arXiv:2603.03082v1 [eess.SY] 3 Mar 2026

离散时间系统的安全与鲁棒吸引域：基于集合的刻画与可认证的神经网络估计

Mohamed Serry、Maxwell Fitzsimmons 和刘俊

摘要—**分析具有吸引鲁棒不变集（RIS）的非线性系统，需要估计其吸引域（DOA）。尽管已有大量研究，但由于理论和计算方面的局限，尤其是在存在不确定性和状态约束时，准确刻画一般非线性系统的吸引域仍然颇具挑战。本文提出一种新颖的框架，用于准确估计具有连续动力学、开安全集、紧扰动集和一致局部 ℓ_p 稳定紧致鲁棒不变集的离散时间非线性不确定系统的安全（受状态约束）吸引域和鲁棒吸引域。一致 ℓ_p 稳定性的概念相当一般，并将一致指数稳定性和多项式稳定性作为其特例涵盖在内。我们通过在紧集度量空间上定义的新值函数来刻画吸引域，并建立这些值函数的基本数学性质，推导出相应的贝尔曼型（佐布夫型）泛函方程。在此刻画的基础上，我们构建物理信息神经网络（NN）框架，通过将推导出的贝尔曼型方程直接嵌入训练过程，学习相应的值函数。为从所学习的神经近似中获得安全鲁棒吸引域的可认证估计，我们进一步提出一种利用现有形式化验证工具的验证程序。通过四个涉及状态约束下非线性不确定系统的数值示例，展示了所提方法的有效性和适用性，并将其性能与文献中的现有方法进行了比较。**

索引词— **安全性、鲁棒性、非线性不确定系统值函数、贝尔曼型方程、神经网络、形式化验证**

一、引言

具有指定吸引鲁棒不变集（RIS）的离散时间不确定动力系统，其安全鲁棒吸引域（DOA）定义为这样一组初始状态：从这些状态出发的所有轨迹均保证收敛到该 RIS，同时在所有时间步长和所有允许的不确定性下满足给定的状态约束。该集合刻画了系统的安全性和鲁棒渐近可达性。吸引域在安全可靠控制策略的分析与设计中发挥着关键作用，因此相关计算与近似方法受到广泛研究（例如，参见 [1]–[4]）。本文研究具有连续右端项的一般离散时间非线性不确定系统的安全鲁棒吸引域估计问题。含不确定性的动力系统长期以来一直给系统分析与设计带来重大挑战，因为此类不确定性可能导致不稳定或不良行为。

在离散时间不确定系统中，通常研究渐近稳定平衡点（EP）的吸引域（即单点吸引鲁棒不变集）。对于未受扰动且无约束的动力学，已有多项研究成果（例如，见 [5]）。通常使用公共李雅普诺夫函数框架来估计平衡点的鲁棒吸引域。传统方法通常假设采用固定的李雅普诺夫模板，例如

M. S、M. F 和 J. L 就职于滑铁卢大学应用数学系，滑铁卢，安大略省，加拿大。本研究部分由加拿大自然科学与工程研究委员会资助（电子邮件： {mserry, mfitzsimmons, j.liu}@uwaterloo.ca）。M.S 亦就职于滑铁卢大学机械与机电工程系。

公共二次李雅普诺夫函数 [6], 若干正定二次函数的逐点最大值 [7],以及参数相关李雅普诺夫函数 [8]。这些函数的参数通常通过求解一组李雅普诺夫型矩阵不等式条件来确定（参见，例如，[9], [10]）。值得注意的是，为标称系统构造的李雅普诺夫函数对足够小的不确定性具有一定程度的鲁棒性 [11], ，即平衡点的渐近稳定性在某些类别的小扰动下得以保持。最近，已有人提出李雅普诺夫条件的基于区间的扩展，以便由给定的初始李雅普诺夫函数估计吸引域，同时显式考虑系统动力学中的不确定性 [12]。上述方法可能会对真实鲁棒吸引域给出保守的下近似，这主要是因为它们依赖于固定形式的李雅普诺夫函数模板。当纳入状态约束时，其性能甚至可能进一步下降，因为这些固定模板无法适应或刻画此类约束所诱导的几何结构。

近年来，针对各类系统，利用学习方法估计吸引域的研究日益受到关注。在这类方法中，神经网络（通常称为神经李雅普诺夫函数）经过训练以满足类李雅普诺夫条件（例如，见 [1],[3], [13]）。为验证所学习的神经李雅普诺夫函数能否得到有效的吸引域估计，会采用形式化验证工具，例如利用区间算术和混合整数规划的工具 [14], [15]。尽管神经网络具有很强的灵活性且训练效率高，但由于需要进行状态空间离散化，其验证仍然计算开销巨大。尽管如此，神经网络验证领域的最新进展，尤其是线性界传播和分支定界技术的进步，提升了此类过程的可扩展性和效率 [16]–[20]。

对于离散时间不确定系统，具有预先指定的渐近稳定平衡点的安全鲁棒吸引域可精确地表征为适当定义的、满足贝尔曼型泛函方程 [21]的值函数的子水平集。这一表征具有显著的理论优势：若能准确近似相应的值函数，其子水平集便可得出紧致且可能较大的安全鲁棒吸引域估计。现有求解这些泛函方程的数值方法主要依赖基于网格的离散化方法 [21]。这类方法计算开销大，因未量化离散化误差而无法提供形式化保证，且通常仅适用于低维系统。另一种方法是采用平方和（SOS）优化技术 [22] ，但这类方法仅适用于具有多项式表示的系统。此外， [21], [22] 中的分析依赖若干限制性较强的技术假设，包括系统动力学的局部利普希茨连续性以及安全集的有界性。此外，对这些研究提出的值函数进行逐点求值，计算开销也很大，因为这需要求解无限时域、非凸的非线性优化问题。相应的贝尔曼方程还涉及技术上颇具挑战性的上确界与下确界算子。总而言之，这些困难极大地

阻碍了将其整合到计算高效的学习型框架中。

在本工作中，我们提出了一种新颖框架，用于估计离散时间非线性不确定系统中与指定吸引不变集相关联的安全鲁棒吸引域。所提出的方法整合了三个关键组成部分：(i) 新发展的、用于刻画安全鲁棒吸引域的理论基于集合的价值函数；(ii) 神经网络在高维情形下表示这些值函数的强表达近似能力；(iii) 神经网络验证的最新进展，以确保所得吸引域估计的安全性与鲁棒性保证。

我们提出定义在紧集度量空间上的定制值函数，用以刻画安全鲁棒吸引域，同时允许通过可达集近似进行可处理的评估。这些值函数满足相应的贝尔曼型函数方程，其残差可通过集值表示与有限维空间之间的适当嵌入进行实际评估，从而支持基于物理信息学习的计算。与以往方法相比，我们的表述放宽了若干限制性技术假设。具体而言，我们仅要求系统右端项的连续性、安全集的开性以及RIS的一致 ℓ_p 稳定性，从而显著拓宽了适用范围。

尽管神经网络近似为所提值函数提供了灵活且富有表现力的表示，但它们本身并不足以实现可认证的吸引域估计，因为标准训练过程并未显式考虑近似误差。为克服这一局限，我们开发了一种验证框架，用以认证由神经网络近似得到的吸引域估计。所提框架将 [3] 中的方案扩展到离散时间不确定系统和指定的鲁棒不变集，而非平衡点。此外，它与最先进的神经网络验证工具兼容，包括 α β [17], ,-[18], [20], [23] [25] [26] CROWN以及dReal。

本文结构如下。第二节介绍必要的预备知识与记号。问题设定在第三节中给出。第四节概述安全鲁棒吸引域的关键性质。第五节给出新提出的值函数及其理论性质，以及基于Bell man型方程的刻画。第六节详细介绍神经网络值函数近似与可认证的吸引域估计。第七节通过数值示例说明所提方法。最后，第八节给出结论。

II. 符号与预备知识

令 $\mathbb{R}$、 $\mathbb{R}_+$、 $\mathbb{Z}$和 $\mathbb{Z}_+$ 分别表示实数集、非负实数集、整数集和非负整数集，并定义 $\mathbb{N} := \mathbb{Z}_+ \setminus \{0\}$。对于 a、 $b \in \mathbb{R}$ 且满足 $a \le b$的情形，令 $[a,b]$、 $]a,\ b[$、和 $]a,\ b]$ 分别表示$\mathbb{R}$ 中端点为 a 和 b的闭区间、开区间和半开区间。其离散对应形式分别记为 $[a;\ b]$、 $]a;\ b[$、$[a;\ b[$、和 $]a;\ b]$，其中例如$[a;\ b] := [a,b] \cap \mathbb{Z}$。在 $\mathbb{R}^n$中，关系 $<$、 $\le$、 $\ge$和 $>$按分量定义，例如 $a < b$，其中 a、 $b \in \mathbb{R}^n$当且仅当对所有$i \in [1$都有 $a_i < b_i$； $n]$。对于满足 $a \le b$的 a、 $b \in \mathbb{R}^n$，闭超区间（或超矩形） $[\![a,\ b]\!]$ 表示集合 $\{x \in \mathbb{R}^n \,|\, a \le x \le b\}$。令$\|\cdot\|$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 上的任意向量范数，并令 $\mathbb{B}_n$ 为由 $\|\cdot\|$诱导的 n维闭单位球。 n维零向量记为 0_n， n维全 1 向量记为1_n。令 id_n 表示 $n \times n$单位矩阵。对于 $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$， $\|A\|$ 表示由向量范数 $\|\cdot\|$诱导的 A的矩阵范数。

$X \subseteq \mathbb{R}^n$ 的内部和边界分别记为 $\mathrm{int}(X)$ 和 ∂X。 X，$Y \subseteq \mathbb{R}^n$ 的闵可夫斯基和定义为 $X + Y$: $= \{x + y, x \in X,\ y \in Y\}$. 为方便起见，对于单元素集合，我们将沿用上述记法；对于 $x \in \mathbb{R}^n$和$Y \subseteq \mathbb{R}^n$，记 $x+Y$表示 $\{x\}+Y$。 $X \subseteq \mathbb{R}^n$的非空紧子集类记为 $\mathcal{K}(X)$。我们有以下标准结果:

引理 *1*（证明见附录 *I*）：设 $X \subseteq \mathbb{R}^n$ 非空且为开集，并且 $\Omega \in \mathcal{K}(X)$。则存在 $\delta > 0$使得 $\Omega + \delta\mathbb{B}_n \subseteq X$.

给定一个点 $x \in \mathbb{R}^n$ 和一个集合 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$,

$$\mathrm{dist}(x, \Omega) := \inf_{y\in\Omega} \|x - y\|.$$

令$\mathbf{d}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{a}}$ 和$\mathbf{d}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{s}}$ 分别表示由向量范数 $\|\cdot\|$诱导的非空有界子集上的非对称/有向豪斯多夫距离和对称豪斯多夫距离；也就是说，两个非空有界子集 Ω $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ 之间的非对称和对称豪斯多夫距离定义如下:

$$\mathbf{d}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{a}}(\Omega, \Gamma) := \sup_{x\in\Omega} \mathrm{dist}(x, \Gamma),$$

and

$$\mathbf{d}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{s}}(\Omega, \Gamma) := \max\{\mathbf{d}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{a}}(\Omega, \Gamma), \mathbf{d}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{a}}(\Gamma, \Omega)\}.$$

等价地,

$$\mathbf{d}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{a}}(\Omega, \Gamma) = \inf\left\{\varepsilon > 0 \,|\, \Omega \subseteq \Gamma + \varepsilon\mathbb{B}_n\right\},$$

and

$$\mathbf{d}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{s}}(\Omega, \Gamma) := \inf\left\{\varepsilon > 0 \,|\, \Omega \subseteq \Gamma + \varepsilon\mathbb{B}_n, \Gamma \subseteq \Omega + \varepsilon\mathbb{B}_n\right\}.$$

若未特别说明对称性，豪斯多夫距离指其对称形式$\mathbf{d}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{s}}$。下面给出一个标准结果:

引理 *2*（证明见附录 *II*）：设 $X \subseteq \mathbb{R}^n$。则配备豪斯多夫距离 $\mathbf{d}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{s}}$ 的 $\mathcal{K}(X)$ 是一个度量空间。此外，若 X 是开集，则 $\mathcal{K}(X)$ 关于豪斯多夫距离是开集。

给定 f: $X \to Y$ 和 $P \subseteq X$， f 在 P 上的像定义为 $f(P)$: $= \{f(x)$ $| x \in P\}$。给定 f: $X \to X$ 和 $x \in X$，$f^0(x)$: $= x$，对于 $M \in \mathbb{N}$，我们递归地定义 $f^M(x)$ 如下： $f^k(x) = f(f^{k-1}(x))$ $k \in [1;\ M]$. 给定两个集合 X 和 Y， Y^X 表示所有满足 $X \to Y$ 的映射 f 的集合。

设 f： $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 是一个具有 N 个隐藏层的前馈神经网络。该网络递归定义如下。令 $z_0 = x \in \mathbb{R}^n$. 。对于每个隐藏层 $k \in [1;\ N]$, 定义

$$z_k = \sigma_k\left(\mathtt{W}^{(k)} z_{k-1} + \mathtt{b}^{(k)}\right),$$

其中，$\mathtt{W}^{(k)} \in \mathbb{R}^{d_k \times d_{k-1}}$ 为权重矩阵，$\mathtt{b}^{(k)} \in \mathbb{R}^{d_k}$ 为偏置向量，且 $d_0 = n$。整数 d_k 表示第 k个隐藏层中的神经元数。对于每个 $k \in [1; N]$， 激活映射σ_k: $\mathbb{R}^{d_k} \to \mathbb{R}^{d_k}$ 由标量函数 $\varphi_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 诱导，并按分量作用，也就是说，对于每个 $v = (v_1,\ \ldots,\ v_{d_k})$ $^\intercal \in \mathbb{R}^{d_k}$， $\sigma_k(v) = \left(\varphi_k(v_1),\ \ldots,\ \varphi_k(v_{d_k})\right)^\intercal$. 输出层定义为

$$z_{N+1} = \mathtt{W}^{(N+1)} z_N + \mathtt{b}^{(N+1)},$$

其中 $\mathtt{W}^{(N+1)} \in \mathbb{R}^{m\times d_N}$ 和 $\mathtt{b}^{(N+1)} \in \mathbb{R}^m$。网络映射可表示为 f $(x) = z_{N+1}$. 等价地， f 可以写成仿射映射与逐分量非线性激活算子的有限复合。

III. 问题表述

考虑离散时间不确定系统

$$x_{k+1} = f(x_k, w_k),\ k \in \mathbb{Z}_+, \tag{1}$$

其中，$x_k \in \mathbb{R}^n$ 是系统状态，$w_k \in \mathbb{R}^m$ 是扰动或不确定性，满足 $w_k \in W,\ k \in \mathbb{Z}_+$，其中 $W \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^m)$ 是已知的扰动集，$f\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ 是定义在 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ 上的连续函数，用于描述系统的动力学。利用函数 f，我们定义映射 $F\colon \mathcal{K}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ 如下：

$$F(X) := f(X, W) = \bigcup_{(x,w)\in X\times W} f(x, w),\ X \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n).$$

由于 f 的连续性以及 W 非空且紧致，映射 F 定义良好。此外：

引理 3（证明见附录 III）：F 关于豪斯多夫距离是连续的 $\mathbf{d}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{s}}$。

由初始条件 $x \in \mathbb{R}^n$ 和扰动信号 $\pi\colon \mathbb{Z}_+ \to W$ 所决定的系统 (1) 的轨迹 $\varphi_x^\pi\colon \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}^n$ 满足

$$\varphi_x^\pi(0) = x,\ \varphi_x^\pi(k+1) = f(\varphi_x^\pi(k), \pi(k)),\ k \in \mathbb{Z}_+.$$

$X \subseteq \mathbb{R}^n$ 在时刻 $k \in \mathbb{Z}_+$ 的可达集，在 (1) 的动力学作用下，定义如下：

$$\mathcal{R}(X, k) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid \exists (x, \pi) \in X \times W^{\mathbb{Z}_+} \text{ s.t. } y = \varphi_x^\pi(k)\}.$$

以下可达集的性质对本文的分析至关重要：

引理 4（证明见附录 IV）：对所有 $(X, k) \mathcal{K}(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{N},\quad \in$

$$\mathcal{R}(X, k) = F(\mathcal{R}(X, k-1)) = \mathcal{R}(F(X), k-1) = F^k(X).$$

引理 5（由引理 3 和引理 4 得出）：若 $X \in \mathcal{K}\mathbb{R}^n$），则对所有（$k \in \mathbb{Z}_+,\ \mathcal{R}(X, k) \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$。此外，对于固定的 $k \in \mathbb{Z}_+$，$\mathcal{R}\quad k\quad \mathcal{K}\,\mathbb{R}^n \to \mathcal{K}\,\mathbb{R}^n$ $(\cdot,)$: ( ) ( ) 关于豪斯多夫距离是连续的。

设 $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ 为开安全集，$\mathcal{A} \in \mathcal{K}(\mathcal{X})$ 为鲁棒不变集（RIS），即

$$x \in \mathcal{A} \Rightarrow f(x, W) \subseteq \mathcal{A}.$$

我们作出以下假设。

假设 1（均匀局部 ℓ_p 稳定性）：RIS $\mathcal{A}$ 是均匀局部 ℓ_p-稳定的。也就是说，存在常数

$$(r, M) \in]0, \infty[\times [1, \infty[,$$

一个数 $p \in]0,\ \infty[$，和一个函数

$$\lambda : [0, r] \times \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}_+,$$

使得：

1) 对每个 $k \in \mathbb{Z}_+$，映射 $s \mapsto \lambda(s,\ k)$ 在 $[0, r]$ 上连续且单调不减，并且 $\lambda(0,\ k) = 0$。此外，对每个固定的 $s \in [0, r]$，序列 $k \mapsto \lambda(s,\ k)$ 在 $\mathbb{Z}_+$ 上单调不增，并满足 $\lambda(s,\ 0) \le s$；

2) 数项级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda(r, k)^p$$

收敛；

3) 对所有满足 $\mathrm{dist}(x,\ \mathcal{A}) \le r$ 的 $x \in \mathcal{X}$ 以及所有扰动序列 $\pi \in W^{\mathbb{Z}_+}$，

$$\mathrm{dist}\big(\varphi_x^\pi(k), \mathcal{A}\big) \le M\,\lambda\big(\mathrm{dist}(x, \mathcal{A}), k\big),\qquad \forall k \in \mathbb{Z}_+.$$

备注：k n l e U s s u m A p t o n , t e o l o w n g l o : i h ld

1) 对于每个 $s \in [0, r]$，$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda(s,\ k)^p < \infty$。事实上，由于 $\lambda\quad k\qquad 0 \le \lambda\ s\ k\ \le \lambda\ r\ k\qquad s \in (\cdot,\ )$ 单调不减，因此 $[0, r]$ 对所有，$(,\ )\ (,\ )$，且适用比较判别法。

2) 级数 $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda(s, k)^p$ 在 $[0, r]$ 上一致收敛 .

这由魏尔斯特拉斯M判别法得出，其中 $M_k := \lambda(r, k)^p$。

3) 因此，函数 $s \longmapsto \sum_{k=0}^{\infty} \lambda(s, k)^p$ 在 $[0, r]$ 上连续。

4) 对每个 $s \in [0, r]$，当 $k \to \infty$ 时，$\lambda(s, k) \to 0$。5) 收敛到 $0\qquad \lambda\ s\ k\quad \in$ 且非负性 $[0, 1]\qquad k\qquad \bar{p}\ \ge\ p$ 意味着对于充分大的，$(,)$。因此，若 则对于充分大的 k，有 $\lambda(s, k)^{\bar{p}} \le \lambda(s, k)^p$，从而 $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda(s, k)^{\bar{p}} < \infty\quad \forall s \in [0, r]$.

注 2（ℓ_p 稳定性的普遍性）：假设 1 类似于标准的 $\mathcal{KL}$-稳定性假设（例如，参见 [27]），并增加了可求和性要求。尽管这些条件更强，ℓ_p-稳定性仍涵盖若干常见的衰减模式，包括如下的多项式衰减

$$\lambda(s, k) = \frac{s}{(1 + bsk)^q},$$

其中 $b,\ q \in]0,\ \infty[$，以及如下的指数衰减

$$\lambda(s, k) = s\,b^k,$$

对于某个 $b \in]0,\ 1[$。

$\mathcal{A}$ 在 $\mathcal{X}$ 内至 $\mathcal{D}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{X}} \subseteq \mathbb{R}^n$ 的安全鲁棒吸引域定义为

$$\mathcal{D}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{X}} := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \begin{array}{c} \forall \pi \in W^{\mathbb{Z}_+},\ \varphi_x^\pi(k) \in \mathcal{X}\ \forall k \in \mathbb{Z}_+, \\ \lim_{k\to\infty} \mathrm{dist}(\varphi_x^\pi(k), \mathcal{A}) = 0 \end{array} \right\}.$$

$\mathcal{D}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{X}}$ 中包含 $\mathcal{A}$ 且在（1）的动力学作用下不变的任意子集，称为在 $\mathcal{X}$ 内至 $\mathcal{A}$ 的安全鲁棒吸引区域（吸引域）。我们的目标是计算一个较大的安全鲁棒吸引区域，使其尽可能接近 $\mathcal{D}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{X}}$。

IV. 吸引域的性质

在本节中，我们研究安全鲁棒吸引域的性质。为此，我们将首先研究安全鲁棒一致吸引域（DOUA）的性质：

$$\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{X}} := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \begin{array}{c} \mathcal{R}(\{x\}, k) \subseteq \mathcal{X}\ \forall k \in \mathbb{Z}_+, \\ \lim_{k\to\infty} \mathbf{d}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{a}}(\mathcal{R}(\{x\}, k), \mathcal{A}) = 0 \end{array} \right\},$$

然后，我们将在本节末尾证明，该集合等于安全鲁棒吸引域。这一等价关系尤为值得注意。在连续时间情形中，通常只能证明吸引域与一致吸引域的内部重合（例如，见 [28]）；或者，需要在附加的结构性假设下才能证明二者相等，例如右端的像具有凸性 [29]。相比之下，在当前的离散时间情形中，我们无需施加此类限制性条件，即可证明二者完全相等。

引理 6：$\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{X}}$ 是开集。

证明：回顾假设 1 中 M、r、λ 的定义。令 $\theta \in]0$、$\infty[$ 满足 $\mathcal{A} + \theta\mathbb{B}_n \subseteq \mathcal{X}$，根据引理 1。固定 $x_0 \in \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{X}}$。由于 $\mathcal{R}(\{x_0\}$、$\cdot)$ 在 $\mathcal{X}$ 内收敛到 $\mathcal{A}$（关于 $\mathbf{d}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{a}}$），存在 $N \in \mathbb{Z}_+$ 使得 $\mathcal{R}(\{x_0\}$、$j) \in \mathcal{X}\ \forall j \in [0;\ N-1]$ 且 $\mathcal{R}(\{x_0\}$、$N) \subseteq \mathcal{A} + (\tilde{r}/2)\mathbb{B}$，其中 $\tilde{r} \in \mathbb{R}_+$ 满足

$$0 < \tilde{r} \le \min\left\{ \frac{\theta}{M}, r \right\}.$$

令 $\rho_j \in \mathbb{R}_+,\ j \in [0;\ N-1]$ 为满足 $\mathcal{R}(\{x_0\}, j) + \rho_j\mathbb{B}_n \subseteq \mathcal{X}$，$j \in [0;\ N-1]$. 的正数。由于 $\mathcal{X}$ 非空且为开集、$\mathcal{R}(\{x_0\}, \cdot)$ 的值集紧致，以及引理 1，这样的数确实存在。回顾引理 4 可知，对于所有 $y \in \mathbb{R}^n$ 和 $j \in \mathbb{Z}_+$，$\mathcal{R}(\{y\}, j) = F^j(\{y\})$。利用

引理 5 的连续性结果，存在 $\delta \in]0,\infty[$，使得对于所有 $x \in x_0 + \delta\mathbb{B}_n$，

$$\mathbf{d}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{s}}(F^j(\{x\}), F^j(\{x_0\})) \le \rho_j,\ j \in [0; N-1],$$

and

$$\mathbf{d}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{s}}(F^N(\{x\}), F^N(\{x_0\})) \le \frac{\tilde{r}}{2}.$$

因此，对于所有 $x \in x_0 + \delta\mathbb{B}_n$，

$$\mathcal{R}(\{x\}, j) = F^j(\{x\}) \subseteq \mathcal{R}(\{x_0\}, j) + \rho_j\mathbb{B}_n \subseteq \mathcal{X},$$

$j \in [0;\ N-1]$，并且

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(\{x\}, N) =& F^N(\{x\}) \subseteq F^N(\{x_0\}) + (\tilde{r}/2)\mathbb{B}_n \\ &\subseteq \mathcal{A} + \frac{\tilde{r}}{2}\mathbb{B}_n + \frac{\tilde{r}}{2}\mathbb{B}_n = \mathcal{A} + \tilde{r}\mathbb{B}_n.\end{aligned}$$

局部 ℓ_p 稳定性表明，对于所有 $x \in x_0 + \delta\mathbb{B}_n$，

$$\mathbf{d}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{a}}(F^{N+k}(\{x\}), \mathcal{A}) \le M\lambda(\mathbf{d}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{a}}(F^N(\{x\}), \mathcal{A}), k) \le M\lambda(\tilde{r}, k),$$

$k \in \mathbb{Z}_+$。因此，对于所有 $x \in x_0 + \delta\mathbb{B}_n$，$\lim_{j\to\infty} \mathbf{d}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{a}}(\mathcal{R}(\{x\}, j)\ \mathcal{A}) = 0$. 上述不等式和 $\tilde{r}$ 的定义意味着，对于所有 $x \in x_0 + \delta\mathbb{B}_n$，

$$F^{N+k}(\{x\}) \subseteq \mathcal{A} + M\tilde{r}\mathbb{B}_n \subseteq \mathcal{A} + \theta\mathbb{B}_n \subseteq \mathcal{X},\ k \in \mathbb{Z}_+.$$

因此，对于所有 $x \in x_0 + \delta\mathbb{B}_n$，$x \in \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{X}}$。由于 $x_0 \in \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{X}}$ 是任意的，证明完毕。 ■

上述引理的证明稍加改动即可得出以下结论：

引理 7：对于每个 $x \in \mathcal{X}$，存在 $\delta_x > 0$（取决于 x），使得 $\mathcal{R}(x + \delta_x\mathbb{B}_n,\ k) \subseteq \mathcal{X}\ \forall k \in \mathbb{Z}_+$，并且 $\lim_{k\to\infty} \mathbf{d}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{a}}(\mathcal{R}(x + \delta_x\mathbb{B}_n,\ k)\ \mathcal{A}) = 0$.

基于上述结果，我们得到以下重要性质：

引理 8：$X \in \mathcal{K}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{X}})$，$\mathcal{R}(X, k) \subseteq \mathcal{X}\ \forall k \in \mathbb{Z}_+$：对于任意 $\varepsilon > 0$，有 $\lim_{k\to\infty} \mathbf{d}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{a}}(\mathcal{R}(X, k)\ \mathcal{A}) = 0$.

证明：对于每个 $x \in X$，令 $\delta_x > 0$ 按照引理 7 中的定义。我们有 $X \subseteq \bigcup_{x\in X} x + \delta_x\mathbb{B}_n$. X 的紧致性意味着存在有限的 $N \in \mathbb{N}$ 和有限集 $\{x_i\}_{i=1}^N \subseteq X$，使得 $X \subseteq \bigcup_{i\in[1;\ N]} x_i + \delta_{x_i}\mathbb{B}_n$. 利用引理 7，我们有

$$\mathcal{R}(\bigcup_{i\in[1;N]} x_i + \delta_{x_i}\mathbb{B}_n, k) = \bigcup_{i\in[1;N]} \mathcal{R}(x_i + \delta_{x_i}\mathbb{B}_n, k) \subseteq \mathcal{X},$$

$k \in \mathbb{Z}_+$，并且

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} \mathbf{d}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{a}}(\mathcal{R}(\bigcup_{i\in[1;N]} x_i + \delta_{x_i}\mathbb{B}_n, k), \mathcal{A}) \le \\ \lim_{k\to\infty} \sup_{i\in[1;n]} \mathbf{d}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{a}}(x_i + \delta_{x_i}\mathbb{B}_n, \mathcal{A}) = 0.\end{aligned}$$

■

接下来，我们证明安全鲁棒DOUA在式（1）的动力学下具有不变性：

引理 9：对于所有 $X \in \mathcal{K}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{X}})$，$F(X) \in \mathcal{K}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{X}})$（$\mathcal{K}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{X}})$ 在 F 下的不变性）。

证明：根据引理 8，对于 $X \in \mathcal{K}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{X}})$，$\mathcal{R}(X, k) \subseteq \mathcal{X}\ \forall k \in \mathbb{Z}_+$ 并且 $\lim_{k\to\infty} \mathbf{d}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{a}}(\mathcal{R}(X,\ k)\ \mathcal{A}) = 0$. 这意味着，利用半群性质（引理 4），$\mathcal{R}(X,\ k+1) = \mathcal{R}(F(X),\ k) \in \mathcal{X}\ \forall k \in \mathbb{Z}_+$ 并且 $\lim_{k\to\infty} \mathbf{d}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{a}}(\mathcal{R}(X,\ k+1)\ \mathcal{A}) = \lim_{k\to\infty} \mathbf{d}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{a}}(\mathcal{R}(F(X),\ k)\ \mathcal{A}) = 0$. 因此，$F(X) \in \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{X}}$。 ■

现在，我们证明吸引域与一致吸引域之间的等价性。定理 10：

$\mathcal{D}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{X}} = \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{X}}$.

证明：定义 $F: \mathcal{X} \to \mathcal{K}(\mathcal{X})$，$F(x) = F(\{x\})$，$x \in \mathcal{X}$。那么，$\hat{F}$ 是一个紧值连续多值映射。此外，定义 $\hat{F}^-(V) := \{x \in \mathcal{X}: \hat{F}(x) \subseteq V\}$，$V \subseteq \mathcal{X}$ 以及 $\hat{F}^+(V) := \{x \in \mathcal{X}: \hat{F}(x) \cap V \neq \emptyset\}$，其中 $\hat{F}(x) := F(x)$。

首先，注意到 $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{X}}$ 对于所有是不变的 $\hat{F}$，我们都有 $\hat{F}(x) \subseteq \mathcal{D}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{X}}$。其次，注意到 $\mathcal{D}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{X}} \supseteq \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{X}}$。这些结论可由定义和前面的引理直接推出。因此，我们只需证明 $\mathcal{D}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{X}} \subseteq \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{X}}$。

令 $\Omega = \mathcal{D}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{X}} \setminus \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{X}}$。我们断言 $\Omega \subseteq \hat{F}^-(\Omega)$。为此，若 $x \in \Omega \cap \mathbb{R}^n \setminus F^-(\mathbb{R}^n \setminus F(x) \subseteq \mathcal{D}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{X}})$，则 $x \in \mathcal{D}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{X}}$，且 $F(x) \subseteq (\hat{F}(\Omega))$，则可得 $\hat{F}(x) \subseteq \Omega$（这可直接由 $\hat{F}$ 的定义推出）。因此，$\hat{F}(x) \subseteq \mathcal{D}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{X}} \cap \mathbb{R}^n \setminus \Omega = \mathcal{D}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{X}} \setminus (\mathcal{D}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{X}} \setminus \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{X}}) = \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{X}}$。由于 $\hat{F}(x)$ 是紧致的，我们有 $\hat{F}(x) \in \mathcal{K}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{X}})$。将 $\hat{F}$ 替换为 $F(\{x\}) = F(x)$，并回顾引理 4，应用引理8可得 $x \in \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{X}}$。但这与 Ω 的定义矛盾。因此，$\Omega \subseteq \hat{F}^-(\Omega)$。

$\hat{F}$ 满足 $B \subseteq F^-(B)$ 的任意集合 $B \subseteq \mathbb{R}^n$ 通常称为（$\hat{F}$ 的）可行集。可行集通常被认为与不变集互为对偶。更重要的是，B 是可行集，当且仅当对于所有 $x \in B$，都存在 $\pi \in W^{\mathbb{Z}_+}$ 使得 $\varphi_x^\pi(k) \in B\ \forall k \in \mathbb{Z}_+$。证明见 [30, 命题 3.1。8]

$\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{X}}$ 的开性和 $\mathcal{A}$ 的紧致性意味着存在某个 $\delta > 0$ 使得 $\mathcal{A} + \delta\mathbb{B}_n \subset \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{X}}$（引理 1）。因此可得 $\Omega \subseteq \mathcal{X} \setminus (\mathcal{A} + \delta\mathbb{B}_n)$。由此，任何保持在 Ω 中的轨迹都不可能收敛到 $\mathcal{A}$（关于 dist）。若 $\Omega \neq \emptyset$，则会产生矛盾（由于 $\Omega \subseteq \mathcal{D}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{X}}$，因此每条始于 Ω 的轨迹都收敛到 $\mathcal{A}$）。因此 $\Omega = \emptyset$，结论得证。

■

V. 值函数

本节介绍定义在紧集度量空间上的新型值函数，用于刻画安全鲁棒吸引域（等价地，安全鲁棒DOUA）。在构造这些值函数时，我们定义函数

$$\alpha: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$$

and

$$\gamma: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+ \bigcup \{\infty\},$$

满足以下性质：

- α 连续，且满足

$$\underline{\alpha}\mathrm{dist}(x, \mathcal{A})^{\bar{p}} \le \alpha(x) \le \overline{\alpha}\mathrm{dist}(x, \mathcal{A})^{\bar{p}},\ x \in \mathbb{R}^n, \quad (2)$$

对于某个 $\underline{\alpha}, \overline{\alpha} \in]0,\ \infty[$ 和 $\bar{p} \in [p, \infty[$。

- γ 在 $\mathcal{X}$ 上有限且连续，且存在 $\underline{\gamma} \in]0,\ \infty[$ 使得

$$\gamma(x) \ge \underline{\gamma}\ \forall x \in \mathcal{X}, \quad (3)$$

$$x \notin \mathcal{X} \Rightarrow \gamma(x) = \infty,$$

并且，对于任意序列 $\{x_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$，

$$x_k \to x \in \partial\mathcal{X} \Rightarrow \gamma(x_n) \to \infty.$$

备注3：可以保证存在具有上述性质的 α（例如，可以令 $\alpha(x) = \mathrm{dist}(x,\ \mathcal{A})^p,\ x \in \mathbb{R}^n$）。

注4：对于各种类别的集合，函数 γ 的存在性都有保证。例如，若 $\mathcal{X}$ 是连续函数 $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 的严格1-下水平集，即 $\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^n | g(x) < 1\}$，那么我们可以定义

$$\gamma(x) := \gamma_0 + \frac{1}{\mathrm{ReLu}(1 - g(x))},$$

其中 $1/0 := \infty$，ReLU: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是整流线性单元函数，定义为 $\mathrm{ReLU}(x) = (x+|x|)/2,\ \ x \in \mathbb{R}$，而 $\gamma_0 > 0$是任意正数。根据对 γ的这一定义，下界条件在 $\gamma = \gamma_0$下成立。对于 $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$，我们只需令 $\gamma(\cdot) = 1$。

注*5*：假设安全集 $\mathcal{X}$ 表示为 N_{safe} 个开集 $\mathcal{X}_i, i \in [1; N_{\mathrm{safe}}]$的交集，即

$$\mathcal{X} = \bigcap_{i=1}^{N_{\mathrm{safe}}} \mathcal{X}_i,$$

其中每个 $\mathcal{X}_i$ 均包含 RIS $\mathcal{A}$，并定义为连续函数 $g_i \ \ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \qquad \mathcal{X}_i = :$，的严格 $\{x \in \mathbb{R}^n \,|\, g_i\ x\ < 1\} \qquad \mathcal{X}$ 1-下水平集，即 ( )。那么，其自身也可表示为函数 $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 的严格1-下水平集，该函数定义为 $g(x) := \max_{i \in [1; N_{\mathrm{safe}}]} g_i(x)\ \ x \in \mathbb{R}^n$。

此外，可按照注4中的描述，利用已得到的函数 g 构造函数 γ。或者，也可以采用基于复合的构造方法：对于每个 $\mathcal{X}_i$，根据注4计算 γ_i，并定义 $\gamma(\cdot) := \sum_{i=1}^{N_{\mathrm{safe}}} \gamma_i(\cdot)$。

将值函数 $\mathcal{V}, \mathcal{W}$: $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}_+ \bigcup \{\infty\}$ 定义如下：

$$\mathcal{V}(X) := \sum_{k=0}^{\infty} \Psi(\mathcal{R}(X,k)), \tag{4}$$

$$\mathcal{W}(X) := 1 - \exp(-\mathcal{V}(X)), \tag{5}$$

其中 Ψ: $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}_+ \bigcup \{\infty\}$ 给定为：

$$\Psi(X) := \sup_{y_1 \in X} \gamma(y_1) \sup_{y_2 \in X} \alpha(y_2),\ X \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n), \tag{6}$$

并定义 $\exp(-\infty) := 0$。所提出的值函数刻画了如下所示的安全鲁棒DOUA（等价于DOA）：

定理 *11* $\mathbb{V}_\infty = \{x \in \mathbb{R}^n | \mathcal{V}\ \{x\}\ < \infty\} = \mathbb{W}_1 = \{x \in : : \ ( ) : \ 0 \ \mathbb{R}^n | \mathcal{W}\ \{x\}\ < 1\} = \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{X}}$.

证明：只需证明 $\mathbb{V}_\infty =$ $\mathcal{D}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{X}}$ ~ $\mathcal{W}\ \{x\}\ <$，因为 $1 \Leftrightarrow \mathcal{V}\ \{x\}\ < \infty\ \ x \in \mathbb{R}^n \qquad x \in \mathbb{V}_\infty$ ( ) ( )，。令。我们将证明，对于所有 $k \in \mathbb{Z}_+$，$\mathcal{R}(\{x\},k) \subset \mathcal{X}$。反设对于某个 $N \in \mathbb{Z}_+$，有 $\mathcal{R}(\{x\},k) \not\subseteq \mathcal{X}$。那么，根据 γ 的定义，$\sup_{y \in \mathcal{R}(\{x\},k)} \gamma(y) = \infty$.。注意到，当 $\mathcal{R}(\{x\},k) \not\subseteq \mathcal{A}$ 时，由式 (2) 可得 $\sup_{y \in \mathcal{R}(\{x\},k)} \alpha(y) > 0$。因此，$\Psi(\mathcal{R}(\{x\},k)) = \infty$，这意味着 $\mathcal{V}(\{x\}) = \infty$，与 $x \in \mathbb{V}_\infty$ 这一事实相矛盾。因此，对于所有 $k \in \mathbb{Z}_+$，我们有 $\mathcal{R}(\{x\},k) \subseteq \mathcal{X}$。利用式 (3)，我们得到

$$\sup_{y \in \mathcal{R}(\{x\},k)} \alpha(y) \le \frac{\Psi(\mathcal{R}(\{x\},k))}{\underline{\gamma}},\ k \in \mathbb{Z}_+.$$

由于无穷级数 $\sum_{k=0}^{\infty} \Psi(\mathcal{R}(\{x\},\ k))$ 收敛，根据比较判别法，$\sum_{k=0}^{\infty} \sup_{y \in \mathcal{R}(\{x\},k)} \alpha(y)$ 也收敛，这意味着 $\lim_{k\to\infty} \sup_{y \in \mathcal{R}(\{x\},k)} \alpha(y) = 0$。利用 α 的下界，我们得到

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{d}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{a}}(\mathcal{R}(\{x\},k),\mathcal{A})^{\bar{p}} \le \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\underline{\alpha}} \sup_{y \in \mathcal{R}(\{x\},k)} \alpha(y) = 0.$$

因此，$\lim_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{X}}} \quad {}_{k\to\infty}^{\ \mathrm{a}}{}_{\mathrm{H}}\ \mathcal{R}\ \{x\}\ k\ \ \mathcal{A}\ = 0 \qquad x \in \mathbf{d}((,\ ))$，从而，。

现在，令 $x \in \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{X}}$ 并回顾假设 1 中 M，r，λ 的定义。利用 α 和 γ的性质，我们可知，对于所有 $j \in \mathbb{Z}_+$，当 $\mathcal{R}(\{x\},j) \in \mathcal{K}(\mathcal{X})\ \ j \in \mathbb{Z}_+$ 时，$\sup_{y \in \mathcal{R}(\{x\},j)} \alpha(y) < \infty$ 且 $0 < \underline{\gamma} \le \sup_{y \in \mathcal{R}(\{x\},j)} \gamma(y) < \infty$（连续函数在定义域的紧子集上的上确界有限）。因此，对于所有 $j \in \mathbb{Z}_+$，有 $\Psi(\mathcal{R}(\{x\},j)) < \infty$。令 $\theta \in]0,\infty[$ 满足 $\mathcal{A} + \theta\mathbb{B}_n \subseteq \mathcal{X}$，其存在是因为 $\mathcal{X}$的开性、 $\mathcal{A}$的紧致性以及引理 1。由于$\mathcal{R}(\{x\},\cdot)$ 关于$\mathbf{d}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{a}}$收敛到 $\mathcal{A}$，因此存在 $N \in \mathbb{Z}_+$ 使得 $\mathcal{R}(\{x\},N) \subseteq \mathcal{A} + \tilde{r}\mathbb{B}_n$，其中 $0 < \tilde{r} \le \min\{\theta/M, r\}$.。由于$\mathcal{R}(\{x\},N) \subseteq \mathcal{A} + r\mathbb{B}_n$ ($\tilde{r} \le r$)，局部 ℓ_p 稳定性及 $\tilde{r}$ 的定义意味着

$$\begin{aligned}\mathbf{d}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{a}}(\mathcal{R}(\{x\},N+k),\mathcal{A}) &\le M\lambda(\mathbf{d}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{a}}(\mathcal{R}(\{x\},N),\mathcal{A}),k)\\ &\le M\lambda(\tilde{r},k) \le M\frac{\theta}{M} = \theta,\ k \in \mathbb{Z}_+,\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\sup_{y \in \mathcal{R}(\{x\},N+k)} \alpha(y) &\le \overline{\alpha}\mathbf{d}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{a}}(\mathcal{R}(\{x\},N+k),\mathcal{A})^{\bar{p}}\\ &\le \overline{\alpha}M^{\bar{p}}(\lambda(\tilde{r},k))^{\bar{p}},\ k \in \mathbb{Z}_+.\end{aligned}$$

令 $\Gamma_\theta \in]0,\ \infty[$ 使得 $\gamma(x) \le \Gamma_\theta\ \forall x \in \theta\mathbb{B}_n$，这由于 $\mathcal{A} + \theta\mathbb{B}_n$ 的紧致性以及 γ 在紧致集 $\mathcal{A} + \theta\mathbb{B}_n$ 上的连续性而存在。因此，利用 λ 的可和性，我们得到

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(\{x\}) &= \sum_{k=0}^{\infty} \Psi(\mathcal{R}(\{x\},k))\\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \Psi(\mathcal{R}(\{x\},k)) + \sum_{k=N}^{\infty} \Psi(\mathcal{R}(\{x\},k))\\ &\le \sum_{k=0}^{N-1} \Psi(\mathcal{R}(\{x\},k)) + \overline{\alpha}M^{\bar{p}}\Gamma_\theta \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda(\tilde{r},k))^{\bar{p}}\\ &< \infty.\end{aligned}$$

因此，$x \in \mathbb{V}_\infty$，证明完毕。 ■

利用引理8，并对上述定理的证明进行调整，我们得到

引理*12*：对于紧致的 X，$X \in \mathcal{K}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{X}})$，当且仅当 $\mathcal{V}(X) < \infty$。

A. 值函数的性质

本节将陈述函数 $\mathcal{V}$ 和 $\mathcal{W}$ 的一些重要性质。

引理 *13*：函数 $\mathcal{V}$ 和 $\mathcal{W}$ 是正定的，即对于任意非空紧致的 $\mathcal{A}$ $X \subseteq \mathcal{A}$，它们都严格为正；而当 时，它们恒等于零。

证明：这是由定义直接得出的。 ■

引理*14*：函数 $\mathcal{V}$ 和 $\mathcal{W}$ 关于集合包含关系是单调的。也就是说，对于 $X,\ Y \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n),\ \ X \subseteq Y \Rightarrow \mathcal{V}(X) \le \mathcal{V}(Y)$ 且 $\mathcal{W}(X) \le \mathcal{W}(Y)$。

证明：这是由定义直接得出的结论。 ■

接下来，我们的目标是证明 $\mathcal{V}$ 的连续性。下面给出一个技术性结果，将用于我们的连续性分析。

引理 *15*（证明见附录 *V*）：设 g: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 连续，并定义 G: $D \subseteq \mathcal{K}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ 为 $G(X) := \sup_{x \in X} g(x)\ \ X \in D$. 那么，$G$ 在 D 上连续。

定理*16*：$\mathcal{V}$ 在 $\mathcal{K}($ 在 $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{X}}$) 上连续且有限。

证明：回顾假设 1 中 M，r，λ 的定义，以及式 (6) 中 Ψ 的定义。取满足 $\mathcal{A}+\theta\mathbb{B}_n \subseteq \mathcal{X}$ 的 $\theta \in]0,\infty[$（此前的证明已确立此类 θ 的存在）。令 $X \in \mathcal{K}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{X}})$ 和 $\varepsilon > 0$ 为任意值，其中不失一般性地假设 $\varepsilon \le \min\{\theta/M, r\}$。然后，利用引理8，存在 $N \in \mathbb{Z}_+$ 使得 $\mathcal{R}(X,k) \subseteq \mathcal{X}\ \forall k \in \mathbb{Z}_+,$，且 $\mathcal{R}(X,N) \subseteq \mathcal{A} + (\varepsilon/2)\mathbb{B}_n$。 α 和 γ 的性质，以及可达集（其为紧致集）包含于安全集这一事实，位于

安全集意味着 $\sum_{k=0}^{N-1}\Psi(\mathcal{R}(X,k))<\infty$.。 ℓ_p 稳定性表明

$$\mathbf{d}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{a}}(\mathcal{R}(X,N+k),\mathcal{A})\le M\lambda(\varepsilon,k)\le M\frac{\theta}{M}=\theta,\ k\in\mathbb{Z}_+.$$

令 $\Gamma_\theta\in]0,\infty[$ 满足 $\gamma(x)\le\Gamma_\theta\ \forall x\in\mathcal{A}+\theta\mathbb{B}_n$。因此，我们有

$$\begin{aligned}\sum_{k=N}^{\infty}\Psi(\mathcal{R}(X,k))&\le\sum_{k=0}^{\infty}\Gamma_\theta\overline{\alpha}\mathbf{d}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{a}}(\mathcal{R}(X,N+k),\mathcal{A})^{\bar p}\\&\le\Gamma_\theta\overline{\alpha}M^{\bar p}\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda(\varepsilon,k))^{\bar p}<\infty.\end{aligned}$$

因此，$\mathcal{V}(X)<\infty$ $\delta>0$ $X+\delta\mathbb{B}_n\subseteq(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{X}}$. δ 7 $Y\in\mathcal{K}(\mathbb{R}^n$。令 满足 存在这样的，这是由引理 导出的。因此，对于满足 $\mathrm{d}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{s}}(X,Y)\le\delta$ 的 $(),\ Y\in\mathcal{K}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{X}})$。此外，假设 δ 满足：对于所有满足 $\mathrm{d}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{s}}(X,Y)\le\delta$ 的 $Y\in\mathcal{K}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{X}})$，$|\sum_{k=0}^{N-1}\Psi(\mathcal{R}(X,k))-\Psi\mathcal{R}Yk|\le\varepsilon$ $_{\mathrm{H}}^{\mathrm{s}}\mathcal{R}XN\ \mathcal{R}YN\le\varepsilon/2.$ $((,))$，且 $\mathrm{d}(,)(,))$。由于 $\mathcal{R}(\cdot,i)\ i\in[1;\ N]$关于豪斯多夫距离的连续性及其像的紧致性（引理 5）、α 和 γ 在 $\mathcal{X}$ 上的连续性，以及引理 15，这一点可以得到满足。因此，对于所有满足 $\mathrm{d}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{s}}(X,Y)\le\delta$ 的 $Y\in\mathcal{K}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{X}})$，

$$\begin{aligned}\mathbf{d}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{a}}(\mathcal{R}(Y,N),\mathcal{A})\le&\mathbf{d}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{a}}(\mathcal{R}(X,N),\mathcal{R}(Y,N))\\&+\mathbf{d}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{a}}(\mathcal{R}(X,N),\mathcal{A})\\\le&\mathbf{d}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{s}}(\mathcal{R}(X,N),\mathcal{R}(Y,N))\\&+\mathbf{d}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{a}}(\mathcal{R}(X,N),\mathcal{A})\le\varepsilon.\end{aligned}$$

ℓ_p $_{\mathrm{H}}^{\mathrm{a}}\mathcal{R}YN+k\ \mathcal{A}\le M\lambda\varepsilon k\le$稳定性表明 $\mathbf{d}(())(,)$,因 $\theta\ k\in\mathbb{Z}_+$. 此，

$$\begin{aligned}\sum_{k=N}^{\infty}\Psi(\mathcal{R}(Y,k))&\le\sum_{k=0}^{\infty}\Gamma_\theta\overline{\alpha}\mathbf{d}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{a}}(\mathcal{R}(Y,N+k))^{\bar p}\\&\le\Gamma_\theta\overline{\alpha}M^{\bar p}\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda(\varepsilon,k))^{\bar p}<\infty.\end{aligned}$$

最后，对于所有满足条件的 $Y\in\mathcal{K}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{X}})$，有 $\mathbf{d}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{s}}(X,Y)\le\delta$，

$$\begin{aligned}|\mathcal{V}(X)-\mathcal{V}(Y)|\le&|\sum_{k=0}^{N-1}\Psi(\mathcal{R}(X,k))-\Psi(\mathcal{R}(Y,k))|\\&+\sum_{k=N}^{\infty}\Psi(\mathcal{R}(X,k))+\sum_{k=N}^{\infty}\Psi(\mathcal{R}(Y,k))\\\le&\varepsilon+2\Gamma_\theta\overline{\alpha}M^{\bar p}\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda(\varepsilon,k))^{\bar p}.\end{aligned}$$

由于 $\varepsilon>0$ 是任意的，且函数 $s\longmapsto\sum_{k=0}^{\infty}\lambda(s,k)^{\bar p}$ 连续，并且 $\sum_{k=0}^{\infty}\lambda(0,k)^{\bar p}=0$，因此，只需令 $\varepsilon>0$ 足够小，就可以使上述不等式右侧任意小。证明完毕。

■

接下来，我们要说明 $\mathcal{W}$ 在 $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ 上的连续性。这需要分析 $\mathcal{V}$ 在 $\mathcal{D}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{X}}$ 边界处的行为。在下一个结果中，我们将证明，随着其自变量趋近边界，$\mathcal{V}$ 会发散（在某种集合值意义下）。

定理 *17*：设 $X\in\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ 满足 $X\cap\partial\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{X}}\neq\emptyset$，且 $\{X_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ 是一个紧集序列，并在豪斯多夫距离意义下收敛到 X。那么 $\lim_{k\to\infty}\mathcal{V}(X_k)=\infty$。

证明：不失一般性，假设 $X_k\in\mathcal{K}($ 为对所有 $k\in\mathbb{Z}_+$ 均成立。回顾假设 ~ $1\ \theta\in]0\ \infty[$ $\theta<r$ $\tilde r\in$ 中 M、r 和 $]0\ \theta/M^2[$ $k\in\mathbb{Z}_+$ $T_k\in\mathbb{Z}_+$ λ 的定义。令，满足条件，且 $\mathcal{A}+\theta\mathbb{B}_n\subseteq\mathcal{X}$. 令，。对于每个，令 为满足 $\mathcal{R}(X_k,T_k)\subseteq\mathcal{A}+\tilde r\mathbb{B}_n$. 的首次时刻。注意，对于所有 $j\in[0;\ k-1]$，$\mathbf{d}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{a}}(\mathcal{R}(X,j),\mathcal{A})\ge\tilde r$. 如果序列 $\{T_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ 发散至 ∞，则有

$$\mathcal{V}(X_k)\ge\sum_{j=0}^{T_k-1}\Psi(\mathcal{R}(X_k,j))\ge\underline{\gamma}\underline{\alpha}\tilde r^{\bar p}(T_k-1),\ k\in\mathbb{Z}_+,$$

因此，$\lim_{k\to\infty}\mathcal{V}(X_k)=\infty$。假设 $\{T_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ 不趋于 ∞。那么存在一个有界子序列（仍记为 $\{T_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$），其上界为 $T\in\mathbb{Z}_+$，使得 $T_k\le T,\ \ k\in\mathbb{Z}_+$. 由于 $\tilde r\le\theta/M^2\le\theta<r,$ 可得 $\mathcal{R}(X_k,\ T_k)\subseteq\mathcal{A}+\tilde r\mathbb{B}_n\subseteq\mathcal{A}+r\mathbb{B}_n,\ \ k\in\mathbb{Z}_+$. 稳定性表明

$$\mathbf{d}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{a}}(\mathcal{R}(X_k,T_k+j),\mathcal{A})\le M\lambda(\tilde r,j)\le\theta/M,\ j,k\in\mathbb{Z}_+.$$

因此，$\mathcal{R}(X_k,T)\subseteq\mathcal{A}+(\theta/M)\mathbb{B}_n\subseteq r\mathbb{B}_n,\ k\in\mathbb{Z}_+$,这意味着，利用 $\mathcal{R}(\cdot,T)$ 关于 $\mathbf{d}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{s}}$ 的连续性，可得 $\mathcal{R}(X,T)\subseteq\mathcal{A}+(\theta/M)\mathbb{B}_n\subseteq\mathcal{A}+r\mathbb{B}_n$. 因此，

$$\mathbf{d}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{a}}(\mathcal{R}(X,T+j),\mathcal{A})\le M\lambda((\theta/M),j)\le\theta,\ j\in\mathbb{Z}_+.$$

这意味着 $\mathcal{R}(X,T+j)\subseteq\mathcal{X},\ j\in\mathbb{Z}_+$，且 $\lim_{j\to\infty}\mathbf{d}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{a}}(\mathcal{R}(X,j),\mathcal{A})=0$. 若 $\mathcal{R}(X,j)\subseteq\mathcal{X}\ \forall j\in[0;\ T-1]$，则可得 $\mathcal{V}(X)<\infty$，这意味着 X 是 $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{X}}$ 的真子集，从而产生矛盾。现在，假设 $\mathcal{R}(X,j)\cap\mathbb{R}^n\setminus\mathcal{X}\neq\emptyset$ 对某个 $j\in[0;\ T-1]$。然后，利用 $\mathcal{R}(\cdot,j)$ 关于 $\mathrm{d}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{s}}$ 的连续性，可得 $\lim_{k\to\infty}\mathrm{d}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{s}}(\mathcal{R}(X_k,j)\ \mathcal{R}(X,j))=0$。由此可得 $\lim_{k\to\infty}\sup_{y\in\mathcal{R}(X_k,j)}\gamma(y)=\infty$，从而 $\lim_{k\to\infty}\mathcal{V}(X_k)=\infty$。 ■

根据定理 16 和定理 17，我们有：

推论 *1*： $\mathcal{W}$ 在 $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$上连续。

B. 值函数的刻画：贝尔曼型方程

本节将分别推导与函数 $\mathcal{V}$ 和 $\mathcal{W}$ 对应的贝尔曼型方程。

定理 *18*： $\mathcal{V}$ 满足以下方程（关于函数 v）

$$v(X)=\Psi(X)+v(F(X)),\ X\in\mathcal{K}(\mathbb{R}^n).\tag{7}$$

证明：给定 $X\in\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$，并利用 $\mathcal{V}$ 的定义和引理 4，我们有

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(X)&=\sum_{k=0}^{\infty}\Psi(\mathcal{R}(X,k))\\&=\Psi(\mathcal{R}(X,0))+\sum_{k=1}^{\infty}\Psi(\mathcal{R}(X,k))\\&=\Psi(X)+\sum_{k=0}^{\infty}\Psi(\mathcal{R}(X,k+1))\\&=\Psi(X)+\mathcal{V}(F(X)).\end{aligned}$$

请注意，即使 $\mathcal{V}(X)$ 是无穷的，上述分解仍然成立。

■

定理 *19*： $\mathcal{W}$ 满足方程（关于函数 w）

$$w(X)-w(F(X))=\xi(X)(1-w(F(X))),\ X\in\mathcal{K}(\mathbb{R}^n),\tag{8}$$

其中

$$\xi(X):=1-\exp(-\Psi(X)).\tag{9}$$

证明：根据定理 18，对于任意 $X\in\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$，我们有，

$$\begin{aligned}\mathcal{W}(X)&=1-\exp(-\mathcal{V}(X))\\&=1-\exp(-\mathcal{V}(F(x))-\Psi(X))\\&=1-\exp(-\Psi(X))(1-\mathcal{W}(F(X))),\end{aligned}$$

这意味着

$$\begin{aligned}\mathcal{W}(X)-\mathcal{W}(F(X)) =& 1-\mathcal{W}(F(X))\\ &-\exp(-\Psi(X))(1-\mathcal{W}(F(x)))\\ =&\xi(X)(1-\mathcal{W}(F(X))).\end{aligned}$$

■

我们有如下适用于安全集 $\mathcal{X}$ 内函数 $\mathcal{W}$ 的贝尔曼型方程。

定理20：若 w 在某个非空 $D\subseteq\mathcal{X}$ 上满足方程 (8)，且 $\mathcal{K}(D)$，则对所有 $X\in\mathcal{K}(D)$，w 均满足方程

$$w(X)-w(F(X))=\beta(X)(1-w(X)), \tag{10}$$

其中

$$\beta(X):=\exp(\Psi(X))-1. \tag{11}$$

证明：当 $X\in\mathcal{K}(D)$ 时，$\sup_{y\in X}\gamma(y)<\infty$，这意味着 $\Psi(X)<\infty$。因此，利用方程 (8)，$1-w(F(X))=\exp(\Psi(X))(1-w(X))$。于是，

$$\begin{aligned}w(X)-w(F(X))&=\exp(\Psi(X))(1-w(X))-1+w(X)\\ &=\exp(\Psi(X))(1-w(X))-(1-w(X))\\ &=\beta(X)(1-w(X)).\end{aligned}$$

■

我们已证明，值函数 $\mathcal{V}$ 和 $\mathcal{W}$ 分别是方程 (7) 和 (8) 的解。接下来，我们将证明，对于满足特定极限条件的函数，这些方程的解是唯一的。该极限条件涉及收敛至 RIS $\mathcal{A}$ 的可达集。我们从以下技术性结果开始：

引理21：假设 $w:\mathcal{K}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{X}})\to\mathbb{R}$ 在 $\mathcal{K}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{X}})$ 上满足方程 (8)，且对于任意紧集 X，$\lim_{k\to\infty}\mathbf{d}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{a}}(\mathcal{R}(X,k),\mathcal{A})=0\Rightarrow\lim_{k\to\infty}w(\mathcal{R}(X,k))=0$。那么，对于所有 $X\in\mathcal{K}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{X}})$，$w(X)<1$。

证明：根据定理20，w 在$\mathcal{K}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{X}})$上满足方程（10）。假设对于某个 $X\in\mathcal{K}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{X}})$，$w(X)\geq 1$。我们有$\mathcal{R}(X,k)\subseteq\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{X}}\ \forall k\in\mathbb{Z}_+$，且 $\lim_{k\to\infty}\mathbf{d}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{a}}(\mathcal{R}(X,k),\mathcal{A})=0$。利用方程（10 $w(X)-w(\mathcal{R}(X,1))=\beta(X)(1-w(X))$），可得 $w(X)\leq 0$（与$w(\mathcal{R}(X,1))\geq w(X)\geq 1$）。因此，（与 $w(X)\geq 1$）矛盾，因为这是由关于 w的假设得出的，由此证明完毕。■

现在我们证明与函数 $\mathcal{V}_{\mathcal{X}}$ 相关的 Bellman 型方程的唯一性结果。

定理22：令 $\mathbf{v}:\mathcal{K}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{X}})\to\mathbb{R}$ 在 $\mathcal{K}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{X}})$ 上满足方程（7），且对于任意紧致 X，$\lim_{k\to\infty}\mathbf{d}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{a}}(\mathcal{R}(X,k),\mathcal{A})=0\Rightarrow\mathbf{v}(X)=\mathcal{V}(X)$。那么，对于所有 $X\in\mathcal{K}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{X}})$，$\mathbf{v}=\mathcal{V}$。

证明：令 $X\in\mathcal{K}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{X}})$。利用引理5和引理9，我们有 $\mathcal{R}(X,k)\subseteq\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{X}}\ \forall k\in\mathbb{Z}_+$。令 $\sum_{j=0}^{k-1}\Psi(\mathcal{R}(X,j))=\mathbf{v}(\mathcal{R}(X,k))$。因此，我们有 $\mathbf{v}(X)=\sum_{j=0}^{k-1}(\mathbf{v}(\mathcal{R}(X,j))-\mathbf{v}(\mathcal{R}(X,j+1)))+\mathbf{v}(\mathcal{R}(X,k))$。由于 $\lim_{k\to\infty}\mathbf{d}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{a}}(\mathcal{R}(X,k),\mathcal{A})=0$，根据假设可得 $\lim_{k\to\infty}\mathbf{v}(\mathcal{R}(X,k))=0$。我们还有 $\mathcal{V}(X)<\infty$ $(\sum_{j=0}^{k-1}\Psi(\mathcal{R}(X,j))$ 在 $X\in\mathcal{K}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{X}})$时收敛，因此，对上述方程两边关于 $k\to\infty$ 取极限，得到 $\mathbf{v}(X)=\sum_{j=0}^{\infty}\Psi(\mathcal{R}(X,j))=\mathcal{V}(X)$。■

现在，我们介绍与值函数 $\mathcal{W}_{\mathcal{X}}$ 相关方程的唯一性结果。

定理23：设$\mathbf{w}:\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R}$ 是在 $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$上满足方程(8)的有界函数，且对于任意紧集 X，$\lim_{k\to\infty}\mathbf{d}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{a}}(\mathcal{R}(X,k),\mathcal{A})=0\Rightarrow\lim_{k\to\infty}\mathbf{w}(\mathcal{R}(X,k))=0$。那么，$\mathbf{w}=\mathcal{W}$。

证明：首先注意，方程 (8) 的两个解之差，$\mathbf{w}_1$ 和$\mathbf{w}_2$，，对于 $X\in\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ 满足：

$$\mathbf{w}_1(X)-\mathbf{w}_2(X)=(1-\xi(X))(\mathbf{w}_1(F(X))-\mathbf{w}_2(F(X))). \tag{12}$$

如果 $X\in\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ 满足 $X\cap(\mathbb{R}^n\setminus\mathcal{X})\neq\emptyset$，那么我们有 $\xi(X)=1$；利用方程 (8)，可得 $\mathbf{w}(X)=1=\mathcal{W}(X)$。

在$\mathcal{K}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{X}})$上，$\mathbf{v}(\cdot):=-\ln(1-\mathbf{w}(\cdot))$ 根据引理21是良定义的，并满足方程 (7)。接着，利用定理22，可得 $\mathbf{v}(X)=\mathcal{V}(X)$ $(X\in\mathcal{K}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{X}}))$。因此，对于所有 $X\in\mathcal{K}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{X}})$，都有 $\mathbf{w}(X)=\mathcal{W}(X)$。

令 $X\in\mathcal{K}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{X}})$ $(\mathcal{R}(X,j)\cap\mathbb{R}^n\setminus\mathcal{X}\neq\emptyset$ $\mathcal{R}(X,j)\subseteq\mathcal{X}\ \forall j\in\mathbb{N})$ 满足 $\mathcal{R}(X,k)\subseteq\mathcal{X}\ \forall k\in[0:j-1]$。$\Delta_w(\cdot):=\mathbf{w}(\cdot)-\mathcal{W}(\cdot)$。然后，利用方程 (12)，

$$\Delta_w(\mathcal{R}(X,j-1))=(1-\xi(\mathcal{R}(X,j-1)))(\Delta_w(\mathcal{R}(X,j)))=0,$$

由于 $\Delta_w(\mathcal{R}(X,j))=0$，并通过归纳论证，我们有 $\Delta_w(\mathcal{R}(X,k))=0\ \forall k\in[0:j]$，这意味着 $\mathbf{w}(X)=\mathcal{W}(X)$。

现在，令 $X\in\mathcal{K}(\mathcal{X})$ 满足：对所有 $k\in\mathbb{Z}_+$，均有 $\mathcal{R}(X,k)\subseteq\mathcal{X}$，且 $\lim_{k\to\infty}\mathbf{d}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{a}}(\mathcal{R}(X,k),\mathcal{A})\neq 0$。显然，对所有 $k\in\mathbb{Z}_+$，均有 $\mathcal{R}(X,k)\not\subseteq\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{X}}$。于是，根据 $\mathcal{A}\in\mathcal{K}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{X}})$，存在 $\theta>0$ 使得 $\mathbf{d}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{a}}(\mathcal{R}(X,k),\mathcal{A})\geq\theta\ \forall k\in\mathbb{Z}_+$。假设 $\mathbf{w}(X)\neq\mathcal{W}(X)$。注意，方程 (8) 在 $\mathcal{X}$ 上的两个解 $\mathbf{w}_1$ 和 $\mathbf{w}_2$，之差（根据定理20，它们也是方程 (10) 在 $\mathcal{X}$ 上的解）满足，对于 $Y\in\mathcal{K}(\mathcal{X})$，

$$\mathbf{w}_1(F(Y))-\mathbf{w}_2(F(Y))=(1+\beta(Y))(\mathbf{w}_1(Y)-\mathbf{w}_2(Y)). \tag{13}$$

由此可得，对所有 $j\in\mathbb{N}$，

$$\Delta_w(\mathcal{R}(X,j))=\prod_{k=0}^{j-1}(1+\beta(\mathcal{R}(X,k)))\Delta_w(X).$$

对所有 $k\in[0:j-1]$，我们有

$$\begin{aligned}1+\beta(\mathcal{R}(X,k))&=\exp(\Psi(\mathcal{R}(X,k)))\\ &\geq\exp(\underline{\gamma}\underline{\alpha}\mathbf{d}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{a}}(\mathcal{R}(X,k),\mathcal{A})^{\bar{p}})\\ &\geq\exp(\underline{\gamma}\underline{\alpha}\theta^{\bar{p}}).\end{aligned}$$

因此，

$$|\Delta_w(\mathcal{R}(X,j))|\geq\exp(j\underline{\gamma}\underline{\alpha}\theta^{\bar{p}})|\Delta_w(X)|.$$

由于 $\lim_{j\to\infty}\exp(j\underline{\gamma}\underline{\alpha}\theta^{\bar{p}})=\infty$，由此可得，对每个 $M>0$，存在一个紧致的 $Z\subseteq\mathcal{X}$（对应于 $\mathcal{R}(X,\cdot)$ 在某个时间步长处的像），使得 $\mathbf{w}(Z)>M+\mathcal{W}(Z)\geq M-1$或 $\mathbf{w}(Z)<-M+\mathcal{W}(Z)\leq-(M-1)$，这等价于 $|w(Z)|>M-1$。因此，$\mathbf{w}$ 在 $\mathcal{K}(\mathcal{X})$ 上无界，矛盾。■

我们以如下重要性质结束本节：

定理24：函数 $\mathcal{V}$ 和 $\mathcal{W}$ 在如下意义下是鲁棒李雅普诺夫函数：它们满足条件

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(\{x\}),\mathcal{W}(\{x\})&>0\ \forall x\notin\mathcal{A},\\ \mathcal{V}(\{x\})=\mathcal{W}(\{x\})&=0\ \forall x\in\mathcal{A},\\ \mathcal{V}(\{x\})-\sup_{w\in W}\mathcal{V}(\{f(x,w)\})&>0\ \forall x\in\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{X}}\setminus\mathcal{A},\\ \mathcal{W}(\{x\})-\sup_{w\in W}\mathcal{W}(\{f(x,w)\})&>0\ \forall x\in\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{X}}\setminus\mathcal{A}.\end{aligned}$$

证明：关于 $\mathcal{A}$ 的正定性可直接由定义得出。

令 $x\in\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{X}}\setminus\mathcal{A}$。利用 $\mathcal{V}$ 和 $\mathcal{W}$ 关于集合包含的单调性（引理14）、方程（7），以及

$\Psi(\{\cdot\})$ 关于 $\mathcal{A}$ 的正定性，以及 $\mathcal{W}$ 的定义，

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(\{x\}) - \sup_{w\in W} \mathcal{V}(\{f(x,w)\}) \geq & \mathcal{V}(\{x\}) - \mathcal{V}(F(\{x\})) \\ & = \Psi(\{x\}) > 0,\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\mathcal{W}(\{x\}) - \sup_{w\in W} \mathcal{W}(\{f(x,w)\}) \geq & \mathcal{W}(\{x\}) - \mathcal{W}(F(\{x\})) \\ & = 1 - \exp(-\mathcal{V}(\{x\})) \\ & - (1 - \exp(-(\mathcal{V}(\{x\}) \\ & - \Psi(\{x\}))) > 0.\end{aligned}$$

■

VI. 吸引域估计

在前文各节中，我们介绍了定义在紧集度量空间上的新型值函数，这些函数刻画了安全鲁棒吸引域。现在，我们旨在通过神经网络学习，利用这些值函数推导出具有构造性且切实可行的安全鲁棒吸引域估计。

A. 值函数的有限时域近似

在所提出的学习框架中，至少近似地计算单元素集合上的值函数 $\mathcal{V}$ 和 $\mathcal{W}$ 至关重要。令 $N_s \in \mathbb{N}$ 为用户定义的截断时域，用于指定最大步数。我们引入有限时域近似

$$\mathcal{V}_{N_s}(X) := \sum_{k=0}^{N_s} \Psi\big(\mathcal{R}(X,k)\big), \qquad X \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n).$$

由于一般无法精确计算可达集 $\mathcal{R}(X,\ k)$，$k \in [0;\ N_s]$，我们采用近似表示。具体而言，我们用一列集合 $\{\mathcal{R}(X,\ k)\}_{k\in[0;N_s]}$ 来近似族 $\{\mathcal{R}(X,\ k)\}_{k\in[0;N_s]}$，并满足 $\mathcal{R}(X,\ k) \approx \mathcal{R}(X,\ k)$ 对所有 $k \in [0;\ N_s]$ 均成立。

文献为离散时间系统提供了广泛的近似方案（参见例如 [31]–[34] 及其参考文献）。一般而言，更高的近似精度是以计算复杂度的增加为代价实现的。此外，所选近似必须允许对(6)中定义的函数 Ψ 进行可处理的求值。同样，在我们的设定中，只需对形如$X = \{x\}$ 且满足 $x \in \mathbb{R}^n$的单点初始集的可达集进行近似即可。

在第七节中，我们采用一种兼顾精度与计算可处理性的基于轨迹的近似。令 $N_{\mathrm{traj}} \in \mathbb{N}$表示用于近似可达集的轨迹数，并令 $\pi^{(j)}\colon\ \mathbb{Z}_+ \to W$, $j \in [1;\ N_{\mathrm{traj}}]$为随机生成的扰动信号。我们定义

$$\tilde{\mathcal{R}}(\{x\},k) = \bigcup_{j=1}^{N_{\mathrm{traj}}} \left\{\varphi_x^{\pi^{(j)}}(k)\right\},$$

也就是说，时刻 k 处的可达集由扰动序列$\pi^{(j)}$所诱导的有限轨迹值集合来近似。该构造使 Ψ 的求值在实践中显著更易处理。近似的精度取决于使用足够多的扰动实现，即应将N_{traj} 选取得足够大。

基于可达集近似，我们定义 $\tilde{\mathcal{V}}_{N_s}(X) := \sum_{k=0}^{N_s} \Psi\big(\tilde{\mathcal{R}}(X,k)\big)$，$X \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$。最后，我们通过 $\tilde{\mathcal{W}}_{N_s}(X) := 1 - \exp(-\tilde{\mathcal{V}}_{N_s}(X))$，$X \in \mathcal{K}\ \mathbb{R}^n$ ( ) 近似 $\mathcal{W}$。

B. 物理信息与基于集合的神经网络学习

由于值函数 $\mathcal{W}$ 限制在单元素集合上时是鲁棒李雅普诺夫函数（定理 24），我们对 $x \in \mathbb{R}^n$ 的 $\mathcal{W}(\{x\})$ 进行近似。所得近似可作为鲁棒李雅普诺夫函数候选，随后可用于估计安全鲁棒吸引域（吸引域）。

本文提出一种物理信息学习框架，将基于集合的 Bellman（Zubov 型）方程 (8) 纳入其中。将 (8) 纳入训练过程的一项主要挑战在于，项 $F(\{x\})$ 具有集合值性质，这是由扰动的存在所导致的。

因此，我们提出以下结构假设。

假设 *2*：定义

$$\mathcal{S} := \big\{\{x\} : x \in \mathbb{R}^n\big\} \bigcup \big\{F(\{x\}) : x \in \mathbb{R}^n\big\}.$$

假设存在一个闭式嵌入

$$\mathcal{T} : \mathcal{S} \to \mathbb{R}^L,$$

对于某个固定整数 $L \in \mathbb{N}$，使得 $\mathcal{T}$ 在 $\mathcal{S}$ 上是单射。也就是说，每个单元素集合 $\{x\}$ 和每个可达集 $F(\{x\})$ 在 $\mathbb{R}^L$ 中都有唯一表示。

备注 *6*：假设 2 在若干重要情形下成立。

最简单的情形出现在扰动集为单点集时。此时，$F(\{x\})$ 本身即为单点集，嵌入退化为 $\mathcal{T}(\{x\}) = x$。

更一般地，只要存在一个具有固定参数数 L 的参数化集合类（例如多胞体、多项式 zonotope 或固定模板次水平集），且该集合类能够同时表示 $\{x\}$ 和 $F(\{x\})$，该假设即成立。

例如，若 $F(\{x\})$ 是由固定数的线性不等式描述的多胞体，则可用相应的不等式系数来定义 $\mathcal{T}$。

一个特别相关的情形是：扰动集 W 为超区间集合，且不同的扰动分量影响动力学的不同分量。此时，$F(\{x\})$ 本身是一个超区间，并且可以定义

$$\mathcal{T}([\![a,b]\!]) = \begin{bmatrix}\mathrm{center}([\![a,b]\!]) \\ \mathrm{radius}([\![a,b]\!])\end{bmatrix},$$

其中 $[\![a,b]\!]$ 表示一个闭区间。

当系统动力学对于每个固定的 x 都是扰动的仿射函数，且扰动集 W 是多胞形的时，该假设同样成立。

如果该假设不成立，可以用满足嵌入条件且符合以下条件的 ˜ 连续外近似 F 替代 F

$$F(\{x\}) \subseteq \tilde{F}(\{x\}), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

虽然这确保了该框架的适用性，但可能会使最终的吸引域估计更加保守。

Let

$$\tilde{\omega}_{\mathrm{nn},\theta}(\cdot) : \mathbb{R}^L \to \mathbb{R}$$

是一个架构固定的前馈神经网络（即隐藏层数和神经元数固定），其权重矩阵和偏置向量收集在参数向量 θ 中。我们确定 θ，使得

$$\tilde{\omega}_{\mathrm{nn},\theta}(\mathcal{T}(\cdot))$$

在满足以下条件的紧致学习域 $\mathbb{X}_\ell \subset \mathbb{R}^n$ 上逼近值函数

$$\mathcal{X} \cap \mathbb{X}_\ell \neq \emptyset, \qquad \mathcal{A} \subseteq \mathbb{X}_\ell.$$

训练问题由最小化复合损失泛函构成

$$\mathcal{L}(\theta) = \lambda_{\mathrm{d}} \mathcal{L}_{\mathrm{d}}(\theta) + \lambda_{\mathrm{pi}} \mathcal{L}_{\mathrm{pi}}(\theta), \tag{14}$$

其中 λ_{d}, $\lambda_{\mathrm{pi}} > 0$ 为加权系数，且

$$\mathcal{L}_{\mathrm{d}}(\theta) := \frac{1}{N_{\mathrm{d}}} \sum_{i=1}^{N_{\mathrm{d}}} J_{\mathrm{d},\theta}\big(\{z_{\mathrm{d}}^{(i)}\}\big),$$

$$\mathcal{L}_{\mathrm{pi}}(\theta) := \frac{1}{N_{\mathrm{pi}}} \sum_{i=1}^{N_{\mathrm{pi}}} J_{\mathrm{pi},\theta}\big(\{z_{\mathrm{pi}}^{(i)}\}\big).$$

数据驱动残差定义为

$$J_{\mathrm{d},\theta}(\{x\}) = \Big(\tilde{\mathcal{W}}_{N_s}(\{x\}) - \tilde{\omega}_{\mathrm{nn},\theta}\big(\mathcal{T}(\{x\})\big)\Big)^2,$$

它惩罚神经网络输出~与真实值函数 $\mathcal{W}$的 N_s 步近似 $\mathcal{W}_{N_s}$ 之间的偏差。

物理信息残差定义为

$$\begin{aligned} J_{\mathrm{pi},\theta}(\{x\}) = \Big(&\tilde{\omega}_{\mathrm{nn},\theta}\big(\mathcal{T}(\{x\})\big) - \tilde{\omega}_{\mathrm{nn},\theta}\big(\mathcal{T}(F(\{x\}))\big) \\ &- \xi(\{x\})\big(1 - \tilde{\omega}_{\mathrm{nn},\theta}\big(\mathcal{T}(F(\{x\}))\big)\big)\Big)^2, \end{aligned}$$

它以残差最小化的方式惩罚对 Bellman 型函数方程 (8) 的违反。

配点 $\{z^{(i)}{}_{\mathrm{d}}\}_{i=1}^{N_{\mathrm{d}}} \subset \mathbb{X}_\ell$ 和 $\{z^{(i)}{}_{\mathrm{pi}}\}_{i=1}^{N_{\mathrm{pi}}} \subset \mathbb{X}_\ell$ 从 $\mathbb{X}_\ell$中独立采样。前者用于拟合~近似真实值 $\mathcal{W}_{N_s}$，而后者以物理信息方式强制满足控制泛函方程。

最后，我们定义状态空间函数

$$\omega_{\mathrm{nn},\theta}(x) := \tilde{\omega}_{\mathrm{nn},\theta}\big(\mathcal{T}(\{x\})\big), \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

也就是说，$\omega_{\mathrm{nn},\theta}$ 表示嵌入 $\mathcal{T}$ 与训练后的神经网络的复合。该函数将被视为鲁棒神经李雅普诺夫函数候选，并用于安全鲁棒吸引域估计。

C. 基于神经网络近似的已验证安全鲁棒吸引域

我们现在旨在利用学习得到的神经网络近似 ω_{nn}构造一个相对较大的安全鲁棒吸引域。所提出的验证方案扩展了 [3], 中所发展的方案，同时考虑了不确定性，并且在概念上与 [12], 中提出的方法一致，同时额外考虑了状态约束。为简化记号，此后从 ω_{nn}中省略对θ 的参数依赖。

注释*7*： 本文提出的验证框架适用于任意函数 ω，而非基于神经网络的李雅普诺夫函数ω_{nn}。这类函数 ω 可以通过标准的李雅普诺夫分析或平方和优化技术获得。

为此，令 $\mathbb{X}_v \subseteq \mathbb{R}^n$ 为一个紧致验证域，使得

$$\mathcal{X} \cap \mathbb{X}_v \neq \emptyset, \ \mathcal{A} \subseteq \mathbb{X}_v.$$

1）初始吸引域：吸引域验证与估计通常从一个较小的吸引域开始，我们假设已知参数 $c_1 \in \mathbb{R}$ 和集合 $\mathbb{E}_{c_1} \subseteq \mathbb{R}^n$，且满足：

假设*3*： 集合 $\mathbb{E}_{c_1} \subseteq \mathbb{R}^n$ 是如下形式的子水平集：

$$\mathbb{E}_{c_1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \nu(x) \leq c_1\},$$

其中 ν： $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$。此外， $\mathbb{E}_{c_1}$ 是$\mathcal{X} \cap \mathbb{X}_v$内的安全鲁棒吸引域。

在附录 VI中，我们给出了一种系统方法，可在关于 f的额外光滑性假设下，为指数稳定平衡点获得此类吸引域。

注释*8*： 对于给定的鲁棒不变集，获得初始吸引域估计通常是一项极具挑战性的任务。对于具有足够光滑右端项的指数稳定平衡点，以及某些多项式稳定平衡点，可以采用标准的李雅普诺夫分析来推导初始估计（例如，参见附录VI和VII）。然而，对于一般非线性系统，以及不包含吸引平衡点的非单点鲁棒不变集，这类估计的构造要困难得多。针对这些更广泛情形开发系统方法仍然是一个开放问题，也是一个活跃研究领域。

2）通过验证扩大初始吸引域：我们可以通过验证扩大给定的初始安全吸引域。若对于某个$c_2 \in \mathbb{R}$，满足 $c_2 > c_1$，且某个较小的正数常量 $\varepsilon > 0$，我们能够验证以下条件：

$$\begin{aligned} &((x,w) \in \mathbb{X}_v \times W) \wedge (c_1 \leq \nu(x) \leq c_2) \Rightarrow \\ &(\nu(f(x,w)) - \nu(x) \leq -\varepsilon) \wedge (g(x) < 1) \wedge (f(x,w) \in \mathbb{X}_v), \end{aligned} \tag{15}$$

则：

引理 *25*：集合

$$\mathbb{E}_{c_2} := \{x \in \mathbb{X}_v : \nu(x) \leq c_2\}$$

是系统（1）在 $\mathcal{X} \cap \mathbb{X}_v$内的安全鲁棒吸引域。

证明：定义 $\mathbb{E}_{c_2/c_1} := \{x \in \mathbb{X}_v : c_1 < \nu(x) \leq c_2\}$。。根据假设3, $\mathbb{E}_{c_1}$是在 $\mathcal{X} \cap \mathbb{X}_v$内的安全鲁棒吸引域。我们有$E_{c_1} = \{x \in \mathbb{X}_v : \nu(x) \leq c_2\}$，由此可推出 $\mathbb{E}_{c_2} = \mathbb{E}_{c_2/c_1} \bigcup \mathbb{E}_{c_1}$。根据条件（15），有 $\mathbb{E}_{c_2/c_1} \subseteq \mathcal{X}(g_{\mathcal{X}}(\cdot) < 1)$。因此，根据定义，$\mathbb{E}_{c_2} = \mathbb{E}_{c_1} \bigcup \mathbb{E}_{c_2/c_1} \subseteq \mathcal{X} \cap \mathbb{X}_v$。此外，由（15）$x\ w \in \mathbb{E}_{c_2/c_1} \times W\ \nu(f\ x\ w) \leq \nu\ x - \varepsilon \leq c_2 - \varepsilon \leq c_2\ f\ x\ w \in \mathbb{X}_v\ f\ x\ w \in \mathbb{E}_{c_2}$，对所有（，），（，）（）以及（，），均有.....，由此可得（，）。因此，$\mathbb{E}_{c_2} = \mathbb{E}_{c_1} \bigcup \mathbb{E}_{c_2/c_1}$是不变的。现在证明任何从 $\mathbb{E}_{c_2/c_1}$出发的轨迹都会在有限时间内进入 $\mathbb{E}_{c_1}$。令 $x \in \mathbb{E}_{c_2/c_1}$，并反设存在一个扰动序列 $\pi \in W^{\mathbb{Z}_+}$，使得 $\varphi_x^\pi(k) \in \mathbb{E}_{c_2/c_1}, \forall k \in \mathbb{Z}_+$。那么，$c_1 < \nu\big(\varphi_x^\pi(k)\big) \leq c_2, \forall k \in \mathbb{Z}_+$。利用条件（15）进行归纳，可得 $\nu\big(\varphi_x^\pi(k)\big) \leq \nu(x) - k\varepsilon \leq c_2 - k\varepsilon, \forall k \in \mathbb{Z}_+$。。任取整数 $k > (c_2 - c_1)/\varepsilon$。。于是， $\nu\big(\varphi_x^\pi(k)\big) < c_1$，这与假设 $\varphi_x^\pi(k) \in \mathbb{E}_{c_2/c_1}$矛盾。因此，每条从$\mathbb{E}_{c_2/c_1}$ 出发的轨迹都会在有限时间内进入$\mathbb{E}_{c_1}$。最后，根据假设3, $\mathbb{E}_{c_1}$ 中的所有轨迹都收敛到RIS $\mathcal{A}$。由于$\mathbb{E}_{c_2}$ 中的每条轨迹都会在有限时间内进入$\mathbb{E}_{c_1}$，因此$\mathbb{E}_{c_2}$ 中的所有轨迹都收敛到 $\mathcal{A}$。 ■

3）通过验证得到的神经网络吸引域：改进后的安全鲁棒吸引域$\mathbb{E}_{c_2}$ 可用于利用神经网络近似 ω_{nn}生成一个甚至可能更大的安全鲁棒吸引域。

如果我们能够对某些常数 ω_1 和 ω_2（其中 $\omega_2 > \omega_1$）以及某个正常数 $\varepsilon > 0$验证以下内容：

$$\begin{aligned} &((x,w) \in \mathbb{X}_v \times W) \wedge (\omega_{\mathrm{nn}}(x) \leq \omega_1) \Rightarrow \\ &\quad (\nu(x) \leq c_2) \wedge (\omega_{\mathrm{nn}}(f(x,w)) \leq \omega_2), \end{aligned} \tag{16}$$

$$((x,w)\in\mathbb{X}_v\times W)\wedge(\omega_1\le\omega_{\rm nn}(x)\le\omega_2)\Rightarrow$$
$$(\omega_{\rm nn}(f(x,w))-\omega_{\rm nn}(x)\le-\varepsilon)\wedge$$
$$(g(x)<1)\wedge(f(x,w)\in\mathbb{X}_v),\qquad(17)$$

则以下结论成立。

引理 *26*：假设式 (16) 和式 (17) 以及引理 25 中的条件均成立。那么集合

$$\mathbb{W}_{\omega_2}:=\{x\in\mathbb{X}_v:\omega_{\rm nn}(x)\le\omega_2\}$$

是式 (1) 在 $\mathcal{X}\cap\mathbb{X}_v$ 内的安全鲁棒吸引域。

证明：定义 $\mathbb{W}_{\omega_1}:=\{x\in\mathbb{X}_v:\ \omega_{\rm nn}(x)\le\omega_1\}$ 以及 $\mathbb{W}_{\omega_2/\omega_1}:=\{x\in\mathbb{X}_v:\ \omega_1<\omega_{\rm nn}(x)\le\omega_2\}$。根据条件 (16)、条件 (17) 和引理 25，$\mathbb{W}_{\omega_1}\subseteq\mathbb{E}_{c_2}\subseteq\mathcal{X}$且 $\mathbb{W}_{\omega_2/\omega_1}\subseteq\mathcal{X}\cap\mathbb{X}_v$，因此 $\mathbb{W}_{\omega_2}\subseteq\mathcal{X}\cap\mathbb{X}_v$（安全性）。令 $x\in\mathbb{W}_{\omega_1}$，则利用条件 (16) 和引理 25，对于所有 $w\in W$，有 $f(x,w)\in\mathbb{X}_v$，且对于所有 $w\in W$，有 $\omega_{\rm nn}(f(x,w))\le\omega_2$，因此对于所有 $w\in W$，有 $f(x,w)\in\mathbb{W}_{\omega_2}$。此外，对于 $x\in\mathbb{W}_{\omega_2/\omega_1}$，利用条件 (17)，我们有 $f(x,w)\in\mathbb{X}_v$，且对于所有 $w\in W$，有 $\omega_{\rm nn}(f(x,w))\le\omega_2-\varepsilon\le\omega_2$，即对于所有 $w\in W$，有 $f(x,w)\in\mathbb{W}_{\omega_2}$。因此，$\mathbb{W}_{\omega_2}=\mathbb{W}_{\omega_1}\bigcup\mathbb{W}_{\omega_2/\omega_1}$在式 (1) 的动力学下是不变的。利用条件 (16) 和引理 25，对于 $x\in\mathbb{W}_{\omega_1}$ 和任意的 $\pi\in W^{\mathbb{Z}_+}$，有 $x\in\mathbb{E}_{c_2}\Rightarrow\varphi_x^\pi(k)\in\mathbb{E}_{c_2}\ \forall k\in\mathbb{Z}_+$，且 $\lim_{k\to\infty}\varphi_x^\pi(k)=0_n$（即，对于任何从 $\mathbb{W}_{\omega_1}$ 出发的轨迹，均收敛到 RIS $\mathcal{A}$）。最后，任何从 $\mathbb{W}_{\omega_2/\omega_1}$ 出发的轨迹都会在有限时间内进入 $\mathbb{W}_{\omega_1}$。这可由与引理 25 证明中所用论证相同的论证得出。∎

4) 候选值的计算 c_2、ω_1和 ω_2：在前文各节中，我们假设存在 c_2、ω_1 和 ω_2，使得条件 (15)、(16) 和 (17) 成立。为了获得较大的基于神经网络的吸引域估计，参数 c_2 和 ω_2 应尽可能取大。下面介绍如何计算这些参数的合适候选值。通过求解由条件 (15)、(16) 和 (17) 推导出的优化问题，可以得到这些估计值。所得流程在概念上与 [12]，中介绍的方法相似，同时还纳入了状态约束。定义

$$\bar{c}_2=\inf\left\{c\in[c_1,\infty[\ \middle|\ \begin{array}{c}\exists(x,w)\in\mathbb{X}_v\times W\ \text{s.t.}\\ \nu(x)=c\ \wedge\\ \big(\nu(f(x,w))-\nu(x)>-\varepsilon\ \vee\\ f(x,w)\notin\mathbb{X}_v\ \vee\ g(x)\ge1\big)\end{array}\right\}.$$

根据构造，并假设 $\bar{c}_2$ 定义良好，对于任意 $c_2\in]c_1,\ \bar{c}_2[$，条件 (15) 均成立。因此，当 $\delta>0$ 足够小时，我们选取候选值 $c_2=\bar{c}_2-\delta\in]c_1,\ \bar{c}_2[$。

接下来定义

$$\overline{\omega}_1=\inf\left\{\omega\in\mathbb{R}\ \middle|\ \begin{array}{c}\exists x\in\mathbb{X}_v\ \text{s.t.}\ \omega_{\rm nn}(x)=\omega\wedge\\ \nu(x)>c_2\end{array}\right\},$$

and

$$\underline{\omega}_1=\sup\left\{\omega\in[0,\overline{\omega}_1]\ \middle|\ \begin{array}{c}\exists(x,w)\in\mathbb{X}_v\times W\ \text{s.t.}\\ \omega_{\rm nn}(x)=\omega\ \wedge\\ \omega_{\rm nn}(f(x,w))-\omega_{\rm nn}(x)>-\varepsilon\end{array}\right\},$$

其中假设 $\omega_1<\omega_1$。对于任意 $\omega_1\in]\omega_1,\ \omega_1[$，条件 (16) 均成立，但涉及 ω_2 的约束除外；并且在边界水平集 $\omega_{\rm nn}(x)=\omega_1$ 内 $x\in\mathbb{X}_v$ 满足李雅普诺夫下降条件。为扩大已认证吸引域，因此应尽可能减小 ω_1，同时应尽可能增大 ω_2，使得 $\omega_{\rm nn}(x)<\omega_1\Rightarrow\omega_{\rm nn}(f(x,w))<\omega_2$。此外，根据构造，下降条件在 ω_1 处成立，因此我们希望得到一个候选 $\omega_2>\omega_1$。相应地，对于足够小的 $\delta>0$，我们选取候选 $\omega_1=\underline{\omega}_1+\delta\in]\underline{\omega}_1,\ \overline{\omega}_1[$。

最后，定义

$$\overline{\omega}_2=\inf\left\{\omega\in[\omega_1,\infty[\ \middle|\ \begin{array}{c}\exists(x,w)\in\mathbb{X}_v\times W\ \text{s.t.}\\ \omega_{\rm nn}(x)=\omega\ \wedge\\ \big(\omega_{\rm nn}(f(x,w))-\omega_{\rm nn}(x)>-\varepsilon\\ \vee\ f(x,w)\notin\mathbb{X}_v\ \vee\ g(x)\ge1\big)\end{array}\right\}.$$

根据构造，并假设定义良好，对于任意 $\omega_2\in]\omega_1,\ \omega_2[$，条件 (17) 均成立。因此，当 $\delta>0$ 足够小时，我们选取候选值 $\omega_2=\omega_2-\delta\in]\omega_1,\ \omega_2[$。

与参数 $\bar{c}_2$、ω_1、ω_1 和 ω_2 相关的优化问题，可以通过在 $\overline{\mathbb{X}}_v\times W$ 上进行基于网格或基于采样的搜索来近似求解。随后，对得到的候选值 c_2、ω_1 和 ω_2 进行形式化验证，以确保条件 (15)、(16) 和 (17) 成立。此验证步骤可借助可靠的非线性验证工具（如 dReal）或神经网络验证框架（包括 α，β-CROWN）完成。

VII. 数值示例

本节通过四个数值示例展示所提框架的有效性。所有情况下，RIS 均定义为

$$\mathcal{A}=\{0_n\}.$$

对于每个示例，我们均按照第 VI 节所述流程获得可认证吸引域。所有示例均为非多项式系统。因此，基于平方和多项式技术的吸引域估计方法（例如 [22]）并不直接适用。这进一步凸显了所提框架的通用性。

神经网络按照第 VI-B 节所述流程进行训练，其中损失函数的权重固定为 $\lambda_{\rm d}=0.1$ 和 $\lambda_{\rm pi}=1$，从而在训练过程中更加侧重于满足贝尔曼方程。所有训练得到的神经网络均由两个隐藏层组成，并使用 tanh激活函数。对于二维示例，每个隐藏层包含 20 个神经元；对于示例 VII-D，每个隐藏层包含 30 个神经元。

所有示例的初始吸引域 $\mathbb{E}_{c_1}$ 均为椭球形（基于二次李雅普诺夫函数）。对于示例 VII-B 和 VII-D，根据附录 VI 中的构造方法计算；对于示例 VII-C，则通过附录 VII 中基于李雅普诺夫函数的分析计算。

所有数据生成、神经网络训练和参数估计均在一台搭载第 13 代 Intel(R) Core(TM) i7-1355U（1.70 GHz）处理器的笔记本电脑上使用 MATLAB 完成。形式化验证使用 α，β-CROWN 在 NVIDIA H100 NVL GPU（采用 Hopper架构，配备 96 GB HBM3内存）上执行。借助优化工具箱 YALMIP [35] 和可达性工具箱 CORA [36]，通过附录 VI 计算得到初始吸引域$\mathbb{E}_{c_1}$。计算$\mathbb{E}_{c_1}$ 的开销可以忽略不计（所有示例均少于两秒）。

最后，对不可认证的估计参数进行验证（见第 VI-C.4 节）时，会额外采用一个基于二分法的优化步骤，以进一步改进所得的吸引域估计。由于估计参数在理论上已达到最优，通过这一步骤取得的改进通常微乎其微。

A. 对比设置

1）所提方法与标称方法：正如引言中所强调的，由标称动力学构造的李雅普诺夫函数通常具有一定的鲁棒性，因此在扰动足够小时，可用于获得

吸引域估计。在示例 VII-B、VII-C 和 VII-D 中，我们将所提出的基于神经网络的吸引域估计与两种替代方法进行比较：

1) 第 VI-C.2 节的优化椭球吸引域，即通过扩大 $\mathbb{E}_{c_1}$ 得到的最大椭球吸引域。2) 按照 [3] 的框架，在标称动力学下训练神经网络所得到的吸引域。

[3] 中的框架构成了当前设定的一个特例，因为它假设学习阶段的扰动集为单例。在这种情况下，可达集退化为单点，近似值函数评估只需为每个数据点使用一条轨迹，即 $N_{\mathrm{traj}} = 1$。已有研究表明，[3] 中的框架能够为无扰动系统提供可认证的大吸引域估计。

对于这些示例，我们首先计算 $\mathbb{E}_{c_1}$，随后分别使用所提出的鲁棒框架和 [3] 的标称动力学框架训练神经网络。然后，按照第 VI-C 节中的流程，分别为两个网络求得可认证吸引域。

对于这些示例，在以下两种情形下评估吸引域：

- **场景1：** 忽略不确定性，即将扰动集缩减为其中心。
- **场景2：** 考虑完整的扰动集。

2) 所提方法与参数依赖李雅普诺夫函数的比较：为进一步凸显所提框架的有效性，我们将采用本方法得到的可认证吸引域估计与以下结果进行比较：(i) 优化后的椭球形吸引域 $\mathbb{E}_{c_2}$ 以及 (ii) 基于参数依赖李雅普诺夫函数得到的吸引域 [8], [10], ，所考虑的是 [8] 中介绍的二维学术示例。

[8]中的框架假设存在定常参数不确定性。相比之下，所提框架能够处理时变不确定性。因此，原则上，我们的估计是在更一般且可能更保守的假设下得到的。

所有示例的学习域和验证域、采样点数、损失值，以及与值函数评估、神经网络训练、参数估计和验证相关的 CPU 时间，均汇总于表 I 中。

B. 受扰双机电力系统

我们考虑在 [37], [38] 中研究的二维双机电力系统的离散受扰版本。该离散版本通过对其连续时间版本进行欧拉离散化得到，即

$$f(x,w) = \begin{pmatrix} x_1 + \Delta_t x_2 \\ x_2 - \Delta_t(wx_k + \sin(x_1 + \pi/3) - \sin(\pi/3)) \end{pmatrix},$$

其中 $w \in W = [0.25, 0.75]$，且 $\Delta_t = 0.2$。安全集是两个安全集的交集：

$$\mathcal{X}_1 = \mathbb{R}^2 \setminus (\begin{bmatrix} -0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} + \frac{1}{4}\mathbb{B}_2),\ \mathcal{X}_2 = \mathbb{R}^2 \setminus (\begin{bmatrix} 0 \\ -0.5 \end{bmatrix} + \frac{1}{4}\mathbb{B}_2).$$

这些集合是这些函数的1-子水平集

$$g_{\mathcal{X}_1}(x) = 1 + \frac{1}{4^2} - ((x_1 + 0.5)^2 + (x_2 - 0.5)^2),$$
$$g_{\mathcal{X}_2}(x) = 1 + \frac{1}{4^2} - (x_1^2 + (x_2 + 0.5)^2),$$

分别为。根据附录 VI-C.4中的步骤，我们得到了一个吸引域 $\mathbb{E}_{c_1}$。对于本例，我们选取 $\alpha(x) = 0.1\nu(x)$[1]。对于本例，当 $x \in \mathbb{R}^2$时，值 $F(\{x\})$为超矩形。因此，所采用的嵌入 $\mathcal{T}$ 即为注4中针对超区间像所描述的嵌入。

C. 具有局部多项式稳定性的不确定非线性系统考虑不确定离散时间系统

$$x_{k+1} = \left(\cos(\|x_k\|^2) - w\|x_k\|^2\right) x_k, \qquad x_k \in \mathbb{R}^2, \qquad (18)$$

其中 $w \in [w_{\min}, w_{\max}]$ $w_{\min} = 1$ $w_{\max} = 2$ $\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^2 | x_1 + y_1 < 1\}$ $\nu \cdot = \|\cdot\|^2$ with 和 , 。可以证明，对于 ( ) 和$c_1 =$ ~~min~~ $\{1/w_{\min} - \varepsilon, -w_{\max} + \sqrt{w_{\max}^2 + 2}\}$，当某个足够小的 ε >0 时，区域 $\mathbb{E}_{c_1}$ 是一个吸引域，且收敛速率为 1/2 阶（见附录 VII）。因此，该系统具有局部一致的 ℓ_p 稳定性，其中 $p > 2$。我们定义 $\alpha(x) = \|x\|^4$。在此示例中，对于 $x \in \mathbb{R}^2$，值 $F(\{x\})$ 是形如 $\{u + tv \mid t \in [-1, 1]\}$ 的线段，其中 $u \in \mathbb{R}^2$ 表示中心，$v \in \mathbb{R}^2$ 指定方向向量。因此，我们采用嵌入 $\mathcal{T}$，其定义为：对于 $X = \{u + tv \mid t \in [-1, 1]\}$，

$$\mathcal{T}(X) = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}.$$

D. 具有重力与饱和力矩的刚性杆

考虑一个质量为 $m = 1$、长度为 $l = 1$的离散时间刚性杆系统。关于几何中心的质量转动惯量为 $I = ml^2/12$。不确定变量 w 表示杆的松动铰接端与其几何中心之间的距离。系统动力学由下式给出

$$\tilde{f}(x,u,w) = \begin{pmatrix} x_1 + \Delta_t x_2 \\ x_2 + \Delta_t \dfrac{1}{I + mw^2}\left(x_3 - mgw\sin(x_1)\right) \\ x_3 + \Delta_t u \end{pmatrix}, \quad (19)$$

其中 x_1 表示角位置，x_2 表示角速度，x_3 表示施加力矩。控制输入 u 表示力矩变化率。采样时间为 $\Delta_t = 0.2$，$g = 9.81$ 表示重力加速度。不确定参数 w 属于区间 $W = [0.5l - 0.04l,\ 0.5l + 0.04l]$。力矩变化率由状态反馈控制律 $\tilde{u}(x) = Kx$定义，其中反馈矩阵 K 的选取使得闭环无扰动系统的原点局部指数稳定[2]。所得闭环动力学为 $f(x,w) = \tilde{f}(x, \tilde{u}(x)\ w)$。我们施加如下状态与输入约束：$|x_1| < \frac{\pi}{4}$，$|x_2| < 1$ $|x_3| < 1$ $|\tilde{u}\ x\ | < 5$, , 以及 ( ) 。这些约束可表示为四个安全集 $\mathcal{X}_i$ 的交集，这些安全集定义为函数 $g_1(x) = x_1^2/(\pi/4)^2$, $g_2(x) = x_2^2$, $g_3\ x$ $g_4\ x$ ( ) $= x_3^2$，以及 ( ) $= x^\intercal K^\intercal K x/5^2$的严格1-子水平集。按照附录 VI中所述的步骤，我们计算由函数 $\nu(x) = x^\intercal P x$刻画的初始椭球形吸引域$\mathbb{E}_{c_1}$。对于本例，我们选取 $\alpha(x) = 0.1\,\nu(x)$。最后，对于 $x \in \mathbb{R}^3$，值 $F(\{x\})$为超矩形，因此我们采用注4中所述的嵌入来处理超区间像。

[1]如果对某个 $0 < p \le 1$ 满足 ℓ_p-稳定性条件（例如，在 $\mathcal{A}$ 指数稳定的情况下），且定义吸引域 $\mathbb{E}_{c_1}$ 和 $\mathbb{E}_{c_2}$ 的函数 ν 是李雅普诺夫函数，那么选择 $\alpha(x) = c\,\nu(x)$可能会有所帮助，其中 $c > 0$ 是缩放参数。采用这一选择后，值函数 $\mathcal{W}$的子水平集，以及其有限-˜样本近似 $\mathcal{W}_{N_s}$ 和神经网络近似 ω_{nn}的子水平集，往往能够反映 ν的子水平集的几何结构，尤其是在 RIS $\mathcal{A}$ 附近。这种一致性可能会提高基于神经网络的吸引域估计的质量。

[2]矩阵 K 可通过求解原点附近线性化动力学所对应的离散时间黎卡提方程来计算。

表 I

四个数值示例的神经网络架构/参数及相应的 CPU 时间。这里，神经网络$_{\mathrm{nom}}$表示使用标称动力学训练的神经网络（即 [3] 中的框架），而 神经网络$_{\mathrm{prop}}$ 表示使用所提框架训练的神经网络。量 t_{ev} 表示评估 $\bigcup_{i=1}^{N_{\mathrm{d}}}\{\tilde{\mathcal{W}}_{N_s}(\{z^{(i)}{}_{\mathrm{d}}\})\}$所需的 CPU 时间；$t_{\mathrm{t}}$ 表示神经网络训练所需的 CPU 时间；t_{e} 表示估计参数 c_2、ω_1和 ω_2（针对未受扰动和受扰动情形）所需的 CPU 时间；$t_{\mathrm{v,gpu}}$ 表示使用 GPU 验证这些参数（针对未受扰动和受扰动情形）所需的 CPU 时间。“NA”表示验证失败。所有报告的 CPU 时间均以秒为单位。

参数/变量		$\mathbb{X}_l/\mathbb{X}_v$	N_s	$N_{\mathrm{d}}/N_{\mathrm{pi}}$	N_{traj}	损失(θ)	$t_{\mathrm{cpu,ev}}$	t_{t}	t_{e}	$t_{\mathrm{v,gpu}}$
示例 VII-B	神经网络$_{\mathrm{nom}}$	$0.7[\![-1_2,\ 1_2]\!]$	500	5000	1	9e-6	1.9	227.0	0.6/6.2	16.0/NA
	$\mathrm{NN}_{\mathrm{prop}}$				1000	4.0e-6	278.0	218.7	0.6/6.1	17.2/19.5
例 VII-C	神经网络$_{\mathrm{nom}}$	$[\![-1_2, 1_2]\!]$	500	5000	1	4.3e-5	0.5	215.0	0.6/6.5	22.9/22.9
	$\mathrm{NN}_{\mathrm{prop}}$				1000	7.8e-5	245.4	211.0	0.6/7.8	15.7/38.6
例 VII-D	神经网络$_{\mathrm{nom}}$	$[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \times [\![-1_2, 1_2]\!]$	500	7000	1	1.4e-4	0.9	656.8	66.5/399.0	26.3/NA
	$\mathrm{NN}_{\mathrm{prop}}$				3000	1.0e-4	683.7	622.2	65.5/385.5	23.4/43.0
例 VII-E	$\mathrm{NN}_{\mathrm{prop}}$	$[-3,3] \times [-3,3]$	1000	5000/30000	1000	2.0e-6	1369.0	613.3	7.4	42.3

E. 一个受扰动的有理系统

我们考虑文献 [8]中研究的有理不确定系统：

$$f(x,w) = \begin{pmatrix} x_1 - \Delta_t \frac{(x_1 + x_2^3)}{1+x_2^2} \\ x_2 + \Delta_t \frac{x_1^3 - (0.25+w)x_2}{1+x_2^2} \end{pmatrix},$$

其中 $\Delta_t = 0.01$、$w \in [-0.15, 0.15]$ 和 $\mathcal{X} = \mathbb{R}^2$。根据附录 VI-C.4 中的流程，我们得到一个吸引域 $\mathbb{E}_{c_1}$，并选取了 $\alpha(x) = \Delta_t \nu(x)$。对于 $x \in \mathbb{R}^3$，数值 $F(\{x\})$ 是超矩形，因此我们采用注4中的基于超区间的嵌入。

F. 结果与讨论

图 1、图 2 和图 3 展示了两种所考虑场景下的吸引域估计结果。在忽略不确定性时（场景1），文献 [3] 中的标称动力学框架得到的可认证吸引域比椭球形吸引域和所提框架都更大。这一现象符合预期，因为所提方法在训练过程中明确考虑了不确定性，因此在忽略扰动时得到的估计本质上更为保守。在此场景下，所提方法的表现与优化椭球方法相当，有时甚至略胜一筹。

充分考虑扰动（场景2）时，所提框架始终能够给出最大且可验证的吸引域估计。相比之下，采用标称数据训练的神经网络无法为示例 VII-B 和 VII-D 给出可验证的估计。值得注意的是，优化椭球吸引域在全部三个示例中仍能提供合理的估计，这表明尽管存在结构性局限，它们仍具有内在的鲁棒性。

从计算角度来看，表 I 显示，所提框架在神经网络训练、参数估计和验证时间方面与基于标称数据的方法相当。主要的计算开销来自在配点处计算（近似的）真实值函数 $\mathcal{W}$，即 $\bigcup_{i=1}^{N_{\mathrm{d}}}\left\{\tilde{\mathcal{W}}_{N_s}(\{z^{(i)}{}_{\mathrm{d}}\})\right\}$。如第 VI-A 节所述，这些计算需要进行可达集计算。在当前示例中，可达集通过随机生成的轨迹进行近似，其数量必须足够大，才能确保精度。这体现了数值近似方案固有的典型精度与计算成本之间的权衡。

图4进一步表明，对于示例 VII-E，所提方法同时优于优化的椭球估计 $\mathbb{E}_{c_2}$ 以及 [8]中推导得到的吸引域。重要的是，尽管所提框架能够应对时变扰动，仍取得了这一改进，而 [8]仅考虑恒定的参数不确定性。这一比较凸显了所提方法的有效性与灵活性。

最后，表 I 表明，与其他示例相比，示例 VII-E 的数据生成需要更多计算时间。这是因为采用了更大的时间范围N_s，而该系统是通过更细的时间步长进行欧拉离散化得到的。

VIII. 结论

本文提出了一种新颖的框架，用于准确估计具有连续动力学、开安全集、紧致扰动集以及一致局部 ℓ_p-稳定鲁棒不变集的离散时间非线性不确定系统的安全鲁棒吸引域。我们通过在紧集度量空间上定义的新值函数刻画吸引域，并证明这些值函数是相应贝尔曼型方程的唯一解。在此基础上，我们开发了一种物理信息神经网络框架，将推导出的贝尔曼型方程直接嵌入训练过程，以学习相应的值函数。为了根据所学习的神经近似获得可认证的安全鲁棒吸引域估计，我们提出了一种利用现有形式化验证工具的验证程序。数值示例展示了所提方法的有效性和适用性。

未来的工作将围绕本框架所引出的若干研究方向展开，包括研究连续时间系统的安全鲁棒吸引域、刻画和估计受控受扰系统的零可控区域，以及开发更高效的神经网络验证算法，以实现准确且可扩展的吸引域估计。

参考文献

[1] J. Liu、Y. Meng、M. Fitzsimmons 和 R. Zhou，“物理信息神经网络李雅普诺夫函数：偏微分方程表征、学习与验证”，*Automatica*，第 175 卷，第 112193 页，2025年。[2] M. Serry 和 J. Liu，“利用后向可达集的隐式表示，对离散时间系统的安全吸引域进行欠近似”，*IEEE*控制系统快报，第 8 卷，2714，2024 2709页。–。[3] M. Serry、H. Li、R. Zhou、H. Zhang 和 J. Liu，“离散时间非线性系统的安全吸引域：表征与可验证的神经网络估计”，载于*2025 IEEE* 第 *64* 届决策与控制会议 *(CDC)*，第 5774–5781 页，IEEE，2025。

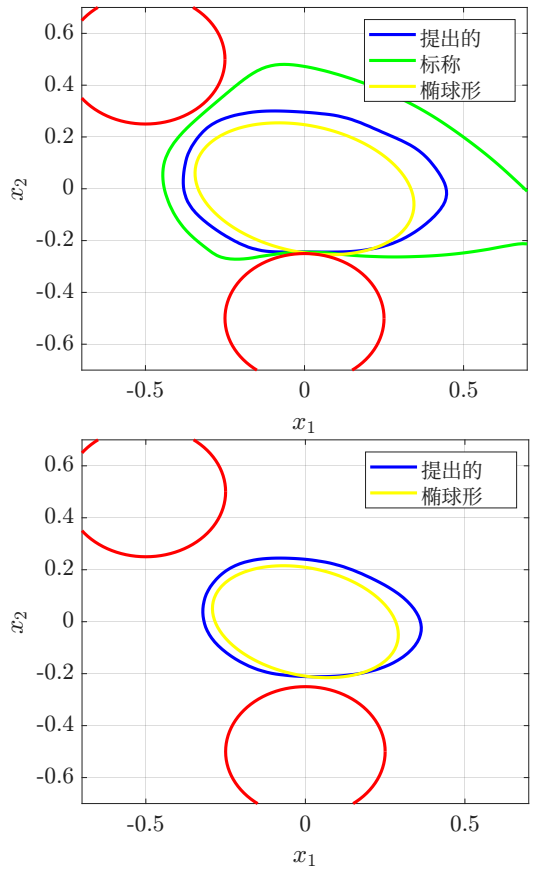


图1. 示例VII-B在场景1（忽略不确定性，顶部）和场景2（考虑完整扰动，底部）下经认证的吸引域。红色圆圈表示状态约束。标称训练的神经网络无法在场景2下得到可认证的吸引域。

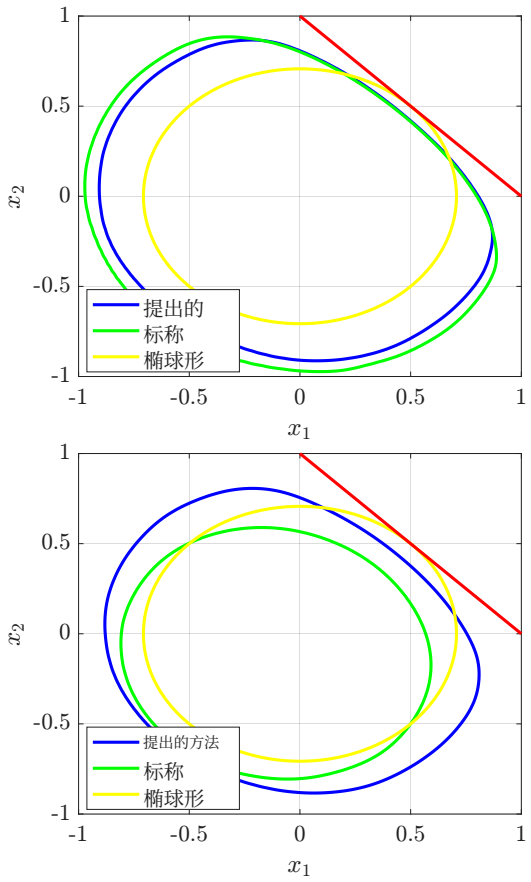


图2. 示例VII-C在场景1（忽略不确定性，上图）和场景2（考虑完整扰动，下图）下的经认证的吸引域。红线表示状态约束。

[4] G. Chesi，“不确定多项式系统吸引域的估计”，*Automatica*，第 40 卷，第 11 期，第 1981–1986 页，2004 年。[5] G. Datseris 和 A. Wagemakers，“轻松估计吸引盆”，混沌：非线性科学跨学科期刊，第 32 卷，第 2 期，2022。[6] F. Amato、M. Mattei 和 A. Pironti，“关于不确定线性离散时间系统二次稳定性的一则说明”，*IEEE* 自动控制汇刊，第 43 卷，第 2 期，第 227–229 页，2002年。[7] R. Goebel、T. Hu 和 A. R. Teel，“线性微分/差分包含稳定性与性能分析中的对偶矩阵不等式”，载于非线性系统与控制当前趋势：纪念 *Petar Kokotovi´c* 和 *Turi Nicosia*，第 103–122 页，施普林格，2006年。[8] D. Coutinho 和 C. E. de Souza，“一类不确定非线性离散时间系统的局部稳定性分析与吸引域估计”，国际鲁棒与非线性控制期刊，第 23 卷，第 13 期，第 1456–1471 页，2013年。[9] S.-W. Kau、Y.-S. Liu、L. Hong、C.-H. Lee、C.-H. Fang 和 L. Lee，“离散时间不确定系统鲁棒稳定性的一个新线性矩阵不等式条件”，系统与控制快报，第 54 卷，1203，2005 12，1195页。–。[10] D. F. Coutinho 和 C. E. de Souza，“一类不确定离散时间非线性系统的鲁棒吸引域估计”，*IFAC* 论文集，第 43 卷，第 14 期，第 185–190 页，2010年。[11] R. E. Kalman 和 J. E. Bertram，“李雅普诺夫‘第二方法’下的控制系统分析与设计：II——离散时间系统”，基础工程学报，第 82 卷，第 394–400 页，1960年 06。[12] C. Lu、A. Goldsztejn 和 Y. Li，“利用区间李雅普诺夫方程估计差分包含的鲁棒吸引域”，系统与控制快报，第 193 卷，第 105911 页，2024。[13] S. Chen、M. Fazlyab、M. Morari、G. J. Pappas 和 V. M. Preciado，“非线性系统吸引域的学习”，载于*CDC* 会议论文集，第 6477–6484 页，IEEE，2021。

[14] Z. Shi、C.-J. Hsieh 和 H. Zhang，《通过分支定界进行认证训练：李雅普诺夫稳定神经控制案例研究》，*arXiv:2411.18235*，2024年。[15] J. Wu、A. Clark、Y. Kantaros 和 Y. Vorobeychik，《离散时间系统的神经李雅普诺夫控制》，神经信息处理系统进展，第 36 卷，第 2939–2955 页，2023年。[16] R. Bunel、J. Lu、I. Turkaslan、P. H. Torr、P. Kohli 和 M. P. Kumar，《分段线性神经网络验证的分支定界方法》，机器学习研究期刊，第 21 卷，第 39 期，2020年，第 1–42 页。[17] K. Xu、H. Zhang、S. Wang、Y. Wang、S. Jana、X. Lin 和 C. J. Hsieh，《快速且完备：借助快速且大规模并行的不完备验证器实现完备神经网络验证》，载于 *ICLR* 会议论文集，2021年。[18] S. Wang、H. Zhang、K. Xu、X. Lin、S. Jana、C.-J. Hsieh 和 J. Z. Kolter，《Beta-CROWN：利用逐神经元分裂约束进行高效界传播，以验证神经网络鲁棒性》，神经信息处理系统进展，第 34 卷，第 29909–29921 页，2021年。[19] C. Ferrari、M. N. Mueller、N. Jovanovi´c 和 M. Vechev，《通过多神经元松弛引导的分支定界实现完备验证》，载于 *ICLR* 会议论文集，2022年。[20] D. Zhou、C. Brix、G. A. Hanasusanto 和 H. Zhang，《基于分支定界推导割平面的可扩展神经网络验证》，载于 神经信息处理系统进展，2024年。[21] B. Xue、N. Zhan 和 Y. Li，《基于贝尔曼方程的离散时间系统鲁棒吸引域刻画》，*IFAC-PapersOnLine*，第 53 卷，第 2 期，第 6390–6397 页，2020年。[22] B. Xue、N. Zhan 和 Y. Li，《状态约束受扰动离散时间多项式系统的鲁棒吸引域生成》，*IFAC- PapersOnLine*，第 53 卷，第 2 期，第 6327–6333 页，2020年。[23] H. Zhang、T.-W. Weng、P.-Y. Chen、C.-J. Hsieh 和 L. Daniel，《利用一般激活函数实现高效神经网络鲁棒性认证》，

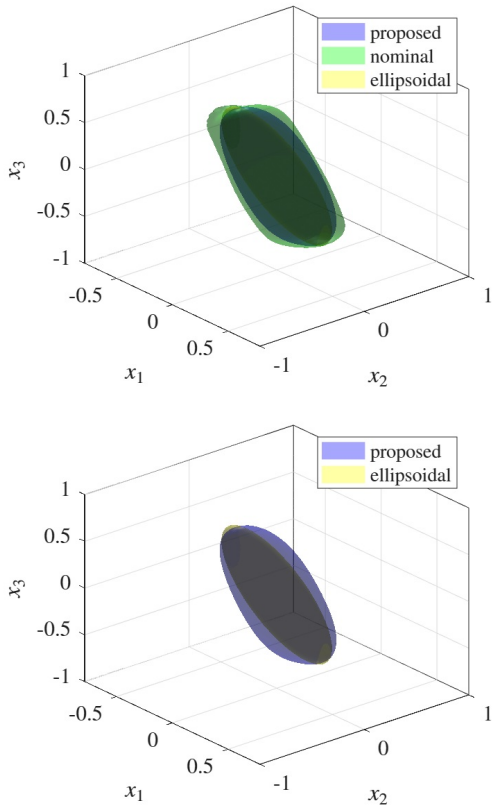


图3. 示例 VII-D 在场景1（忽略不确定性，顶部）和场景2（考虑全部扰动，底部）下经认证的吸引域。经标称数据训练的神经网络无法在场景2下给出可认证的吸引域。

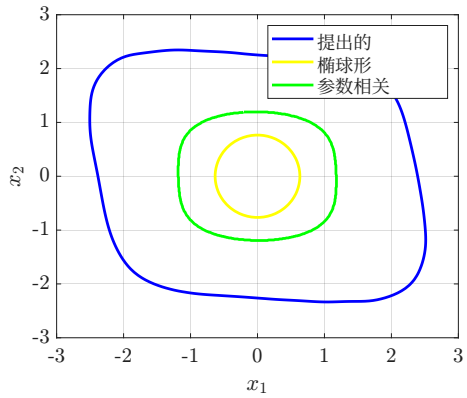


图4. 示例 VII-E 的经认证吸引域。基于参数相关李雅普诺夫函数的吸引域由 [8] 数字化得到。

函数》，神经信息处理系统进展，第 31 卷，2018年。[24] K. Xu、Z. Shi、H. Zhang、Y. Wang、K.-W. Chang、M. Huang、B. Kailkhura、X. Lin 和 C.-J. Hsieh，《面向可扩展经认证鲁棒性及更广泛应用的自动扰动分析》，神经信息处理系统进展，第 33 卷，第 1129–1141 页，2020年。[25] Z. Shi、Q. Jin、Z. Kolter、S. Jana、C.-J. Hsieh 和 H. Zhang，《利用分支定界验证具有一般非线性函数的神经网络》，载于 *TACAS* 会议论文集，2025年。[26] S. Gao、S. Kong 和 E. M. Clarke，《dReal：用于实数域非线性理论的SMT求解器》，载于 *CADE* 会议论文集，第 208–214 页，施普林格，2013年。[27] C. M. Kellett，《比较函数结果汇编》，控制、信号与系统数学，第 26 卷，第 3 期，第 339–374 页，2014年。[28] L. Gr¨une 和 H. Zidani，《状态约束受扰非线性系统的祖博夫方程》，数学控制与相关领域，第 5 卷，第 1 期，第 55–71 页，2015年。[29] F. Camilli、L. Gr¨une 和 F. Wirth，《祖博夫方法在受扰系统中的推广》，*SIAM* 控制与优化期刊，第 40 卷，第 2 期，第 496–515 页，2001年。[30] M. Fitzsimmons，《具有可计算可达集的差分包含的性质》，博士论文，滑铁卢大学，滑铁卢（加拿大安大略省），2023年。[31] W. K¨uhn，《无包裹效应的动力系统轨道严格计算》，*Computing*，第 61 卷，第 1 期，第 47–67 页，1998年。[32] M. Kieffer、L. Jaulin 和 E. Walter，《利用区间分析保证递归非线性状态界》，国际自适应控制与信号处理杂志，第 16 卷，第 3 期，第 193–218 页，2002年。[33] T. Alamo、J. M. Bravo 和 E. F. Camacho，《利用 zonotope 保证状态估计》，*Automatica*，第 41 卷，第 6 期，第 1035–1043 页，2005年。

[34] X. Yang 和 J. K. Scott，“利用含模型冗余的微分不等式，准确传播离散时间非线性系统中的不确定性”，*IEEE* 自动控制汇刊，第65卷，第12期，第5043–5057页，2020。[35] J. Lofberg，“Yalmip：用于 MATLAB 建模与优化的工具箱”，载于*2004*年 *IEEE* 国际机器人与自动化会议（*IEEE* 目录号：*04CH37508*），第284–289页，IEEE，2004年。[36] M. Althoff，“CORA 2015 简介”，载于连续与混合系统应用验证研讨会论文集，第120–151页，2015年。[37] A. Vannelli 和 M. Vidyasagar，“自治非线性系统的最大李雅普诺夫函数与吸引域”，*Automatica*，第21卷，第1期，第69–80页，1985年。[38] J. Willems，“用于电力系统暂态稳定性的改进李雅普诺夫函数”，载于英国电气工程师学会会刊，第115卷，第1315–1317页，IET，1968年。[39] G. Beer，闭集与闭凸集上的拓扑，第268卷。Springer Science & Business Media，1993年。[40] K. M. Abadir 和 J. R. Magnus，矩阵代数。计量经济学练习，剑桥大学出版社，2005年。[41] OpenAI，“ChatGPT (GPT-5)。”https://chat.openai.com，2026年。大语言模型。

附录 I 引理 1 证明

证明：由于 X 是开集，因此对于每个 $x \in \Omega$，都存在 $\delta_x > 0$ 使得 $x + \delta_x \mathbb{B}_n \subseteq X$。因此，$\Omega \subseteq \bigcup_{x\in\Omega} x + (1/2)\delta_x \mathbb{B}_n \subseteq \bigcup_{x\in\Omega} x + \delta_x \mathbb{B}_n \subseteq X$. 利用 Ω 的紧致性，存在有限的 $N \in \mathbb{N}$ 以及有限集 $\{x_i\}_{i=1}^{N} \subseteq \Omega$，使得 $\Omega \subseteq \bigcup_{i\in[1;N]} x_i + (1/2)\delta_{x_i}\mathbb{B}_n$. 令 $\Omega_i := \Omega \bigcap (x_i + (1/2\ \delta_{x_i}\mathbb{B}_n \quad i \in [1\ N] \qquad \bigcup_{i\in[1\ N]} \quad i = \qquad \subseteq))$；注意到 Ω, $\bigcup_{i\in[1\ N]} x_i + \ 1/2\ \delta_{x_i}\mathbb{B}_n \qquad \delta = \qquad _{i\in[1;N]}\ 1/2\ \delta_{x_i} > 0.$ 因为 Ω ( )。定义：min ( )。于是，Ω

$$_i + \delta\mathbb{B}_n \subseteq x_i + \ \delta + \ 1/2\ \delta_{x_i}\ \mathbb{B}_n \subseteq x_i + \delta_{x_i}\mathbb{B}_n \subseteq (( )),$$

X $i \in [1\ N].$ $+ \delta\mathbb{B}_n = \bigcup_{i\in[1\ N]} \quad _i + \delta\mathbb{B}_n =$；因此 Ω ; Ω; (Ω) ; $\bigcup_{i\in[1\ N]} \quad _i + \delta\mathbb{B}_n \subseteq \bigcup_{i\in[1\ N]} x_i + \delta_{x_i}\mathbb{B}_n \subseteq X.$

■

附录 II 引理 2 的证明

证明：$(\mathcal{K}(X),\ \mathbf{d}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{s}})$ 是一个度量空间，这是一个基本结论，例如参见 [39, 第 3 章2]。

当 X 是开集时，令 $\Omega \in \mathcal{K}(X)$。由引理 1，存在一个 $\delta > 0$，使得 $\Omega + \delta\mathbb{B}_n \subseteq X$。根据定义可知，任何满足$\mathbf{d}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{s}}(\Omega\ \Gamma) < \delta/2$ 的 $\Gamma \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$都必须满足 $\Gamma \subseteq \Omega + \delta\mathbb{B}_n \subseteq X$。这表明 $\mathcal{K}(X)$是开集。

■

附录 III 引理 3 证明

证明：我们将证明 F 在任意给定的 $X \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ 处连续。固定 $r \in]0, \infty[$。我们知道 $X + r\mathbb{B}_n$ 是紧致的。任取 $\varepsilon > 0$，并选取 $\delta \in]0, r[$，使得对于所有 $x_1, x_2 \in X + r\mathbb{B}_n$ 和 $w \in W$：$\|x_1 - x_2\| \leq \delta \Rightarrow \|f(x_1, w) - f(x_2, w)\| \leq \varepsilon$. 由于 f 在 $(X + r\mathbb{B}_n) \times W$ 上一致连续，因此存在这样的 δ。令 $Y \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ 满足 $\mathrm{d}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{s}}(X, Y) \leq \delta$，则 $Y \subseteq X + r\mathbb{B}_n$。注意到，$\forall z_1 \in F(X)$，则存在 $x_1 \in X$ 和 $w \in W$，使得 $z_1 = f(x_1, w)$。由于 $\mathrm{d}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{s}}(X, Y) \leq \delta$，因此存在 $x_2 \in Y$ 使得 $\|x_1 - x_2\| \leq \delta$。定义 $z_2 = f(x_2, w) \in F(Y)$。于是，$\|z_1 - z_2\| = \|f(x_1, w) - f(x_2, w)\| \leq \varepsilon$。类似地，利用豪斯多夫距离的对称性，对于任意 $z_2 \in F(Y)$，存在 $z_1 \in F(X)$，使得 $\|z_1 - z_2\| \leq \varepsilon$。因此，$\mathrm{d}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{s}}(F(X), F(Y)) < \varepsilon$，证毕。

■

附录 IV 引理 4 证明

证明：通过归纳法，我们看到 $F(X) = \bigcup_{(x,w) \in X \times W} \{f(x, w)\} = \bigcup_{x \in X, \pi \in W^{\mathbb{Z}_+}} \{\varphi_x^{\pi}(1)\} = \mathcal{R}(X, 1)$。假设 $\mathcal{R}(X, k) = \mathcal{R}(F, X, k-1) = F^k(X) = F(F^k(X)) = \bigcup_{(x,\pi,w) \in X \times W^{\mathbb{Z}_+} \times W} \{f(\varphi_x^{\pi}(k), w)\}$。由于对每个 $\pi \in W^{\mathbb{Z}_+}$，都存在 $w \in W$ 使得 $\pi(k+1) = w$，我们得到 $F(\varphi_x^{\pi}(k), w) = \mathcal{R}(X, k+1)$。此外，我们看到 $F(\mathcal{R}(X, k+1)) = F^{k+1}(X) = F \circ F^k(X) = \mathcal{R}(F(X), k+1) = \bigcup_{x \in X, w \in W, \pi \in W^{\mathbb{Z}_+}} \{\varphi_{f(x,w)}^{\pi}(k)\}$。由于对每个 $\pi \in W^{\mathbb{Z}_+}$，都存在 $\mu \in W^{\mathbb{Z}_+}$ 和一个 $w \in W$，使得 $\mu(1) = w$ 且 $\pi(j-1) = \mu(j)$ 对于 $j \in [2; k]$，我们得到 $F(\mathcal{R}(X, k+1)) = \mathcal{R}(F(X), k+1)$。

■

附录 V 引理 15 的证明

证明：固定 $X \in D$，并令 $r > 0$ 为任意正数。则 g 在 $X + r\mathbb{B}_n$ 上是一致连续的。令 $\varepsilon > 0$ 为任意值，则存在 $\delta > 0$，使得 $\delta < r$，对于所有满足 $x, y \in X + r\mathbb{B}_n$ 的 $\|x - y\| \leq \delta$，$|g(x) - g(y)| \leq \varepsilon$，我们有 $Y \in D$。令 $\mathrm{d}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{s}}(X, Y) \leq \delta$，则 $Y \subseteq X + r\mathbb{B}_n$。令 $x \in X$ 满足 $g(x) = G(X)$，由于 X 的紧致性，这样的值存在。由于 $\mathrm{d}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{s}}(X, Y) \leq \delta$，存在 $y \in Y$ 使得 $|g(x) - g(y)| \leq \varepsilon$。$G(X) = g(x) \leq g(y) + \varepsilon \leq G(Y) + \varepsilon \Rightarrow G(X) - G(Y) \leq \varepsilon$。因此，我们有 $G(X) - G(Y) \leq \varepsilon$。类似地，令 $y \in Y$ 满足 $g(y) = G(Y)$。由于 $\mathrm{d}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{s}}(X, Y) \leq \delta$，存在 $x \in X$ 使得 $\|x - y\| \leq \delta$。因此，$|g(y) - g(x)| \leq \varepsilon$，这意味着 $G(Y) = g(y) \leq g(x) + \varepsilon \leq G(X) + \varepsilon \Rightarrow G(Y) - G(X) \leq \varepsilon$。因此，$|G(X) - G(Y)| \leq \varepsilon$，证明完毕。

■

附录 VI 指数稳定平衡点的椭球形吸引域

下文中，我们将注意力限制在均匀局部指数稳定的单点不变集，即平衡点上。不失一般性，假设平衡点位于原点，即 $\mathcal{A} = \{0_n\}$。

我们利用公共二次李雅普诺夫函数（例如，参见 [6]）以及原点处的线性化来求取初始吸引域。此处，$\|\cdot\|$ 表示欧几里得范数，并假设 f 二阶连续可微。

给定 $x \in \mathbb{R}^n$ 和 $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$，$|x| \in \mathbb{R}_+^n$ 和 $|A| \in \mathbb{R}_+^{n \times m}$ 分别定义为 $|x|_i = |x_i|$，$i \in [1\ n]$，$|A|_{ij} = |A_{ij}|$，$i\ j \in :, ;$、和 $. :. , (,); ;$，$[1\ n] \times [1\ m]$。令 $\mathcal{S}^n$ 表示实 $n \times n$ 对称矩阵集合。给定 $A \in \mathcal{S}^n$，$\underline{\lambda}(A)$ 和 $\overline{\lambda}(A)$ 分别表示 A 的最小和最大特征值。令 $\mathcal{S}_{++}^n$ 表示 $n \times n$ 实对称正定矩阵集合，即 $\mathcal{S}_{++}^n = \{A \in \mathcal{S}^n \mid \underline{\lambda}(A) > 0\}$。给定 $A \in \mathcal{S}_{++}^n$，$A^{\frac{1}{2}}$ 表示满足 $A = K^2$ [40, p. 220] 的唯一 $K \in \mathcal{S}_{++}^n$。

以下结果说明了椭球吸引域的构造方法。

定理 27：考虑一个超矩形域

$$\mathcal{B} = [\![-R_{\mathcal{B}}, R_{\mathcal{B}}]\!] \subseteq \mathcal{X} \cap \mathbb{X}_v,$$

其内部包含原点[3]。定义

$$h(x, w) := f(x, w) - D_x f(0_n, w)x,\ (x, w) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m,$$

并令 $\eta_{\mathcal{B}} \in \mathbb{R}_+^n$ 使得[4]

$$|h(x, w)| \leq \frac{\|x\|^2}{2} \eta_{\mathcal{B}}\ \forall (x, w) \in \mathcal{B} \times W.$$

令 $\mathbf{A} \subseteq \mathbb{R}^{n \times n}$ 为一个多胞体矩阵集[5]，使得

$$D_x f(0, w) \in \mathbf{A}\ \forall w \in W,$$

并令 $A_1, \ldots A_q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 为 $\mathbf{A}$ 的顶点，因此 $\mathbf{A} = \mathrm{conv}\{A_1, \ldots A_q\}$. 假设存在 $P \in \mathcal{S}_{++}^n$ 使得

$$Q_i := -(A_i^{\intercal} P A_i - P) \in \mathcal{S}_{++}^n,\ i \in [1; q].$$

定义候选李雅普诺夫函数

$$\nu(x) := x^{\intercal} P x,\ x \in \mathbb{R}^n.$$

此外，定义参数

$$c_1 := \left(\frac{-e_2 + \sqrt{e_2^2 + 4e_1 d}}{2e_1} \right)^2,$$

$$e_1 := \frac{\||P^{\frac{1}{2}}|\eta_{\mathcal{B}}\|^2}{4\underline{\lambda}(P)},$$

$$d = \min_{i \in [1;q]} \underline{\lambda}(Q_i) - \epsilon,$$

对于某个足够小的 $\epsilon > 0$，其满足 $\epsilon < \min_{i \in [1;q]} \lambda(Q_i)$，且 $\epsilon < \underline{\lambda}(P)$，并且 $e_2 \geq 0$[6] 满足

$$e_2 \geq \||P^{\frac{1}{2}}|\eta_{\mathcal{B}}\|\|P^{\frac{1}{2}}(D_x f(0_n, w))P^{-\frac{1}{2}}\|\ \forall w \in W.$$

此外，定义

$$k_2 := \min_{i \in [1;n]} \frac{R_{\mathcal{B},i}^2}{P_{i,i}^{-1}},$$

and

$$c_1 := \min\{k_1, k_2\}.$$

那么，椭球集 $\mathbb{E}_{c_1} := \{x \in \mathbb{R}^n | \nu(x) \leq c_1\}$ 是 $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{X} \cap \mathbb{X}_v$ 内的安全鲁棒吸引域。

证明：对于 $(x, w) \in \mathbb{R}^n \times W$，

$$f(x, w) = D_x f(0_n, w)x + h(x, w).$$

[3]由于 $\mathcal{X}$ 的开性，这样一个超矩形是存在的。

[4]$\eta_{\mathcal{B}}$ 由于 f 的二次连续可微性，该量存在，并且可以使用区间算术进行估计。

[5]这可以使用区间算术得到。

[6]参数 e_2 可以通过区间算术进行估计。

因此，对于（x，w）$\in \mathbb{R}^n \times W$（为方便起见，省略了 h、f 和 $D_x f$ 的自变量），

$$\begin{aligned}\nu(f)-\nu(x) =&(f)^\intercal P(f)-x^\intercal Px\\ =&((D_xf)x+h)^\intercal P((D_xf)x+h)-x^\intercal Px\\ =&x^\intercal((D_xf)^\intercal P(D_xf)-P)x\\ &+x^\intercal(D_xf)^\intercal Ph+h^\intercal P(D_xf)x+h^\intercal Ph.\end{aligned}$$

注意，项 $x^\intercal((D_xf)^\intercal P(D_xf)-P)x$ 是关于 D_xf 的凸函数。因此，对所有 $w\in W$，

$$\begin{aligned}x^\intercal((D_xf)^\intercal P(D_xf)-P)x \le& \sup_{A\in\mathbf{A}} x^\intercal(A^\intercal PA-P)x\\ =&\sup_{i\in[1;q]} x^\intercal(A_i^\intercal PA_i-P)x\\ =&-\sup_{i\in[1;q]} x^\intercal Q_i x.\end{aligned}$$

因此，

$$\nu(f)-\nu(x)\le-\min_{i\in[1;q]}\underline{\lambda}(Q_i)\|x\|^2+2x^\intercal(D_xf)^\intercal Ph+h^\intercal Ph.$$

对于（x，w）$\in\mathcal{B}\times W$，

$$\begin{aligned}2x^\intercal(D_xf)^\intercal Ph=&2(P^{-1/2}P^{\frac12}x)^\intercal(D_xf)^\intercal P^{\frac12}P^{\frac12}h\\ =&(P^{\frac12}x)^\intercal P^{-1/2}(D_xf)^\intercal P^{\frac12}(2P^{\frac12}h)\\ \le&\|P^{\frac12}x\|\|P^{\frac12}(D_xf)P^{-1/2}\|\|P^{\frac12}|\eta_{\mathcal{B}}\|\|x\|^2\\ \le&\sqrt{\nu(x)}\|P^{\frac12}|\eta_{\mathcal{B}}\|\|P^{\frac12}(D_xf)P^{-\frac12}\|\|x\|^2.\end{aligned}$$

此外，

$$\begin{aligned}h^\intercal Ph=&\|P^{\frac12}h\|^2\le\||P^{\frac12}||h|\|^2\le\||P^{\frac12}|\eta_{\mathcal{B}}\|^2\frac{\|x\|^4}{4}\\ \le&\||P^{\frac12}|\eta_{\mathcal{B}}\|^2\frac{\|x\|^2\nu(x)}{4\underline{\lambda}(P)}.\end{aligned}$$

因此，对于 $(x,w)\in\mathcal{B}\times W$，

$$\begin{aligned}\nu(f)-\nu(x)\le&-\epsilon\|x\|^2\\ &+\sqrt{\nu(x)}\|P^{\frac12}|\eta_{\mathcal{B}}\|\|P^{\frac12}(D_xf)P^{-\frac12}\|\|x\|^2\\ &+\||P^{\frac12}|\eta_{\mathcal{B}}\|^2\frac{\|x\|^2\nu(x)}{4\underline{\lambda}(P)}-d\|x\|^2.\end{aligned}$$

对于 $x\in\mathbb{E}_{c_1}$, $\nu(x)\le c_1\le k_2\Rightarrow\nu(x)\le R^2_{\mathcal{B},i}/P^{-1}_{i,i}\ \forall i\in[1;n]$, 这表明 $x\in\mathcal{B}$（即 $\mathbb{E}_{c_1}\subseteq\mathcal{B}$），且上述界在 $\mathbb{E}_{c_1}$ 上成立。令 $(x,w)\in\mathbb{E}_{c_1}\times W$（注意 $\nu(x)\le k_1$），根据 e_1、e_2 和 k_1 的定义，可得:

$$\begin{aligned}&\sqrt{\nu(x)}\|P^{\frac12}|\eta_{\mathcal{B}}\|\|P^{\frac12}(D_xf)P^{-\frac12}\|\|x\|^2\\ &\quad+\||P^{\frac12}|\eta_{\mathcal{B}}\|^2\frac{\|x\|^2\nu(x)}{4\underline{\lambda}(P)}-d\|x\|^2\\ &\le e_2\sqrt{\nu(x)}\|x\|^2+e_1\|x\|^2\nu(x)-d\|x\|^2\le0.\end{aligned}$$

因此，$\nu(f(x,w))-\nu(x)\le-\epsilon\|x\|^2\le-(\epsilon/\overline{\lambda}(P))\nu(x)$，因此，$\nu(f(x,w))\le\left(1-\epsilon/\overline{\lambda}(P)\right)\nu(x)$。利用归纳法，可以证明对于任意的 $x\in\mathbb{E}_{c_1}$ 和任意扰动序列 $\pi\in W^{\mathbb{Z}_+}$,

$$\nu(\varphi_x^\pi(j))\le\left(1-\frac{\epsilon}{\overline{\lambda}(P)}\right)^j\nu(x)\ \forall j\in\mathbb{Z}_+,\tag{20}$$

这意味着 $\varphi_x^\pi(j)\in\mathbb{E}_{c_1}\ \forall j\in\mathbb{Z}_+$ 并且

$$\begin{aligned}\lim_{j\to\infty}\|\varphi_x^\pi(j)\|^2\le&\lim_{j\to\infty}\frac{1}{\underline{\lambda}(P)}\nu(\varphi_x^\pi(j))\\ \le&\lim_{j\to\infty}\frac{1}{\underline{\lambda}(P)}\left(1-\frac{\epsilon}{\overline{\lambda}(P)}\right)^j\nu(x)=0.\end{aligned}$$

■

附录 VII 系统 (18) 的李雅普诺夫分析

本分析最初是在 ChatGPT [41] 的协助下起草的，随后由作者进行了验证和完善。令 $\nu(x)=\|x\|^2$，其中 $x\in\mathbb{R}^2$（本文中，$\|\cdot\|$ 表示欧几里得范数）。由式 (18) 可得，$\nu(f(x,w))=\big(\cos(\nu(x))-w\nu(x)\big)^2\nu(x)$, $\in\mathbb{R}^2\times W$。为保证平方后仍保持顺序，我们要求 $\cos(\nu(x))-w\nu(x)$在原点附近为正。由于对所有 $s\ge0$，$\cos(s)\ge1-s^2/2$，因此 $\cos(\nu(x))-w\nu(x)\ge1-\nu(x)^2/2-w\nu(x)$。于是，只要 $1-\nu(x)^2/2-w\nu(x)\ge0$，就有 $\cos(\nu(x))-w\nu(x)$，即 $0\le\nu(x)\le-w+\sqrt{w^2+2}$。因为~~$w\mapsto-w+\sqrt{w^2+2}$ 在 $\mathbb{R}_+$ 上递减，~~所以对所有 $w\in[w_{\min},w_{\max}]$，我们有

$$\begin{aligned}0\le\nu(x)\le\rho_{\text{pos}}:=-w_{\max}+\sqrt{w_{\max}^2+2}\\ \implies\cos(\nu(x))-w\nu(x)\ge0.\end{aligned}\tag{21}$$

利用 $\cos(\tau)\le1$，对于 $\tau\ge0$，$\cos(\nu(x))-w\nu(x)\le1-w\nu(x)$。对于 (21)，两边均非负；因此

$$\big(\cos(\nu(x))-w\nu(x)\big)^2\le(1-w\nu(x))^2\le(1-w_{\min}\nu(x))^2.$$

因此，只要 $\nu(x)\le\rho_{\text{pos}}$,

$$\nu(f(x,w))\le\nu(x)-2w_{\min}\nu(x)^2+w_{\min}^2\nu(x)^3.\tag{22}$$

此外，若 $\nu(x)\le1/w_{\min}$，则 $w_{\min}^2\nu(x)^3\le w_{\min}\nu(x)^2$,，从而得到

$$\nu(f(x,w))\le\nu(x)-w_{\min}\nu(x)^2.\tag{23}$$

定义 $\rho:=\min\{\rho_{\text{pos}},1/w_{\min}-\varepsilon\}$，$\varepsilon>0$，使得对于所有 $\nu(x)\le\rho$，$w_{\min}\nu(x)<1$。于是，(23) 意味着对于所有 $\nu(x)\le\rho$，$\nu(f(x,w))\le\nu(x)$，且子水平集 $\Omega_\rho=\{x\in\mathbb{R}^2:\nu(x)\le\rho\}$ 是一个鲁棒不变集。对于 $\nu(x)\in]0,\rho]$，并利用 (23)，

$$\frac{1}{\nu(f(x,w))}\ge\frac{1}{\nu(x)-w_{\min}\nu(x)^2}=\frac{1}{\nu(x)}\frac{1}{1-w_{\min}\nu(x)}.$$

由于 $0\le w_{\min}\nu(x)<1$，$1/(1-z)\ge1+z$ 对 $z\in[0,1[$ 成立这一事实给出 $1/\nu(f(x,w))\ge1/\nu(x)+w_{\min}$. 沿轨迹 $x_{k+1}=f(x_k,w_k)$，正向不变性确保对所有 k 有 $\nu(x_k)\le\rho$，因此 $1/\nu(x_{k+1})\ge1/\nu(x_k)+w_{\min}$，由归纳法可得 $1/\nu(x_k)\ge1/\nu(x_0)+w_{\min}k$, $k\in\mathbb{Z}_+$。因此，$\nu(x_k)\le\nu(x_0)/(1+w_{\min}k\,\nu(x_0))$。由于 $\nu(x)=\|x\|^2$,，$\|x_k\|\le\|x_0\|/\sqrt{1+w_{\min}k\|x_0\|^2}$, $k\in\mathbb{Z}_+$, 从而证明了系统 (18) 原点的一致局部多项式稳定性。