arXiv:2603.03093v1 [math.CV] 3 Mar 2026

de Branges–Rovnyak 空间中的正交多项式

Eugenio Dellepiane 和 Daniel Seco

Abstract. 给定一个在单位圆盘上全纯且模不超过 1 的函数 b，可以构造一个与之关联的再生核希尔伯特空间，称为 de Branges–Rovnyak 空间 $H(b)$。我们通过描述相应的正交多项式族，探讨这类空间的表示。在 b为有理函数的多种情形下，我们发现了相关线性系统中的重要结构。我们还证明了 de Branges–Rovnyak 空间 $H(b)$ 在某些复合算子作用下具有某种不变性。

1. Introduction

在算子不变子空间的研究中，所谓的 de Branges–Rovnyak 空间 $H(b)$ 扮演着重要角色。对于每个在单位圆盘上全 b 纯的函数，若其模不超过 1，则存在一个与之关联的 de Branges–Rovnyak 空间 $H(b)$，可用其再生核来描述。事实上， $H(b)$ 是单位圆盘上唯一一个再生核希尔伯特空间，其在 $w \in \mathbb{D}$ 处的再生核 k_w 由下式给出：

$$k_w(z) = \frac{1 - \overline{b(w)}b(z)}{1 - \overline{w}z}, \qquad z \in \mathbb{D}.$$

它们的性质可能极其多样，而且希尔伯特空间上的一大类压缩算子，在酉等价意义下等同于后向移位在不同 $H(b)$空间上的作用。遗憾的是，我们距离完整乃至令人满意地理解它们的结构仍相去甚远。关于这一主题的一般概念，请读者参阅标准参考文献 [6, 7, 12] 。通常， $H(b)$空间分为两大类，具体取决于符号函数 b 是否为 H^∞闭单位球的极值点，后者常记作 H^∞_1。这里，极值性 是指相对于 H^∞_1的凸结构而言，并且有明确的解析刻画：当且仅当 $\log(1-|b|) \in L^1(\mathbb{T})$时， b 是非极端的。具有非极端符号函数的 $H(b)$空间与哈代空间 H^2有更多相似之处。例如，

Date：2026年3月4日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 主分类号30H45；次分类号41A10、42C05。*Key words and phrases.* de Branges-Rovnyak空间，正交多项式。本次合作基于第一作者对拉古纳大学的访问，由该校研究与转让副校长办公室资助。第一作者是意大利国家高等数学研究所（INdAM）Gruppo Nazionale per l'Analisi Matematica, la Probabilit`a e le loro Applicazioni（GNAMPA）的成员。第二作者获得项目PID2024-160185NB-I00的资助，该项目由MICIU/AEI/10.13039/501100011033以及欧洲区域发展基金（欧盟）通过西班牙科学、创新与大学部的Generaci´on de Conocimiento计划提供；并获得Ram´on y Cajal计划项目RYC2021-034744-I的资助，该计划来自Agencia Estatal de Investigaci´on（西班牙科学、创新与大学部）。

移位算子 $M_z f(z) = zf(z)$在$H(b)$上有定义且有界，当且仅当 b 是非极端的。然而，就本研究的目的而言，最有趣的性质是： $H(b)$包含多项式集合 $\mathcal{P}$，当且仅当 b 是非极端的。在这种情况下， $\mathcal{P}$ 在 $H(b)$中总是稠密的。请注意，一般而言，具有极端符号函数 b 的 $H(b)$空间甚至可能是有限维的（例如，当 b是有限布拉施克乘积时）。

我们关注的是理解这些空间中多项式的逼近性质。为此，我们为自己设定了一个明确的首要目标：求出非极端符号函数的 de Branges–Rovnyak 空间中多项式的显式标准正交基。具体而言，我们寻找将（归一化的）格拉姆-施密特方法应用于典范基后得到的结果，从而得到一组 $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，使得对于每个 $n \in \mathbb{N}$，都有 $p_n \in \mathcal{P}_n \setminus \mathcal{P}_{n-1}$，且 $\operatorname{span}\{p_n\}_n = H(b)$，其中 $\mathcal{P}_n$ 表示次数至多为 n 的解析多项式向量空间。由此得到的序列 $\{p_n\}_n$ 的张成空间的稠密性，可由 $\mathcal{P}$ 的稠密性推出。当然，并非所有正交多项式集合都必然具有这种结构：例如，集合 $\{(z+1)/\sqrt{2}, (z-1)/\sqrt{2}\} \cup \{z^n : n \geq 2\}$ 是 H^2 中的完备标准正交基。在理想情况下，我们希望能找到这类多项式的完整描述。某些情况下，借助 Favard 经典定理，正交多项式的三项递推关系会导出一个谱测度，使得 $H(b)$ 等价于形如 $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}) \cap L^2(\mu)$ 的空间。然而，此时若期待通过经典正交多项式理论给出完整描述，似乎过于乐观。

$H(b)$空间上的范数可能相当神秘，难以处理。尽管如此，我们仍有一些帮手。当函数 b是非极值函数时，总存在一个与之对应的（唯一的）外函数 a，称为 b的勾股伴函数。商 $\phi := b/a$ 是单位圆盘上的解析函数。与其处理函数对 (b, a)，也可以等价地考虑斯米尔诺夫类中的函数 ϕ 。所有有趣的非极值 de Branges–Rovnyak 空间都有一个共同点： ϕ 在边界 $\mathbb{T} := \partial\mathbb{D}$上至少有一个奇点。

本文介绍 $H(b)$空间的正交多项式，并提出求得这类多项式闭式公式的方法，其中 ϕ 是一个有理函数，在边界上的某一点有唯一的极点。我们通过利用过程中出现的线性系统所关联矩阵的结构，分别针对每种具体情形求得这些多项式的闭式公式。我们认为，这种结构本身就是一项重要发现：经过几次初等运算，这些矩阵便可变换为相对简单的带状矩阵的（固定且显式的）有限秩扰动。

我们首先在第2节中引入一些记号，回顾一些成熟的结果，并通过证明正交多项式序列在 $H(b)$空间中的构成具有一定刚性，开启我们的探索。事实上，定理 2.6表明， H^2 是唯一一个单项式集正交的 $H(b)$。

在第3节中，我们重点讨论以下形式的函数

$$\phi(z) = A + \frac{B}{1-\overline{\zeta}z}, \qquad z \in \mathbb{D} \tag{1.1}$$

其中 $\zeta \in \mathbb{T}$ 、 A 和 B 满足某种代数关系。特别地，作为定理 3.3 的推论，我们讨论一个 de Branges–Rovnyak 空间中的正交多项式；该空间与 Sarason 的一篇著名论文 [13] 以及 Fricain–Mashreghi 的一项近期研究 [8] 有关。在定理 3.8 的帮助下，同样的情形也解决了多个等距分布的简单极点问题。特别地，我们得到以下显式例子：

定理 1.2. 设 $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ 和 $b(z) = (1+z^N)/2, z \in \mathbb{D}$。那么，相应的 $H(b)$ 空间具有以下多项式标准正交基：

$$p_j(z) = \frac{z^j}{\sqrt{2}}, \qquad j < N,$$
$$p_{Nk+i}(z) = \frac{z^{N(k-1)+i}(z^N-1)}{2}, \qquad k > 0, \quad 0 \le i < N.$$

我们通过讨论与复合算子 $b(z^N)$（ $N \in \mathbb{N}$）相关联的 de Branges–Rovnyak 空间，来结束第3节，其中 b 为给定的符号函数。这引出了一些关于 $H(b)$上的复合算子的问题。在第4节中，我们通过研究首先一个如 (1.1) 所示的一般 ϕ，来完整阐述正交多项式的相关内容，从而得到正交归一多项式的系数所满足的三项递推关系。我们在定理 4.1 中给出了这一递推关系。接着，在第4.2节中，我们通过示例说明如何将我们的方法推广到高阶极点。通过求解某些线性方程组可以得到这些多项式。最后，我们在第4.3节结束本文，并提出对相关矩阵结构的一种描述。

2. Preliminaries and notation

哈代空间 H^2 定义为

$$H^2 = \{f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) \colon \|f\|_2^2 = \sum_n |a_n|^2 < \infty\}.$$

关于自然内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$，它是一个希尔伯特空间。空间 H^∞ 是 $\mathbb{D}$上的有界解析函数空间，并且在赋予范数 $\|f\|_\infty = \sup_{\mathbb{D}} |f|$后成为一个巴拿赫空间。更多详情请参阅 [10]。

接下来讨论 de Branges–Rovnyak 空间。正如引言中所提到的，关于这些空间的标准参考文献是 [6, 7, 12]。内函数和外函数在这里将发挥特殊作用，关于它们的更多内容请参阅 [10] 。设函数 b属于 H^∞的闭单位球，即

$$H_1^\infty = \{f \in H^\infty \colon \|f\|_\infty \le 1\},$$

相应的托普利茨算子 $T_b \colon H^2 \to H^2, \ f \mapsto bf$满足 $I - T_b T_b^* \ge 0$，这里指算子意义下的等式。于是，相应的 de Branges–Rovnyak 空间 $H(b)$定义为值域 $(I - T_b T_b^*)^{\frac{1}{2}} H^2$，并且它是一个赋予值域范数的希尔伯特空间

$$\|(I - T_b T_b^*)^{\frac{1}{2}} f\|_{H(b)} := \|P_{\mathrm{Ker}(I - T_b T_b^*)^{\frac{1}{2}}} f\|_2, \qquad f \in H^2,$$

其中 P_V 表示到闭子空间 V上的正交投影（在此情形下，它是 $(I - T_b T_b^*)^{\frac{1}{2}}$ 的核）。这与前面的

描述是一致的，因为 $H(b)$ 也可以视为与该核相关联的再生核希尔伯特空间

$$k_w(z) = \frac{1 - \overline{b(w)}b(z)}{1 - \overline{w}z}, \qquad z, w \in \mathbb{D}.$$

需要指出的是，当 b 是 H_1^∞的非极端点时，也就是说，$\log(1 - |b|) \in L^1(\mathbb{T})$，那么 $H(b)$包含所有多项式 $\mathcal{P}$构成的集合，并且 $\mathcal{P}$在 $H(b)$中稠密。

当 b 是非极端点时，我们可以定义唯一的外函数 a，使得$a(0) > 0$，且在 $\mathbb{T}$上几乎处处满足 $|a|^2 + |b|^2 = 1$ m，如下：

$$a(z) := \exp\left(\int_{\mathbb{T}} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \log(1 - |b(\zeta)|^2)^{\frac{1}{2}} \, \mathrm{d}m(\zeta)\right), \qquad z \in \mathbb{D},$$

其中， m 表示归一化勒贝格测度。我们称 a为 b的勾股伴函数，并称(b, a)为勾股对。存在这样的函数 $a \in H^\infty$，使其在 $\mathbb{T}$ 上几乎处处实现 $|a|^2 + |b|^2 = 1$ m，这实际上等价于（根据[10, 定理 4.1]） b是非极端点，因为

$$\int_{\mathbb{T}} \log(1 - |b|^2) \, \mathrm{d}m = \int_{\mathbb{T}} \log(|a|^2) \, \mathrm{d}m > -\infty.$$

与其处理数对 (b, a)，也可以等价地考虑斯米尔诺夫类中的函数 ϕ。下述结果来自 [14] 中的命题 3.1 与注 3.2。

命题 2.1. 斯米尔诺夫类中的非零函数 ϕ 可以唯一地写成 $\phi = b/a$，其中 (b, a) 是一个勾股对。此外，若斯米尔诺夫函数 ϕ 是有理函数，则函数 a 与 b 也是有理函数。

给定数对 (b, a), 商 $\phi := b/a$ 是单位圆盘上的解析函数，并且它定义了一个（可能无界的）托普利茨算子 T_ϕ。结果表明，伴随算子 $T_{\bar{\phi}}$ 的定义域恰好是 $H(b)$，并且对 $H(b)$中的每一个 f，公式

$$\|f\|_b^2 = \|f\|_2^2 + \|T_{\bar{\phi}} f\|_2^2, \tag{2.2}$$

成立，见 [14]。我们分别用 $\|\cdot\|_b$ 与 $\langle \cdot, \cdot \rangle_b$ 表示 $H(b)$ 的范数与内积。

恒等式 (2.2) 远非显式形式，但它将使我们能够计算内积 $\langle z^j, \ z^k \rangle_b$，这是我们分析中不可或缺的基础。下文中，$(\phi_n)_n$ 将表示 ϕ 在 0 附近的解析展开的泰勒系数，也就是说，

$$\phi(z) = \frac{b(z)}{a(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n z^n, \qquad z \in \mathbb{D}. \tag{2.3}$$

算子 T_ϕ 作用于 Hol($\mathbb{D}$) 中的函数 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$，其作用方式如下：

$$T_{\bar{\phi}} f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \overline{\phi_n} a_{m+n} \right) z^m, \qquad z \in \mathbb{D}.$$

更多详情请参见 [14, 第 6] 节。特别地，对于每个 $k \in \mathbb{N}$，我们得到关于单项式 z^k的以下公式:

$$T_{\overline{\phi}} z^k = \sum_{m=0}^{k} \overline{\phi_{k-m}} z^m. \tag{2.4}$$

由此得到以下结果，该结果已在 [2] 中出现。为求完整起见，我们给出一个简单的证明。

引理 2.5. 设 (b, a) 是一个勾股对， ϕ 如(2.3) 中所示，且 $j, k \in \mathbb{N}$满足 $j \leq k$。那么，

$$\langle z^j, z^k \rangle_b = \delta_{j,k} + \sum_{s=0}^{j} \overline{\phi_s} \phi_{k-j+s}.$$

证明. 由等式 (2.2) 可得

$$\langle z^j, z^k \rangle_b = \delta_{j,k} + \langle T_{\overline{\phi}} z^j, T_{\overline{\phi}} z^k \rangle_2.$$

现在利用 (2.4) 中 $T_{\overline{\phi}} z^j, T_{\overline{\phi}} z^k$ 的显式表达式，可得

$$\langle T_{\overline{\phi}} z^j, T_{\overline{\phi}} z^k \rangle_2 = \sum_{n=0}^{j} \sum_{s=0}^{k} \overline{\phi_{j-n}} \phi_{k-s} \delta_{n,s} = \sum_{s=0}^{j} \overline{\phi_s} \phi_{k-j+s}.$$

□

在许多经典的解析函数空间中，存在由单项式构成的多项式标准正交基。我们证明，在非平凡的 $H(b)$ 空间中，这种情况绝不会发生。我们将使用以下众所周知的事实: $H(b) = H^2$ 当且仅当 $\phi \in H^\infty$。关于$H(b)$ 与 Hardy 空间之间的关系，参见例如 [11] 。

定理 2.6. 设(b, a) 为勾股对， ϕ 如(2.3)所示。若单项式集合 $\{z^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 在 $H(b)$中正交，则 $H(b) = H^2$。

证明。 若 $\phi \equiv 0$，则 $H(b) = H^2$ 且结论成立。否则，令$k_0 := \min\{k \in \mathbb{N}: \phi_k \neq 0\}$. 首先，我们将证明 $\phi = \phi_{k_0} z^{k_0} (\in H^\infty)$。事实上，对每个 $m > 0$,

$$0 = \langle z^{k_0}, z^{k_0+m} \rangle_b = \sum_{s=0}^{k_0} \overline{\phi_s} \phi_{m+s} = \overline{\phi_{k_0}} \phi_{m+k_0}.$$

由于 $\phi_{k_0} \neq 0$，我们证明了对每个 $n \neq k_0$都有 $\phi_n = 0$ 。

现在， ϕ是单项式，因而也是有界函数，由此我们可以得出 $H(b) = H^2$ ，证明完毕。□

为结束本节，我们讨论格拉姆-施密特算法。这是非常标准的，但我们回顾一些细节以固定记号。记号 $f \perp g$ 表示 f 与 g 在 $H(b)$的范数下正交，即 $\langle f, g \rangle_b = 0$。

在本文余下部分，我们考虑多项式的标准正交基$\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ，使得对每个 $n \in \mathbb{N}$, 次数 $\deg(p_n) = n$ 。我们将记作

$$p_n(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k^{(n)} z^k, \qquad z \in \mathbb{D}.$$

只要 n 可以视为固定，我们就省略上标 (n)。为保证唯一性，我们选择 $c_n^{(n)} > 0$。由于 $\deg(p_0) = 0$， p_0只是一个常数，且 $p_0 = 1/\|1\|_b$。通过归纳法，对于 $n \geq 1$，我们将 p_n 定义为关于多项式 p_k 的表达式，其中 $k < n$ 为

$$p_n(z) = c_n^{(n)}\big(z^n - \sum_{k=0}^{n-1}\langle z^n, p_k\rangle_b p_k\big).$$

因此， $c^{(n)}$ $_n > 0$ 是满足 $\|p_n\|_b = 1$ 的唯一正数。

注意，等价地，多项式 p_n 是次数为 n、范数为 1 且第 n 个系数为正的唯一多项式，并满足由 $\langle p_n,\ z^k\rangle_b = 0,\ k = 0, \ldots,\ n-1$ 给出的 n 个方程。当 $k = 0$ 时，这个正交关系可由以下事实推出： $p_n \perp p_0$ ；而对于 $0 < k < n$，则可以对次数 k 作归纳论证。

3. Main results

在下文中，我们将讨论范围限定在具有单位圆 $\mathbb{T}$ 上单个极点 ζ 的有理 ϕ 情形。注意， ϕ 的极点不可能位于 $\mathbb{D}$ 中，因为 b 是解析的，且 a 是外函数。我们认为极点位于 $\mathbb{D}$ 外部的情形较不值得关注，因为在这种情况下， ϕ 属于 H^∞ ，于是$H(b) = H^2$。此外，根据以下论证，我们总可以假设 (1.1) 中的 $\zeta = 1$ 。

命题 3.1。 考虑一个非极端的 b *in* H_1^∞，以及 $\gamma \in \mathbb{R}$。若考虑旋转 $\widetilde{b}(z)$: $= b(e^{i\gamma}z)$ $z \in \mathbb{D}$，则 $H(b)$ 的正交归一多项式序列 $\{\widetilde{p_n}\}_n$ 可由 $H(b)$ 的正交归一多项式序列 $\{p_n\}_n$ 经由旋转得到

$$\widetilde{p_n}(z) = e^{-in\gamma}p_n(e^{i\gamma}z), \qquad z \in \mathbb{D}.$$

~证明。 显然可验证， $\widetilde{a}(z) := a(e^{i\gamma}z)$ $z \in \mathbb{D}$， 且 b 构成一个~ ~勾股对，并且 $\phi(z) := b(z)/\widetilde{a}(z) = \phi(e^{i\gamma}z)$。 特别地， $\widetilde{\phi}$ 的泰勒系数由 $\widetilde{\phi}_k = e^{ik\gamma}\phi_k$. 给出。于是，根据引理 2.5，对于 $j \leq k$

$$\langle z^j, z^k\rangle_{\widetilde{b}} = \delta_{j,k} + e^{i(k-j)\gamma}\sum_{s=0}^{j}\overline{\phi_s}\phi_{k-j+s} = e^{i(k-j)\gamma}\langle z^j, z^k\rangle_b.$$

记作 $p_n(z) = \sum_{j=0}^n c_j^{(n)} z^n$ 并设 $q_n(z) := p_n(e^{i\gamma}z)$ $z \in \mathbb{D}$. 对于 $n \leq m$

$$\langle q_n, q_m\rangle_{\widetilde{b}} = \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{m} c_j^{(n)}\overline{c_k^{(m)}}\langle e^{ij\gamma}z^j, e^{ik\gamma}z^k\rangle_{\widetilde{b}} = \langle p_n, p_m\rangle_b = \delta_{n,m}.$$

~这表明多项式 $\{q_n\}_n$ 在 $H(b)$ 中构成正交归一系，因此根据唯一性，多项式 $\{\widetilde{p_n}\}_n$ 必定具有所需的表达式，因为我们希望第 n 个系数为正。□

3.1. 第一组例子。我们将首先考虑以下形式的函数

$$\phi(z) = A + \frac{B}{1-z}, \qquad z \in \mathbb{D}, \tag{3.2}$$

其中， A， B 是复数。我们很快将说明，这涵盖了德布朗热-罗夫尼亚克空间中最简单、研究最多的例子之一。然而，目前仍缺少显式的多项式基；正如我们将看到的，即使在这个基本情形中，也已经出现了复数现象。首先，我们证明， A 与 B 之间的刚性代数关系使得一组非常容易构造的正交归一多项式成为可能。

定理 3.3. 设 ϕ 如(3.2)中所定义，其中 $A, B \in \mathbb{C}$。多项式集合 $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，其中 $q_0 = 1$, $q_n(z) = z^{n-1}(z-1)$ $n > 0$，在 $H(b)$ 中正交，当且仅当 $AB = -(1+|A|^2)$。此外，在这种情况下， $A \neq 0$ 和

$$\|q_0\|_b = \sqrt{1 + \frac{1}{|A|^2}}, \qquad \|q_n\|_b = |A| + \frac{1}{|A|}, \quad n > 0.$$

我们提到的正交归一多项式 $\{p_n\}$ 显然可以由 $\{q_n\}$确定：将每个多项式 q_n 除以其给定范数即可。

证明。 ϕ的泰勒系数为

$$\phi_n = \begin{cases} A + B, & n = 0, \\ B, & n > 0. \end{cases}$$

特别地，由引理 2.5，对于 $j \le k$ ，我们有

$$\langle z^j, z^k\rangle_b = \delta_{j,k} + \sum_{s=0}^{j} \overline{\phi_s}\phi_{k-j+s} = \delta_{j,k} + (\overline{A+B})\phi_{k-j} + |B|^2 j.$$

我们推导出以下公式

$$\langle z^j, z^k\rangle_b = \begin{cases} 1 + |A+B|^2 + |B|^2 j, & j = k, \\ \overline{A}B + |B|^2(1+j), & j < k. \end{cases}$$

这表明，只要 $0 \le j < k$,

$$\langle z^j, z^{k+1}\rangle_b = \langle z^j, z^k\rangle_b,$$

这等价于说 $z^j \perp z^k(z-1)$。这已经表明，只要 $0 \le j < k-1$，就有 $q_j \perp q_k$，而不对系数A， B作任何假设。最后，我们证明对于每个 $j \in \mathbb{N}$ ，以下等价关系成立

$$q_j \perp q_{j+1} \iff \overline{A}B = -(1+|A|^2).$$

对于 $j = 0$,

$$\langle 1, z-1\rangle_b = \langle 1, z\rangle_b - \langle 1, 1\rangle_b = \overline{A}B - 1 - |A|^2 - 2\,\mathrm{Re}(\overline{A}B).$$

通过比较实部与虚部，容易看出 $q_0 \perp q_1$ 当且仅当 $AB = -(1+|A|^2)$。现在，对于 $j > 0$， 正交关系$z^j \perp z^{j+1}(z-1)$给出

$$\begin{aligned} \langle z^j(z-1), z^{j+1}(z-1)\rangle_b &= \langle z^{j+1}, z^{j+2} - z^{j+1}\rangle_b \\ &= \overline{A}B - 1 - |A|^2 - 2\,\mathrm{Re}(\overline{A}B), \end{aligned}$$

并且我们如同情形 $j = 0$那样得出结论。至此，证明的第一部分结束。现在，假设 $AB = -(1 + |A|^2)$，则有 $A + \overline{B} = -1/A$，进而有 $\|1\|_b^2 = 1 + |A|^{-2}$。直接计算表明

$$\|q_n\|_b^2 = 2 + 2|A|^2 + |B|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\overline{A}B) = |B|^2 = \left(|A| + \frac{1}{|A|}\right)^2.$$

□

3.2. **Fricain–Mashreghi 关于 Sarason 例子的工作**。读者或许可以想象，定理 3.3 是经过反复尝试才得出的。无论如何，我们当时正试图深入理解 Sarason 在一篇经典著作中讨论的一个例子。在 [13], 中，他证明，对于有理函数 b 的某个特定选择，空间 $H(b)$ 与局部狄利克雷空间

$$\mathcal{D}_1 = \{f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})\colon \mathcal{D}_1(f) := \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}\,\mathrm{d}A(z) < \infty\},$$

相同，且范数 $\|\cdot\|_b = \|\cdot\|_{\mathcal{D}_1}$ 之间满足恒等关系，其中

$$\|f\|_{\mathcal{D}_1}^2 := \|f\|_2^2 + \mathcal{D}_1(f), \qquad f \in \mathcal{D}_1.$$

这开启了一条极富成果的研究路线。多位研究者致力于探究 $H(b)$ 空间与狄利克雷空间何时可能相等。后来，研究者在 [4] 中证明，当 b 为多项式 $b(z) = (1+z)/2$ 时，可以得到等式$H(b) = \mathcal{D}_1$，且范数等价 $\|\cdot\|_b \approx \|\cdot\|_{\mathcal{D}_1}$。关于等式 $H(b) = \mathcal{D}_\mu$ 的更多文献，也可参见 [1, 2, 5] 。

取 $b(z) = (1+z)/2$，则 $a(z) = (1-z)/2$ 并且

$$\phi(z) = \frac{1+z}{1-z} = -1 + \frac{2}{1-z}, \qquad z \in \mathbb{D}.$$

这里， ϕ 满足定理 3.3 中的代数关系。特别地，多项式

$$p_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad p_n(z) = \frac{z^{n-1}(z-1)}{2}, \quad n > 0, \tag{3.4}$$

构成 de Branges–Rovnyak 空间 $H(b)$ 的标准正交基。这与 Fricain–Mashreghi 最近的一项工作有着重要联系。在[8], 中，证明了由下式给出的多项式序列

$$Q_0 = 1, \quad Q_n(z) = 1 + (z-1)(a_0 + a_1 z + \ldots + a_{n-1}z^{n-1}), \quad n > 0, \tag{3.5}$$

是 $(\mathcal{D}_1, \|\cdot\|_{\mathcal{D}_1})$ 的正交基，其中

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2k+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2k+1}, \qquad k \geq 1.$$

还证明了 $\|Q_n\|_{\mathcal{D}_1} = \sqrt{a_n a_{n-1}}$。令大惊讶的是，给空间 $H(b) = \mathcal{D}_1$ 赋予范数 $\|\cdot\|_b$ 后，得到的正交归一多项式序列简单得多，如式 (3.4) 所示。作为合理性检验，我们将证明以下断言：

命题 3.6。 设 Q_n 如（3.5）所示。那么，

$$\|Q_n\|_{\mathcal{D}_1} \approx \|Q_n\|_b.$$

证明。这些多项式 Q_n、$n>0$ 可以用（3.4）中描述的标准正交基 $\{p_k\}_{k\le n}$ 表示为

$$Q_n(z)=1+\sum_{k=0}^{n-1}(z-1)a_kz^k=\sqrt{2}p_0(z)+2\sum_{k=1}^{n}a_{k-1}p_k(z).$$

因此，我们可以轻松计算范数 $\|Q_n\|_b$：

$$\begin{aligned}\|Q_n\|_b^2&=2+4\sum_{k=1}^{n}|a_{k-1}|^2\\&=2+4\sum_{k=0}^{n-1}\left|\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2k+1}-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2k+1}\right|^2.\end{aligned}$$

展开平方后，利用等比数列求和公式可得

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}|a_{k-1}|^2&=\frac{3+\sqrt{5}}{10}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{4k}+\frac{3-\sqrt{5}}{10}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{4k}+\frac{2}{5}n\\&=\frac{3+\sqrt{5}}{10}\frac{1-\left(\frac{7+3\sqrt{5}}{2}\right)^n}{1-\frac{7+3\sqrt{5}}{2}}+\frac{3-\sqrt{5}}{10}\frac{1-\left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^n}{1-\frac{7-3\sqrt{5}}{2}}+\frac{2}{5}n.\end{aligned}$$

特别地，当 $n\to\infty$,

$$\|Q_n\|_b=(1+o(1))\frac{2\sqrt[4]{5}}{5}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n,$$

这与以下事实相符：

$$\|Q_n\|_{\mathcal{D}_1}=(1+o(1))\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n,$$

正如 Fricain–Mashreghi 所发现的。 □

3.3. **与单项式复合**。给定一个符号函数 b，我们研究与复合 $b(z^N)$ 相关联的 de Branges–Rovnyak 空间的正交归一多项式，其中 $N\in\mathbb{N}$。作为附带结果，我们补全上一节讨论的例子，并证明定理 1.2，明确确定 $H(b)$ 的多项式基，当 $b(z)=(1+z^N)/2$ 时。此外，这项分析还引出了关于 de Branges–Rovnyak 空间上复合算子的若干有趣的一般性问题，我们将在最后讨论这些问题。

我们先给出一个关于内 函数的一般结果，这个结果对于该领域的专家而言或许已广为人知。不过，我们未能找到相关参考文献。若函数 $u\in H^\infty$ 满足 $|u|=1$ m-几乎处处于 $\mathbb{T}$，则称其为内函数。

命题 3.7。设 b 是 H_1^∞ 中的一个非极端函数，a 是它的勾股伴函数。若 u 是一个内函数，且 $u(0)=0$，则复合 $b\circ u$ 是 H_1^∞ 中的一个非极端函数，其勾股伴函数为 $a\circ u$。

证明。$b\circ u$ 是定义良好的，且属于 H_1^∞，这是显然的。$a\circ u$ 是外函数，且 $a(u(0))=a(0)>0$，这也显而易见。$(b\circ u,a\circ u)$ 是一个勾股对，这是因为在 0 处取值为零的内函数保持

勒贝格测度不变，即 $m(E) = m(u^{-1}(E))$（证明可参见 [3, 第215]页，其中使用了 Clark测度）。事实上，该集合

$$\{\zeta \in \mathbb{T}\colon |b(u(\zeta))|^2 + |a(u(\zeta))|^2 = 1\} = u^{-1}\left(\{\zeta \in \mathbb{T}\colon |b(\zeta)|^2 + |a(\zeta)|^2 = 1\}\right)$$

具有全测度。 □

给定 $\psi\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ 解析的，我们将 $C_\psi f := f \circ \psi$ 称为相应的复合算子。给定一个勾股对（b，a），$\phi = b/a$ 以及一个固定的正自然数 N，我们考虑由$C_{z^N} b(z) = b(z^N)$ 和 $C_{z^N} a(z) = a(z^N)$给出的勾股对。它们的商为

$$\frac{b(z^N)}{a(z^N)} = \phi(z^N) = C_{z^N}\phi(z), \qquad z \in \mathbb{D}.$$

每当我们谈到这些正交归一多项式时，我们指的是通过对单项式基应用格拉姆-施密特方法得到的多项式。现在我们将用空间 $H(C_{z^N} b)$ 的正交归一多项式 $\{q_n\}_n$ 来推导空间 $H(b)$ 的正交归一多项式 $\{p_n\}_n$。

定理 3.8。设（b、a）为一个勾股对，$\phi = b/a$、$\{p_n\}_n$ 为 H（b）中的正交归一多项式集，如上所述。考虑 H（$C_{z^N} b$）的多项式标准正交基 $\{q_n\}_n$。那么，对于每个 $l \in \mathbb{N}$以及每个 $0 \le i < N$，我们有

$$q_{Nl+i}(z) = z^i p_l(z^N), \qquad z \in \mathbb{D}.$$

~ ~证明。为简便起见，令 $\phi := C_{z^N}\phi, b := C_{z^N} b$。若 ϕ 的泰勒系数为 $\phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k z^k$，则由公式 $\widetilde{\phi}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k z^{kN}$ 可知，$\widetilde{\phi}$ 的泰勒系数为

$$\widetilde{\phi}_k = \begin{cases} 0, & k \not\equiv 0 \mod N, \\ \phi_{\frac{k}{N}}, & k \equiv 0 \mod N. \end{cases}$$

给定实数 x，记其整数部分为 $\lfloor x \rfloor := \max\{k \in \mathbb{Z}\colon k \le x\}$。由引理 2.5，对于 j, $k \in \mathbb{N}$, $j \le k$，有

$$\begin{aligned} \langle z^j, z^k\rangle_{\widetilde{b}} &= \delta_{j,k} + \sum_{s=0}^{j} \overline{\widetilde{\phi}_s}\widetilde{\phi}_{k-j+s} \\ &= \delta_{j,k} + \sum_{s=0}^{N\lfloor j/N\rfloor} \overline{\widetilde{\phi}_s}\widetilde{\phi}_{k-j+s} \\ &= \delta_{j,k} + \sum_{s=0}^{\lfloor j/N\rfloor} \overline{\widetilde{\phi}_{sN}}\widetilde{\phi}_{k-j+sN}. \end{aligned}$$

特别要注意，如果 $k \not\equiv j \bmod N$，那么 $\langle z^j,\ z^k\rangle_{\widetilde{b}} = 0$，因为对于每个 s，都有 $\widetilde{\phi}_{k-j+sN} = 0$。假设 $k \equiv j \bmod N$，计算 z^{Nj+i} 和 z^{Nk+i}的内积会更方便，其中 $j \le k$ 是自然数

以及 $0 \le i < N$:

$$\begin{aligned}\langle z^{Nj+i}, z^{Nk+i}\rangle_{\widetilde{b}} &= \delta_{Nj+i,Nk+i} + \sum_{s=0}^{j} \overline{\widetilde{\phi}_{sN}}\widetilde{\phi}_{Nk-Nj+sN} \\ &= \delta_{j,k} + \sum_{s=0}^{j} \overline{\phi_s}\phi_{k-j+s} \\ &= \langle z^j, z^k\rangle_b.\end{aligned}$$

这个公式与 $0 \le i < N$ 无关。利用这一点，现在我们证明，对于任意 $l \in \mathbb{N}$和 $0 \le i < N$， $q_{Nl+i}(z) = z^i p_l(z^N)$；为此，只需证明$z^i p_l(z^N)$与每个满足 $s < Nl + i$ 的单项式 z^s 正交。令

$$p_l(z) = \sum_{k=0}^{l} c_k^{(l)} z^k, \qquad z \in \mathbb{D}.$$

我们有

$$\langle z^i p_l(z^N), z^s\rangle_{\widetilde{b}} = \sum_{k=0}^{l} c_k^{(l)} \langle z^{Nk+i}, z^s\rangle_{\widetilde{b}} = 0$$

当 $s \not\equiv i$ 模 N 时。如果 $s = Nm + i$ 满足 $m < l$，那么

$$\begin{aligned}\langle z^i p_l(z^N), z^{Nm+i}\rangle_{\widetilde{b}} &= \sum_{k=0}^{l} c_k^{(l)} \langle z^{Nk+i}, z^{Nm+i}\rangle_{\widetilde{b}} \\ &= \sum_{k=0}^{l} c_k^{(l)} \langle z^k, z^m\rangle_b = \langle p_l, z^m\rangle_b = 0.\end{aligned}$$

还要注意

$$\begin{aligned}\|z^i p_l(z^N)\|_{\widetilde{b}}^2 &= \sum_{k,j=0}^{l} c_k^{(l)} \overline{c_j^{(l)}} \langle z^{Nk+i}, z^{Nj+i}\rangle_{\widetilde{b}} \\ &= \sum_{k,j=0}^{l} c_k^{(l)} \overline{c_j^{(l)}} \langle z^k, z^j\rangle_b = \|p_l\|_b^2 = 1.\end{aligned}$$

□

由此立即可推得定理 1.2。

定理 *1.2* 的证明。 证明由 (3.4) 和定理 3.8 得出。 □

作为定理 3.8 的推论，我们还得到以下关于 de Branges–Rovnyak 空间 $H(C_{z^N} b)$ 结构的结果。

定理 3.9。 设 $b \in H_1^\infty$非极端且 $N \in \mathbb{N}$。那么，算子 $C_{z^N}\colon H(b) \to H(C_{z^N} b)$ $C_{z^N} f(z) = f(z^N)$ $z \in \mathbb{D}$ 是一个线性等距映射。此外，

$$H(C_{z^N} b) = \bigoplus_{j=0}^{N-1} M_z^j C_{z^N} H(b),$$

其中 M_z 表示移位算子。直和是相对于 $H(C_{z^N} b)$的内积而言的。

证明。 再次，我们引入记号 $\widetilde{b}(z) := b(z^N)\ z \in \mathbb{D}$. 首先，我们证明$\widetilde{\ } C_{z^N} H(b) \subset H(b)$。给定 $h \in H(b)$，存在系数 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 使得 $h = \sum_n a_n p_n$，其中 $\{p_n\}_n$ 是$H(b)$的多项式标准正交基。这样的级数在 $H(b)$中收敛，且 $\sum_n |a_n|^2 = \|f\|_b^2 < \infty$。由于逐点求值是 $H(b)$上的连续算子，我们有

$$h(z^N) = \sum_n a_n p_n(z^N) = \sum_n a_n q_{nN}(z), \qquad z \in \mathbb{D},$$

其中，多项式 $\{q_k\}_k$ 按照定理 3.8 中的方式定义。特别地，$\sim C_{z^N} b \in H(b)$ 和

$$\|C_{z^N} h\|_{\widetilde{b}}^2 = \sum_n |a_n|^2 = \|h\|_b^2.$$

$\widetilde{\ }$这表明 $C_{z^N} H(b) \subset H(b)$，且它是 $H(b)$ 在范数 $\widetilde{\ }$拓扑下的一个闭子空间。由于移位算子在具有非极端符号函数的 de Branges–Rovnyak 空间上定义良好，因此我们有

$$H(\widetilde{b}) \supset \bigcup_{j=0}^{N-1} M_z^j C_{z^N} H(b).$$

接下来，我们证明对于 $0 \le j_1,\ j_2 < N,\ j_1 \neq j_2$，有 $M_z^{j_1} C_{z^N} H(b) \perp M_z^{j_2} C_{z^N} H(b)$，。对于 $i = 1,\ 2$，设 $f_i \in M_z^{j_i} C_{z^N} H(b)$。存在函数 $h_i \in H(b)\ i = 1,\ 2$，使得

$$f_i(z) = z^{j_i} h_i(z^N), \qquad z \in \mathbb{D}, \quad i = 1, 2.$$

将 h_i 按照 $H(b)$ 的标准正交基展开，还存在系数$(a_n^{(i)})_{n\in\mathbb{N}}$ 使得

$$f_i(z) = z^{j_i} \sum_n a_n^{(i)} p_n(z^N), \qquad z \in \mathbb{D}, \quad i = 1, 2.$$

于是,

$$\langle f_1, f_2 \rangle_{\widetilde{b}} = \sum_{k,n=0}^{\infty} a_n^{(1)} \overline{a_n^{(2)}} \langle z^{j_1} p_n(z^N), z^{j_2} p_n(z^N) \rangle_{\widetilde{b}} = 0,$$

由定理 1.2。最后，我们必须证明

$$H(\widetilde{b}) \subset \bigoplus_{j=0}^{N} M_z^j C_{z^N} H(b).$$

$\widetilde{\ }$对于 $f \in H(b)$，我们可以把与正交归一多项式 $\{q_k\}_k$ 相关联的傅里叶基写成 $f = \sum_n F_n q_n$. 特别地，由线性性,

$$f(z) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{N-1} F_{Nl+i} q_{Nl+i}(z) = \sum_{j=0}^{N-1} z^j \sum_{l=0}^{\infty} F_{Nl+j} p_l(z^N), \qquad z \in \mathbb{D}.$$

注意，对于 $0 \le j < N$，函数

$$g_j(z) = \sum_{l=0}^{\infty} F_{Nl+j} p_l(z), \qquad z \in \mathbb{D},$$

属于 $H(b)$，因为

$$\sum_{l=0}^{\infty}|F_{Nl+j}|^2 \le \sum_{n=0}^{\infty}|F_n|^2 = \|f\|_b^2, \qquad 0 \le j < N,$$

并且 $\{p_l\}_l$ 是 $H(b)$ 的标准正交基。因此我们得到 $f(z) = \sum_{j=0}^{N-1} z^j g_j(z^N)$ $z \in \mathbb{D}$，其中 $g_j \in H(b)$，于是

$$H(C_{z^N}b) = \bigoplus_{j=0}^{N-1} M_z^j\{C_{z^N}f \colon f \in H(b)\}. \qquad \square$$

我们指出，一般而言，要确定函数 h是否属于某个 $H(b)$ 空间并非易事。在前面的证明中，我们证明了$\sim C_{z^N}h \in H(b)$，然后证明了 $g_j \in H(b)$ $j = 1, 2$，这仅仅利用了定理 3.8 中关于 de Branges–Rovnyak 空间的正交归一多项式所获得的信息。

3.4. **进一步的评论**。定理 3.9 及其证明引出了一些有趣的问题：

问题3.10。给定一个更一般的函数 $\psi\colon\ \mathbb{D} \to \mathbb{D}$，以及 $b \in H_1^\infty$，关于 *de Branges–Rovnyak* 空间 $H(C_\psi b)$ 及其与 $H(b)$的关系，可以得出什么结论？

我们的分析在 $\psi(z) = z^N$（且 b为非极端函数）的情形下给出了相当精确的答案，但显然也可以在更一般的情形下研究这一问题。我们提出另外两个问题。第一个问题涉及有界嵌入：

问题3.11。是否总有 $C_\psi H(b) \subseteq H(C_\psi b)$，如果是，那么它是否为

$$C_\psi \colon H(b) \to H(C_\psi b)$$

有界算子？

第二个问题或许更加雄心勃勃：

问题3.12。能否用 $H(b)$ 来表示 $H(C_\psi b)$？

在 b 和 ψ 均为内函数的情形下，第6章的模型空间背景中也讨论了类似问题，参见 [9] 及其中的参考文献。

4. Recurrences and underlying matrix structure

4.1. **一般位置的一次极点**。定理 3.3 中对 A 和 B 的取值限制，似乎是个不自然的止步之处，因为对 Sarason 空间作一个非常简单的推广，就会得到另一个次数为 1 的有理 ϕ。我们不再考虑 $b = (1+z)/2$，而是考虑 $b = (1+B)/2$，其中 B 是一个布拉施克因子，其实零点为 $c \in (-1, 1)$，也就是说，

$$B(z) = \frac{z-c}{1-cz}, \qquad z \in \mathbb{D}.$$

或许更常见的做法是将其视为布拉施克因子 $-B$，但事实证明，我们的选择对当前目的更为方便。在这种情况下，$a =$

$(1-B)/2$ 且

$$\phi(z)=\frac{1+\frac{z-c}{1-cz}}{1-\frac{z-c}{1-cz}}=\frac{1-c}{1+c}\bigg(-1+\frac{2}{1-z}\bigg),\qquad z\in\mathbb{D}.$$

注意，当且仅当.....时，该 ϕ 满足定理 3.3 的假设

$$2\frac{1-c}{1+c}=\bigg(1+\frac{(1-c)^2}{(1+c)^2}\bigg)\frac{1+c}{1-c},$$

当且仅当 $c=0$时，这一条件成立。恰当来说，当 $b=(1+z)/2$时成立。特别地，这反映了定理 3.3 的条件在将 ϕ 乘以一个常数后并不保持不变。为了讨论这个例子，我们考虑更一般的函数 (1.1)。我们将说明， $H(b)$的正交归一多项式结构与我们先前讨论的简单情形截然不同。

定理 4.1. 设 A、$B\in\mathbb{C}$、 $B\neq 0$和 ϕ 如(1.1) 中所述，且 $\zeta=1$。令 $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 为 $H(b)$的相关标准正交基，固定 $n\in\mathbb{N}$、 $n\geq 2$，并记 $p_n(z)=\sum_{k=0}^{n}c_kz^k$，其中 $c_n>0$。则 $\{c_k\}_{k=0}^{n-1}$ 满足三项递推关系

$$\overline{T_0}c_{k+1}+(T_1-T_0)c_k+T_0c_{k-1}=0,\qquad k=1,\dots,n-2,$$

其中 $T_0=1+|A|^2+A\overline{B}$和 $T_1=-T_0-|B|^2$。

在证明之前，我们强调一个简单的操作，例如将 ϕ 乘以一个常数因子，就会显著增加正交归一多项式基表达式的复杂度。特别要注意，当 $b(z)=(1+z)/2$ 时，正交多项式至多只有 2 个非零系数，而该族中的其他任意空间都会产生任意长度的多项式。

在定理的证明之后，我们将说明如何完全用 A、B 和 n来描述多项式族 $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$。不过，建议记住以下几点：

注 4.2。 定理 *4.1* 中 p_n 的系数无法用简洁统一的方式表示，因为其形式取决于该多项式是否

$$Q(z)=\overline{T_0}z^2+(T_1-T_0)z+T_0 \tag{4.3}$$

has

(i) *degree 1, meaning* $A\overline{B}=-(1+|A|^2)$*, dealt with in Theorem 3.3;*
(ii) *two simple roots* λ_1 *and* $\lambda_2=\frac{T_0}{\overline{T_0}\lambda_1}$ *in* $\mathbb{C}\backslash\{0,1\}$*;*
(iii) *a double root* $\lambda=\frac{T_0}{|T_0|}\in\mathbb{T}\backslash\{1\}$.

现在，我们可以开始证明了。

定理 *4.1* 的证明。 ϕ的泰勒系数为

$$\phi_n=\begin{cases}A+B, & n=0,\\ B, & n>0.\end{cases}$$

应用引理 2.5 可得

$$\langle z^j, z^k\rangle_b = \begin{cases} 1+|A+B|^2+|B|^2k, & j=k, \\ \overline{A}B+(j+1)|B|^2, & j<k, \\ A\overline{B}+(k+1)|B|^2, & j>k. \end{cases}$$

为方便起见，我们引入记号 $\rho := 1+|A+B|^2$。正交条件 $\langle p_n,\ z^k\rangle_b = 0$, $k=0$, ……, $n-1$, 为我们的 $n+1$ 个变量定义了 n 个方程，这些方程给出了 p_n的系数 c_0, ……, c_n之间的关系。对于 $0\le k\le n-1$，我们有

$$\langle p_n, z^k\rangle_b = \sum_{j=0}^{k-1} c_j\big(\overline{A}B+|B|^2(1+j)\big) + c_k(\rho+|B|^2k) + \\ + \big(A\overline{B}+|B|^2(1+k)\big)\sum_{j=k+1}^{n} c_j = 0.$$

另一方面，注意到 $1=\|p_n\|_b^2 = c_n\langle p_n,\ z^n\rangle_b$ （其中我们用到了 $c_n>0$），因此如果我们引入哑变量 $t=1/c_n(\in\mathbb{R}^+)$，便得到

$$\langle p_n, z^n\rangle_b = \sum_{j=0}^{n-1} c_j\big(\overline{A}B+|B|^2(1+j)\big) + (\rho+n|B|^2)c_n = t.$$

我们发现，向量（c_0, ……, c_n）求解由增广矩阵表示的（$n+1$）$\times(n+1)$方程组

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \rho & A\overline{B}+|B|^2 & A\overline{B}+|B|^2 & \cdots & A\overline{B}+|B|^2 & 0 \\ \overline{A}B+|B|^2 & \rho+|B|^2 & A\overline{B}+2|B|^2 & \cdots & A\overline{B}+2|B|^2 & 0 \\ \overline{A}B+|B|^2 & \overline{A}B+2|B|^2 & \rho+2|B|^2 & \cdots & A\overline{B}+3|B|^2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \overline{A}B+|B|^2 & \overline{A}B+2|B|^2 & \overline{A}B+3|B|^2 & \cdots & \rho+n|B|^2 & t \end{array}\right).$$

记作

$$T_0 := \rho-\overline{A}B-|B|^2 = 1+|A|^2+A\overline{B},$$
$$T_1 := A\overline{B}-\rho = -\overline{T_0}-|B|^2.$$

我们进行以下初等运算。对于 $j=0,\dots,n-1$, 将行 R_j 替换为 R_j-R_{j+1}. 前 n 个方程变为

$$T_0c_k+T_1c_{k+1}-|B|^2\sum_{j=k+2}^{n} c_j = 0, \qquad k=0,\dots,n-2$$
$$T_0c_{n-1}+T_1c_n = -t, \qquad k=n-1,$$

并且该系统通过矩阵表示

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} T_0 & T_1 & -|B|^2 & \cdots & -|B|^2 & 0 \\ 0 & T_0 & T_1 & \cdots & -|B|^2 & 0 \\ 0 & 0 & T_0 & \cdots & -|B|^2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & T_1 & -t \\ \overline{A}B+|B|^2 & \overline{A}B+2|B|^2 & \overline{A}B+3|B|^2 & \cdots & \rho+n|B|^2 & t \end{array}\right). \tag{4.4}$$

现在，再次将 R_j 代入 $R_j - R_{j+1}$，得到 $0 \le j \le n-3$，由于 $T_1 + |B|^2 = -\overline{T_0}$ 我们得到 $n-2$ 方程

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c} T_0 & T_1-T_0 & \overline{T_0} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T_0 & T_1-T_0 & \overline{T_0} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_0 & T_1-T_0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \overline{T_0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & T_1-T_0 & \overline{T_0} & 0 & 0 \end{array}\right),$$

它们定义了定理陈述中的三项递推关系。

□

即使证明已经完成，我们仍想进一步简化线性方程组 (4.4)，为此继续沿用证明中的所有记号。该方程组的解可以用多项式 $Q(z) = T_0 z^2 + (T_1 - T_0)z + T_0$. 的根来确定。首先，我们更新最后一行$R_n$，将其替换为 $R_n + \sum_{j=0}^{n-1} R_j$，然后将 R_j 替换为$R_j - R_{j+1}$，$j = 0$，.....，$n-2$. 由于 $T_1 + |B|^2 = -T_0$，我们得到增广矩阵

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c} T_0 & T_1-T_0 & \overline{T_0} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T_0 & T_1-T_0 & \overline{T_0} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_0 & T_1-T_0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & T_1-T_0 & \overline{T_0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & T_0 & T_1-T_0 & \overline{T_0} & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & T_0 & T_1 & -t \\ \rho & T_2 & T_2 & T_2 & \cdots & T_2 & T_2 & T_2 & 0 \end{array}\right),$$

with

$$T_2 = \rho - \overline{T_0} = \overline{A}B + |B|^2. \tag{4.5}$$

我们可以利用 $T_0 + (T_1 - T_0) + T_0 = -|B|^2$ 这一事实，设计另一个初等变换，从而消去大部分 T_2：我们用 $R_n + \frac{T_2}{|B|^2}\sum_{j=0}^{n-1} R_j$ 替换 R_n。由此得到

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} T_0 & T_1-T_0 & \overline{T_0} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & T_0 & T_1-T_0 & \overline{T_0} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & T_0 & T_1-T_0 & \overline{T_0} & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & T_0 & T_1-T_0 & \overline{T_0} & t \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & T_0 & T_1 & -t \\ T_3 & T_4 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \tag{4.6}$$

其中

$$T_3 = \rho + \frac{T_0 T_2}{|B|^2}; \qquad T_4 = -\frac{\overline{T_0} T_2}{|B|^2}. \tag{4.7}$$

如注 4.2 所述，我们可以将各种可能性分为三种情况：

情况（i）： $T_0 = 0$，或者等价地，$\overline{A}B = -(1 + |A|^2)$。这正是定理 3.3 的内容，我们知道对于每个 $k \le n-2$，都有 $c_k = 0$。除情况（i）外，多项式 p_n 更复杂：若 $c_0 = c_1 = 0$，则根据递推关系可得，对于每个 $k \le n-1$，都有 $c_k = 0$，因为 $T_0 \neq 0$。但是，这样一来， p_n 就会是一个单项式，因为只有 $c_n \neq 0$，而这被定理 2.6 排除了。

事实上，若 $T_0 \neq 0$, Q 是一个在 0 处不为零的二次多项式（因为 $Q(0) = T_0 \neq 0$）。方程（4.6）的精确解取决于 Q是有一个重根还是有两个单根。

情形（ii）： Q 有两个非零单根 $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \frac{T_0}{T_0\lambda_1}$。。可以验证，系统（4.6）中第 R_0、.....、 R_{n-3} 行的递推关系解为

$$c_k = \frac{c_1 v_k - c_0 \lambda_1 \lambda_2 v_{k-1}}{v_1},$$

其中 $v_j = \lambda_2^j - \lambda_1^j$。这可用于将（4.6）的最后 3 行转换为关于 c_0、 c_1 和 c_n 的以下增广 3×3 系统：

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{\lambda_1\lambda_2(v_{n-2}(T_0-T_1)-v_{n-3}T_0)}{v_1} & \frac{v_{n-2}T_0+(T_1-T_0)v_{n-1}}{v_1} & \overline{T_0} & t \\ \frac{-T_0\lambda_1\lambda_2 v_{n-2}}{v_1} & \frac{T_0 v_{n-1}}{v_1} & T_1 & -t \\ T_3 & T_4 & 0 & 0 \end{array}\right). \tag{4.8}$$

该系统关于 $t = 1$ 的解具有（u_0, u_1, u_n）的形式，而 t 中的齐次性意味着 $c_n = tu_n$。由于 $c_n t = t^2 u_n = 1$，我们可以解出 t。这两个解中必有一个为正，而正是t 导出了完整解（c_0, c_1, c_n），从而得到多项式 p_n 的完整闭式公式。

情形（iii）： Q 有一个重根 $\lambda \neq 0$。我们可以写成

$$Q(z) = \overline{T_0} z^2 + (T_1 - T_0)z + T_0 = \overline{T_0}(z - \lambda)^2.$$

利用 $T_0 \neq 0$，我们得到 $\lambda = \frac{T_0}{|T_0|}$。特别地， $|\lambda| = 1$。此外，λ也有显式表达式

$$\lambda = \frac{T_0 - T_1}{2\overline{T_0}} = \frac{2T_0}{T_0 - T_1}. \tag{4.9}$$

由行 R_0、.....、 R_{n-3} 给出的递推关系的解为

$$c_k = \big((1-k)c_0 + k\overline{\lambda}c_1\big)\lambda^k, \qquad k = 0, \ldots, n-1.$$

我们可以利用 (4.9) 看出 $T_2 \neq 0$ （否则 $T_0 = 1$，进而 $|\lambda| > 1$），因此 $T_4 \neq 0$。于是，来自 R_n 的方程可表示为

$$c_1 = -\frac{T_3}{T_4} c_0$$

将 c_{n-2} 和 c_{n-1} 用 c_0 和 c_1表示后，我们可以把 (4.6) 中剩余的 2 个方程改写为仅含 c_0、 c_n 和 t 的形式。利用 (4.9)，第R_{n-2} 行变为

$$((n-1)\lambda + n\frac{T_3}{T_4})\lambda^{n-1} c_0 + c_n = \frac{t\lambda}{|T_0|}. \tag{4.10}$$

剩余方程 R_{n-1} 等价于

$$((2-n)-\bar{\lambda}\frac{T_3}{T_4}(n-1))\lambda^n c_0+(\lambda-2)c_n=\frac{-t}{|T_0|}. \tag{4.11}$$

求解由 (4.10) 和 (4.11) 给出的 2×2 线性方程组，可得到用 t表示的解。若该方程组存在满足 $t=1$的解，则通解就是将该解乘以 t，因为该方程组在 t上是 1-齐次的。 c_n 的表达式将给出方程 $c_n t=1$的两个可能解，其中恰有一个会导出一个 $c_n>0$，从而构成完整解。

4.2. 高阶极点。我们想知道当 ϕ在边界处有高阶奇点时会发生什么。记 c 为多项式 p_n的系数向量$\{c_k\}_{k=0}^n$，使得 $c_n>0$ 和 $\{p_n\}$ 是 $H(b)$ 的标准正交基，其中 $\phi=b/a$ 与前面相同。下面通过一个例子说明有限表达式的一般原理，其形式为

$$\phi(z)=r_0+\frac{r_1}{1-z}+\frac{r_2}{(1-z)^2}=r_0+\sum_{k=0}^{\infty}(r_1+r_2(k+1))z^k. \tag{4.12}$$

应用引理 2.5，我们可以得到

$$M_{j,k}:=\langle z^j,z^k\rangle_b$$

用 r_0、r_1 和 r_2 表示，其中 $j,\ k=0$、……、n。为简单起见，设 r_0，r_1 和 r_2 均为实数。这并非本质问题，但这样一来，格拉姆矩阵 $M=(M_{j,\ k})_{j,\ k}\in\mathbb{C}^{(n+1)\times(n+1)}$ 就成为对称矩阵（否则，在下文中请将 M^* 视为 M）。方程 $\left\langle p_n,\ z^k\right\rangle_b=0$（对 $k=0$、……、$n-1$ 成立）可写为 $Mc=te_n$，其中 t 是一个哑变量，可以选择它使得 $c_n t=1$，而 e_n 是 $\mathbb{C}^{n+1}$ 中典范基的最后一个元素。从现在起，我们用 I 表示单位矩阵，用 B 表示后移矩阵（其主对角线上方紧邻的对角线上的元素均为 1，其余元素均为 0）。

下面的命题包含我们能够找到的最相关结构： M

命题 4.13. 存在一个上三角五对角矩阵$T\in\mathbb{C}^{(n+1)\times(n+1)}$ 和一个（秩为 *5* 的）矩阵 N，其开头有 $n-4$ 个零行，使得 $(I-B)^4M=T+N$。

证明。 记 $M_{j,\ k,\ 0}:=M_{j,\ k}$ 以及 $M_{j,\ k,\ d+1}=M_{j,\ k,\ d}-M_{j,\ k+1,\ d}$，这表示对 M 进行 $d+1$ 次初等行变换，每次将第 R_k 行替换为该行减去第 R_{k+1} 行。只要$k+d+1\le n$，此操作就有定义。

首先，取 $j<k\le n-2$。然后由引理 2.5 可得

$$\begin{aligned}M_{j,k,1}=M_{j,k}-M_{j,k+1}&=\sum_{s=0}^{j}\phi_s(\phi_{k-j+s}-\phi_{k-j+s+1})\\&=\left(\sum_{s=0}^{j}\phi_s\right)r_2.\end{aligned}$$

由于这与 k 无关，再迭代一次，我们得到

$$M_{j,k,2} = M_{j,k,1} - M_{j,k+1,1} = 0.$$

相反地，如果 $k+5 \le j \le n$，我们得到

$$\begin{aligned} M_{j,k,1} &= \sum_{s=0}^{k} \phi_s \phi_{j-k+s} - \sum_{s=0}^{k+1} \phi_s \phi_{j-k-1+s} \\ &= r_2 \left(\sum_{s=0}^{k} \phi_s \right) - \phi_{k+1}\phi_j. \end{aligned}$$

我们可以继续迭代，得到

$$\begin{aligned} M_{j,k,2} = M_{j,k,1} - M_{j,k+1,1} &= -r_2\phi_{k+1} - \phi_{k+1}\phi_j + \phi_{k+2}\phi_j \\ &= r_2(\phi_j - \phi_{k+1}) = r_2^2(j-k-1). \end{aligned}$$

下一次迭代将我们带到

$$M_{j,k,3} = M_{j,k,2} - M_{j,k+1,2} = r_2^2(j-k-1) - r_2^2(j-k-2) = r_2^2.$$

这是一个常数，因此$M_{j,\ k,\ 4} = 0$。此时，我们已完成与左乘矩阵 M对应的初等变换（I –B）^{4}，但尚未确定对角线上满足 $j-k$ =0，...，4的值；这些值决定了 T。□

注 4.14。用命题 *4.13* 的记号可以证明，矩阵元$T_{k,\ k}$ 和$T_{k+4,\ k}$ 与 k 无关，而$T_{k+1,\ k}$、 $T_{k+2,\ k}$、 $T_{k+3,\ k}$ 则分别由 k上的二次多项式确定。假设 $k \le n-5$，因为最后 *5* 行确定了矩阵 N。$T_{j,\ k}$的一般公式为

$$T_{j,k} = M_{j,k} - 4M_{j,k+1} + 6M_{j,k+2} - 4M_{j,k+3} + M_{j,k+4}.$$

例如，若 $j = k$，则得到

$$\begin{aligned} T_{k,k} &= \sum_{s=0}^{k} \phi_s(\phi_s - 4\phi_{s+1} + 6\phi_{s+2} - 4\phi_{s+3} + \phi_{s+4}) \\ &= \phi_0 r_0 = r_0(r_0 + r_1 + r_2), \end{aligned}$$

这是一个与 k 无关的常数。然而，若取 $j = k+1$，则得到

$$\begin{aligned} T_{k+1,k} &= -\phi_{k+1}^2 + \sum_{s=0}^{k+1} \phi_s(\phi_s - 4\phi_{s+1} + 6\phi_{s+2} - 4\phi_{s+3} + \phi_{s+4}) \\ &= -\phi_{k+1}^2 + r_0(r_0 + r_1 + r_2), \end{aligned}$$

这确实是关于 k 的二次多项式。

4.3. **一般现象的一种可能的描述**。可以预期，当 ϕ 具有 $P/(1-z)^m$ 的形式，其中 P 是次数至多为 m 的某个多项式时，矩阵 $(I-B)^{2m}M$ 将表示为两个矩阵 T 和 N 之和。其中， T 将是一个上三角 (2m+1)– 对角矩阵，其各条对角线上的矩阵元由次数为 2($m-1$) 的多项式决定。扰动矩阵 N 仅在其最后 $2m+1$ 行含有非零矩阵元。这种结构应当

在一般情况下加以利用，以便在有限时间内为特定的 ϕ 构造所有正交归一多项式的闭式公式，从而形成高效算法。遗憾的是，一旦超出最简单的情形，递推关系中的项就不再是常数；不过，它们仍将为一般 k 的多项式 p_n 的系数 c_k 提供递归定义。

References

[1] Carlo Bellavita、Eugenio Dellepiane、Andreas Hartmann 与 Javad Mashreghi。作为 de Branges-Rovnyak 空间的无限支撑调和加权 Dirichlet 空间。 *ArXiv preprint https://arxiv.org/abs/2509.04907*，2025。[2] Nicolas Chevrot、Dominique Guillot 与 Thomas Ransford。de Branges–Rovnyak 空间与狄利克雷空间。 *Journal of Functional Analysis*，259:2366–2383，2010。[3] Joseph A. Cima、Alec L. Matheson 与 William T. Ross。 *The Cauchy Transform*。数学调查与专著。美国数学会，2006。[4] Constantin Costara 与 Thomas Ransford。哪些 de Branges–Rovnyak 空间是狄利克雷空间（反之亦然）？ *Journal of Functional Analysis* 265 12 3204 3218, , 2013 ( ): – 。[5] Eugenio Dellepiane、Marco M. Peloso 与 Anita Tabacco。论德布朗热-罗夫尼亚克空间与狄利克雷空间的相等性。 *Complex Analysis and Operator Theory*，19 119 2025( )，。[6] Emmanuel Fricain 与 Javad Mashreghi。 *The Theory of H(b) Spaces*，*New Mathematical Monographs* 的第 1 卷。剑桥大学出版社，2016。[7] Emmanuel Fricain 与 Javad Mashreghi。 *The Theory of H(b) Spaces*，*New Mathematical Monographs* 的第 2 卷。剑桥大学出版社，2016。[8] Emmanuel Fricain 与 Javad Mashreghi。局部 Dirichlet 空间中的标准正交多项式基。 *Acta Scientiarum Mathematicarum*，87(3):595–613，2021。[9] Stephan R. Garcia、Javad Mashreghi 与 William T. Ross。 *Introduction to model spaces and their operators* 148 *Cambridge Studies in Advanced Mathem-* ，卷 。剑桥大学出版社，剑桥，。[10] John B. Garnett。 *atics* 2016 *Bounded analytic functions*。数学研究生教材。施普林格，纽约，修订第 1 版，2007。[11] Bartosz Malman 与 Daniel Seco。嵌入德布朗热-罗夫尼亚克空间。*dia Mathematica* 278 2 173 194, 2024 *Stu-* ，( ): – 。

[12] Donald Sarason。 *Sub-Hardy Hilbert Spaces in the Unit Disk*。阿肯色大学数学科学讲义。威利，1994。[13] Donald Sarason。作为德布朗热-罗夫尼亚克空间的局部 Dirichlet 空间。 *Proceedings of the American Mathematical Society* 125 7 2133 2139, 1997 ，( ): – 。[14] Donald Sarason。无界 Toeplitz 算子。 *Integral Equations and Operator Theory* 61 281 298, 2008 ，: – 。

Département de mathématiques et statistique, Université Laval, Québec,QC, Canada G1K 7P4*Email address*: dellepianeeugenio@gmail.com

Universidad de la Laguna e IMAULL, Avenida Astrofísico Francisco Sánchez,s/n, Departamento de Análisis Matemático, 38206 San Cristóbal de La Laguna, Santa Cruz de Tenerife, Spain*Email address*: dsecofor@ull.edu.es