义，它在 $B_R(\mathscr{C}^{\alpha,n}(E))$上连续。因此，只需证明该映射

$$B_R(\mathscr{C}^{\alpha,n}(E)) \ni \mathbf{x} \mapsto \left\langle S^{n+1}(\mathbf{x}), m^{y'}_{0,s} \right\rangle,$$

对所有 $y' \in F^{\otimes n+1}$、所有 $s \in [0,T]$以及所有 $R>0$都是 i^*连续的。

最后，注意到

$$\|m^{y_1}_{0,s} - m^{y_2}_{0,s}\|_{Æ,\alpha} = \|m^{y_1-y_2}_{0,s}\|_{Æ,\alpha} \leq \|y_1 - y_2\|^*_{n+1} s^\alpha,$$

对任意 $y_1, y_2 \in T^{(n+1)}(F)$成立。此外，我们知道初等张量的线性张成在 $F^{\otimes(n+1)}$中稠密。因此，我们可以得出结论：只需证明该映射

$$B_R(\mathscr{C}^{\alpha,n}(E)) \ni \mathbf{x} \mapsto \left\langle S^{n+1}(\mathbf{x}), m^{y_1\otimes\ldots\otimes y_{n+1}}_{0,s} \right\rangle,$$

对所有 $y_1, \ldots, y_n \in F$、所有 $s \in [0,T]$以及所有 $R>0$都是 i^*连续的。 □

引理 *6.3* 的证明。 设 $\{e_1, \ldots, e_{n+1}\}$ 为 $\mathbb{R}^{n+1}$的标准基，其中 $\mathbb{R}^{n+1}$ 及其张量幂配备了某个可容许张量范数族，为简便起见也记为$\{\|\cdot\|_n\}_{n\in\mathbb{N}}$（注意范数的选择无关紧要，因为所有有限维范数都等价）。对于$\mathbf{x} \in T^{(n)}(E)$，定义 $\pi^{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$，其方式为令$(\pi^{\mathbf{y}}(\mathbf{x}))^{(0)} = \mathbf{x}^{(0)}$，并且

$$\left\langle \pi^{\mathbf{y}}(\mathbf{x}), e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_j} \right\rangle \coloneqq \left\langle \mathbf{x}, y_{i_1} \otimes \ldots \otimes y_{i_j} \right\rangle$$

对所有 $1 \leq j \leq n$ 以及所有 i_1，……，$i_j \in \{1, \ldots, n+1\}$（回想一下，$\mathbf{y} = y_1 \otimes \ldots \otimes y_{n+1}$，对于 $y_i \in F$，对所有 $1 \leq i \leq n+1$）。我们声称，通过逐点作用，$\pi^{\mathbf{y}}$ 可扩展为一个映射，其定义域为

$\mathscr{C}^{\alpha,\ n}([0,T];\ E)$，值域为 $\mathscr{C}^{\alpha,\ n}([0,T];\ \mathbb{R}^{n+1})$。事实上，设 $\mathbf{x} \in \mathscr{C}^{\alpha,\ n}([0,T];\ E)$。我们首先证明，$\pi(\mathbf{x})$满足 Chen关系：

$$\begin{aligned}\left\langle \pi^{\mathbf{y}}(\mathbf{x})_{s,t}, e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_j} \right\rangle &= \left\langle \mathbf{x}_{s,t}, y_{i_1} \otimes \ldots \otimes y_{i_j} \right\rangle = \left\langle \mathbf{x}_{s,u} \hat{\otimes} \mathbf{x}_{u,t}, y_{i_1} \otimes \ldots \otimes y_{i_j} \right\rangle \\ &= \sum_{k=0}^{j} \left\langle \mathbf{x}_{s,u}, y_{i_1} \otimes \ldots \otimes y_{i_k} \right\rangle \left\langle \mathbf{x}_{u,t}, y_{i_{k+1}} \otimes \ldots \otimes y_{i_j} \right\rangle \\ &= \sum_{k=0}^{j} \left\langle \pi^{\mathbf{y}}(\mathbf{x})_{s,u}, e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_k} \right\rangle \left\langle \pi^{\mathbf{y}}(\mathbf{x})_{u,t}, e_{i_{k+1}} \otimes \ldots \otimes e_{i_j} \right\rangle \\ &= \left\langle \pi^{\mathbf{y}}(\mathbf{x})_{s,u} \hat{\otimes} \pi^{\mathbf{y}}(\mathbf{x})_{u,t}, e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_j} \right\rangle,\end{aligned} \tag{48}$$

对于基元素 e_{i_1}，……，e_{i_j} 与 $1 \le j \le n$ 的任意组合，以及对所有 $s,\ u,\ t \in [0,T]^2$。此外，由于 $T^{(n)}(\mathbb{R}^{n+1})$是有限维空间，对某个依赖于 n 和 y_1，……，y_n的 $C > 0$，我们有

$$\|\pi^{\mathbf{y}}(\mathbf{x})^{(j)}_{s,t}\|_j \le C \max_{i_1,\ldots,i_j} |\left\langle \pi^{\mathbf{y}}(\mathbf{x})_{s,t}, e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_j} \right\rangle| \le C' \|x^{(j)}_{s,t}\|_j,$$

从而 $\pi^{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$确实是一条 α-H¨older连续粗糙路径，并且我们有 $\|\pi^{\mathbf{y}}(\mathbf{x})\|_{\mathscr{C}^\alpha} \le C' \|\mathbf{x}\|_{\mathscr{C}^\alpha}$。特别地，$\pi^{\mathbf{y}}$ 将 $\mathscr{C}^{\alpha,\ n}([0,T];\ E)$中的范数有界集映射到 $\mathscr{C}^{\alpha,\ n}([0,T];\ \mathbb{R}^{n+1})$中的范数有界集。尚需证明 $\pi^{\mathbf{y}}$ 是从 i^* 到 i^* 连续的，且等式(43)成立；我们首先证明连续性这一陈述。正如引理 6.2的证明中所说明的，只需证明这些映射，

$$\mathbf{x} \mapsto \left\langle \pi^{\mathbf{y}}(\mathbf{x})_{s,t}, e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_j} \right\rangle$$

对于基元素 e_{i_1}，……，e_{i_j} 的任意组合都是 i^* 连续的，其中 $1 \le j \le n$。这直接由 $\pi^{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$ 的定义得出。

最后需要证明的是，确实

$$\left\langle S^{n+1}(\mathbf{x}), m^{\mathbf{y}}_{0,t} \right\rangle = \left\langle S^{n+1}(\pi^{\mathbf{y}}(\mathbf{x})), m^{\mathbf{e}}_{0,t} \right\rangle,$$

其中 $\mathbf{e} = e_1 \otimes \ldots \otimes e_{n+1}$。如第 2.3 节所述，Lyons 提升 S^{n+1} 按如下方式构造：首先考虑对象 $\hat{\mathbf{x}}$，其定义为，对于 $s,\ t \in [0,T]$，

$$\hat{\mathbf{x}}_{s,t} := (1, x^1_{s,t}, x^2_{s,t}, \ldots, x^n_{s,t}, 0). \tag{49}$$

注意，在 [LCL07], 中，此类对象称为几乎粗糙路径。随后，Lyons 提升由 $T^{n+1}(E)$ 范数拓扑中的唯一极限给出

$$S^{n+1}(\mathbf{x})_{s,t} = \lim_{|D| \to 0} \hat{\mathbf{x}}_{s,t_1} \hat{\otimes} \hat{\mathbf{x}}_{t_1,t_2} \hat{\otimes} \ldots \hat{\otimes} \hat{\mathbf{x}}_{t_k,t},$$

其中该极限取遍所有网格尺寸趋于零的划分 $D = (s,\ t_1,\ \ldots\ldots,\ t_k,\ t)$。与方程 (48) 中类似的计算表明

$$\left\langle \hat{\mathbf{x}}_{s,t_1} \hat{\otimes} \ldots \hat{\otimes} \hat{\mathbf{x}}_{t_k,t}, y_1 \otimes \ldots \otimes y_{n+1} \right\rangle = \left\langle \pi^{\mathbf{y}}(\hat{\mathbf{x}}_{s,t_1}) \hat{\otimes} \ldots \hat{\otimes} \pi^{\mathbf{y}}(\hat{\mathbf{x}}_{t_k,t}), e_1 \otimes \ldots \otimes e_{n+1} \right\rangle \tag{50}$$

对于任意分割 $D = (s,\ t_1,\ \ldots\ldots,\ t_k,\ t)$。此外，映射 $\mathbf{x} \mapsto \left\langle \mathbf{x}\, m^{\mathbf{y}}_{s,\ t} \right\rangle$ 和 $\mathbf{x} \mapsto \left\langle \mathbf{x}\, m^{\mathbf{e}}_{s,\ t} \right\rangle$关于范数拓扑是连续的，因此这些映射可以与

极限互换。结合公式（50），可得

$$\begin{aligned}
\left\langle S^{n+1}(\mathbf{x}), m_{0,t}^{\mathbf{y}} \right\rangle &= \left\langle S^{n+1}(\mathbf{x})_{0,t}, \mathbf{y} \right\rangle \\
&= \left\langle \lim_{|D|\to 0} \hat{\mathbf{x}}_{0,t_1} \hat{\otimes} \ldots \hat{\otimes} \hat{\mathbf{x}}_{t_k,t}, y_1 \otimes \ldots \otimes y_{n+1} \right\rangle \\
&= \lim_{|D|\to 0} \left\langle \hat{\mathbf{x}}_{0,t_1} \hat{\otimes} \ldots \hat{\otimes} \hat{\mathbf{x}}_{t_k,t}, y_1 \otimes \ldots \otimes y_{n+1} \right\rangle \\
&= \lim_{|D|\to 0} \left\langle \widehat{\pi^{\mathbf{y}}(\mathbf{x}_{0,t_1})} \hat{\otimes} \ldots \hat{\otimes} \widehat{\pi^{\mathbf{y}}(\mathbf{x}_{t_k,t})}, e_1 \otimes \ldots \otimes e_{n+1} \right\rangle \\
&= \left\langle \lim_{|D|\to 0} \widehat{\pi^{\mathbf{y}}(\mathbf{x}_{0,t_1})} \hat{\otimes} \ldots \hat{\otimes} \widehat{\pi^{\mathbf{y}}(\mathbf{x}_{t_k,t})}, e_1 \otimes \ldots \otimes e_{n+1} \right\rangle \\
&= \left\langle S^{n+1}(\pi^{\mathbf{y}}(\mathbf{x}))_{0,t}, \mathbf{e} \right\rangle \\
&= \left\langle S^{n+1}(\pi^{\mathbf{y}}(\mathbf{x})), m_{0,t}^{\mathbf{e}} \right\rangle .
\end{aligned}$$

对于上面的第四个等式，记住 $\hat{}\mathbf{x}$ 的定义会有所帮助，参见（49）（并注意，$\widehat{\pi^{\mathbf{y}}(\mathbf{x}_{s,\ t})}$ 的定义类似），以及对于$\mathbf{x}_1$、.....、$\mathbf{x}_k \in T^{(n+1)}(E)$，有

$$(\mathbf{x}_1 \hat{\otimes} \ldots \hat{\otimes} \mathbf{x}_k)^{(n+1)} = \sum_{a \in \mathbb{N}^k,\, a_1 + \ldots + a_k = n+1} \mathbf{x}_1^{(a_1)} \hat{\otimes} \ldots \hat{\otimes} \mathbf{x}_k^{(a_k)}. \tag{51}$$

至此，引理 6.3 的证明结束。 □

Appendix A. 张量空间

回顾第 2.2 节的引言可知，向量值路径的迭代积分自然取值于张量空间（因此张量空间是粗糙路径与签名的基本构件）。无限维情形中的关键问题在于，不存在使代数张量空间完备的张量范数；特别地，张量范数没有典范选择：不同的（就其本身而言自然的）选择会导致不同的空间。

本节概述理解巴拿赫空间上的无穷维张量空间、粗糙路径和签名所需的理论，主要基于 [Hac19]。具体而言，在 A.1 节中，我们介绍代数张量空间。接着，在 A.2 节中，我们列出张量范数的一些理想性质。在 A.3 节和 A.4 节中，我们讨论三种常用范数：投射范数、单射范数和希尔伯特张量范数。最后，在 A.5 节中，我们讨论张量空间的预对偶。

A.1. 代数张量空间。给定两个实向量空间 V 和 W，代数张量空间 $V \otimes_a W$ 本质上是由元素对 $v \otimes w$（其中 $v \in V$ 和 $w \in W$）张成的向量空间，并满足如下规则：$\otimes$ 是一个双线性乘积，即

$$\alpha(v \otimes w) = (\alpha v) \otimes w = v \otimes (\alpha w), \tag{52}$$

$$(v_1 + v_2) \otimes w = v_1 \otimes w + v_2 \otimes w \quad \text{and} \quad v \otimes (w_1 + w_2) = v \otimes w_1 + v \otimes w_2, \tag{53}$$

对所有 v、v_1、$v_2 \in V$、w、w_1、$w_2 \in W$ 和 $\alpha \in \mathbb{R}$ 均成立。更形式化地说，代数张量空间定义为：将由 (53) 和 (52) 所产生的等价关系施加于 $V \times W$ 上的自由向量空间后得到的空间。因此，为给出正式定义，我们先回顾自由向量空间的定义：

集合 S 上的自由向量空间[3] $\mathscr{V}_{\text{free}}(S)$ 由形式线性组合 $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i s_i$ 构成，其中 $n \in \mathbb{N}_{>0}$、α_1、……、$\alpha_n \in S$，且 s_1、……、$s_n \in S$ 互不相同。特别地，$\mathscr{V}_{\text{free}}(V \times W)$ 中的元素形式为 $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (v_i, w_i)$，其中 $n \in \mathbb{N}_{>0}$、α_1、……、$\alpha_n \in \mathbb{R}$，且 (v_1, w_1)、……、$(v_n, w_n) \in V \times W$ 互不相同（不过请注意，如果 (v_1, w_1)、……、(v_n, w_n) 并非互不相同，那么 $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (v_i, w_i)$ 可以按规范方式与 $\mathscr{V}_{\text{free}}$ 中的一个元素对应）。

表示关于方程 53 和（52）的 0 等价类的 $\mathscr{V}_{\text{free}}(V \times W)$ 子集为

$$N \coloneqq \operatorname{span}\Bigg\{ \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \alpha_i \beta_j (v_i, w_j) - \Bigg(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j w_j \Bigg) \\ \text{for } m, n \in \mathbb{N}_{>0}, \alpha_i, \beta_j \in \mathbb{R}, v_i \in V \text{ and } w_j \in W \Bigg\}. \tag{54}$$

由此引出代数张量空间的定义：

定义 A.1（代数张量空间，参见 [Hac19]中的方程（3.9））。设 V, W 为实向量空间。代数张量空间 $V \otimes_a W$ 定义为商向量空间

$$V \otimes_a W \coloneqq \mathscr{V}_{\text{free}}(V \times W)/N,$$

其中，N 按方程（54）定义。$v \in V$ 与 $w \in W$ 的张量积记为 $v \otimes w$，定义为 (v, w) 的等价类。这种形式的元素称为初等张量。

根据定义可立即得出，初等张量张成 $V \otimes_a W$。定义了代数张量空间 $V \otimes_a W$ 之后，我们可以用归纳法定义 $\bigotimes_{i=1}^{n}{}_a V_i$：

$$\bigotimes_{i=1}^{n}{}_a V_i \coloneqq \bigotimes_{i=1}^{n-1}{}_a V_i \otimes_a V_n.$$

为简洁起见，我们经常使用记号 $V^{\otimes_a n} \coloneqq \bigotimes_{i=1}^{n}{}_a V$。根据以下命题，归纳定义多重乘积张量空间时所采用的顺序并不重要。

[3] 更精确的定义请参见 [Hac19] 中的第 3.1.2 节。

命题 A.2（代数张量空间的结合性，参见 [Hac19]中的引理 3.21）。 设V_1， V_2， V_3 为向量空间。那么，我们有一个自然同构

$$V_1 \otimes_a (V_2 \otimes_a V_3) \to (V_1 \otimes_a V_2) \otimes_a V_3,$$

使得

$$v_1 \otimes_a (v_2 \otimes_a v_3) \mapsto (v_1 \otimes_a v_2) \otimes_a v_3.$$

等价地，可以将 ${}_{i=1}^{n}\bigotimes_a V_i$ 定义为由多重线性积所确定的等价关系取商后的 $(V_1 \times \ldots \times V_n)$ 上的自由向量空间。

张量空间的一个关键特征是它相对于线性映射的泛性质（事实上，代数张量空间是唯一满足这一泛性质的空间，差一个同构）：

命题 A.3 (张量空间的泛性质，参见 [Hac19] 中的命题 3.23)。 设$\{V_i\}_{1\le i\le n}$和 U为向量空间。那么，对于任意多重线性映射 $\phi\colon (V_1 \times \ldots \times V_n) \to U$，存在唯一的线性映射 Φ: ${}_{i=1}^{n}\bigotimes_a V_i \to U$，使得

$$\phi((v_1, \ldots, v_n)) = \Phi(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n),$$

对于任意 $(v_1, \ldots, v_n) \in (V_1 \times \ldots \times V_n)$。

A.2. **拓扑张量空间**。 正如本节引言中所提到的，为无限维代数张量空间 ${}_{j=1}^{n}\bigotimes_a V_j$ 赋予范数并无唯一的规范方式：可以有多种选择，每种选择都会产生不同的拓扑张量空间。我们首先介绍拓扑张量空间的概念，并讨论相关范数的一些理想性质。我们采用 [Hac19]中的方法。

定义 A.4（拓扑张量空间）。 设 V_j、 $1 \le j \le n$为实向量空间，且 $\|\cdot\|$是 ${}_{j=1}^{n}\bigotimes_a V_j$上的一个范数。拓扑张量空间 ${}_{j=1}^{n}\bigotimes_{\|\cdot\|} V_j$ 定义为代数张量空间的 $\|\cdot\|$-闭包：

$$\bigotimes_{j=1}^{n}{}_{\|\cdot\|} V_j = \overline{\bigotimes_{j=1}^{n}{}_a V_j}^{\|\cdot\|}.$$

考虑巴拿赫空间的代数张量空间上的范数时，我们或许希望乘积上的范数能以某种方式与各个空间上的范数相一致。交叉范数 和合理交叉范数 性质便是描述这种一致性的方式：

定义 A.5（交叉范数，参见 [Hac19] 中的公式 (4.42)）。 设 $(V_j, \|\cdot\|_{V_j})$ 和 $1 \le j \le n$ 为实巴拿赫空间。称 $\|\cdot\|$ 上的范数 ${}_{j=1}^{n}\bigotimes_a V_j$ 为交叉范数，如果

$$\|v_1 \otimes \ldots \otimes v_n\| = \prod_{j=1}^{n} \|v_j\|_{V_j}, \quad \text{for all } v_1 \in V_1, \ldots, v_n \in V_n.$$

设 $(V_j, \|\cdot\|_{V_j})$ 和 $1 \le j \le n$ 为实巴拿赫空间，并设 $\phi_j^* \in V_j^*, 1 \le j \le n$。根据命题 A.3，我们可以将 $\phi_1^* \otimes \ldots \otimes \phi_n^*$ 视为 ${}_{i=1}^{n}\bigotimes_a V_i$ 上的线性泛函，满足

$$(\phi_1^* \otimes \ldots \otimes \phi_n^*)(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n) = \prod_{j=1}^{n} \phi_j^*(v_j), \quad v_1 \in V_1, \ldots, v_n \in V_n. \tag{55}$$

给定 ${}_{j=1}^{n}\bigotimes_a V_j$上的范数 $\|\cdot\|$，我们用 $({}_{j=1}^{n}\bigotimes_{\|\cdot\|} V_j)^*, \|\cdot\|^*)$ 表示 $({}_{j=1}^{n}\bigotimes_{\|\cdot\|} V_j, \|\cdot\|)$ 的（拓扑）对偶空间。现在可以给出合理交叉范数的定义：

定义 A.6（合理交叉范数，参见 [Hac19] 中的公式（4.44））。 设 $(V_j, \|\cdot\|_{V_j})$、 $1 \le j \le n$ 为实巴拿赫空间。若交叉范数 $\|\cdot\|$ 在 ${}_{j=1}^{n}\bigotimes_a V_j$ 合理，且满足

$$\|\phi_1^* \otimes \ldots \otimes \phi_n^*\|^* = \prod_{j=1}^{n} \|\phi_j^*\|_{V_j^*}, \quad \text{for all } \phi_1^* \in V_1^*, \ldots, \phi_n^* \in V_n^*. \tag{56}$$

在签名的背景下，交叉范数性质不足以体现张量范数所需的所有性质。事实上，张量代数的一个特征（见定义 2.3）是，必须能够将一个 $x_1 \in \bigotimes_{j=1}^{m}{}_{\|\cdot\|_m} E$ 与一个 $x_2 \in \bigotimes_{j=1}^{n}{}_{\|\cdot\|_n} E$ （$n, m \in \mathbb{N}_{>0}$）张量化，从而得到一个 $x_1 \otimes x_2 \in \bigotimes_{j=1}^{m+n}{}_{\|\cdot\|_{m+n}} E$ （即，存在一个 $x \in \bigotimes_{j=1}^{m+n}{}_{\|\cdot\|_{m+n}} E$，使得对于 $\bigotimes_{j=1}^{m}{}_{a} E$ 中任意逼近 $\|\cdot\|_m$ 的序列 $\{x_{1,i}\}_{i\in\mathbb{N}}$，以及 $\bigotimes_{j=1}^{n}{}_{a} E$ 中任意逼近 $\|\cdot\|_n$ 的序列 $\{x_{2,i}\}_{i\in\mathbb{N}}$，都有 $\{x_{1,n} \otimes x_{2,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 逼近 $\|\cdot\|_{n+m}$ 中的 x，并且我们令 $x_1 \otimes x_2 = x$）。若假设交叉范数性质满足以下推广形式，即可实现这一点：

$$\|x_1 \otimes x_2\|_{m+n} = \|x_1\|_m \, \|x_2\|_n. \tag{57}$$

以下定义概括了这些期望的性质：

定义 A.7（强交叉范数族，参见 [Hac19] 中的方程 (4.48c)）。设 E 为实巴拿赫空间，并且对 $n \in \mathbb{N}_{>0}$，令 $\|\cdot\|_n$ 为 $\bigotimes_{j=1}^{n}{}_{a} E$上的一个范数。设 $E^{\otimes n} = \bigotimes_{j=1}^{n}{}_{\|\cdot\|_n} E$。如果对所有 $n, m \in \mathbb{N}_{>0}$、$x_1 \in E^{\otimes m}$、$x_2 \in E^{\otimes n}$，都有 $x_1 \otimes x_2 \in E^{\otimes(n+m)}$，且

$$\|x_1 \otimes x_2\|_{m+n} = \|x_1\|_n \|x_2\|_m. \tag{58}$$

备注 A.8。 [Hac19]中的定义并不涉及无限个范数。若只关心 $n \in \{1, \dots, N\}$对应的 $\bigotimes_{j=1}^{n}{}_{a} E$ 上的范数，那么 $\bigotimes_{j=1}^{N}{}_{a} E$ 上的范数会自然地诱导出低阶张量空间上的范数，见 [Hac19，定理 4.107]。

备注 A.9。 设 E 为实巴拿赫空间，$\{\|\cdot\|_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ 为 $\{E^{\otimes n}\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$上的强交叉范数族。对所有 $n, m \in \mathbb{N}_{>0}$ 范数 $\|\cdot\|_{n+m}$ 都会在 $E^{\otimes m} \otimes_a E^{\otimes n}$上自然地诱导出一个范数，我们仍将其记为 $\|\cdot\|_{n+m}$。强交叉范数性质意味着

$$E^{\otimes m} \otimes_{\|\cdot\|_{n+m}} E^{\otimes n} = E^{\otimes(n+m)}. \tag{59}$$

备注 A.10。 在可容许张量范数族的定义中（见 2.1），我们要求张量范数为强交叉范数。除了要求 (57) 中等号成立，也可以只要求左侧小于或等于右侧，例如 [LCL07，定义 1.25] 中便采用了这种做法。不过，我们选择使该定义与拓扑张量空间文献中的定义保持一致。我们认为这一选择无妨。事实上，[LCL07，定义 1.25]，中较弱的可容许张量范数定义，结合命题 2.30 或设定 3.11 等假设，可确保强交叉范数性质成立，因此两种可容许张量范数的定义是一致的。类似地，若采用 [LCL07，定义 1.25]，中较弱的假设来定义强一致交叉范数（见定义 A.14），最终得到的也只是强交叉范数的标量倍数。尽管如此，对于只要求可容许张量范数的结果，可以采用 [LCL07，定义 1.25] 中较弱的定义。

强交叉范数的一个有用性质是：稠密子空间的代数张量积在张量空间中稠密：

命题 A.11。 设 E 是一个实巴拿赫空间，且 $\{E^{\otimes n}\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ 上有一个强交叉范数族 $\{\|\cdot\|_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$。设 E 的一个稠密子空间为 $E' \subseteq E$。那么 $\bigotimes_{j=1}^{n}{}_{a} E'$ 在 $E^{\otimes n}$ 中稠密。

证明。 我们用归纳法证明该命题。根据定义，基例 $n = 1$ 成立。假设该命题对某个 n 成立。根据方程 (59)，我们可以写成

$$E^{\otimes(n+1)} = \left(\bigotimes_{j=1}^{n}{}_{\|\cdot\|_n} E\right) \otimes_{\|\cdot\|_{n+1}} E.$$

现在我们可以应用 [Hac19，引理 4.40]，得出 $\bigotimes_{j=1}^{n+1}{}_{a} E'$ 在 $E^{\otimes n}$中是稠密的。 □

在签名的语境中，另一个自然的假设是对称性。为引入这一概念，我们首先定义 $\bigotimes_{j=1}^{n}{}_a V$ 上的置换算子（其中 V 是一个向量空间）：给定 $\{1,\dots,n\}$ 上的一个置换 σ，我们可以定义一个多重线性映射 $P_\sigma\colon\ V\times\ldots\times V\to\bigotimes_{j=1}^{n}{}_a V$、$P_\sigma\left(v_1,\ \ldots\ldots,\ v_n\right)=v_{\sigma(1)}\otimes\ldots\otimes v_{\sigma(n)}$。根据张量空间的泛性质（命题 A.3），我们可以将 P_σ 扩展为从 $\bigotimes_{j=1}^{n}{}_a V$ 到其自身的映射，将其记为 P_σ:

定义 A.12。设 V 是一个实巴拿赫空间，设 $n\in\mathbb{N}_{>0}$，并设 σ 是n的一个置换。我们将置换映射 $P_\sigma\colon\ \bigotimes_{j=1}^{n}{}_a V\to\bigotimes_{j=1}^{n}{}_a V$ 定义为满足以下条件的唯一线性映射:

$$P_\sigma(v_1\otimes\ldots\otimes v_n)=v_{\sigma(1)}\otimes\ldots\otimes v_{\sigma(n)},\quad v_1,\ldots,v_n\in V.$$

定义 A.13。设 V 是一个实巴拿赫空间。若张量范数 $\|\cdot\|$ 定义在 $\bigotimes_{j=1}^{n}{}_a V$ 上，且对于所有 $v\in\bigotimes_{j=1}^{n}{}_a V$以及 $\{1,\dots,n\}$的每个置换 σ，均有 $\|P_\sigma(v)\|=\|v\|$，则称该范数为对称 的，其中P_σ 是置换映射。

在签名的语境中，通常只需假设存在一个由适当且对称的交叉范数组成的强交叉范数族。然而，为了得到 C.5，我们实际上需要强一致交叉范数:

定义 A.14（强一致交叉范数，参见例如 [Hac19]中的定义 4.110）。设 E 为实巴拿赫空间，且 $\{\|\cdot\|_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ 是 $\{E^{\otimes n}\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$上的强交叉范数族。若对所有 $n,\ m\in\mathbb{N}_{>0}$以及所有 $A_1\in\mathscr{L}\left(E^{\otimes m}\right)$、$A_2\in\mathscr{L}\left(E^{\otimes n}\right)$，都有

$$\|A_1\otimes A_2\|_{\mathscr{L}(E^{\otimes(m+n)})}=\|A_1\|_{\mathscr{L}(E^{\otimes m})}\|A_2\|_{\mathscr{L}(E^{\otimes n})}.$$

注记 A.15。设 E 为实巴拿赫空间，且$\{\|\cdot\|_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ 是$\{E^{\otimes n}\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$上的强一致交叉范数族。则对所有 $n\in\mathbb{N}_{>0},\ \|\cdot\|_n$ 都是合理交叉范数。另见 [Hac19，引理 4.95a]。

A.3. **射影与注入张量范数**。交叉范数与合理交叉范数性质对初等张量有所说明，但作为推论，它们也对张量空间的一般元素施加了一个界。

为说明这一点，取（定义 A.5 意义下的）交叉范数 $\|\cdot\|$，其定义在 $\bigotimes_{\|\cdot\|}^{j=1}{}_n V_j$ 上，并固定代数张量空间中的一个元素 $\mathbf{v}$。每当 $\mathbf{v}$ 可以写成初等张量之和时，如下

$$\mathbf{v}=\sum_{i=1}^{k}v_{i_1}\otimes\ldots\otimes v_{i_n},$$

我们可以将交叉范数性质与三角不等式结合起来，从而得到

$$\|\mathbf{v}\|\leq\sum_{i=1}^{k}\|v_{i_1}\|\ldots\|v_{i_n}\|.$$

换言之，对任意 $v\in\bigotimes_{j=1}^{n}{}_a V_j$，我们有

$$\|\mathbf{v}\|\leq\inf\left\{\sum_{i=1}^{k}\|v_{i_1}\|\ldots\|v_{i_n}\|\ \ \middle|\ \ \mathbf{v}=\sum_{i=1}^{k}v_{i_1}\otimes\ldots\otimes v_{i_n},\,k\in\mathbb{N}_{>0}\right\}.$$

当 $\|\cdot\|$ 同时还是合理交叉范数时，我们可以作进一步观察：每当 $\phi_j\in V_j^*$ 满足 $\|\phi_j\|=1$ 时，我们有

$$\|(\phi_1\otimes\ldots\otimes\phi_n)\mathbf{v}\|\leq\|\mathbf{v}\|.$$

换言之，我们有

$$\|\mathbf{v}\|\geq\sup\left\{\|(\phi_1\otimes\ldots\otimes\phi_n)\mathbf{v}\|\ \ \middle|\ \ \phi_j\in V_j^*\text{ for all }1\leq j\leq n\text{ and }\|\phi_j\|=1\right\}.\tag{60}$$

这两个观察为射影与注入张量范数提供了直观依据；它们分别是“最大”和“最小”的合理交叉范数。

定义 A.16（射影张量范数，参见 [Hac19] 中的注释 4.96）。设 $\{V_j\}_{1\le j\le n}$ 为实巴拿赫空间。${}_{j=1}^{n}\bigotimes_a V_j$ 上的射影张量范数 $\|\cdot\|_\pi$（文献中也记作 $\|\cdot\|_\wedge$）定义为

$$\|\mathbf{v}\|_\pi \coloneqq \inf\left\{\sum_{i=1}^{k}\|v_{i_1}\|\dots\|v_{i_n}\| \;\middle|\; \mathbf{v}=\sum_{i=1}^{k} v_{i_1}\otimes\dots\otimes v_{i_n},\, k\in\mathbb{N}_{>0}\right\}.$$

拓扑张量空间 ${}_{j=1}^{n}\bigotimes_{\|\cdot\|_\pi} V_j$ 称为射影张量空间，也记作 ${}_{j=1}^{n}\bigotimes_\pi V_j$。

定义 A.17（内射张量范数，参见 [Hac19]中的注释 4.98）。设 $\{V_j\}_{1\le j\le n}$ 为巴拿赫空间。${}_{j=1}^{n}\bigotimes_a V_j$ 上的内射张量范数 $\|\cdot\|_\epsilon$（文献中也记作 $\|\cdot\|_\vee$）定义为

$$\|\mathbf{v}\|_\epsilon \coloneqq \sup\left\{\|(\phi_1\otimes\dots\otimes\phi_n)\mathbf{v}\| \;\middle|\; \phi_j\in V_j^* \text{ for all } 1\le j\le n \text{ and } \|\phi_j\|=1\right\}.$$

拓扑张量空间 ${}_{j=1}^{n}\bigotimes_{\|\cdot\|_\epsilon} V_j$ 称为内射张量空间，也记作 ${}_{j=1}^{n}\bigotimes_\epsilon V_j$。

命题 A.18. 设 E 为实巴拿赫空间，且 $\|\cdot\|_n$ 为 ${}_{j=1}^{n}\bigotimes_a E$, $n\in\mathbb{N}_{>0}$上的射影张量范数。则 $\{\|\cdot\|_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ 是一个对称强一致交叉范数族。内射张量范数也有类似的结论。

证明. 除对称性外，这一结论见 [Hac19，定理 4。111], 不同之处在于，他们将空间 ${}_{j=1}^{n}\bigotimes_a E$ 上的范数视为诱导范数，而非预先给定的范数（另见注 A.8）。不过， [Hac19]中证明了 ${}_{j=1}^{n}\bigotimes_a E$, $n\in\mathbb{N}_{>0}$上的所有诱导范数分别都是射影 [张量范数和内射]张量范数，因此采用调整后的定义后，结论仍然成立。对称性源于射影 [张量范数和内射]张量范数的定义都是对称的。□

A.4. **希尔伯特张量空间**。当我们处理希尔伯特空间上的张量空间时，可以定义所谓的希尔伯特张量范数。该范数将希尔伯特空间的内积带到张量空间上，从而张量空间本身也可以成为希尔伯特空间。

设 H_j 为关于 $1\le j\le n$的实希尔伯特空间。我们在 ${}_{j=1}^{n}\bigotimes_a H_j$ 的初等张量上定义乘积 $\langle .,\ .\rangle$，其设定为

$$\langle v_1\otimes\dots\otimes v_n, w_1\otimes\dots\otimes w_n\rangle = \prod_{j=1}^{n}\langle v_j, w_j\rangle, \tag{61}$$

其中$v_j,\ w_j\in H_j$，对所有 $1\le j\le n$成立。该乘积是一个半双线性型，因此我们可以将其延拓到整个${}_{j=1}^{n}\bigotimes_a H_j$。还可以证明该乘积是一个内积:

命题 A.19（见引理 4.147，若 [Hac19]）。设 $\{H_j\}_{1\le i\le n}$ 为实希尔伯特空间。由方程（61）的延拓得到的唯一半双线性映射${}_{j=1}^{n}\bigotimes_a H_j\times{}_{j=1}^{n}\bigotimes_a H_j\to\mathbb{K}$ 是一个内积。

定义 A.20（希尔伯特张量空间）。设 $\{H_j\}_{1\le i\le n}$ 为实Hilbert空间。希尔伯特张量空间 ${}_{j=1}^{n}\bigotimes_2 H_j$ 是由命题 A.19 的内积所生成的范数下的拓扑向量空间。特别地，希尔伯特张量空间本身也是另一个实Hilbert空间。

给定各个希尔伯特空间上的标准正交基，希尔伯特张量空间上存在一种自然的标准正交基构造:

命题 A.21 （见注记 4.148，载于 [Hac19]）。 设 $\{H_i\}_{1\leq i\leq n}$ 为实希尔伯特空间，并设 $\{e_{i,j}\}_{j\in I_i}$ 为 H_i的标准正交基， $1\leq i\leq n$。则，

$$\{e_{1,j_1}\otimes\ldots\otimes e_{n,j_n}\mid j_i\in I_i \text{ for } 1\leq i\leq n\}$$

是希尔伯特张量空间 $\bigotimes_{i=1}^{n}{}_2H_i$ 的一组标准正交基。

希尔伯特张量空间具备我们期望拓扑张量空间具有的所有性质：

命题 A.22. 希尔伯特张量范数是强一致交叉范数，且具有对称性。

证明. 参见 [Hac19，命题 4.150], ，并结合证明步骤 (v) 中的观察。张量范数的对称性由定义可知。□

注 A.23. 注意，也可以在希尔伯特张量积上定义单射张量范数和投射张量范数，但它们都不等同于希尔伯特张量范数。

A.5. **张量空间的预对偶**。设 E 是一个实巴拿赫空间，其预对偶为 F，并设 $\|\cdot\|$ 是 $\bigotimes_{j=1}^{n}{}_aE$ 上的一个合理交叉范数。我们有一个自然嵌入 $F\subset F^{**}=E^*$，因此，只要对所有 $1\leq i\leq n$ 都有 $y_i\in F$，我们就可以将 $y_1\otimes\ldots\otimes y_n$ 解释为 $\left(\bigotimes_{j=1}^{n}{}_{\|\cdot\|}E\right)^*$ 中的一个元素。

为了证明我们的通用逼近定理，我们必须赋予拓扑张量空间$E^{\otimes n}$ 一种不同于范数拓扑的拓扑，使得范数有界子集变得紧，同时形如 $y_1\otimes\ldots\otimes y_n$ 且满足 $y_i\in F$ 的线性求值仍然连续。我们通过取弱-* 拓扑来实现这一点。这要求我们所使用的张量空间具有预对偶。

在希尔伯特张量空间的情形下，根据里斯表示定理，预对偶的存在性显而易见，因为希尔伯特张量空间本身就是希尔伯特空间。对于射影张量范数，情况稍微复杂一些——事实上，命题 A.28 表明，我们所寻求的结果并非完全显然。不过，如果巴拿赫空间 E 具有逼近性质、拉东-尼科迪姆性质以及预对偶 F （见下文定义 A.24 和 A.25），那么 $(F\otimes_\epsilon F)^*=E\otimes_\pi E$，见下文命题 A.27。

定义 A.24 （逼近性质，参见 [Rya02] 中的命题 4.1）。 设 E 为一个实巴拿赫空间。那么，如果对于每个紧 $K\subset X$ 和每个$\epsilon>0$，都存在一个有限秩算子 $S\colon X\to X$，使得对每个 $x\in K$

$$\|x-Sx\|<\epsilon.$$

定义 A.25 （Radon–Nikodým 性质，见 [Rya02] 的第 5.1 节）。 设 E 为一个实巴拿赫空间。则 E 具有 *Radon–Nikodým 性质*，如果对每个有限测度 μ 以及每个有界线性算子 $T\colon L_1(\Omega,\mu)\to E$，都存在一个有界的 μ-可测函数$g\colon\Omega\to E$，使得

$$Tf=\int fgd\mu,\quad f\in L_1(\Omega,\mu).$$

大多数常用的巴拿赫空间都满足逼近性质；第一个反例直到1972年才由 Per Enflo 发现。Radon–Nikodým 性质则不那么常见，例如 L^1 空间就不具有这一性质。不过，仍有相当大的一类空间满足这一要求，如下面的命题所示。

命题 A.26. *[见 [Rya02]] 中的推论 5.42。每个具有预对偶的可分空间都具有 Radon–Nikodým 性质。*

命题 A.27。 设 E 是具有拉东–尼科迪姆性质和逼近性质的实巴拿赫空间，假设 E 具有预对偶 F，并令 $n\in\mathbb{N}_{>0}$。那么，

$$\bigotimes_{j=1}^{n}{}_\pi E=\left(\bigotimes_{j=1}^{n}{}_\epsilon F\right)^*.$$

特别地，形如 $y_1 \otimes \ldots \otimes y_n$ 的线性泛函，其中对所有 $1 \leq i \leq n$ 都有 $y_i \in F$，关于 $\bigotimes_{j=1}^{n}{}_{\pi} E$ 的弱* 拓扑是连续的。

证明。这可通过归纳应用 [Rya02，定理 5.33]，得出。该定理指出，$(X \otimes_\epsilon Y)^* = X^* \otimes_\pi Y^*$ 若 X^* 具有拉东–尼科迪姆性质，且 X^* 或 Y^* 具有逼近性质，则结论成立。对于基步，我们可以直接应用 [Rya02，定理 5.33]，得到

$$E \otimes_\pi E = (F \otimes_\epsilon F)^*_*.$$

接着，假设对于 $i \in \mathbb{N}_{>0}$，我们有 $\bigotimes_{j=1}^{i}{}_{\pi} E = \left(\bigotimes_{j=1}^{n}{}_{\epsilon} F\right)^*$，便可得到

$$\bigotimes_{j=1}^{i+1}{}_{\pi} E = E \otimes_\pi \bigotimes_{j=1}^{i}{}_{\pi} E = \left(F \otimes_\epsilon \bigotimes_{j=1}^{i}{}_{\epsilon} F\right)^* = \left(\bigotimes_{j=1}^{i+1}{}_{\epsilon} F\right)^*,$$

在中间的等号处，我们可以应用该定理，因为 $F^* = E$ 同时具有拉东–尼科迪姆性质和逼近性质。□

如上所述，现在我们证明，所寻求的结果并非总能得到：

命题 A.28. 设 H 是一个实*Hilbert*空间，$\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是 H的一组标准正交基。那么，不存在一种 $H \otimes_\epsilon H$ 上的拓扑，使得范数单位球相对紧，并且对于所有 i、$j \in \mathbb{N}$，线性算子 $e_i \otimes e_j$ 都是连续的。

证明. 考虑 $H \otimes_a H$ 中由下式给出的序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

$$x_n = \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes e_i.$$

由H¨older不等式，对于满足 $\|h_1\| = \|h_2\| = 1$ 的 $h_1, h_2 \in H$，有

$$|(h_1 \otimes h_2)(x_n)| = |\sum_{i=1}^{n} \langle e_i, h_1\rangle \langle e_i, h_2\rangle| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |\langle e_i, h_1\rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} |\langle e_i, h_2\rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \|h_1\| \|h_2\| = 1.$$

因此，根据内射张量范数的定义以及 $(e_1 \otimes e_1)x_n = 1$这一事实，我们有$\|x_n\|_\epsilon = 1$。

现在假设存在一种拓扑，使得 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 有一个子序列收敛到某个 $x \in H \otimes_\epsilon H$，且线性算子 $e_i \otimes e_j$ 是连续的。由于 $e_i \otimes e_j$ 是连续的，我们得到，对于任意 $i, j \in \mathbb{N}$，$e_i \otimes e_j(x) = \delta_{ij}$。

根据 [Wea18，引理 4.40]，，$\{e_i \otimes e_j\}_{i,j\in\mathbb{N}}$ 的张成空间在 $H \otimes_\epsilon H$中稠密。然而，对于该张成空间中的任意元素 y，存在 $i \in \mathbb{N}$ 使得 $(e_i \otimes e_i)(y) = 0$，因此

$$(e_i \otimes e_i)(x - y) = 1.$$

这意味着，对于$\{e_i \otimes e_j\}_{i,j\in\mathbb{N}}$的张成空间中的任意 y，都有 $\|x - y\|_\varepsilon \geq 1$，因此 x 不可能属于 $H \otimes_\epsilon H$。这与假设矛盾，故命题得证。□

Appendix B. The predual

引理 B.1. 设 E 是一个实巴拿赫空间，其预对偶为 F。设 $\{x_\lambda\}_{\lambda\in I}$ 是 E 中的一个网，在弱* 拓扑下收敛到 $x \in E$。则 $\|x\| \leq$ 下极限$_\lambda \|x_\lambda\|$。

证明。由于 F 是 E 的范数化集合，且存在弱-* 收敛，我们有

$$\|x\| = \sup_{y\in F, ||y||^*=1} \langle x, y\rangle = \sup_{y\in, ||y||^*=1F} \lim_{\lambda\in I} \langle x_\lambda, y\rangle \leq \liminf_{\lambda\in I} \sup_{y\in F, ||y||^*=1} \langle x_\lambda, y\rangle = \liminf_{\lambda\in I} \|x_\lambda\|.$$

□

引理 B.2。设 E 是一个以 F为预对偶的实巴拿赫空间。设 $\{x_\lambda\}_{\lambda\in I}$ 是 E中的一个范数有界网，且设 $x \in X$。此外，假设存在一个（范数）稠密集 $F' \subset F$，使得对所有 $y \in F'$

$$\langle x_\lambda, y\rangle \to \langle x, y\rangle .$$

于是 $x_\lambda \xrightarrow{*} x$。

证明。任取一个元素 $y \in F$。我们要证明

$$\lim_{\lambda\in I} \langle x_\lambda, y\rangle = \langle x, y\rangle .$$

设 $\epsilon > 0$。根据假设，存在 $y' \in F'$ 使得 $\|y - y'\| < \frac{\epsilon}{3M}$，其中 $M := \sup_\lambda \|x_\lambda\|$。取 λ'，使得对所有 $\lambda \geq \lambda'$，都有 $|\langle x_\lambda, y'\rangle - \langle x, y'\rangle| < \frac{\epsilon}{3}$。于是，对于任意 $\lambda \geq \lambda'$，有

$$\begin{aligned}|\langle x_\lambda, y\rangle - \langle x, y\rangle| \leq& |\langle x_\lambda, y\rangle - \langle x_\lambda, y'\rangle| + |\langle x_\lambda, y'\rangle - \langle x, y'\rangle| + |\langle x, y'\rangle - \langle x_\lambda, y\rangle| \\ \leq& \|y - y'\|^* \|x_\lambda\| + \frac{\epsilon}{3} + \|y - y'\|^* \|x\| \leq \epsilon,\end{aligned}$$

其中最后一步用到了引理 B.1。由于 ϵ 是任意的，这表明：

$$\lim_{\lambda\in I} \langle x_\lambda, y\rangle = \langle x, y\rangle ,$$

因此得证。 □

引理 B.3. 假设设定 *3.11* 成立。设 $\{x_\lambda\}_{\lambda\in I}$ 是 $E^{\otimes i}$ 中一个范数有界网，弱-* 收敛到 x；另设 $\{x'_\lambda\}_{\lambda\in I}$ 是 $E^{\otimes j}$ 中一个范数有界网，在弱-* 拓扑下收敛到 x'，其中 i、$j \in \mathbb{N}_{>0}$。则 $x_\lambda \otimes x'_\lambda \xrightarrow{*} x \otimes x_\lambda$。

证明。根据该设定的假设，$E^{\otimes(i+j)}$ 的预对偶是 $F^{\otimes\,(i+j)}$，其中 $F^{\otimes i} \otimes F^{\otimes j}$ 是一个稠密子空间。因此，由引理 B.2，只需证明

$$\left\langle x_\lambda \otimes x'_\lambda, y \otimes y'\right\rangle \to \left\langle x \otimes x', y \otimes y'\right\rangle ,$$

对任意 $y \in F^{\otimes i}$ 和 $y' \in F^{\otimes j}$ 均成立。不过，这基本上由假设可得，因为

$$\left\langle x_\lambda \otimes x'_\lambda, y \otimes y'\right\rangle = \langle x_\lambda, y\rangle \left\langle x'_\lambda, y'\right\rangle \to \langle x, y\rangle \left\langle x', y'\right\rangle = \left\langle x \otimes x', y \otimes y'\right\rangle .$$

□

Appendix C. 通过张量对偶空间分离点

Stone–Weierstrass 定理是第 3 节中所证明的通用逼近定理的基础。Stone–Weierstrass 定理的一个关键假设是，逼近函数集合能够分离点；在我们的通用逼近定理中，这意味着要求某个线性泛函集合能够分离$T((E))$中的点。本节将汇集一些与此背景下的点分离相关的结果。

引理 C.1. 设 E 是一个实巴拿赫空间，设 $F \subset E^*$ 能在 E中分离点，且 G 在 F中稠密。那么 G 能在 E中分离点。

证明。任取两个点 x，$x' \in E$。根据假设，存在 $y \in F$ 使得 $y(x) \neq y(x')$，因此特别有 $|y(x) - y(x')| = |y(x - x')| \geq C$，其中 $C > 0$。由于 G在 F中稠密，我们可以找到 $y' \in G$使得 $\|y - y'\|^* \leq \frac{C}{2\|x-x'\|^\circ}$ 于是 $|y'(x - x')| \geq |y(x - x')| - |(y - y')(x - x')| \geq \frac{1}{2}C$，因此 y' 分离 x 和 x'，这说明 G 具有点分离性质。□

下面的引理不仅确保 $(E^*)^{\otimes_a n}$ 能分离单射张量空间$E^{\otimes_\epsilon n}$ 中的点（见定义 A.17），还为更一般的结论奠定了基石——见下文推论 C.4。

引理 C.2. 设 E 为实巴拿赫空间，且设 $n \in \mathbb{N}_{>0}$。那么对所有 $u \in E^{\otimes_\epsilon n} \setminus \{0\}$，存在 $\phi_i \in E^*$，使得 $\|\phi\|^* = 1$，对于 $1 \leq i \leq n$，满足 $|(\phi_1 \otimes \ldots \otimes \phi_n)(u)| > 0$.

证明。设 $u \in E^{\otimes_\epsilon n} \setminus \{0\}$，且设 $u' \in E^{\otimes_a n}$ 满足 $\|u-u'\|_\epsilon < \frac{1}{4}\|u\|_\epsilon$。由三角不等式，我们有 $\|u'\|_\epsilon > \frac{3}{4}\|u\|_\epsilon$，因此根据内射张量范数的定义，存在 $\phi_i \in E^*$、 $1 \le i \le n$，使得对所有 $1 \le i \le n$，$\|\phi_i\|^* = 1$，并且

$$|(\phi_1 \otimes \ldots \otimes \phi_n)(u')| > \tfrac{1}{2}\|u\|_\epsilon.$$

由于 $\|\phi_i\|^* = 1$对所有 i成立，我们有 $\|\phi_1 \otimes \ldots \otimes \phi_n\|_\epsilon^* = 1$，因此 $|(\phi_1 \otimes \ldots \otimes \phi_n)(u-u')| \le \|u-u'\|_\epsilon$，从而

$$|(\phi_1 \otimes \ldots \otimes \phi_n)(u)| > \tfrac{1}{4}\|u\|_\epsilon > 0.$$

证明至此完成。 □

内射张量范数具有特殊性，因为它是可能的合理交叉范数中最小的。因此，只要某个序列在另一种合理交叉范数下是柯西序列，它在内射张量范数下也必然是柯西序列。因此，很容易得出这样的结论：内射张量空间比任何采用合理交叉范数的其他张量空间都大。如果确实如此，我们基本上就可以直接推广前一个引理。然而，并不能直接保证：两个在某种合理交叉范数下收敛到不同对象的柯西序列，在内射张量范数下也会收敛到不同对象。不过，我们可以证明，如果底层巴拿赫空间具有逼近性质（见定义 A.24），且交叉范数是强一致的（见定义 A.14），那么这一点就有保证。

在下面的命题中， $E^{\otimes_\epsilon n}$ 表示通过取内射张量范数所得到的拓扑张量空间 $\bigotimes_{j=1}^{n}{}_\epsilon E$。

命题 C.3. 设 E 是具有逼近性质的实巴拿赫空间，设 $\{\|\cdot\|_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$是$\{E^{\otimes n}\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$上的强一致交叉范数族，并设 $J_n\colon E^{\otimes_a n} \to E^{\otimes_\epsilon n}$， $n \in \mathbb{N}_{>0}$为典范嵌入。则对所有 $n \in \mathbb{N}_{>0}$， J_n 可延拓为一个有界单射 $\tilde{J}_n\colon E^{\otimes n} \to E^{\otimes_\epsilon n}$。

证明. 由于内射张量范数是最小的合理交叉范数（参见方程 (60)、定义 A.17 以及命题 A.18，并结合一致交叉范数是合理交叉范数这一事实），映射 J_n、 $n \in \mathbb{N}_{>0}$是压缩映射，因而可连续延拓为映射 $\tilde{J}_n\colon E^{\otimes n} \to E^{\otimes_\epsilon n}$、 $n \in \mathbb{N}_{>0}$。尚需证明映射 $\tilde{J}_n$、$n \in \mathbb{N}_{>0}$是单射。对于 J_2，这例如可由 [DF93第21节中的命题1得出。7]再稍加努力，该命题也可给出 J_n、 $n \in \mathbb{N}_{>0}$的单射性。

˜ ˜我们通过归纳法证明 J_n 的单射性。回顾一下，我们已经证明 J_2是单射的。假设对某个 $n \ge 3$， $\tilde{J}_{n-1}$是单射的。定义映射 $J_n'\colon E \otimes_a E^{\otimes n-1} \to E \otimes_\epsilon E^{\otimes n-1}$，并将 $\tilde{J}_n'$定义为其连续延拓 $\tilde{J}_n'\colon$ $E \otimes_{\|\cdot\|_n} E^{\otimes n-1} \to E \otimes_\epsilon E^{\otimes n-1}$。由于 E˜具有逼近性质，根据 [DF93，第 21 节中的命题 1，7], 延拓 J_n' 是单射的（注意， [DF93] 中张量范数的定义与我们对˜一致交叉范数的定义相对应）。我们可以如下分解 J_n （根据以下等式左右两侧在 $E^{\otimes_a n}$上相同这一事实）

$$\tilde{J}_n = (Id \otimes \tilde{J}_{n-1}) \circ \tilde{J}_n'.$$

根据 [DF93，第 4 节中的命题 2，3] 映射 $(Id \otimes \tilde{J}_{n-1})\colon E \otimes_\epsilon E^{\otimes n-1} \to E \otimes_\epsilon E^{\otimes_\epsilon n-1}$˜是单射。因此， J_n 是两个单射映射的复合，故其自身也是单射。最后，我们回顾一下，强交叉范数性质蕴含 $E^{\otimes n} = E \otimes_{\|\cdot\|_n} E^{\otimes n-1}$，见（59）。由于内射张量范数也是一种强交叉范数（见命题 A.18 ），证明至此完成。□

推论 C.4. 设 E 是具有逼近性质的实巴拿赫空间，设 $\{\|\cdot\|_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ 是 $\{E^{\otimes n}\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ 上的强一致交叉范数族。则对于 $n \in \mathbb{N}_{>0}$ 和 $u \in E^{\otimes n} \setminus \{0\}$，存在 $\phi_i \in E^*$，使得 $\|\phi\|^* = 1$ 对于 $1 \le i \le n$ 成立，从而

$$|(\phi_1 \otimes \ldots \otimes \phi_n)(u)| > 0.$$

证明. 设 $n \in \mathbb{N}_{>0}$、 $u \in E^{\otimes n} \setminus \{0\}$，并设 $u' \in E^{\otimes_a n}$ 满足 $\|u - u'\|_n < \frac{1}{4}\|u\|_n$。由于根据命题 C.3， $\tilde{J}_n$ 是单射的，我们可以应用引理 C.2，找到 $\phi_i \in E^*$、 $1 \leq i \leq n$，使得

$$|(\phi_1 \otimes \ldots \otimes \phi_n)(\tilde{J}_n u)| > C,$$

对于某个 $C > 0$。由于 $\tilde{J}_n$ 是压缩映射，我们有 $\|\tilde{J}_n u - \tilde{J}_n u'\|_n < \frac{1}{4}$，因此

$$|(\phi_1 \otimes \ldots \otimes \phi_n)(u')| = |\phi_1 \otimes \ldots \otimes \phi_n(\tilde{J}_n u')| > \tfrac{3}{4}C.$$

由于 $\|\cdot\|_n$ 是合理交叉范数，我们有 $\|\phi_1 \otimes \ldots \otimes \phi_n\|_n^* = 1$，因此由上述结果以及 $\|u - u'\|_n < \frac{1}{4}\|u\|_n$ 这一事实可得

$$|(\phi_1 \otimes \ldots \otimes \phi_n)(u)| > \tfrac{1}{2}C.$$

□

推论 C.4 表明，代数张量代数 $T_a(E^*)$ 在张量代数 $T((E))$ 中能够分离点（参见定义 2.3 和 2.9）：

命题 C.5。 设 E 是具有逼近性质的实巴拿赫空间， $\{\|\cdot\|_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ 是 $\{E^{\otimes n}\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ 上的强一致交叉范数族，且 $T((E))$ 是相应的张量代数。那么， $T_a(E^*)$ 在 $T((E))$ 中能够分离点。

证明。 要证明 $T_a(E^*)$ 能够分离 $T((E))$ 中的点，只需证明 $(E^*)^{\otimes_a i}$ 在 $E^{\otimes i}$ 中对任意 $i \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ 都能分离点（情形 $i = 0$ 和 $i = 1$ 显而易见）。不过，这可直接由推论 C.4 □得出。

Appendix D. Proof of Proposition 2.22

本节旨在证明命题 2.22。该命题指出，在具有逼近性质且其张量范数满足强一致交叉范数性质的巴拿赫空间中，第 2.4 节给出的群样乘性泛函的两种概念是一致的。

我们的证明基于以下结果，它是 [Gen 定理 3.5] 的推论（回顾一下，$\mathrm{Sh}(m,l)$ 表示所有 (m,l)-洗牌置换的集合，见定义 2.19）：

定理 D.1。 设 $T((E))$ 是某个巴拿赫空间 E上的张量代数。那么，乘性泛函 $\mathbf{x} \in T((E))$ 是群样的，当且仅当对所有 m、 $l \in \mathbb{N}$

$$\mathbf{x}^{(m)} \otimes \mathbf{x}^{(l)} = \sum_{\sigma \in Sh(m,l)} P_\sigma\left(\mathbf{x}^{(m+l)}\right). \tag{62}$$

证明。 [Gen] 中的定理 3.5 指出，对数映射$\mathbf{x}$ 是李级数，当且仅当$\mathbf{x}$ 满足方程 (62)。注意，在 [Gen], 中，类群元素被定义 为满足方程 (62) 的元素。另请注意， [Gen，定理 3.5] 包含关于所涉交叉范数的隐含假设，这些假设可见于 [Gen，第 10] 页；特别地，其中假设（且这对 [Gen，定理 3.5]的证明至关重要）交叉范数在定义 A.13 的意义下是对称的。 □

连同该 orem D.1，我们可以证明类群元素两种定义的等价性 .

命题 *2.22* 的证明。 首先，任取 $\mathbf{x} \in T((E))$ 并固定 m， $l \in \mathbb{N}$。对于任意 $\mathbf{y} \in (E^*)^{\otimes_a m}$， $\mathbf{y}' \in (E^*)^{\otimes_a l}$，注意到我们有

$$\begin{aligned}\left\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \sqcup\!\sqcup \mathbf{y}' \right\rangle &= \left\langle \mathbf{x}^{(m+l)}, \sum_{\sigma \in \mathrm{Sh}(m,l)} P_{\sigma^{-1}}\left(\mathbf{y} \otimes \mathbf{y}'\right) \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{\sigma \in \mathrm{Sh}(m,l)} P_\sigma\left(\mathbf{x}^{(m+l)}\right), \mathbf{y} \otimes \mathbf{y}' \right\rangle,\end{aligned} \tag{63}$$

并且

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \left\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}' \right\rangle = \left\langle \mathbf{x}^{(m)} \otimes \mathbf{x}^{(l)}, \mathbf{y} \otimes \mathbf{y}' \right\rangle. \tag{64}$$

若假设 $\mathbf{x}$ 是群样，则由定理 D.1 可得

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \left\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}' \right\rangle = \left\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \sqcup\!\sqcup \mathbf{y}' \right\rangle$$

对所有 $\mathbf{y} \in (E^*)^{\otimes_a m}$、$\mathbf{y}' \in (E^*)^{\otimes_a l}$均成立，因此 $\mathbf{x}$ 是弱类群似。

另一方面，若假设 $\mathbf{x}$ 是弱类群似，则由方程 (63) 和 (64)，对所有 $\mathbf{y} \in (E^*)^{\otimes_a m}$ 和 $\mathbf{y}' \in (E^*)^{\otimes_a l}$，有

$$\left\langle \sum_{\sigma \in \mathrm{Sh}(m,l)} P_\sigma \left(\mathbf{x}^{(m+l)} \right), \mathbf{y} \otimes \mathbf{y}' \right\rangle = \left\langle \mathbf{x}^{(m)} \otimes \mathbf{x}^{(l)}, \mathbf{y} \otimes \mathbf{y}' \right\rangle,$$

或者等价地

$$\left\langle \mathbf{x}^{(m)} \otimes \mathbf{x}^{(l)} - \sum_{\sigma \in \mathrm{Sh}(m,l)} P_\sigma \left(\mathbf{x}^{(m+l)} \right), \mathbf{y} \otimes \mathbf{y}' \right\rangle = 0. \tag{65}$$

因此，若我们假设 E 满足逼近性质，且存在一个强一致交叉范数族，则可应用推论 C.4 得出

$$\mathbf{x}^{(m)} \otimes \mathbf{x}^{(l)} = \sum_{\sigma \in \mathrm{Sh}(m,l)} P_\sigma \left(\mathbf{x}^{(m+l)} \right)$$

这意味着方程 (62) 成立，因此由定理 D.1 可知，$\mathbf{x}$是群样的。

为证明涉及 $G^{(n)}(E)$ 和 $G_w^{(n)}(E)$ 的类似结论，注意若定义$\pi_n \colon T((E)) \to T_{(n)}(E)$ 为典范投影映射，则有

$$\pi_n(\mathrm{Lie}(E)) = \mathrm{Lie}_n(E),$$

因此，由于对任意 $\mathbf{x} \in T((E))$，$(\exp \mathbf{x})^{(i)}$ 仅取决于 $\mathbf{x}$ 中阶数小于或等于 i 的项，我们也有

$$\pi_n(G(E)) = G^{(n)}(E).$$

此外，还有

$$\pi_n(G_w(E)) = G_w^{(n)}(E).$$

因此，关于 $G^{(n)}(E)$ 和 $G_w^{(n)}(E)$ 的结论可由我们对 $G(E)$ 和 $G_w(E)$ 已证明的结果推出。□

Appendix E. Tensor norms of the time extended Banach space

E.1. 交叉范数的一致性并不会自动得到保留。为了定义第 2.5 节中的时间扩展粗糙路径，我们假设（见命题 2.29 和 2.30）在 E 和 $\mathbb{R} \oplus E$ 上存在可容许张量范数族，并且它们按照假设 2.26 的意义相容。有人或许会想，能否从 E上的可容许张量范数族出发，并据此在 $\mathbb{R} \oplus E$ 上构造一个相容的可容许族。然而，似乎不存在一种规范方式，能够在保留强一致交叉范数性质的同时做到这一点（这种性质虽非可容许性所必需，但却是例如定理 3.6 所必需的）。本节旨在说明可能出现的问题。

令 $(e_i)_{i=1}^n$ 表示 $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$的标准正交基；对于 $1 \le i,\ j \le n$ 我们定义$e_{ij} = e_i \otimes e_j \in \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n$。我们通过映射将 $\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n$ 与 $\mathbb{R}^{n \times n}$ 等同起来

$$\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n \ni A \to (\langle A, e_{ij} \rangle)_{1 \le i,j \le n} =: (A_{ij})_{1 \le i,j \le n}.$$

我们赋予 $E = \mathbb{R}^2$ 范数 $\|(x,y)\| = \max(|x|, |y|)$，$(x,y) \in E$。此外，我们赋予 $E \otimes E \simeq \mathbb{R}^{2 \times 2}$ 范数

$$\|A\|_2 = \max_{1 \le i,j \le 2} (|A_{ij}|).$$

很容易验证，$\|\cdot\|_2$ 是 $E\otimes E$上的内射张量范数。特别地，根据命题 A.18，$(\|\cdot\|, \|\cdot\|_2)$ 是强一致对称交叉范数（因此特别是可容许的）。

接下来，我们赋予 $\mathbb{R}\oplus E\simeq\mathbb{R}^3$ 范数

$$|||(t,x,y)||| = |t| + \max(|x|,|y|), \quad (t,x,y)\in\mathbb{R}\oplus E,$$

并赋予 $(\mathbb{R}\oplus E)\otimes(\mathbb{R}\oplus E)\simeq\mathbb{R}^{3\times 3}$ 范数

$$|||A|||_2 = |A_{11}| + \max(|A_{12}|,|A_{13}|) + \max(|A_{21}|,|A_{31}|) + \max(|A_{22}|,|A_{23}|,|A_{32}|,|A_{33}|),$$

$A\in(\mathbb{R}\oplus E)\otimes(\mathbb{R}\oplus E)$。注意，典范嵌入 $J\colon(\mathbb{R}\oplus E)\otimes(\mathbb{R}\oplus E)\to\mathbb{R}\oplus E\oplus E\oplus(E\otimes E)$ 是一个同构，即假设 2.26 得以满足，因此命题 2.29 适用。然而，$(|||\cdot|||, |||\cdot|||_2)$并非强一致，下面我们将对此进行说明。

事实上，设 $\phi\in\mathscr{L}(\mathbb{R}\oplus E)$ 由 $\phi(t,x,y)=(x+y,x-y,x-y)$、$(t,x,y)\in\mathbb{R}\oplus E$ 给出。注意，

$$|||\phi(t,x,y)||| = |x+y| + \max(|x-y|,|x-y|) \le 2\max(|x|,|y|), \quad (t,x,y)\in\mathbb{R}\oplus E.$$

由于 $\phi((0,1,1))=2$，我们得出 $\|\phi\|_{\mathscr{L}(\mathbb{R}\oplus E)}=2$。

然而，我们断言 $\|\phi\otimes\phi\|_{\mathscr{L}((\mathbb{R}\oplus E)\otimes(\mathbb{R}\oplus E))}\ge 8 > \|\phi\|^2_{\mathscr{L}(\mathbb{R}\oplus E)}$，这意味着 $(|||\cdot|||, |||\cdot|||_2)$ 不是强一致交叉范数。为证明 $\|\phi\otimes\phi\|_{\mathscr{L}((\mathbb{R}\oplus E)\otimes(\mathbb{R}\oplus E))}\ge 8$，注意到

$$A := e_{22}+e_{23}+e_{32}-e_{33}\in(\mathbb{R}\oplus E)\otimes(\mathbb{R}\oplus E)$$

满足 $|||A|||_2=1$。另一方面，我们有

$$\begin{aligned}
(\phi\otimes\phi)e_{22} &= \phi(e_2)\otimes\phi(e_2) = (1,1,1)^T(1,1,1)\in\mathbb{R}^{3\times 3},\\
(\phi\otimes\phi)e_{23} &= \phi(e_2)\otimes\phi(e_3) = (1,1,1)^T(1,-1,-1)\in\mathbb{R}^{3\times 3},\\
(\phi\otimes\phi)e_{32} &= \phi(e_3)\otimes\phi(e_2) = (1,-1,-1)^T(1,1,1)\in\mathbb{R}^{3\times 3},\\
(\phi\otimes\phi)e_{33} &= \phi(e_3)\otimes\phi(e_3) = (1,-1,-1)^T(1,-1,-1)\in\mathbb{R}^{3\times 3}.
\end{aligned}$$

因此，

$$(\phi\otimes\phi)(A) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2\\ 2 & -2 & -2\\ 2 & -2 & -2\end{pmatrix}$$

因此，$|||(\phi\otimes\phi)(A)|||_2=8$，从而 $\|\phi\otimes\phi\|_{\mathscr{L}((\mathbb{R}\oplus E)\otimes(\mathbb{R}\oplus E))}\ge 8$（稍加努力还可以证明 $\|\phi\otimes\phi\|_{\mathscr{L}((\mathbb{R}\oplus E)\otimes(\mathbb{R}\oplus E))}=8$）。

E.2. **引理 2.28 的证明**。我们先证明它对希尔伯特张量范数成立。若$\{e_1,e_2,\dots\}$是 E的一组标准正交基，则可通过设定 $e_0:=(t,0)$，定义 $\mathbb{R}\oplus E$的一组标准正交基 $\{e_0,e_1,\dots\}$。因此，在同一化 $j\colon(\mathbb{R}\oplus E)\otimes_a(\mathbb{R}\oplus E)\to\mathbb{R}\oplus E\oplus E\oplus(E\otimes_a E)$下，希尔伯特张量范数由下式给出（例如，可利用命题 A.21）

$$|||(t,x,y,\mathbf{z})|||_2 = \sqrt{|t|^2+\|x\|^2+\|y\|^2+\|\mathbf{z}\|_2^2},$$

这尤其表明，将 j 延拓为映射 $j\colon(\mathbb{R}\oplus E)\otimes(\mathbb{R}\oplus E)\to\mathbb{R}\oplus E\oplus E\oplus(E\otimes E)$是可行的，且该映射是一个同胚。

对于射影张量范数，我们首先注意到，方程（18）中定义的范数等价于该范数

$$|||(t,x)||| := |t| + \|x\|, \tag{66}$$

因此，相对于这两个范数的射影张量范数也具有这一性质。因此，我们将针对取为方程（66）中的范数来证明该结论，因为在这种情况下，射影张量范数具有方便的显式形式：在 j 的同一化下：$(\mathbb{R}\oplus E)\otimes_a(\mathbb{R}\oplus E)\to\mathbb{R}\oplus E\oplus E\oplus(E\otimes_a E)$，$(\mathbb{R}\oplus E)\otimes_a(\mathbb{R}\oplus E)$ 上的射影范数表示为

$$|||(t,x,y,\mathbf{z})|||_\pi = |t| + \|x\| + \|y\| + \|\mathbf{z}\|_\pi, \tag{67}$$

由此我们可以得出该结论。为证明这一点确实成立，我们可以直接调整 [Hac19, Example 4.53], 的证明，该证明依赖于这样一个事实：射影交叉范数是最大的交叉范数（例如参见 [Hac19, Proposition 4.52]）。事实上，可以验证公式（67）定义了一个交叉范数。此外，对于任意其他交叉范数 $|||.|||_1$，都有

$$|||(0,0,0,\mathbf{x}\otimes\mathbf{y})|||_1 = |||(0,\mathbf{x})|||||(0,\mathbf{y})||| = \|x\|\|y\|. \tag{68}$$

特别地，可以用这个范数在 $E\otimes_a E$ 上诱导出一个交叉范数，定义为

$$\|\mathbf{z}\|_1 := |||(0,0,0,\mathbf{z})|||_1.$$

然而，射影交叉范数性质给出的交叉范数最大，因此

$$|||(0,0,0,\mathbf{z})|||_1 = \|\mathbf{z}\|_1 \le \|\mathbf{z}\|_\pi.$$

此外，对于其他分量，也可以得到与方程（68）类似的等式，因此由三角不等式可得

$$|||(t,x,y,\mathbf{z})|||_1 \le |t| + \|x\| + \|y\| + \|\mathbf{z}\|_\pi.$$

因此，方程（67）中定义的交叉范数是最大的交叉范数，故必定等于射影张量范数。

对于内射张量范数，其思路与射影张量范数相同，不同之处在于，内射张量范数是最小的合理交叉范数（见 [Hac19，命题 4.74]）。取 $(\mathbb{R}\oplus E)$ 上的等价范数为

$$|||(t,x)||| := \max(|t|,\|x\|).$$

内射张量范数定义为

$$|||(t,x,y,\mathbf{z})|||_\epsilon = \max(|t|,\|x\|,\|y\|,\|\mathbf{z}\|_\epsilon). \tag{69}$$

为说明右侧给出的范数确实是一个合理交叉范数，请注意， $\mathbb{R}\oplus E$ 的对偶空间中的元素可以写成 $(\phi_1,\ \phi_2)$，其中 $\phi_1\in\mathbb{R}^*$，而 $\phi_2\in E^*$ 满足$|||\phi_1,\ \phi_2|||^* = |\phi_1|+\|\phi_2\|^*$。类似于射影张量范数的情形，可以验证，对于 $(\mathbb{R}\oplus E)\otimes_a(\mathbb{R}\oplus E)$ 上的任意其他交叉范数 $|||.|||_1$，都有

$$|||(t,x,y,\mathbf{z})|||_\epsilon = \max(|t|,\|x\|,\|y\|,\|\mathbf{z}\|_\epsilon) \le |||(t,x,y,\mathbf{z})|||_1,$$

这就完成了证明。

Acknowledgments

作者感谢 Marten Wortel 在张量空间方面提供的帮助，特别是指出了命题 C.3。

References

[AJG25] E. Abi Jaber 和 L. A. G´erard。签名波动率模型：利用傅里叶进行定价与对冲。*SIAM J. Financial Math.*，16(2):606–642，2025年。doi:10.1137/24M1636952。[Bes01] M Bestvina。《拓扑学、几何学与群论中的 R 树》。载于 *Handbook of Geometric Topology* 55 91 2001 ，页码 – 。Elsevier，。网址：https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/ B9780444824325500032，doi:10.1016/B978-044482432-5/50003-2。[BFZ24] E. Bayraktar、Q. Feng 和 Z. Zhang。多维路径依赖期权的深度签名算法。 *SIAM J. Financial Math.*，15(1):194–214，2024年。doi:10.1137/23M1571563。[BGLY16] Horatio Boedihardjo、Xi Geng、Terry Lyons 和 Danyu Yang。粗糙路径的签名：唯一性。 *Advances in Mathematics*，293:720–737，2016年4月。网址：https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0001870816301104，doi:10.1016/j.aim.2016.02.011。[BHRS23] C. Bayer、P. P. Hager、S. Riedel 和 J. Schoenmakers。基于签名的最优停止。 *Ann. Appl. Probab.* 33 1 238 273, 2023 10 1214 22 1814 ，( ): – 。doi: . / -aap 。[BK14] Fred Espen Benth 和 Paul Kr¨uhner。商品市场中的无限维远期价格模型表示。 *Communications in Mathematics and Statistics*，2(1):47– 106，2014年3月。网址：http://link.springer.com/10.1007/s40304-014-0030-1，doi:10.1007/ s40304-014-0030-1。

[BK15] F. E. Benth 和 P. Kr¨uhner。能源市场中的衍生品定价：一种无限维方法。 *SIAM J. Financial Math.*，6(1):825–869，2015年。doi:10.1137/15100268X。[BKK25] F. E. Benth、S. Karbach 和 A. Khedher。测度值 CARMA 过程。 *arXiv preprint arXiv:2505.08852* 2025 ，。[Bog07] Vladimir Igorevich Bogachev。 *Measure theory*。施普林格，柏林 纽约，2007年。[CCK24] S. Cox、C. Cuchiero 和 A. Khedher。无限维 Wishart 过程。 *Electron. J. Probab.*，29 10 1214 24 1173：论文编号 123，46，2024年。doi：。/ -ejp 。[CDLL16] Thomas Cass、Bruce K. Driver、Nengli Lim 和 Christian Litterer。弱几何粗糙路径的积分。 *Journal of the Mathematical Society of Japan*，68(4)，2016年10月。网址：https://projecteuclid.org/journals/journal-of-the-mathematical-society-of-japan/volume-68/issue-4/On-the-integration-of-weakly-geometric-rough-paths/10.2969/jmsj/ 06841505.full，doi:10.2969/jmsj/06841505。[CDPGSF25] C. Cuchiero、L. Di Persio、F. Guida 和 S. Svaluto-Ferro。能源市场的测度值过程。 *Math. Finance*，35(2):520–566，2025年。doi:10.1111/mafi.12452。[CGMSF25] C. Cuchiero、G. Gazzani、J. M¨oller 和 S. Svaluto-Ferro。利用基于签名的模型联合校准标普500指数和芝加哥期权交易所波动率指数期权。 *Math. Finance*，35(1):161–213，2025年。doi:10.1111/mafi.12442。[CGSF23] C. Cuchiero、G. Gazzani 和 S. Svaluto-Ferro。基于签名的模型：理论与校准。*SIAM J. Financial Math.*，14(3):910–957，2023年。doi:10.1137/22M1512338。[CKK22a] S. Cox、S. Karbach 和 A. Khedher。正希尔伯特–施密特算子上的仿射纯跳过程。 *Stochastic Process. Appl.*，151:191–229，2022年。doi:10.1016/j.spa.2022.05.008。[CKK22b] Sonja Cox、Sven Karbach 和 Asma Khedher。无限维仿射随机波动率模型。 *Mathematical Finance*，32(3):878–906，2022年7月。网址：https://onlinelibrary.wiley. com/doi/10.1111/mafi.12347，doi:10.1111/mafi.12347。[CL16] Ilya Chevyrev 和 Terry Lyons。几何粗糙路径上测度的特征函数。 *The Annals of Probability*，44(6)，2016年11月。网址：https://projecteuclid.org/journals/annals-of-probability/volume-44/issue-6/Characteristic-functions-of-measures-on-geometric-rough-paths/10.1214/15-AOP1068. full，doi:10.1214/15-AOP1068。[CO22] Ilya Chevyrev 和 Harald Oberhauser。用签名矩刻画随机过程的概率分布。 *Journal of Machine Learning Research*，23(176):1–42，2022年。网址：http://jmlr.org/papers/v23/20-1466.html。[CPSF25] C. Cuchiero、F. Primavera 和 S. Svaluto-Ferro。连续函数作用于 càdlàg 路径的通用逼近定理与 Lévy 型签名模型。 *Finance Stoch.*，29(2):289–342，2025年。doi:10.1007/s00780-025-00557-5。[CS24] Thomas Cass 和 Cristopher Salvi。《粗糙路径及其在机器学习中的应用讲义》，2024年。版本号：1。网址：https://arxiv.org/abs/2404.06583，doi:10.48550/ ARXIV.2404.06583。[CST26] Christa Cuchiero、Philipp Schmocker 和 Josef Teichmann。加权空间上泛函输入映射的全局通用逼近。 *Constructive Approximation*，页码 1–76，2026年。[DF93] Andreas Defant 和 Klaus Floret。 *Tensor norms and operator ideals*。北荷兰数学研究丛书第 176 卷。北荷兰，阿姆斯特丹；纽约，1993年。[FH20] Peter K. Friz 和 Martin Hairer。 *A course on rough paths: with an introduction to regularity structures* 2020 10 1007 。Universitext。施普林格，Cham，瑞士，第二版。doi：。/ 978-3-030-41556-3。[FV10] P. K. Friz 和 N. B. Victoir。 *Multidimensional stochastic processes as rough paths: Theory and applications* 120 *Cambridge Studies in Advanced Mathematics* ，卷。剑桥大学出版社，剑桥，2010年。doi:10.1017/CBO9780511845079。[Gen] Xi Geng。《粗糙路径理论导论》。网址：https://researchers.ms. unimelb.edu.au/~xgge@unimelb/Files/Notes/Rough%20Path%20Theory.pdf。[GLKF13] L. G. Gyurk´o、T. Lyons、M. Kontkowski 和 J. Field。从金融数据流的签名中提取信息。 *arXiv preprint arXiv:1307.7244*，2013年。[GNS22] Erlend Grong、Torstein Nilssen 和 Alexander Schmeding。无限维空间上的几何粗糙路径。 *Journal of Differential Equations*，340:151–178，2022年。网址：https:// www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022039622005125，doi:10.1016/j.jde.2022. 08.034。[Gra13] B. Graham。用于在线字符识别的稀疏签名数组。 *arXiv preprint arXiv:1308.0371* 2013 ，。[Hac19] Wolfgang Hackbusch。 *Tensor spaces and numerical tensor calculus*。Springer 计算数学丛书第 56 卷。施普林格，Cham，瑞士，第二版，2019年。doi:10.1007/978-3-03035554-8。[HKK25] J. He、S. Karbach 和 A. Khedher。函数值仿射随机波动率模型中的远期合约期权定价。 *arXiv preprint arXiv:2508.14813*，2025年。

[HL10] Ben Hambly 和 Terry Lyons。有界变差路径签名的唯一性与约化路径群。 *Annals of Mathematics*，第109–167页，2010年。[KLPA20] J. Kalsi、T. Lyons 和 I. Perez Arribas。利用粗糙路径签名进行最优执行。

SIAM J. , ( ): –。doi: 。/

Financial Math. 11 2 470 493, 2020 10 1137 19 1259778

M。[LCL07] Terry J. Lyons、Michael Caruana 和 Thierry L

´ *Differential equations driven by rough paths:* evy。 , 。圣弗卢概

Ecole d'été de probabilités de Saint-Flour XXXIV 2004 34 ´ ´ ´

率暑期学校丛书中的第。施普林格，柏林，2007年。[LLN13] D. Levin、T. Lyons 和 H. Ni。从过去学习，预测未来的统计特征，学习一个演化系统。 *arXiv preprint arXiv:1309.0260*，2013年。[LNPA19] T. Lyons、S. Nejad 和 I. Perez Arribas。利用粗糙路径签名在离散时间下对奇异衍生品进行无模型定价的数值方法。 *Appl. Math. Finance*，26(6)：583–597，2019年。doi:10.1080/1350486X.2020.1726784。[LNPA20a] T. Lyons、S. Nejad 和 I. Perez Arribas。奇异衍生品的非参数定价与对冲。*Applied Mathematical Finance*，27(6)：457–494，2020年。[LNPA20b] Terry Lyons、Sina Nejad 和 Imanol Perez Arribas。奇异衍生品的非参数定价与对冲。 *Applied Mathematical Finance*，27(6)：457–494，2020年11月。URL：https: //www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/1350486X.2021.1891555, doi:10.1080/1350486X. 2021.1891555。[LNSV$^+$24] S. Liao、H. Ni、M. Sabate-V.、L. Szpruch、M. Wiese 和 B. Xiao。用于条件时间序列生成的签名-瓦瑟斯坦生成对抗网络。 *Math. Finance*，34(2)：622–670，2024年。doi:10.1111/mafi.12423。[PASS20] I. Perez Arribas、C. Salvi 和 L. Szpruch。用于定量金融的签名-SDE模型。载于 *Proceedings of the First ACM International Conference on AI in Finance* 1 8, 2020 ，第–页。[Rya02]

Raymond A. Ryan。 *Introduction to tensor products of Banach spaces*。施普林格数学专著。施普林格，伦敦；纽约，2002年。[Sto48] M. H. Stone。广义魏尔斯特拉斯逼近定理。 *Mathematics Magazine* 21 4 167, 1948 10 2307 3029750 = , ( ): 2024年3月。

URL：http://www.jstor.org/stable/ 。/ ?origin crossref，doi:10.2307/3029750。[Voi20] J¨urgen Voigt。 *A course on topological vector spaces*。数学精要教材。Birkh¨auser，Cham，2020年。[Wea18] Nik Weaver。 *Lipschitz algebras*。世界科技出版公司，新泽西州 伦敦 新加坡 北京 上海 香港 台北 金奈 东京，第二版，2018年。