arXiv:2603.03107v1 [math.OC] 3 Mar 2026

矩阵分解框架下带秩和基数正则化的鲁棒主成分分析*

Wenjing Li†, WeiBian ‡, Kim-ChuanToh§

摘要

鲁棒主成分分析是数据分析中的一种重要代表性方法。它通常被视为一个涉及矩阵的秩和 ℓ_0 范数的优化问题。本文研究秩和 ℓ_0 正则化优化问题及其矩阵分解问题，并分别建立它们在全局极小点和驻点意义下的等价性。此外，我们针对约束分解模型构建了一个适用范围广泛的等价非凸松弛框架，该框架在全局极小点和满足强最优性条件的驻点（称为强驻点）意义下成立。对于具有下半连续正则项和梯度局部利普希茨连续损失函数的一般分解问题，我们提出了一种新颖的基于近端梯度的算法，该算法基于联合与交替计算，并收敛到其极限临界点。该算法能够求得原问题的驻点，其自适应版本则能够求得因式分解问题的强驻点。

关键词： 鲁棒主成分分析、秩与 ℓ_0范数正则化、矩阵分解、非凸松弛等价性、联合交替近端梯度算法

1 引言

鲁棒主成分分析（稳健主成分分析）是数据分析中最具代表性的方法之一，常用于图像去噪和视频处理。它被广泛视为从稀疏损坏数据中恢复低秩矩阵的任务。记 $\Omega \subseteq \{1,\dots,m\} \times \{1,\dots,n\}$ 为观测条目的指标集，$\mathcal{P}_\Omega : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{m\times n}$ 为算子，使得对任意 $Z \in \mathbb{R}^{m\times n}$，当$(i,j) \in \Omega$时，$(\mathcal{P}_\Omega(Z))_{ij} = Z_{ij}$，否则为0。稳健主成分分析要求从观测矩阵 $\mathcal{P}_\Omega(Z^s)$中恢复低秩矩阵 $Z^l \in \mathbb{R}^{m\times n}$，其中 $Z^s = Z^l + S^u$，而 $S^u \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 是未知的稀疏损坏矩阵。对任意矩阵 $S \in \mathbb{R}^{m\times n}$，其稀疏度通常由 ℓ_0范数度量，定义为$\|S\|_0 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \vartheta(|S_{ij}|)$，其中

$$\vartheta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \text{ satisfies that } \vartheta(t) = 1 \text{ if } t > 0, \text{ and } \vartheta(t) = 0 \text{ otherwise.} \tag{1}$$

稳健主成分分析的理想优化模型如下，

$$\min_{Z,S\in\mathbb{R}^{m\times n}} \ \operatorname{rank}(Z) + \alpha \|S\|_0, \quad \text{s.t. } \mathcal{P}_\Omega(Z+S) = \mathcal{P}_\Omega(Z^s) \tag{2}$$

参数为 $\alpha > 0$，其中 S 表示稀疏矩阵变量。由于秩函数和 ℓ_0-范数的性质，该问题通常是 NP 难的。考虑到现实应用中的各种噪声类型，实际观测值为 $\mathcal{P}_\Omega(Z^l + S^u + R^u)$，其中 Z^l 是低秩目标矩阵，而 S^u 和

*本工作由国家自然科学基金委员会资助（12425115、12271127、12301397、62176073）。

†哈尔滨工业大学数学学院，哈尔滨 150001，中国。本工作的部分内容完成于作者在新加坡国立大学数学系担任访问学者期间（liwenjingsx@163.com）.

‡通讯作者。哈尔滨工业大学数学学院，哈尔滨 150001，中国（bianweilvse520@163.com）.§新加坡国立大学数学系与运筹学与分析研究所，肯特岗下段路10号，新加坡（mattohkc@nus.edu.sg）.

R^u 分别是未知的稀疏损坏矩阵和随机噪声矩阵。这可视为 [7] 中的稳定鲁棒主成分分析公式。由于目标矩阵 Z^l 本质上是低秩的，其秩通常有一个预期上界 d，即 $\mathrm{rank}(Z^l) \le d$。在实践中，若对噪声 R^u 缺乏先验知识，则可将鲁棒主成分分析模型合理地表示为秩和 ℓ_0 正则化问题，

$$\min_{(Z,S)\in\mathbb{R}^{m\times n}\times\mathcal{B}^S:\,\mathrm{rank}(Z)\le d} F_0(Z,S) := f(Z,S) + 2\lambda\,\mathrm{rank}(Z) + \beta\|S\|_0, \tag{L}$$

其中 $f\colon\ \mathbb{R}^{m\times n}\times\mathbb{R}^{m\times n}\to\mathbb{R}_+$ 是局部利普希茨连续的，$\mathcal{B}^S\colon = [\boldsymbol{\kappa}^1, \boldsymbol{\kappa}^2] \subseteq \mathbb{R}^{m\times n}$，且 $\boldsymbol{\kappa}^1_{ij} \in [-\infty, 0]$ 与 $\boldsymbol{\kappa}^2_{ij} \in [0, +\infty]$，$\forall i,\ j$，参数 λ 和 β 为非负。问题（L）是一个面向稳健主成分分析的新模型，兼具理论挑战与计算潜力。对于涉及秩函数的优化问题，一种常见做法是求解相应的松弛问题，采用核范数 [39], 加权核范数 [17], 截断核范数 [19] 或Schatten-p （$0 < p < 1$）范数 [37], ，而其计算通常在每次迭代中都涉及一次奇异值分解（SVD） [7, 8, 44]。该方法往往计算成本很高，不适合处理高维数据。

对于任意矩阵 $Z \in \mathbb{R}^{m\times n}$，当秩$(Z) \le d$时，可将其表示为 $Z = XY^{\mathbb{T}}$，其中包含两个尺寸缩减的矩阵 $X \in \mathbb{R}^{m\times d}$ 和 $Y \in \mathbb{R}^{n\times d}$。这种矩阵分解是一种有效的降维方法，适用于以低秩矩阵为变量的优化问题。如 [12], 所示，当秩$(Z) \le d$时，矩阵的秩与列稀疏性具有如下等价关系：秩(Z) $=\min_{(X,Y)\in\mathbb{R}^{m\times d}\times\mathbb{R}^{n\times d}:\ XY^{\mathbb{T}}=Z} \frac{1}{2}\big($非零列数$(X)$ $+$非零列数$(Y)\big)$，其中非零列数$(\cdot)$表示该矩阵的非零列数。据此，不难在全局极小点的意义下推出问题（L）的等价因式分解问题（F），如下：

$$\min_{(X,Y,S)\in\mathbb{R}^{m\times d}\times\mathbb{R}^{n\times d}\times\mathcal{B}^S} F(X,Y,S) := f(XY^{\mathbb{T}}, S) + \lambda\big(\mathrm{nnzc}(X) + \mathrm{nnzc}(Y)\big) + \beta\|S\|_0. \tag{F}$$

在函数 F 的表达式中，各项依次为损失函数、低秩诱导正则项和稀疏正则项。矩阵分解可以降低 (L) 的变量维度，并避免计算 SVD，从而使问题（F）具有显著的计算优势。通过将实际先验信息作为约束纳入模型，我们可以聚焦于带约束的因式分解问题（F）

$$\min_{(X,Y,S)\in\mathcal{B}^X\times\mathcal{B}^Y\times\mathcal{B}^S} F(X,Y,S), \tag{FB}$$

其中 $\mathcal{B}^X := \{X \in \mathbb{R}^{m\times d}\colon\ \|X_i\|_2 \le \tau,\ \ \forall i\}$ 且 $\mathcal{B}^Y := \{Y \in \mathbb{R}^{n\times d}\colon\ \|Y_i\|_2 \le \tau,\ \ \forall i\}$，其中 X_i 和 Y_i 分别为 X 和 Y 的第 i 列，而 $\tau \in [0, +\infty]$ 为给定的界。模型 (FB) 对于稳健主成分分析而言是新颖的，并涵盖了许多具有广泛应用背景的模型。当 $\tau = +\infty$ 时，问题（FB）就是问题（F）。当 $\lambda = 0$ 时，问题（FB）是一个 ℓ_0 正则化问题；当 $\beta = 0$ 时，问题（FB）是一个秩正则化因式分解问题。这些模型通常是 NP 难问题，但在高维数据处理中是广受欢迎的理想模型，例如无线通信、图像修复、系统辨识和协同过滤。在 [27], 中，研究了满足 $\beta = 0$ 且 f（$XY^{\mathbb{T}},\ S$）独立于 S 的问题（FB），以及其 capped-ℓ_1 松弛问题。在具有有界约束的 [47], 中，基于其在全局极小点意义下与某些非凸松弛问题的等价性，考虑了具有张量平均秩和 ℓ_0-范数的鲁棒张量补全模型。

问题（L）和（F）在 $\beta = 0$ 与 f（$XY^{\mathbb{T}}, S$）独立于 S 的条件下于 [27], 中得到研究，证明了(L)的任意局部极小点都是(F)的局部极小点，并在适当情形下建立了(L)、(F)与(FB)之间全局极小点的包含关系。本文将在一般情形下深入分析(L)、(F)与(FB)之间全局极小点、局部极小点与驻点的关系。通过证明(L)与(F)在驻点意义下的等价性，理论上我们可以通过求解(F)得到(L) 的驻点。特别地，关于驻点的等价性也是 [27]中所考虑的问题$\min_{Z:\,\text{秩}(Z)\le d}\{f(Z) + \lambda\,\text{秩}(Z)\}$的最新结论。

函数 nnzc$(\cdot)$ 可等价地视为 $\ell_{p,\ 0}(p \ge 0)$-范数，因为 nnzc(Z) $= \|(\|Z_1\|_p,\ \cdots,\ \|Z_n\|_p)\|_0,\ \ \forall Z \in \mathbb{R}^{m\times n}$，其中 Z_i 表示 Z 的第 i列，$\|\cdot\|_p$ 是向量的 ℓ_p-范数。因此

问题（FB）属于具有非凸损失的混合组 ℓ_p,0 正则化问题。对于 ℓ_0(ℓ_p,0) 正则化问题，一种常用方法是求解其松弛问题。 ℓ_0-范数的常见松弛函数包括 ℓ_1-范数、 ℓ_p-范数（$0<p<1$）、 [14], 截断-ℓ_1 惩罚、 [32], 平滑剪裁绝对偏差（SCAD）惩罚 [13] 以及极小极大凹惩罚（MCP） [45], , 并且这些方法可推广至ℓ_p,0-范数。采用某些特定非凸松弛的模型，与相应的 ℓ_0(ℓ_p,0) 正则化问题在全局极小点意义下等价 [4,25,26,38]。特别是，借助特定的截断-ℓ_1 松弛， [25]中构造的一类松弛模型等价于 ℓ_0 正则化问题。此外， [4,27]建立了（FB）与其截断-ℓ_1松弛之间关于最优性条件的某些等价性，这种等价性超出了全局极小点的范畴；其中（FB）带有$\lambda=0$和 $f(XY^{\mathbb{T}},S)$（与 $XY^{\mathbb{T}}$无关），或 $\beta=0$和 $f(XY^{\mathbb{T}},S)$（与 S无关）。本文将为（FB）构建一个等价的松弛框架，使其在全局极小点及某些最优性条件意义下等价，并涵盖多种松弛。对于涉及非凸损失函数的 ℓ_0 正则化问题，一般松弛理论也是新的。

已有一些算法可以求解 [41, 42],中的 (L) 的无约束版本及其松弛形式，以及 [15, 18, 36], 中 (2) 和 (FB) 在具有光滑损失时的松弛形式。此外， [24,34,43] 中的一些现有算法可以求解具有光滑损失的 (FB)。然而，从理论上看，这些算法只能在某些条件下达到临界点，而这些点可能与 (FB) 的全局极小点相距甚远。近期，有两类自适应交替近端梯度（AAPG）算法被提出，用于求解具有 $\beta=0$ 和 f（$XY^{\mathbb{T}}$， S）的 (FB)，且不依赖于 S。对于一般情形，强化驻点的最优性条件、设计一种能够保证收敛到强化驻点的高效算法，并在 AAPG 算法的基础上改进 (FB)，都具有重要意义。在算法部分，我们将考虑以下一般的非凸（不一定连续的）因子分解优化问题，

$$\min_{(X,Y,S)\in\mathbb{R}^{m\times d}\times\mathbb{R}^{n\times d}\times\mathbb{R}^{m\times n}} G(X,Y,S):=f(XY^{\mathbb{T}},S)+\lambda\big(u(X)+v(Y)\big)+\beta w(S), \tag{GF}$$

其中， f： $\mathbb{R}^{m\times n}\times\mathbb{R}^{m\times n}\to\mathbb{R}$ 可微，且其梯度 ∇f 局部 Lipschitz 连续；参数λ 和 β 非负； u： $\mathbb{R}^{m\times d}\to\mathbb{R}:=(-\infty,+\infty]$、 v： $\mathbb{R}^{n\times d}\to\mathbb{R}$ 和 w： $\mathbb{R}^{m\times n}\to\mathbb{R}$ 均为正常、下半连续且由仿射函数下界有界，并且其近端算子可以计算。考虑到 ∇f的局部 Lipschitz 连续性，且不考虑 f（$XY^{\mathbb{T}}$， S）的结构，现有的近端梯度算法 [21–23] 可以求解 (GF)。考虑到损失函数的结构，我们将采用联合与交替计算，提出一种基于近端梯度的算法来求解 (GF)。此外，我们将证明，所设计的算法能够达到 (L) 的驻点，而其自适应版本能够收敛到 (FB) 及其松弛的强化驻点。

本文重点研究建立非凸问题（L）和（F）之间的解关系，为问题（FB）构建连续非凸松弛框架，求解一般因子分解问题（GF）（其中问题（FB）及其连续松弛是特例），并改进某些特定情形下的理论结果。主要贡献如下。

（i）分析问题（L）和（FB）的局部极小点所满足的等价最优性条件。证明问题（L）和（F）在全局极小点和驻点方面的等价性。这建立了从寻找（F）的驻点到寻找（L）的驻点之间的直接关系。

（ii）深入研究问题（FB）的最优性条件；一些非全局局部极小点并不满足这些条件。鉴于此，定义一类具有比问题（FB）现有驻点更强最优性条件的驻点，称为强驻点。在全局极小点和所定义的强驻点意义下，构建问题（FB）的一般等价非凸松弛框架。

(iii) 考虑一般因子分解问题（GF），该问题将问题（FB）及其等价松弛问题作为特例。提出一种采用联合与交替计算（JA-PG）的基于近端梯度的算法，该算法收敛至（GF）的极限临界点。结合

（L）与（F）在驻点意义下的等价性，我们还证明了 JA-PG 收敛至（L）的驻点。

(iv) 分析与松弛函数相关的近端算子在计算上的共性。基于推导出的最优性条件，开发 JA-PG 算法的自适应版本，以求解 (FB) 的松弛问题。利用等价松弛理论，证明所提出的算法收敛到 (FB) 的强驻点，从而确立松弛框架的算法适用性。

本文其余部分安排如下。第2节介绍 (L)、(F) 和 (FB) 的一些性质，以及它们在全局极小点、局部极小点和驻点方面的关系。第3节为 (FB) 的等价非凸松弛提供一个一般框架，并给出一些可验证条件，以支持 (FB) 与其松弛问题在全局极小点和强驻点方面的等价性。第4节提出一种结合联合与交替计算的基于近端梯度的算法，用于求解一般分解问题，并介绍其自适应版本，用以求解 (FB) 及其松弛问题，同时改善收敛结果。第5节通过数值实验展示所提出模型和算法的效率。最后，第6节给出结论。

记号：令 $\mathcal{N}_\infty^\sharp$ 为自然数集 $\mathbb{N}$的无穷子集所构成的集合。所有正整数的集合记为 $\mathbb{N}_+$。对于任意 $n \in \mathbb{N}_+$，记 $[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$。记 $\mathbb{R}_+ := [0, +\infty)$ 和 $\mathbb{R} := (-\infty, +\infty]$。令 $\mathbb{R}^{m\times n}$ 为配备内积 $\langle X, Y\rangle = \mathrm{trace}(X^{\mathbb{T}}Y)$ 及其诱导的 Frobenius范数 $\|\cdot\|_F$ 的 $m \times n$ 实矩阵空间。对于任意标量 $\varepsilon > 0$，设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbb{I} \subseteq [n]$, $\mathbb{J} \subseteq [m] \times [n]$; 给定矩阵 $U \in \mathbb{R}^{m\times n}$，定义 $B_\varepsilon(U) := \{Z \in \mathbb{R}^{m\times n} : \|Z - U\|_F \le \varepsilon\}$, $B_\varepsilon := B_\varepsilon(\mathbf{0})$，将 U_i 记作 U 的第 i 列，定义 $U_{\mathbb{I}} := [U_{i_1}, \ldots, U_{i_{|\mathbb{I}|}}] \in \mathbb{R}^{m\times|\mathbb{I}|}$，其基数为 $|\mathbb{I}|$，其中 $\mathbb{I}, i_j \in \mathbb{I}, \forall j \in [|\mathbb{I}|]$和 $i_1 < \cdots < i_{|\mathbb{I}|}$; 并令 $\Omega_{\mathbb{I}} := \{U_{\mathbb{I}} : U \in \Omega\}$。受限矩阵 $U_{\mathbb{I}}, U_{\mathbb{J}} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 以及集合 $\Omega_{\mathbb{I}}, \Omega_{\mathbb{J}} \subseteq \mathbb{R}^{m\times n}$ 定义如下：

$$(\underline{U}_{\mathbb{I}})_i = U_i, \forall i \in \mathbb{I},\ (\underline{U}_{\mathbb{I}})_i = \mathbf{0}, \forall i \notin \mathbb{I},\ \text{and } \underline{\Omega}_{\mathbb{I}} := \{\underline{U}_{\mathbb{I}} : U \in \Omega\},$$

$$(\underline{U}_{\mathbb{J}})_{ij} = U_{ij}, \forall (i,j) \in \mathbb{J},\ (\underline{U}_{\mathbb{J}})_{ij} = 0, \forall (i,j) \notin \mathbb{J},\ \text{and } \underline{\Omega}_{\mathbb{J}} := \{\underline{U}_{\mathbb{J}} : U \in \Omega\},$$

指标集 $\mathbb{I}_U \subseteq [n]$ 和 $\mathbb{J}_U \subseteq [m] \times [n]$ 定义如下

$$\mathbb{I}_U := \{i \in [n] : U_i \neq \mathbf{0}\} \text{ if } \lambda > 0 \text{ and } [n] \text{ if } \lambda = 0,$$

$$\mathbb{J}_U := \{(i,j) \in [m] \times [n] : U_{ij} \neq 0\} \text{ if } \beta > 0 \text{ and } [m] \times [n] \text{ if } \beta = 0,$$

定义 $\mathbb{I}^c := [n] \setminus \mathbb{I}$ 和 $\mathbb{J}^c := [m] \times [n] \setminus \mathbb{J}$。对于矩阵集合 $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^{m\times n}$，$\|\mathcal{M}\|_{\max} := \sup\{\|U\|_2 : U \in \mathcal{M}\}$. 对于非空集合 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{m\times n}$ 以及矩阵 $U \in \Omega$，$N_\Omega(U)$ 表示 Ω 在 U 处的法锥，定义如 [35], ; Ω 的内部记为 $\mathrm{int}(\Omega)$，示性函数 δ_Ω 定义为：若$U \in \Omega$，则 $\delta_\Omega(U) = 0$ ；否则，$\delta_\Omega(U) = +\infty$。对于任意局部 Lipschitz 连续函数 $f : \mathbb{R}^{m\times n} \times \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$，记 $\partial f(\cdot)$ 为极限次微分 [35]，记 $\partial^c f(\cdot)$ 为 Clarke次微分 [10]。对于正常下半连续函数 $h : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$，其定义域定义为 $\mathrm{dom}(h) := \{U \in \mathbb{R}^{m\times n} : h(U) < +\infty\}$，其近端算子定义为 $\mathrm{prox}_h(Z) := \mathrm{argmin}_{V\in\mathbb{R}^{m\times n}}\{h(V) + \frac{1}{2}\|V - Z\|_F^2\}$。对于任意 $Z \in \mathbb{R}^{m\times n}$，记 $d_Z := \mathrm{rank}(Z)$，$U_Z \in \mathbb{R}^{m\times d_Z}$和 $V_Z \in \mathbb{R}^{n\times d_Z}$为 Z 的紧致奇异值分解中的正交矩阵，即 $Z = U_Z\Sigma_Z V_Z^{\mathbb{T}}$，其中 $\Sigma_Z \in \mathbb{R}^{d_Z\times d_Z}$ 为对角矩阵，其对角元素是 Z 的非零奇异值，并按降序排列；$\Sigma_Z^{1/2} \in \mathbb{R}^{d_Z\times d_Z}$ 为元素对应于 Σ_Z 中元素平方根的矩阵。定义 $I_+ : \mathbb{R}_+ \to (0, +\infty]$ 为 $I_+(t) = t$，若 $t > 0$；否则，$I_+(t) = +\infty$。对于任意问题 (Δ)，分别用 $V_{(\Delta)}$、$\mathcal{G}_{(\Delta)}$ 和 $\mathcal{L}_{(\Delta)}$表示其最优值、全局极小点集和局部极小点集。我们用 iff 表示“当且仅当”。

2 等价性　问题（L）、（F）和（FB）的等价性与性质　　)

在本节中，我们　　分析问题 (F)、(L)、(FB) 以及带约束的 (L) 之间的关系如下　　，

$$\min_{(Z,S)\in\mathcal{B}^Z\times\mathcal{B}^S:\,\mathrm{rank}(Z)\le d} F_0(Z,S), \tag{LB}$$

其中 $\mathcal{B}^Z\subseteq\mathbb{R}^{m\times n}$ 是一个盒约束集。我们分析问题（LB）和（FB）的性质，这有助于随后引入问题（FB）的强驻点。此外，我们建立问题（L）和（F）在全局极小点和驻点方面的等价性。驻点意义下的等价性在这些问题的解之间建立了直接联系。

首先，我们证明（L）和（F）的全局极小点等价。

命题1。 问题（L）和（F）具有相同的最优函数值，并且二者的全局极小点可以相互转换，即

$$V_{(L)}=V_{(F)}\ \textit{and}\ \mathcal{G}_{(L)}=\{(XY^{\mathbb{T}},S):(X,Y,S)\in\mathcal{G}_{(F)}\}. \tag{3}$$

证明。 设 $\Gamma_1:=\mathbb{R}^{m\times n}\times\mathcal{B}^S$ 且 $\Gamma_2:=\mathbb{R}^{m\times d}\times\mathbb{R}^{n\times d}$。由 $\{(X,Y)\in\Gamma_2:\ \text{秩}(XY^{\mathbb{T}})\le d\}=\mathbb{R}^{m\times d}\times\mathbb{R}^{n\times d}$以及秩(·)与非零列数(·)的关系，我们有

$$\begin{aligned}
&\min_{(Z,S)\in\Gamma_1:\,\mathrm{rank}(Z)\le d}\{f(Z,S)+2\lambda\,\mathrm{rank}(Z)+\beta\,\|S\|_0\}\\
=&\min_{(Z,S)\in\Gamma_1:\,\mathrm{rank}(Z)\le d}\Big\{f(Z,S)+\lambda\min_{(X,Y)\in\Gamma_2:XY^{\mathbb{T}}=Z}\{\mathrm{nnzc}(X)+\mathrm{nnzc}(Y)\}+\beta\,\|S\|_0\Big\}\\
=&\min_{(X,Y,Z,S)\in\Gamma_2\times\Gamma_1:\,\mathrm{rank}(Z)\le d,\,XY^{\mathbb{T}}=Z}\{f(Z,S)+\lambda(\mathrm{nnzc}(X)+\mathrm{nnzc}(Y))+\beta\,\|S\|_0\}\\
=&\min_{(X,Y,S)\in\Gamma_2\times\mathcal{B}^S}\{f(XY^{\mathbb{T}},S)+\lambda\big(\mathrm{nnzc}(X)+\mathrm{nnzc}(Y)\big)+\beta\,\|S\|_0\}.
\end{aligned}$$

这表明（3）成立。 □

接下来，我们建立（L）、（LB）与（FB）之间关于全局极小点的关系。

命题2。 假设 $\tau\ge\|\mathcal{B}^Z\|_{\max}^{1/2}$ 在问题（FB）中。若 $(\mathcal{B}^Z\times\mathcal{B}^S)\cap\mathcal{G}_{(L)}\neq\emptyset$，则

$$V_{(LB)}=V_{(FB)}=V_{(L)}\ \textit{and}\ \mathcal{G}_{(LB)}\subseteq\{(XY^{\mathbb{T}},S):(X,Y,S)\in\mathcal{G}_{(FB)}\}\subseteq\mathcal{G}_{(L)}. \tag{4}$$

证明。由 [27, 命题 2] 和 $\tau\ge\|\mathcal{B}^Z\|_{\max}^{1/2}$，我们有：对任意 $Z\in\mathcal{B}^Z$，存在 $(X,Y)\in\mathcal{B}^X\times\mathcal{B}^Y$使得 $XY^{\mathbb{T}}=Z$ 且非零列数(X) $=$ 非零列数(Y) $=$ 秩(Z)，这意味着 $V_{(FB)}\le V_{(LB)}$。结合 $V_{(F)}\le V_{(FB)}$ 这一事实，我们得到 $V_{(F)}\le V_{(FB)}\le V_{(LB)}$。由命题1可得 $V_{(L)}=V_{(F)}$和$\mathcal{G}_{(L)}=\{(XY^{\mathbb{T}},S):(X,Y,S)\in\mathcal{G}_{(F)}\}$。由于 $\mathcal{G}_{(L)}\cap(\mathcal{B}^Z\times\mathcal{B}^S)\neq\emptyset$，我们得到 $V_{(L)}=V_{(LB)}$。因此，我们有$V_{(L)}=V_{(F)}=V_{(FB)}=V_{(LB)}$。由 [27, 命题 2] 以及约束集之间的关系可得 $\mathcal{G}_{(LB)}\subseteq\{(XY^{\mathbb{T}},S):(X,Y,S)\in\mathcal{G}_{(FB)}\}\subseteq\{(XY^{\mathbb{T}},S):(X,Y,S)\in\mathcal{G}_{(F)}\}=\mathcal{G}_{(L)}$。□

当（LB）的可行域足够大时，命题2中的假设自然成立。当问题（L）和（LB）拥有相同的全局解集时，问题（L）和（FB）的所有全局极小点都可以相互转换。根据命题1和命题2，问题（F）、（L）、（FB）和（LB）之间的一些关系如图 1 所示。

接下来，我们展示（LB）和（FB）的局部极小点的一些性质。

命题3. 以下性质适用于问题（LB）。

(i) $(\bar{Z},\bar{S})\in\mathcal{L}_{(LB)}$当且仅当它是 $f(Z,S)$在 $\mathcal{B}^Z_{\lambda,\bar{Z}}\times\mathcal{B}^S_{\mathbb{J}_{\bar{S}}}$ 上的局部极小点，其中 $\mathcal{B}^Z_{\lambda,\bar{Z}}:=\{Z\in\mathcal{B}^Z:\text{秩}(Z)\le d,\ \lambda\text{秩}(Z)=\lambda\text{秩}(\bar{Z})\}$。

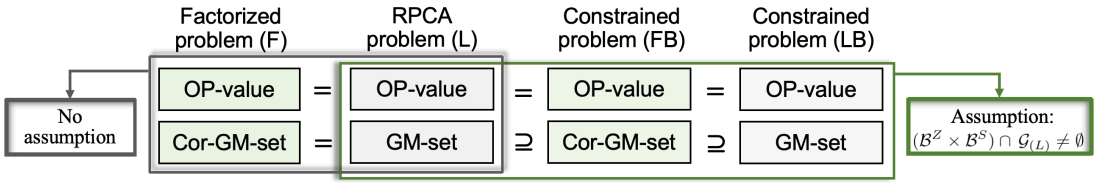

图 1：问题 (F)、(L)、(FB) 和 (LB) 之间的关系，其中“OP-value”表示“最优值”，“（对应的）全局极小解集合”表示“（相应矩阵乘积的）全局极小点集合”。

(ii) 若 $(Z,S) \in \mathcal{L}_{(LB)}$，则 $\mathrm{rank}(Z) \leq d$ 且

$$\exists\ (H_Z, H_S) \in \partial_{(Z,S)} f(\bar{Z},\bar{S}),\ \text{s.t.}\ -H_Z \in N_{\mathcal{B}^Z_{\lambda,\bar{Z}}}(\bar{Z}),\ -H_S \in N_{\mathcal{B}^S_{\mathbb{J}_{\bar{S}}}}(\bar{S}). \tag{5}$$

证明。 (i) 对于满足 $\lambda=\beta=0$ 的问题（LB），该性质显然成立，因此我们分析 $\lambda\neq 0$ 或 $\beta\neq 0$ 的情形。设 $(\bar{Z},\bar{S}) \in \mathcal{B}^Z\times\mathcal{B}^S$ 是任意给定的一对矩阵。由 Weyl不等式以及 ℓ_0-范数的性质，存在一个 $\epsilon>0$，使得 $\mathrm{rank}(Z)\geq\mathrm{rank}(\bar{Z})$，且对于任意 $(Z,S)\in B_\epsilon(\bar{Z},\bar{S})$，都有 $\mathbb{J}_S\supseteq\mathbb{J}_{\bar{S}}$。

设 $(\bar{Z},\bar{S})$ 是 $\mathcal{B}^Z_{\lambda,\bar{Z}}\times\mathcal{B}^S_{\mathbb{J}_{\bar{S}}}$ 上 f 的一个局部极小点。一方面，存在一个 $\hat{\epsilon}>0$，使得 $F_0(\bar{Z},\bar{S})\leq F_0(Z,S)\ \forall (Z,S)\in\{(Z,S)\in B_{\hat{\epsilon}}(\bar{Z},\bar{S})\cap(\mathcal{B}^Z\times\mathcal{B}^S):\mathrm{rank}(Z)\leq d,\ \lambda\mathrm{rank}(Z)=\lambda\mathrm{rank}(\bar{Z})\ \mathbb{J}_S=\mathbb{J}_{\bar{S}}\}$。另一方面，由 f 的连续性可知，存在一个 $\bar{\epsilon}\in(0,\min\{\hat{\epsilon},\epsilon\}]$，使得 $f(Z,S)\leq f(Z,S)+\min\{2I_+(\lambda)\ I_+(\beta)\},\forall (Z,S)\in B_{\bar{\epsilon}}(Z,S)$。这意味着 $F_0(Z,S)\leq f(Z,S)+\min\{2I_+(\lambda)\ I_+(\beta)\}+2\lambda\mathrm{rank}(\bar{Z})+\beta\|\bar{S}\|_0\leq F_0(Z,S)\ \forall (Z,S)\in\{(Z,S)\in B_{\bar{\epsilon}}(\bar{Z},\bar{S})\cap(\mathcal{B}^Z\times\mathcal{B}^S):\mathrm{rank}(Z)\leq d,\ \lambda\mathrm{rank}(Z)\neq\lambda\mathrm{rank}(\bar{Z})\text{ 或 }\mathbb{J}_S\neq\mathbb{J}_{\bar{S}}\}$。因此，$(\bar{Z},\bar{S})\in\mathcal{L}_{(LB)}$。

反过来，考虑 $(Z,S)\in\mathcal{L}_{(LB)}$。那么，存在 $\varepsilon\in(0,\epsilon]$ 使得

$$F_0(\bar{Z},\bar{S})\leq F_0(Z,S),\forall (Z,S)\in B_\varepsilon(\bar{Z},\bar{S})\cap(\mathcal{B}^Z\times\mathcal{B}^S)\ \text{with}\ \mathrm{rank}(Z)\leq d, \tag{6}$$

这意味着 $f(\bar{Z},\bar{S})\leq f(Z,S)\ \forall (Z,S)\in B_\varepsilon(\bar{Z},\bar{S})\cap\mathcal{B}^Z_{\lambda,\bar{Z}}\times\mathcal{B}^S_{\mathbb{J}_{\bar{S}}}$。因此，$(\bar{Z},\bar{S})$ 是 f 在 $\mathcal{B}^Z_{\lambda,\bar{Z}}\times\mathcal{B}^S_{\mathbb{J}_{\bar{S}}}$ 上的局部极小点。

(ii) 设 $(\bar{Z},\bar{S})\in\mathcal{L}_{(LB)}$。那么，由 (i)，$(\bar{Z},\bar{S})$ 是 $f(Z,S)$ 在 $\mathcal{B}^Z_{\lambda,\bar{Z}}\times\mathcal{B}^S_{\mathbb{J}_{\bar{S}}}$ 上的局部极小点。由 [35, 定理 10.1] 和 [35, 练习 10.10] 可得 $\mathbf{0}\in\partial_{(Z,S)}f(Z,S)+N_{\mathcal{B}^Z_{\lambda,\bar{Z}}}(Z)\times N_{\mathcal{B}^S_{\mathbb{J}_{\bar{S}}}}(S)$。因此，由 [33, 定理 6.23] 可知 (5) 成立。 □

命题4。 问题（*FB*）具有以下性质。

(i) If $(X,Y,S)\in\mathcal{G}_{(FB)}$, *then*

$$\mathbb{I}_X=\mathbb{I}_Y. \tag{C1}$$

(ii) $(\bar{X},\bar{Y},\bar{S})\in\mathcal{L}_{(FB)}$ 当且仅当它是 $f(XY^{\mathbb{T}},S)$ 在 $\mathcal{B}^X_{\mathbb{I}_{\bar{X}}}\times\mathcal{B}^Y_{\mathbb{I}_{\bar{Y}}}\times\mathcal{B}^S_{\mathbb{J}_{\bar{S}}}$ 上的局部极小点。

(iii) 若 $(X,Y,S)\in\mathcal{L}_{(FB)}$，则

$$\begin{aligned}&\exists\ \ (H_Z,H_S)\in\partial_{(Z,S)}f(\bar{X}\bar{Y}^{\mathbb{T}},\bar{S}),\\ &\text{s.t. }\mathbf{0}\in H_Z\bar{Y}+N_{\mathcal{B}^X_{\mathbb{I}_{\bar{X}}}}(\bar{X}),\ \mathbf{0}\in H_Z^{\mathbb{T}}\bar{X}+N_{\mathcal{B}^Y_{\mathbb{I}_{\bar{Y}}}}(\bar{Y}),\ \mathbf{0}\in H_S+N_{\mathcal{B}^S_{\mathbb{J}_{\bar{S}}}}(\bar{S}).\end{aligned} \tag{7}$$

证明。 (i) 对任意 $(X,Y,S)\in\mathcal{G}_{(FB)}$，令 $\mathbb{I}=\mathbb{I}_X\cap\mathbb{I}_Y$。若 $\mathbb{I}_X\neq\mathbb{I}_Y$，则 $F(X_{\mathbb{I}},Y_{\mathbb{I}},S)<F(X,Y,S)$，这将导致矛盾。因此，$\mathbb{I}_X=\mathbb{I}_Y$。

(ii) 对于 $\lambda=\beta=0$ 的情形，该命题显然成立，因此我们考虑 $\lambda\neq 0$ 或 $\beta\neq 0$ 的情形。对于任意给定的 $(\bar{X},\bar{Y},\bar{S})\in\mathcal{B}:=\mathcal{B}^X\times\mathcal{B}^Y\times\mathcal{B}^S$，定义 $\mathcal{B}:=\mathcal{B}^X_{\mathbb{I}_{\bar{X}}}\times\mathcal{B}^Y_{\mathbb{I}_{\bar{Y}}}\times\mathcal{B}^S_{\mathbb{J}_{\bar{S}}}$，则存在一个 $\varepsilon>0$ 使得

$$\mathbb{I}_X=\mathbb{I}_{\bar{X}},\mathbb{I}_Y=\mathbb{I}_{\bar{Y}}\ \text{and}\ \mathbb{J}_S=\mathbb{J}_{\bar{S}},\ \forall (X,Y,S)\in B_\varepsilon(\bar{X},\bar{Y},\bar{S})\cap\mathcal{B}, \tag{8}$$

因此

$$\mathbb{I}_X \supsetneq \mathbb{I}_{\bar{X}}, \mathbb{I}_Y \supsetneq \mathbb{I}_{\bar{Y}} \text{ or } \mathbb{J}_S \supsetneq \mathbb{J}_{\bar{S}}, \forall (X,Y,S) \in B_\varepsilon(\bar{X},\bar{Y},\bar{S}) \cap (\mathcal{B} \setminus \underline{\mathcal{B}}). \tag{9}$$

如果 $(X、Y、S) \in \mathcal{L}_{(FB)}$，那么存在一个 $\varepsilon_1 \in (0,\varepsilon]$ 使得 $F(X,Y,S) \le F(X,Y,S)$，$\forall (X,Y,S) \in B_{\varepsilon_1}(\bar{X},\bar{Y},\bar{S}) \cap \mathcal{B}$。由（8）可得 $f(\bar{X}\bar{Y}^{\mathbb{T}},\bar{S}) \le f(XY^{\mathbb{T}},S)\ \forall (X,Y,S) \in B_{\varepsilon_1}(\bar{X},\bar{Y},\bar{S}) \cap \mathcal{B}$，因此

$$(\bar{X},\bar{Y},\bar{S}) \text{ is a local minimizer of } f(XY^{\mathbb{T}},S) \text{ on } \underline{\mathcal{B}}. \tag{10}$$

反之，设（10）成立。则存在一个 $\varepsilon_2 \in (0,\varepsilon]$ 使得 $f(\bar{X}\bar{Y}^{\mathbb{T}},\bar{S}) \le f(XY^{\mathbb{T}},S)$，$\forall (X,Y,S) \in B_{\varepsilon_2}(X,Y,S) \cap \mathcal{B}$。由（8）可得

$$F(\bar{X},\bar{Y},\bar{S}) \le F(X,Y,S), \forall (X,Y,S) \in B_{\varepsilon_2}(\bar{X},\bar{Y},\bar{S}) \cap \underline{\mathcal{B}}. \tag{11}$$

考虑到 $f(XY^{\mathbb{T}},S)$的连续性，我们有：存在一个 $\varepsilon_3 \in (0,\varepsilon_2]$，使得 $f(\bar{X}\bar{Y}^{\mathbb{T}},\bar{S}) \le f(XY^{\mathbb{T}},S) + \min\{I_+(\lambda), I_+(\beta)\}, \forall (X,Y,S) \in B_{\varepsilon_3}(\bar{X},\bar{Y},\bar{S})$。此外，根据 (9)，对于任意 $(X,Y,S) \in B_{\varepsilon_3}(\bar{X},\bar{Y},\bar{S}) \cap (\mathcal{B} \setminus \mathcal{B})$，我们有 $F(\bar{X},\bar{Y},\bar{S}) \le f(XY^{\mathbb{T}},S) + \{I_+(\lambda), I_+(\beta)\} + \lambda(\|X\| + \|Y\|) + \beta\|S\|_0 \le \min$ ( ) ( ) 非零列数( ) 非零列数( ) $F(X,Y,S)$。结合 (11)，我们有 $F(X,Y,S) \le F(X,Y,S)\ \forall (X,Y,S) \in B_{\varepsilon_3}(X,Y,S) \cap \mathcal{B}$。因此，$(X,Y,S) \in \mathcal{L}_{(FB)}$。

(iii) 设 $(\bar{X},\bar{Y},\bar{S}) \in \mathcal{L}_{(FB)}$。根据 (ii)，$(\bar{X},\bar{Y},\bar{S})$ 是 $f(XY^{\mathbb{T}},S)$ 在 $\mathcal{B}^X_{\mathbb{I}_{\bar{X}}} \times \mathcal{B}^Y_{\mathbb{I}_{\bar{Y}}} \times \mathcal{B}^S_{\mathbb{J}_{\bar{S}}}$ 上的局部极小点。根据 [35, 10 1] [35, 10 10], $\mathbf{0} \in \partial_{(X,Y,S)} f\ \bar{X}\bar{Y}^{\mathbb{T}}\ \bar{S}$ + 定理 和习题中的费马法则，我们得到 (,) $N_{\mathcal{B}^X_{\mathbb{I}_{\bar{X}}} \times \mathcal{B}^Y_{\mathbb{I}_{\bar{Y}}} \times \mathcal{B}^S_{\mathbb{J}_{\bar{S}}}}(X,Y,S)$。结合 [33, 定理 6.23] 和 [35, 命题 10.5],, 可得 (7)。□

根据命题4（ii），不难推知，性质（C1）是问题（FB）的全局极小点的必要条件，但一般而言并非其所有局部极小点的必要条件。

定义1。

(i) $(\bar{Z},\bar{S}) \in \mathcal{B}^Z \times \mathcal{B}^S$ 称为（*LB*）的驻点，若其满足（*5*）。*(ii)* $(\bar{X},\bar{Y},\bar{S}) \in \mathcal{B}^X \times \mathcal{B}^Y \times \mathcal{B}^S$ 称为（*FB*）的驻点，若其满足（*7*）。（*LB*）和（*FB*）的所有驻点集合分别记为 $\mathcal{S}_{(LB)}$ 和 $\mathcal{S}_{(FB)}$。

注意，具有 $\mathcal{B}^Z = \mathbb{R}^{m\times n}$的问题（LB）和具有 $\tau = +\infty$的问题（FB）分别对应问题（L）和（F）。因此，命题3、命题4和定义1均适用于（L）和（F）。接下来，我们将说明（L）和（F）的局部极小点与驻点之间的关系。

定理1. 问题（*L*）和（*F*）的局部极小点与驻点之间具有以下关系。

(i) $\mathcal{L}_{(L)} \subseteq \{(XY^{\mathbb{T}},S) : (X,Y,S) \in \mathcal{L}_{(F)}\}$ *and* $\mathcal{S}_{(L)} \subseteq \{(XY^{\mathbb{T}},S) : (X,Y,S) \in \mathcal{S}_{(F)}\}$.

(ii) When $\lambda > 0$, $\mathcal{S}_{(L)} = \{(XY^{\mathbb{T}},S) : (X,Y,S) \in \mathcal{S}_{(F)}\}$.

证明. (i) 对于任意给定的 $(\bar{Z},\bar{S}) \in \mathcal{L}_{(L)}$，存在一个 $\epsilon > 0$，使得 (6) 成立，其中 $\mathcal{B}^Z = \mathbb{R}^{m\times n}$，且不难构造 $(\bar{X},\bar{Y}) \in \mathbb{R}^{m\times d} \times \mathbb{R}^{n\times d}$，使得 $\text{nnzc}(\bar{X}) = \text{nnzc}(\bar{Y}) = \text{rank}(\bar{Z})$ 并且 $\bar{X}\bar{Y}^{\mathbb{T}} = \bar{Z}$。由 $\|XY^{\mathbb{T}}\|_F$ 的连续性，存在一个 $\epsilon_r \in (0,\epsilon)$，使得 $XY^{\mathbb{T}} \in B_\epsilon(\bar{Z})\ \forall (X,Y) \in B_{\epsilon_r}(\bar{X},\bar{Y})$。结合 (6) 和 $\text{rank}(XY^{\mathbb{T}}) \le d$，可得 $F(\bar{X},\bar{Y},\bar{S}) = F_0(\bar{Z},\bar{S}) \le F_0(XY^{\mathbb{T}},S) \le F(X,Y,S)\ \forall (X,Y,S) \in B_{\epsilon_r}(\bar{X},\bar{Y}) \times (B_{\epsilon-\epsilon_r}(\bar{S}) \cap \mathcal{B}^S)$。因此，$(\bar{X},\bar{Y},\bar{S}) \in \mathcal{L}_{(F)}$。

对于任意满足秩$(\bar{Z}) \le d$的 $\bar{Z} \in \mathbb{R}^{m\times n}$，令 $U^\perp_{\bar{Z}} \in \mathbb{R}^{m\times(m-d_{\bar{Z}})}$和 $V^\perp_{\bar{Z}} \in \mathbb{R}^{n\times(n-d_{\bar{Z}})}$满足 $[U_{\bar{Z}}, U^\perp_{\bar{Z}}]$和 $[V_{\bar{Z}}, V^\perp_{\bar{Z}}]$是正交矩阵。设 $N_{\bar{Z}} := \{U^\perp_{\bar{Z}} M (V^\perp_{\bar{Z}})^{\mathbb{T}} : M \in \mathbb{R}^{(m-d_{\bar{Z}})\times(n-d_{\bar{Z}})}\}$。根据命题3中$\mathcal{B}^Z_\lambda$、$\bar{z}$的定义，我们有$\mathcal{B}^Z_\lambda$，$\bar{z} = \{Z \in \mathcal{B}^Z : \text{rank}(Z) = \text{rank}(\bar{Z})\}$ if $\lambda > 0$, and $\mathcal{B}^Z_{\lambda,\bar{z}} = \{Z \in \mathcal{B}^Z : \text{rank}(Z) \le d\}$ if $\lambda = 0$。由命题3.6] 可知，对于任意满足秩$(\bar{Z}) \le d$的 $\bar{Z} \in \mathbb{R}^{m\times n}$，

$$N_{\mathcal{B}^Z_{\lambda,\bar{z}}}(\bar{Z}) = N_{\bar{Z}} \text{ if } \lambda > 0, \text{ and } N_{\mathcal{B}^Z_{\lambda,\bar{z}}}(\bar{Z}) \subseteq N_{\bar{Z}} \text{ if } \lambda = 0. \tag{12}$$

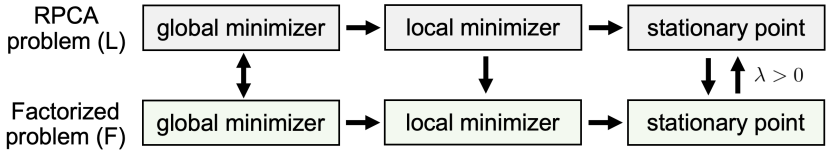

图2：问题（L）和（F）之间的关系。

接下来，考虑$(\bar{Z},\bar{S}) \in \mathcal{S}_{(L)}$。定义 $\bar{X}:=[U_{\bar{Z}}\Sigma_{\bar{Z}}^{1/2}, \mathbf{0}^{m\times(d-d_{\bar{Z}})}]$, $\bar{Y}:=[V_{\bar{Z}}\Sigma_{\bar{Z}}^{1/2}, \mathbf{0}^{n\times(d-d_{\bar{Z}})}]$。结合(12)和(5)，存在$(H_Z,H_S) \in \partial_{(Z,S)}f(\bar{Z},\bar{S})$以及 $\bar{M}\in\mathbb{R}^{(m-d_{\bar{Z}})\times(n-d_{\bar{Z}})}$，使得 $\mathbf{0}=H_Z+U_{\bar{Z}}^{\perp}\bar{M}(V_{\bar{Z}}^{\perp})^{\mathbb{T}}$和$\mathbf{0}\in H_S+N_{\mathcal{B}^S_{\mathbb{I}_{\bar{S}}}}(\bar{S})$。此外，分别在第一个方程左乘 $\bar{X}^{\mathbb{T}}$、右乘 $\bar{Y}$，得到 $H_{\bar{Z}}^{\mathbb{T}}\bar{X}=\mathbf{0}$ 和 $H_Z\bar{Y}=\mathbf{0}$。结合 $\mathcal{B}^X=\mathbb{R}^{m\times d}$, $\mathcal{B}^Y=\mathbb{R}^{n\times d}$ 和 $\mathbf{0}\in H_S+N_{\mathcal{B}^S_{\mathbb{I}_{\bar{S}}}}(S)$，得到(7)。因此，$(X,Y,S)\in\mathcal{S}_{(F)}$。

(ii) 考虑 $(\bar{X},\bar{Y},\bar{S})\in\mathcal{S}_{(F)}$ 和 $\lambda>0$。根据 $\mathcal{B}^X=\mathbb{R}^{m\times d}$, $\mathcal{B}^Y=\mathbb{R}^{n\times d}$ 和 (7)，存在一个 $(H_Z,H_S)\in\partial_{(Z,S)}f(\bar{X}\bar{Y}^{\mathbb{T}},\bar{S})$，使得 $\mathbf{0}=H_Z\bar{Y}_{\mathbb{I}_{\bar{X}}\cap\mathbb{I}_{\bar{Y}}}$, $\mathbf{0}=H_Z^{\mathbb{T}}\bar{X}_{\mathbb{I}_{\bar{X}}\cap\mathbb{I}_{\bar{Y}}}$和 $-H_S\in N_{\mathcal{B}^S_{\mathbb{I}_{\bar{S}}}}(\bar{S})$。令$\bar{Z}=\bar{X}\bar{Y}^{\mathbb{T}}$和 $\bar{d}=\mathrm{rank}(\bar{Z})$。那么，$\bar{Z}=\bar{X}_{\mathbb{I}_{\bar{X}}\cap\mathbb{I}_{\bar{Y}}}\bar{Y}_{\mathbb{I}_{\bar{X}}\cap\mathbb{I}_{\bar{Y}}}^{\mathbb{T}}$，因此 $\mathrm{rank}(\bar{X}_{\mathbb{I}_{\bar{X}}\cap\mathbb{I}_{\bar{Y}}})\geq\bar{d}$，$\mathrm{rank}(\bar{Y}_{\mathbb{I}_{\bar{X}}\cap\mathbb{I}_{\bar{Y}}})\geq\bar{d}$，$\mathrm{rank}(H_Z)\leq\min\{m,n\}-\bar{d}$, $\bar{Z}H_Z^{\mathbb{T}}=\bar{X}_{\mathbb{I}_{\bar{X}}\cap\mathbb{I}_{\bar{Y}}}(H_Z\bar{Y}_{\mathbb{I}_{\bar{X}}\cap\mathbb{I}_{\bar{Y}}})^{\mathbb{T}}=\mathbf{0}$且 $H_Z^{\mathbb{T}}\bar{Z}=(H_Z^{\mathbb{T}}\bar{X}_{\mathbb{I}_{\bar{X}}\cap\mathbb{I}_{\bar{Y}}})\bar{Y}_{\mathbb{I}_{\bar{X}}\cap\mathbb{I}_{\bar{Y}}}^{\mathbb{T}}=\mathbf{0}$。分别将 $\bar{Z}$和 H_Z的紧奇异值分解记为 $\bar{Z}=U_{\bar{Z}}\Sigma_{\bar{Z}}V_{\bar{Z}}^{\mathbb{T}}$和$H_Z=U_{H_Z}\Sigma_{H_Z}V_{H_Z}^{\mathbb{T}}$。结合$\bar{Z}H_Z^{\mathbb{T}}=\mathbf{0}$, $H_Z^{\mathbb{T}}\bar{Z}=\mathbf{0}$、$U_{\bar{Z}},V_{\bar{Z}},U_{H_Z}$, V_{H_Z}的正交性，以及 $\Sigma_{\bar{Z}},\Sigma_{H_Z}$的可逆性，可推出 $V_{\bar{Z}}^{\mathbb{T}}V_{H_Z}=\mathbf{0}$和 $U_{H_Z}^{\mathbb{T}}U_{\bar{Z}}=\mathbf{0}$。由于$\mathrm{rank}(H_Z)\leq\min\{m,n\}-\bar{d}$，$U_{H_Z}$和$V_{H_Z}$的列数不超过 $\min\{m,n\}-d$，这意味着根据 (12)，$-H_Z\in N_{\mathcal{B}^Z_\lambda,\bar{z}}(Z)$。结合$-H_S\in N_{\mathcal{B}^S_{\mathbb{I}_{\bar{S}}}}(S)$，可得 $(Z,S)\in\mathcal{S}_{(L)}$。再结合(i)的第二个结论，可得$\mathcal{S}_{(L)}=\{(XY^{\mathbb{T}},S):(X,Y,S)\in\mathcal{S}_{(F)}\}$。

□

注1. 命题*1*和定理*1*表明了问题（L）和（F）在全局极小点、局部极小点和驻点意义上的关系。这意味着关于全局极小点和驻点的双重等价性适用于带有 $\lambda>0$ 和 $\beta\geq0$的问题（L），其中包含秩正则化问题$\min_{Z:\text{秩}(Z)\leq d}\{f(Z)+\lambda\text{秩}(Z)\}$在 *[27]*中作为特例。

根据定理1（ii），不难验证：当 $\lambda>0$时，若$(X,Y,S)\in\mathcal{S}_{(FB)}$满足$(X_{\mathbb{I}_{\bar{X}}},Y_{\mathbb{I}_{\bar{Y}}})\in\mathrm{int}(\mathcal{B}^X_{\mathbb{I}_{\bar{X}}}\times\mathcal{B}^Y_{\mathbb{I}_{\bar{Y}}})$，则$(\bar{X}\bar{Y}^{\mathbb{T}},\bar{S})\in\mathcal{S}_{(L)}$。基于命题1和定理1，问题（L）与其因式分解问题（F）之间的一些关系如图2所示。

3 问题（FB）的等价连续松弛

对于一些常见的矩阵恢复问题，例如图像修复、评分表补全和协同过滤，相关优化问题的可行域通常因实际背景而有界。鉴于低秩结构有助于提高矩阵分解模型的计算效率，本节将重点讨论约束问题（FB）。我们为（FB）构建一个等价的连续非凸松弛框架，并在理论分析中视情况提及其可行域的有界性要求。在该框架下，（FB）的所有松弛问题具有相同的全局极小点和最优值。此外，我们分析这些松弛问题的最优性条件，并根据定义 2 中定义的强驻点，建立（FB）与这些松弛问题之间的等价性。

令 $\theta:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ 为任意给定的满足以下条件的函数

$$\theta(0)=0,\ \theta(t)\in[0,1],\forall t\in(0,1),\ \theta(t)=1,\forall t\in[1,+\infty). \tag{13}$$

其函数曲线图如图3所示。

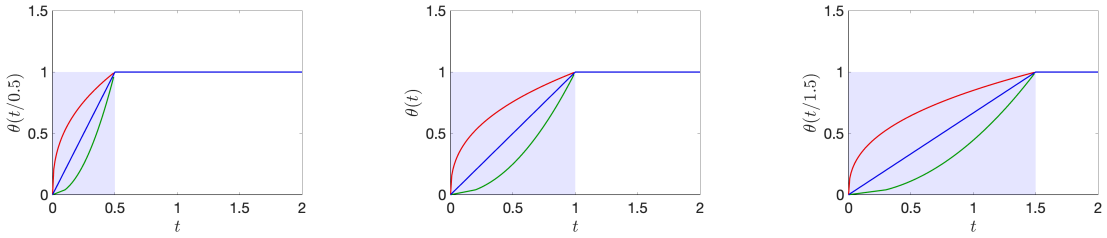

图3：满足 (13) 的 $\theta(\cdot)$ 及其缩放形式 $\theta(\cdot/0.5)$ 和 $\theta(\cdot/1.5)$ 的函数曲线图，其中红色、蓝色和绿色曲线表示当 $t \in (0,1)$ 时 θ 的三种适用替代方案。

依赖于 g　　给定函数 θ 和参数 $\rho > 0$，我们定义 Θ^ρ：$\mathbb{R}^{r\times d} \to \mathbb{R}_+$ 和 $\tilde{\Theta}^\rho$：$\mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}_+$ as

$$\Theta^\rho(V) := \sum_{i=1}^{d} \theta(\|V_i\|_2/\rho) \text{ and } \tilde{\Theta}^\rho(S) := \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \theta(|S_{ij}|/\rho). \tag{14}$$

显然，$\lim_{\rho\downarrow 0} \Theta^\rho(V) =$ 非零列数(V) $\forall V \in \mathbb{R}^{r\times d}$，且 $\lim_{\rho\downarrow 0} \tilde{\Theta}^\rho(S) = \|S\|_0$，$\forall S \in \mathbb{R}^{m\times n}$。

对于给定的函 n数 θ 和参数 r，$s > 0$，定义函数 $F^{r,}{}_{\theta}{}^{s}$：$\mathbb{R}^{m\times d} \times \mathbb{R}^{n\times d} \times \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}_+$ as

$$F_\theta^{r,s}(X,Y,S) := f(XY^{\mathbb{T}}, S) + \lambda\big(\Theta^r(X) + \Theta^r(Y)\big) + \beta\tilde{\Theta}^s(S).$$

相应地，我们考虑问题（FB）的以下松弛，

$$\min_{(X,Y,S)\in\mathcal{B}} F_\theta^{r,s}(X,Y,S). \tag{FR}$$

为突出问题 (FR) 中参数 r、s 和函数 θ 的不同取值，我们分别将其最优值和全局解集表示为 $V^{\theta:\,r,\,s}_{(FR)}$ 和 $\mathcal{G}^{\theta:r,\,s}_{(FR)}$。接下来，我们将在以下假设下证明问题 (FB) 和 (FR) 的全局极小点之间的等价性。

假设1。对于任意 $(X、Y、S) \in \mathcal{G}^{\theta:r,\,s}_{(FR)}$，均有

$$\|X_i\|_2, \|Y_i\|_2 \notin (0,r), \forall\, i \in [d] \text{ if } \lambda > 0, \text{ and } |S_{ij}| \notin (0,s), \forall\,(i,j) \in [m]\times[n] \text{ if } \beta > 0. \tag{C2}$$

命题5。若假设*1*成立，则有

$$\mathcal{G}_{(FB)} = \mathcal{G}^{\theta:r,s}_{(FR)} \text{ and } V_{(FB)} = V^{\theta:r,s}_{(FR)}.$$

证明。用符号 W 简记 $(X,\ Y,\ S)$，并定义 $\mathcal{D} := \{W \in \mathcal{B}:\ W$ 满足 $(C2)\}$。回忆一下，ϑ 定义为 (1)。由于 $\theta(t) \le \vartheta(t)\ \forall t \in \mathbb{R}_+$，我们有 $F^{r,}{}_{\theta}{}^{s}(W) \le F(W)\ \forall W \in \mathcal{B}$。结合 $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{B}$，得到

$$V^{\theta:r,s}_{(FR)} \le V_{(FB)} \le \min_{W\in\mathcal{D}} F(W). \tag{15}$$

由假设1可得 $\mathcal{G}^{\theta:r,\,s}_{(FR)} \subseteq \mathcal{D}$ 和 $F^{r,}{}_{\theta}{}^{s}(W) = F(W)\ \forall W \in \mathcal{D}$。结合 $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{B}$ 和 (15)，有

$$V^{\theta:r,s}_{(FR)} = \min_{W\in\mathcal{D}} F_\theta^{r,s}(W) = \min_{W\in\mathcal{D}} F(W) = V_{(FB)}. \tag{16}$$

于是我们推出 $\mathcal{G}^{\theta:r,s\,(FR)} = \operatorname{argmin}_{W\in\mathcal{D}} F^{r,}{}_{\theta}{}^{s}(W) = \operatorname{argmin}_{W\in\mathcal{D}} F(W) \subseteq \mathcal{G}_{(FB)}$。此外，由(16)以及$F^{r,}{}_{\theta}{}^{s}(W) \le F(W)\ \forall W \in \mathcal{B}$，我们有 $\mathcal{G}_{(FB)} \subseteq \mathcal{G}^{\theta:r,s\,(FR)}$。总之，$\mathcal{G}_{(FB)} = \mathcal{G}^{\theta:r,s\,(FR)}$。 □

不难 ¯验证若 $\theta:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ 满足假设1，则对任意 $\theta:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ 满足 g

$$\theta(t)\le\bar{\theta}(t)\le\vartheta(t),\ \forall t\in\mathbb{R}_+,\ \text{with } \vartheta \text{ defined as (1)},$$

可得 $\mathcal{G}_{(FB)}=\mathcal{G}^{\bar{\theta}:\ r,\ s\ (FR)}$ 以及 $V_{(FB)}=V^{\bar{\theta}:\ r,\ s\ (FR)}$。因此，基于一个适当的 θ，如假设1所示，我们可以为问题（FB）得到无穷多种等价松弛问题。

定义函数 $\theta_1,\ \theta_2:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ 如下：

$$\theta_1(t)=t,\forall t\in\{0,1\},\ \theta_1(t)\in(0,1),\forall t\in(0,1),\ \theta_1(t)>1,\forall t\in(1,+\infty),\tag{17}$$

以及 $\theta_2(t)=1,\ \forall t\in\mathbb{R}_+$。注意，满足（13）的松弛函数 θ 可以等价地表示为以下形式

$$\theta(t)=\min\{\theta_1(t),\theta_2(t)\}.\tag{18}$$

由此可得 $\theta(t)=\theta_1(t)\ \forall t\in[0,1]$ 以及 $\theta(t)=\theta_2(t)\ \forall t\in[1,+\infty)$。为便于后续分析，我们采用函数 θ 的表达式（18）。

接下来，我们提出一个可验证的假设，以建立问题（FB）与（FR）在全局极小点及其他最优性条件方面的等价性。

假设 2。

(i) 对任意 $k\in[d]$，当 $\lambda>0$ 时，$(i,j)\in[m]\times[n]$，$f(XY^{\mathbb{T}},S)$ 关于 X_k 和 Y_k 在 $\mathcal{B}$ 上是 *Lipschitz*连续的，其 *Lipschitz*常数分别为正数 L_X 和 L_Y；当 $\beta>0$ 时，关于 S_{ij} 在 $\mathcal{B}$ 上是 *Lipschitz*连续的，其 *Lipschitz*常数为正数 L_S。

(ii) θ_1 是定义在 $\mathbb{R}_+$ 上的局部利普希茨连续函数，并满足

$$\eta:=\min\{\eta_1\in\partial^c\theta_1(t):t\in(0,1)\}>0,\tag{19}$$

问题 *(FR)* 中的正参数 r 和 s 选取如下：

$$r<\min\left\{\tau,\lambda\eta/\max\{L_X,L_Y\}\right\}\ if\ \lambda>0,\ and\ s<\beta\eta/L_S\ if\ \beta>0.\tag{20}$$

根据 [11, 中极限次微分与 Clarke次微分之间的包含关系，命题4.3.2]，可得 $\min\{\eta_1\in\partial\theta_1(t):\ t\in(0,1)\}\ge\eta$。

注意，如果 $\mathcal{B}$ 有界，那么假设 2 (i) 中的模量 L_X、L_Y 和 L_S 存在。满足假设 2 (ii) 的函数 θ_1 可以选为 ϑ 的常见凸或非凸松弛函数，例如 ℓ_p-范数（$0<p\le1$）、平滑剪切绝对偏差和极小凹惩罚。

定理2。 假设 *2* 成立。那么，问题 *(FR)* 满足假设*1*，因此$\mathcal{G}_{(FB)}=\mathcal{G}_{(FR)}$和 $V_{(FB)}=V_{(FR)}$。此外，问题 *(FB)* 和 *(FR)* 的任意全局极小值点 (X,Y,S) 均具有性质 *(C1)* 和 *(C2)*。

证明。 首先，我们证明任意 $(X,Y,S)\in\mathcal{G}^{\theta:r,s\,(FR)}$均满足 (C2)。假设其不成立。那么存在一个不满足 (C2) 的 $(X,Y,S)\in\mathcal{G}^{\theta:r,s\,(FR)}$。因此，存在，或 $(i_X,j_S)\in[m,n]$，使得 $\|X_{i_X}\|_2\in(0,r)$、$\|Y_{i_Y}\|_2\in(0,r)$ 或 $|S_{i_Sj_S}|\in(0,s)$。

考虑第X_i种情形 $i\|X$且$\|X_i\in(0,0。r)$由假设 2和$[0,$ 定理2.3, $\tilde{X}_i]$, 可得 $\in\mathcal{B}$满足 ~

$$f(\tilde{X}Y^{\mathbb{T}},S)-f(XY^{\mathbb{T}},S)\le L_X\|X-\tilde{X}\|_F<\lambda\eta\|X-\tilde{X}\|_F/r$$
$$\le\lambda\big(\Theta^r(X)+\Theta^r(Y)\big)+\beta\tilde{\Theta}^s(S)-\lambda\big(\Theta^r(\tilde{X})+\Theta^r(Y)\big)-\beta\tilde{\Theta}^s(S).$$

这意味着 $F^{r,\ s}_{\theta}(\tilde{X},Y,S)<F^{r,\ s}_{\theta}(X,Y,S)$，这与 $(X,Y,S)\in\mathcal{G}^{\theta:r,s\,(FR)}$ 矛盾。因此，对于任意 $(X,Y,S)\in\mathcal{G}^{\theta:r,s\,(FR)}$，都有 $\|X_i\|_2\notin(0,r)\ \forall i\in[d]$。

同样地，我们可推得，当 $\lambda>0$ 时，$\|Y_i\|_2\notin(0,r)\ \forall i\in[d]$；并且对于任意 $(X,Y,S)\in\mathcal{G}^{\theta:r}$，当 $\beta>0$ 时，$|S_{ij}|\notin(0,s)\ \forall(i,j)\in[m,n]$。因此，对于任意 $(X,Y,S)\in\mathcal{G}^{\theta:r}$，(C2) 成立，$_{s\,(FR)}$。由命题5可知，$\mathcal{G}_{(FB)}=\mathcal{G}_{(FR)}$ 以及 $V_{(FB)}=V_{(FR)}$。此外，根据命题4 (i)，问题 (FB) 和 (FR) 的全局极小点 (X,Y,S) 具有性质（C1）。

□

鉴于定理2，以下结论自然成立。

推论 1. 对于问题（*FB*），若函数 f 满足假设 *2 (i)*，则其所有全局极小点均具有性质 *(C1)* 和 *(C2)*。

对于任意 $I \in [2]^d$、$J \in [2]^{m\times n}$ 和 $\rho > 0$，定义 $\Theta_I^\rho:\ \mathbb{R}^{r\times d} \to \mathbb{R}$ 以及 $\tilde{\Theta}_J^\rho:\ \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$，使得对于任意 $V \in \mathbb{R}^{r\times d}$ 和 $S \in \mathbb{R}^{m\times n}$,

$$\Theta_I^\rho(V) := \sum_{i=1}^{d} \theta_{I_i}(\|V_i\|_2/\rho) \text{ and } \tilde{\Theta}_J^\rho(S) := \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \theta_{J_{ij}}(|S_{ij}|/\rho). \tag{21}$$

对于任意 $V \in \mathbb{R}^{r\times d}$、$S \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 和 $\rho > 0$，定义 $I^{\rho,V} \in [2]^d$ 和 $J^{\rho,S} \in [2]^{m\times n}$ 如下。对于任意 $i \in [\ d]$,

$$I_i^{\rho,V} := \max\{j \in [2] : \theta_j(\|V_i\|_2/\rho) = \theta(\|V_i\|_2/\rho)\} \text{ if } \lambda > 0, \tag{22}$$

以及 $I^{\rho}_{\cdot i}{}^{V} :=2$，否则。对于任意 $(i,j) \in [m,n]$,

$$J_{ij}^{\rho,S} := \max\{l \in [2] : \theta_l(|S_{ij}|/\rho) = \theta(|S_{ij}|/\rho)\} \text{ if } \beta > 0, \tag{23}$$

以及 $J^{\rho}_{\cdot ij}{}^{S} :=2$，否则。

接下来，我们证明在假设 2 下，问题 (FR) 的一阶最优性条件可以导出性质 (C2)。

命题 6. 在假设 *2* 下，下列陈述对问题 *(FR)* 成立。

(i) If $(\bar{X},\bar{Y},\bar{S}) \in \mathcal{L}_{(FR)}$, *then*

$$\begin{aligned} \exists\ \ & (H_Z,H_S) \in \partial_{(Z,S)} f(\bar{X}\bar{Y}^{\mathbb{T}},\bar{S}),\\ \text{s.t. } & \mathbf{0} \in H_Z\bar{Y} + \lambda\partial_X \Theta^r_{I^{r,\bar{X}}}(\bar{X}) + N_{\mathcal{B}^X}(\bar{X}),\\ & \mathbf{0} \in H_Z^{\mathbb{T}}\bar{X} + \lambda\partial_Y \Theta^r_{I^{r,\bar{Y}}}(\bar{Y}) + N_{\mathcal{B}^Y}(\bar{Y}),\\ & \mathbf{0} \in H_S + \beta\partial_S \tilde{\Theta}^s_{J^{s,\bar{S}}}(\bar{S}) + N_{\mathcal{B}^S}(\bar{S}), \end{aligned} \tag{24}$$

其中 $I^{r,\bar{X}}, I^{r,\bar{Y}}$和 $J^{s,\bar{S}}$是 *(22)* 和 *(23)* 中所定义的固定索引向量。

(ii) 任意满足 *(24)* 的点 $(X,Y,S) \in \mathcal{B}$ 具有性质 *(C2)*。

证明. (i) 设 $(X,Y,S) \in \mathcal{L}_{(FR)}$。则存在 $\delta > 0$，使得对任意 $(X,Y,S) \in B_\delta(X,Y,S) \cap \mathcal{B}, F^r_{,\theta}{}^{s}(\bar{X},\bar{Y},\bar{S}) \le F^r_{,\theta}{}^{s}(X,Y,S)$。定义 $\Theta(X,Y,S) := \lambda\big(\Theta^r_{I^{r,\bar{X}}}(X) + \Theta^r_{I^{r,\bar{Y}}}(Y)\big) + \beta\tilde{\Theta}^s_{I^{s,\bar{S}}}(S)\ \forall (X,Y,S) \in \mathcal{B}$。结合 (18)、(22) 和 (23) 中 $\theta, I^{\rho,V}$和 $J^{\rho,S}$的定义，我们有 $f(\bar{X}\bar{Y}^{\mathbb{T}},\bar{S}) + \Theta(\bar{X},\bar{Y},\bar{S}) = F^r_{,\theta}{}^{s}(\bar{X},\bar{Y},\bar{S}) \le F^r_{,\theta}{}^{s}(X,Y,S) \le f(XY^{\mathbb{T}},S) + \Theta(X,Y,S)\ \forall (X,Y,S) \in B_\delta(\bar{X},\bar{Y},\bar{S}) \cap \mathcal{B}$。于是，$(\bar{X},\bar{Y},\bar{S})$ 是 $f(XY^{\mathbb{T}},S) + \Theta(X,Y,S)$ 在 $\mathcal{B}$ 上的局部极小点。由 [33, 定理 6.23] 和 [35, 命题 10.5、习题 10.10], , 根据一阶最优性条件可得 (24) 成立。

(ii) 设 (X,Y,S) 满足 (24)。考虑 $\lambda > 0$，且存在一个 $i_0 \in [d]$，使得 $\|X_{i_0}\|_2 \in (0,r)$。则 $I^r_{i_0,\bar{X}} = 1$。由于假设 2 (ii) 中的 $r < \tau$，我们得到 $N_{\mathcal{B}^X_{i_0}}(\bar{X}_{i_0}) = \{\mathbf{0}\}$。结合假设 2 (i)，我们得到 $|\gamma| > L_X \ge \|H_Z\bar{Y}_{i_0}\|_2, \forall (H_Z,H_S) \in \partial_{(Z,S)} f(\bar{X}\bar{Y}^{\mathbb{T}},\bar{S})$ 对任意 $\gamma \in \lambda\partial_{X_{i_0}}\Theta^r_{I^{r,\bar{X}}}(X) + N_{\mathcal{B}^X_{i_0}}(X_{i_0})$ 成立。由此可得 (24) 不成立，因而 $\|X_i\|_2 \notin (0,r)\ \forall i \in [d]$。类似地，$\|Y_i\|_2 \notin (0,r)\ \forall i \in [d]$ 在 $\lambda > 0$ 时成立，且 $|S_{ij}| \notin (0,s)\ \forall (i,j) \in [m,n]$ 在 $\beta > 0$ 时成立。因此，我们得到 (C2)，其中 (X,Y,S) 被替换为 (X,Y,S)。 □

鉴于命题4和命题 6，我们为问题(FB)和(FR)定义两类驻点。它们将全局极小点的性质融入(FB)和(FR)的一阶最优性条件中。

定义 2。

(i) 对于任意三元组$(X,Y,S)\in\mathbb{R}^{m\times d}\times\mathbb{R}^{n\times d}\times\mathbb{R}^{m\times n}$，性质*(C1)*和*(C2)*分别称为一致性和隔离性。

(ii) (X,Y,S) 称为 *(FR)* 的驻点，若其满足 *(24)*。

(iii) (X,Y,S) 称为 *(FB)* 或 *(FR)* 的强驻点，若其是 *(FB)* 或 *(FR)* 的驻点，并具有一致性和孤立性。

(FB) 和 *(FR)* 的所有强驻点集合分别记为 $\mathcal{S}^s_{(FB)}$ 和 $\mathcal{S}^s_{(FR)}$。

根据 [27, 命题 1], ，上述定义的驻点分别对应于 (FB) 和 (FR) 在 f 光滑时通常定义的极限临界点。因此，当 f 光滑时，强驻点比 (FB) 和 (FR) 的极限临界点满足更强的最优性条件。此外，我们还将证明 (FB) 和 (FR) 的强驻点与全局极小点之间的关系。

定理3。 在假设 *2* 下，有

$$\mathcal{G}_{(FR)}=\mathcal{G}_{(FB)}\subseteq\mathcal{S}^s_{(FB)}=\mathcal{S}^s_{(FR)}.$$

证明。 由定理2可知 $\mathcal{G}_{(FR)}=\mathcal{G}_{(FB)}$。此外，根据命题4、命题 6 和定理2，可得 $\mathcal{G}_{(FB)}\subseteq\mathcal{S}^s_{(FB)}$ 以及 $\mathcal{G}_{(FR)}\subseteq\mathcal{S}^s_{(FR)}$。

接下来，只需证明 $\mathcal{S}^s_{(FB)}=\mathcal{S}^s_{(FR}$)。

假设 $(X,Y,S)\in\mathcal{S}^s_{(FR)}$。由 (C2) 可知 $I^r{}_{,i}{}^X=2,\forall i\in\mathbb{I}_X$, $I^r{}_{,i}{}^Y=2,\forall i\in\mathbb{I}_Y$以及 $J^s{}_{ij}{}^S=2,\forall(i,j)\in\mathbb{J}_S$，因此

$$[\partial_X\Theta^r_{I^{r,X}}(X)]_{\mathbb{I}_X}=\{\mathbf{0}\},\ [\partial_Y\Theta^r_{I^{r,Y}}(Y)]_{\mathbb{I}_Y}=\{\mathbf{0}\},\ [\partial_S\tilde{\Theta}^s_{J^{s,S}}(S)]_{\mathbb{J}_S}=\{\mathbf{0}\}. \tag{25}$$

结合 (24)，可得存在一个 $(H_Z,H_S)\in\partial_{(Z,S)}f(XY^{\mathbb{T}},S)$，使得 (7) 成立。将其与 (C1) 和 (C2) 结合，可得 $(X,Y,S)\in\mathcal{S}^s_{(FB)}$。

反之，设 $(X,Y,S)\in\mathcal{S}^s_{(FB)}$。由 (C2)，可推出 (25) 成立。此外，根据 (7)，可知存在 $(H_Z,H_S)\in\partial_{(Z,S)}f(XY^{\mathbb{T}},S)$，使得 $\mathbf{0}\in\left[H_ZY+\lambda\partial_X\Theta^r_{I^{r,X}}(X)+N_{\mathcal{B}^X}(X)\right]_{\mathbb{I}_X}$,$\mathbf{0}\in\left[H_Z^{\mathbb{T}}X+\lambda\partial_Y\Theta^r_{I^{r,Y}}(Y)+N_{\mathcal{B}^Y}(Y)\right]_{\mathbb{I}_Y}$且 $\mathbf{0}\in\left[H_S+\beta\partial_S\tilde{\Theta}^s_{J^{s,S}}(S)+N_{\mathcal{B}^S}(S)\right]_{\mathbb{J}_S}$。鉴于假设 2 以及 $\mathbf{0}\in N_{\mathcal{B}^X_{\mathbb{I}^c_X}}(X_{\mathbb{I}^c_X})=[N_{\mathcal{B}^X}(X)]_{\mathbb{I}^c_X}$，可得 $\mathbf{0}\in\left[H_ZY+\lambda\partial_X\Theta^r_{I^{r,X}}(X)+N_{\mathcal{B}^X}(X)\right]_{\mathbb{I}^c_X}$。类似地，$\mathbf{0}\in\left[H_Z^{\mathbb{T}}X+\lambda\partial_Y\Theta^r_{I^{r,Y}}(Y)+N_{\mathcal{B}^Y}(Y)\right]_{\mathbb{I}^c_Y}$且 $\mathbf{0}\in\left[H_S+\beta\partial_S\tilde{\Theta}^s_{J^{s,S}}(S)+N_{\mathcal{B}^S}(S)\right]_{\mathbb{J}^c_S}$ 成立。结合 (21) 中的定义、$\mathcal{B}^X$ 和 $\mathcal{B}^Y$ 的列可分性，以及 $\mathcal{B}^S$ 的元素可分性，可得 (24)，进而由 (C1) 和 (C2) 得到 $(X,Y,S)\in\mathcal{S}^s_{(FR)}$。

□

注2. 与利用 *[5],* 数学规划中的均衡约束密度函数以及 *[28]* 和 *[31]*中的凹函数为 ℓ_0-范数相关问题构造松弛问题不同，我们仅利用次微分信息的下界来刻画松弛函数，从而在全局极小点和强驻点的意义下建立原问题与松弛问题之间的等价性。

根据命题4、定理2、命题 6 和定理3，问题 (FB) 和 (FR) 之间的一些关系如图4所示。

4 联合交替近端梯度算法

本节中，我们提出一种新颖的基于近端梯度的算法，用于求解一般因子分解问题（GF）。在本节中，我们始终假设 $\inf_{X,\ Y,\ S}G(X,\ Y,\ S)>-\infty$。问题 (FB) 和 (FR) 是问题（GF）的特例。我们分析所设计算法收敛到问题（GF）的极限临界点的性质。此外，我们证明所设计的算法能够找到

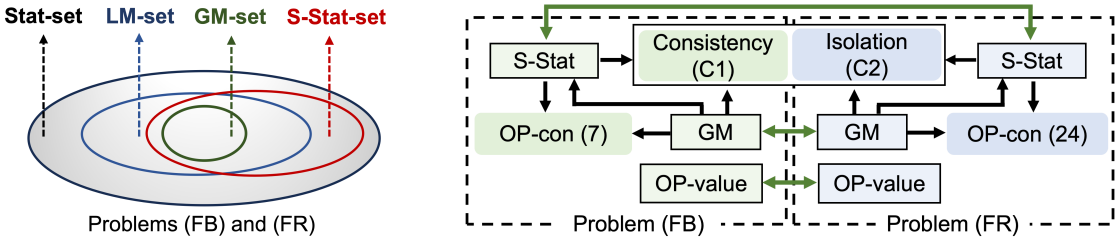

图4：问题 (FB) 和 (FR) 的最优性条件关系图，其中“全局/局部极小点集”表示“全局/局部极小点的集合”，“（强）驻点集”表示“（强）驻点的集合”，而“全局极小点”“最优值”“最优条件”和“强驻点”分别表示“全局极小值点”“最优值”“最优性条件”和“强驻点”。

秩和 ℓ_0 正则化问题（L）的驻点。结合第3节中的等价松弛理论，我们改进该算法，证明它也能收敛到问题 (FB) 和 (FR) 的强驻点。

4.1 一般因子分解情形

本部分针对一般因子分解问题 (GF) 提出联合交替近端梯度（JA-PG）算法，分析其在一般情形以及问题 (L)、(FB) 和 (FR) 等特定情形下的收敛结果。与现有针对基于块的结构统一执行交替近端计算的常用算法不同，我们在所设计的算法中同时处理因子化矩阵变量 X 和Y，并与非因子化变量 S 交替进行近端计算。此外，与现有的基于交替近端梯度的算法相比，本部分的分析在关于 $f(XY^{\mathbb{T}},\ S)$ 的较弱假设下进行，即 $\nabla f(XY^{\mathbb{T}},\ S)$ 分别关于 $(X,\ Y)$ 和 S 局部利普希茨连续。

对于 JA-PG 算法，给定 $\bar{X}\in\mathbb{R}^{m\times d}$、$\bar{Y}\in\mathbb{R}^{n\times d}$、$\bar{S}\in\mathbb{R}^{m\times n}$、$\iota$、$\iota_1$、$\iota_2>0$ 以及任意的 $X\in\mathbb{R}^{m\times d}$、$Y\in\mathbb{R}^{n\times d}$、$S\in\mathbb{R}^{m\times n}$，定义

$$
\begin{aligned}
f_J(X,Y;\bar{S}) &:= f(XY^{\mathbb{T}},\bar{S})+\lambda\big(u(X)+v(Y)\big),\\
f_A(S;\bar{X},\bar{Y}) &:= f(\bar{X}\bar{Y}^{\mathbb{T}},S)+\beta w(S),\\
\omega_A(S;\bar{X},\bar{Y},\bar{S},\iota) &:= \beta w(S)+\langle\nabla_S f(\bar{X}\bar{Y}^{\mathbb{T}},\bar{S}),S-\bar{S}\rangle+\frac{\iota}{2}\|S-\bar{S}\|_F^2,\\
\omega_J(X,Y;\bar{X},\bar{Y},\bar{S},\iota_1,\iota_2) &:= \lambda\big(u(X)+v(Y)\big)+\langle\nabla_Z f(\bar{X}\bar{Y}^{\mathbb{T}},\bar{S})\bar{Y},X-\bar{X}\rangle\\
&\quad+\langle\nabla_Z f(\bar{X}\bar{Y}^{\mathbb{T}},\bar{S})^{\mathbb{T}}\bar{X},Y-\bar{Y}\rangle+\frac{\iota_1}{2}\|X-\bar{X}\|_F^2+\frac{\iota_2}{2}\|Y-\bar{Y}\|_F^2.
\end{aligned}
$$

算法 1（JA-PG 算法）：问题 (GF) 的联合交替近端梯度算法**初始化：**选择 $(X^0、Y^0、S^0)\in\mathrm{dom}(G)$、$0<\iota\le\iota_、0<c_{\min}\le c_{\max}$ 和 $\varrho>1$。令 $\{\iota_{1,k}^B\}$、$\{\iota_{2,k}^B\}$、$\{\iota_k^B\}\subseteq[\iota,\iota]$ 和 $\{c_{1,k}\}$、$\{c_{2,k}\}\subseteq[c_{\min},c_{\max}]$。设置 $k=0$。**步骤 1：**通过 JA-J 子程序计算 $(X^{k+1}、Y^{k+1})$，并转到步骤 2。**步骤 2：**通过 JA-A 子程序计算 S^{k+1}，并转到步骤 3。**步骤 3：**更新 $k\leftarrow k+1$，并返回步骤 1。

注 3. 下面展示 *JA-PG* 算法中子问题 *(26)* 和 *(27)* 的计算过程。对于任意 $i\in[d]$,

算法 hm 2 (JA-J 子程序)：在 JA-PG 算法的步骤 1 中计算 (X^{k+1}, Y^{k+1})

对于 $l = 1, 2, \ldots,$ 执行以下步骤（1a）令 $\iota_{1,k} = \iota_1^{\mathcal{B}}{}_{,k}\varrho^{l-1}$ 和 $\iota_{2,k} = \iota_2^{\mathcal{B}}{}_{,k}\varrho^{l-1}$；（1b）通过 $(X^{k+1}(\iota_{1,k})\ Y^{k+1}(\iota_{2,k})) \in \operatorname{argmin}_{(X,Y)}\ \omega_J(X, Y;\ X^k, Y^k, S^k, \iota_{1,k}, \iota_{2,k})$ 计算 $(X^{k+1}(\iota_{1,k})\ Y^{k+1}(\iota_{2,k}))$；

(26)

（1c）如果 $(X^{k+1}(\iota_{1,k})\ Y^{k+1}(\iota_{2,k}))$ 满足

$$f_J(X^{k+1}(\iota_{1,k}), Y^{k+1}(\iota_{2,k}); S^k) \le f_J(X^k, Y^k; S^k) - \frac{c_{1,k}}{2}\|(X^{k+1}(\iota_{1,k}), Y^{k+1}(\iota_{2,k})) - (X^k, Y^k)\|_F^2,$$

输出 $(X^{k+1}, Y^{k+1}) = (X^{k+1}(\iota_{1,k})\ Y^{k+1}(\iota_{2,k}))$，并设置 $(\bar{\iota}_{1,k}, \bar{\iota}_{2,k}) = (\iota_{1,k}, \iota_{2,k})$。

算法 3（JA-A 子程序）：计算 JA-PG 算法第 2 步中的 S^{k+1}

对于 $l = 1$、2、.....，执行

(2a) 令 $\iota_k = \iota_k^{\mathcal{B}}\varrho^{l-1}$；(2b)

通过以下方式计算 $S^{k+1}(\iota_k)$:

$$S^{k+1}(\iota_k) \in \operatorname{argmin}_S \omega_A(S; X^{k+1}, Y^{k+1}, S^k, \iota_k); \tag{27}$$

(2c) 如果 $S^{k+1}(\iota_k)$ 满足

$$f_A(S^{k+1}(\iota_k); X^{k+1}, Y^{k+1}) \le f_A(S^k; X^{k+1}, Y^{k+1}) - \frac{c_{2,k}}{2}\|S^{k+1}(\iota_k) - S^k\|_F^2,$$

输出 $S^{k+1} = S^{k+1}(\iota_k)$ 并设置 $\bar{\iota}_k = \iota_k$。

(i) $X^{k+1}(\iota_{1,k})_i =$ 近端算子 $_{\iota_1^{\lambda}{}_{,k}}{}^{u}(Q_i^{k+1})$，其中 $Q^{k+1} = X^k - \nabla_Z f(X^k Y^{k\mathbb{T}}, S^k)Y^k/\iota_{1,k}$；*(ii)* $Y^{k+1}(\iota_{2,k})_i =$ 近端算子 $_{\iota_2^{\lambda}{}_{,k}}{}^{v}(\bar{Q}_i^{k+1})$，其中 $\bar{Q}^{k+1} = Y^k - \nabla_Z f(X^k Y^{k\mathbb{T}}, S^k)^{\mathbb{T}} X^k/\iota_{2,k}$。此外，对于任意 $(i, j) \in [m]\times[n]$，$S^{k+1}(\iota_k)_{ij} =$ 近端算子 $_{\iota_k^{\beta}{}^{w}}(\tilde{Q}_{ij}^{k+1})$，其中 $\tilde{Q}^{k+1} = S^k - \nabla_S f(X^{k+1}Y^{k+1\mathbb{T}}, S^k)/\iota_k$。

—

首先，我们给出 JA-PG 算法的一些基本性质。

命题 7. 设 $\{(X^k, Y^k, S^k)\}$ 为 *JA-PG* 算法针对问题 *(GF)* 生成的序列。下列结论成立。

(i) 针对问题 *(GF)* 的 *JA-PG* 算法是良定义的。

(ii) $\lim_{k\to\infty} G(X^k, Y^k, S^k)$ 存在，且

$$\lim_{k\to\infty} \|(X^{k+1}, Y^{k+1}, S^{k+1}) - (X^k, Y^k, S^k)\|_F = 0. \tag{28}$$

(iii) 设 $\mathcal{N} \in \mathcal{N}_\infty^\sharp$ 与 $W^k := (X^k, Y^k, S^k)\ \forall k$。若 $\{W^k : k \in \mathcal{N}\}$ 有界，则存在 $\nabla_{(X,Y,S)} f(XY^{\mathbb{T}}, S)$ 在 $\{W^k, W^{k+1} : k \in \mathcal{N}\}$ 的凸包上的利普希茨常数 L_f，使得

$$\bar{\iota}_{1,k}, \bar{\iota}_{2,k} \le \max\left\{\underline{\iota}, \varrho(c_{1,k} + L_f)\right\},\ \bar{\iota}_k \le \max\left\{\underline{\iota}, \varrho(c_{2,k} + L_f)\right\},\ \forall k \in \mathcal{N}, \tag{29}$$

在 *JA-J* 与 *JA-A* 子程序中成立，从而 $\{\bar{\iota}_{1,k}, \bar{\iota}_{2,k}, \bar{\iota}_k : k \in \mathcal{N}\}$ 具有与 k无关的上界。

证明。(i) 由于 u, v 和 w 由仿射函数下界有界，我们推得 $\lim_{\iota_{1,k}\to+\infty} X^{k+1}(\iota_{1,k}) = X^k$, $\lim_{\iota_{2,k}\to+\infty} Y^{k+1}(\iota_{2,k}) = Y^k$, $\lim_{\iota_k\to+\infty} S^{k+1}(\iota_k) = S^k$。令 $\varepsilon > 0$ 为任意给定值。则存在

$\underline{\iota}_{1,k}, \underline{\iota}_{2,k} \geq 0$，使得对于任意 $\iota_1, \iota_2 \geq \iota_{1,k}$ 以及 $\iota \geq \iota_{2,k}$, $X^{k+1}(\iota_1) \in B_\varepsilon(X^k)$ $Y^{k+1}(\iota_2) \in B_\varepsilon(Y^k)$ $S^{k+1}(\iota) \in B_\varepsilon(S^k)$。由于 ∇f 是局部利普希茨连续的，我们推得存在 $\nabla_{(X,Y)} f(XY^\mathbb{T}, S)$ 在 $B_\varepsilon(X^k) \times B_\varepsilon(Y^k)$ 上的利普希茨常数 $L_{1,k}$ 和 $L_{2,k}$，以及 $B_\varepsilon(S^k)$ 上的 $\nabla_S f(XY^\mathbb{T}, S)$，分别。

接下来，令 $\iota_{1,k}$，$\iota_{2,k} \geq \max\{\iota_{1,k}, c_{1,k} + L_{1,k}\}$。与 [6, 引理 2], 类似，我们有

$$\begin{aligned} f_J(X^k, Y^k; S^k) \geq\ & f_J(X^{k+1}(\iota_{1,k}), Y^{k+1}(\iota_{2,k}); S^k) \\ & + \frac{c_{1,k}}{2} \|(X^{k+1}(\iota_{1,k}), Y^{k+1}(\iota_{2,k})) - (X^k, Y^k)\|_F^2, \forall k. \end{aligned} \tag{30}$$

类似地，令 $\iota_k \geq \max\{\underline{\iota}_{2,k}, c_{2,k} + L_{2,k}\}$，我们可推得

$$f_A(S^k; X^{k+1}, Y^{k+1}) \geq f_A(S^{k+1}(\iota_k); X^{k+1}, Y^{k+1}) + \frac{c_{2,k}}{2} \|S^{k+1}(\iota_k) - S^k\|_F^2, \forall k. \tag{31}$$

由此可得 (1c) 和 (2c) 成立，因此该结论成立。

(ii) 结合 (30) 和 (31)，我们有

$$\begin{aligned} & G(X^k, Y^k, S^k) - G(X^{k+1}, Y^{k+1}, S^{k+1}) \\ =\ & f_J(X^k, Y^k; S^k) - f_J(X^{k+1}, Y^{k+1}; S^k) \\ & + f_A(S^k; X^{k+1}, Y^{k+1}) - f_A(S^{k+1}; X^{k+1}, Y^{k+1}) \\ \geq\ & \frac{c_{\min}}{2} \|(X^{k+1}, Y^{k+1}, S^{k+1}) - (X^k, Y^k, S^k)\|_F^2, \forall k. \end{aligned} \tag{32}$$

这意味着 $G(X^k, Y^k, S^k)$ 关于 k 单调不增。由于 G 有下界，$\lim_{k\to\infty} G(X^k, Y^k, S^k)$ 存在。此外，由 (32) 和 $c_{\min} > 0$，我们可推知 (28) 成立。

(iii) 令 $W^k := (X^k, Y^k, S^k)$ $\forall k$。注意到 $\{W^k\colon k \in \mathcal{N}\}$ 有界。由 (28)，我们可推得 $\{W^{k+1}\colon k \in \mathcal{N}\}$ 也有界。记 $\{W^k, W^{k+1}\colon k \in \mathcal{N}\}$ 的凸包为 $\mathcal{C}$。于是，$\mathcal{C}$ 有界。根据 ∇f 的局部利普希茨连续性，存在 $\nabla_{(X,Y,S)} f(XY^\mathbb{T}, S)$ 在 $\mathcal{C}$ 上的利普希茨常数 L_f。与 (i) 的证明类似，我们可推得对于任意 $k \in \mathcal{N}$，$\iota_{1,k} = \iota_{2,k} = 0$ 以及 $L_{1,k} = L_{2,k} = L_f$。结合 (30)、(31)、$\iota_1^B, \iota_2^B, \iota_k^B \in [\underline{\iota}, \bar{\iota}]$ 和 $\varrho > 1$，可得 (29)。再结合 $c_{1,k}, c_{2,k} \leq c_{\max}$，可得 $\{\bar{\iota}_{1,k}, \bar{\iota}_{2,k}, \bar{\iota}_k\colon k \in \mathcal{N}\}$ 的有界性。 □

下面，我们证明 JA-PG 算法关于 (GF) 的收敛性。

定理4. 设 $\{(X^k, Y^k, S^k)\}$ 为 *JA-PG* 算法针对问题 *(GF)* 生成的序列。则 $\{(X^k, Y^k, S^k)\}$ 的任意聚点 (X^*, Y^*, S^*) 是问题 *(GF)* 的极限临界点，即 $\mathbf{0} \in \partial G(X^*, Y^*, S^*)$。

证明. 设 (X^*, Y^*, S^*) 为 $\{(X^k, Y^k, S^k)\}$ 的一个聚点。则存在一个子序列 $\{k_l\}$，使得

$$\lim_{k_l \to \infty} (X^{k_l}, Y^{k_l}, S^{k_l}) = (X^*, Y^*, S^*). \tag{33}$$

由 (28)，我们可推得 $\lim_{k_l\to\infty} (X^{k_l-1}, Y^{k_l-1}, S^{k_l-1}) = (X^*, Y^*, S^*)$。因此，$\{(X^{k_l}, Y^{k_l}, S^{k_l}), (X^{k_l-1}, Y^{k_l-1}, S^{k_l-1})\}$ 是有界的。由命题 7(ii) 及 (33)，

$$\lim_{k_l \to \infty} G(X^{k_l}, Y^{k_l}, S^{k_l}) = G(X^*, Y^*, S^*). \tag{34}$$

根据带有 $\iota_{i,k_l} = \bar{\iota}_{i,k_l}, i \in [2]$ 和 $\iota_{k_l} = \bar{\iota}_{k_l}$ 的式（26）和（27）的最优性条件，可知存在 $\xi^{k_l} \in \partial_{(X,Y)} \lambda(u(X^{k_l}) + v(Y^{k_l}))$ 和 $\zeta^{k_l} \in \partial_S \beta w(S^{k_l})$，使得

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \eta^{k_l-1} + \xi^{k_l} + \big(\bar{\iota}_{1,k_l-1}(X^{k_l} - X^{k_l-1}), \bar{\iota}_{2,k_l-1}(Y^{k_l} - Y^{k_l-1})\big), \\ \mathbf{0} &= \nabla_S f(X^{k_l} {Y^{k_l}}^\mathbb{T}, S^{k_l-1}) + \zeta^{k_l} + \bar{\iota}_{k_l-1}(S^{k_l} - S^{k_l-1}), \end{aligned}$$

其中 $\eta^t := (\nabla_Z f(X^t Y^{t\mathbb{T}}, S^t) Y^t, \nabla_Z f(X^t Y^{t\mathbb{T}}, S^t)^{\mathbb{T}} X^t)\ \forall t \in \mathbb{N}$。结合 $\eta^{k_l} + \xi^{k_l} \in \partial_{(X,Y)} G(X^{k_l}, Y^{k_l}, S^{k_l})$、$\nabla_S f(X^{k_l} Y^{k_l\mathbb{T}}, S^{k_l}) + \zeta^{k_l} \in \partial_S G(X^{k_l}, Y^{k_l}, S^{k_l})$ 以及 [6, 命题 1], , 我们得到

$$(\kappa_1^{k_l}, \kappa_2^{k_l}) \in \partial_{(X,Y)} G(X^{k_l}, Y^{k_l}, S^{k_l}) \times \partial_S G(X^{k_l}, Y^{k_l}, S^{k_l}) = \partial G(X^{k_l}, Y^{k_l}, S^{k_l}), \tag{35}$$

其中 $\kappa_1^{k_l} := \eta^{k_l} - \eta^{k_l - 1} + \big(\bar{\iota}_{1, k_l - 1}(X^{k_l - 1} - X^{k_l})\, \bar{\iota}_{2, k_l - 1}(Y^{k_l - 1} - Y^{k_l})\big)$ 且 $\kappa_2^{k_l} := \nabla_S f(X^{k_l} Y^{k_l\mathbb{T}}, S^{k_l}) - \nabla_S f(X^{k_l} Y^{k_l\mathbb{T}}, S^{k_l - 1}) + \bar{\iota}_{k_l - 1}(S^{k_l - 1} - S^{k_l})$。根据 ∇f 的局部利普希茨连续性、$\{(X^{k_l}, Y^{k_l}, S^{k_l})$、$(X^{k_l - 1}, Y^{k_l - 1}, S^{k_l - 1})\}$ 的有界性以及命题 7 (iii)，存在一个 $L \geq 0$，使得 $\|(\kappa_1^{k_l}, \kappa_2^{k_l})\|_F \leq L \|(X^{k_l}, Y^{k_l}, S^{k_l}) - (X^{k_l - 1}, Y^{k_l - 1}, S^{k_l - 1})\|_F$。结合 (28) 可得

$$\lim_{k_l \to \infty} (\kappa_1^{k_l}, \kappa_2^{k_l}) = \mathbf{0}. \tag{36}$$

结合 (33)、(34)、(35) 和 (36)，由 ∂G 在 $[6, 注\ 1\ (ii)]$, 中的闭性可知$\mathbf{0} \in \partial G(X^*, Y^*, S^*)$。

□

鉴于定理4、定义 2 以及 $[35, 命题\ 10.5]$, , 下述结论对松弛问题 (FR) 自然成立。

推论 2. 设 $\{(X^k, Y^k, S^k)\}$ 为 *JA-PG* 算法针对问题 *(FR)* 生成的序列。则 $\{(X^k, Y^k, S^k)\}$ 的任一聚点都是问题 *(FR)* 的驻点。

对于秩与 ℓ_0 正则化问题（L）以及因式分解问题（FB），我们有如下 JA-PG 算法的收敛结果。

推论 3. 设 $\{(X^k, Y^k, S^k)\}$ 为 *JA-PG* 算法针对问题（*FB*）生成的序列。则 $\{(X^k, Y^k, S^k)\}$ 的任一聚点都是问题（*FB*）的驻点。此外，当问题（*FB*）中 $\lambda > 0$ 与$\tau = +\infty$ 时，$\{(X^k, Y^k, S^k)\}$ 的任一聚点都是问题（*L*）的驻点。

证明。设 (X^*, Y^*, S^*) 是 (X^k, Y^k, S^k) 的聚点。记 $\Gamma := \mathbb{R}^{m\times d} \times \mathbb{R}^{n\times d} \times \mathbb{R}^{m\times n}$。定义$h : \Gamma \to \mathbb{R}$，其中 $h(X, Y, S) = \lambda\big(非零列数(X) + 非零列数(Y)\big) + \beta\|S\|_0 + \delta_{\mathcal{B}}(X, Y, S)\ \forall (X, Y, S) \in \Gamma$。与对命题 1], 的证明 [27, 类似, 我们可推得 $\partial h(X, Y, S) = N_{\mathcal{B}_{\bar{I}_X}^X}(X) \times N_{\mathcal{B}_{\bar{I}_Y}^Y}(Y) \times N_{\mathcal{B}_{\bar{J}_S}^S}(S)\ \forall (X, Y, S) \in \Gamma$。结合 f 的连续可微性和定理4，可知 (X^*, Y^*, S^*) 是问题（FB）的驻点。此外，当问题（FB）中 $\lambda > 0$ 和 $\tau = +\infty$ 时，根据定义1和定理1（ii），可知 $(X^* Y^{*\mathbb{T}}, S^*)$ 是问题（L）的驻点。

□

4.2 特定矩阵分解情形

本节提出一种自适应 JA-PG 算法，称为 AJA-PG，旨在求解松弛问题 (FR)，并分析其收敛至问题 (FB) 和 (FR) 的强驻点的性质。其主要改进在于，根据前一次迭代生成的迭代点更新待求解的子问题，并自动降低与矩阵分解对应的子问题的维度。

在 AJA-PG 算法中，对于给定的 $\bar{X} \in \mathbb{R}^{m\times d}, \bar{Y} \in \mathbb{R}^{n\times d}, \bar{S} \in \mathbb{R}^{m\times n}, \iota, \iota_1, \iota_2,\ \rho > 0, I \in [2]^{m\times n}, I^1, I^2 \in [2]^d$ 以及任意 $X \in \mathbb{R}^{m\times d}, Y \in \mathbb{R}^{n\times d}, S \in \mathbb{R}^{m\times n}$，定义

$$\begin{aligned}
&f_J^\rho(X, Y; \bar{S}) := f(XY^{\mathbb{T}}, \bar{S}) + \lambda\big(\Theta^\rho(X) + \Theta^\rho(Y)\big),\\
&f_A^\rho(S; \bar{X}, \bar{Y}) := f(\bar{X}\bar{Y}^{\mathbb{T}}, S) + \beta\tilde{\Theta}^\rho(S),\\
&\omega_A^{\rho, I}(S; \bar{X}, \bar{Y}, \bar{S}, \iota) := \beta\tilde{\Theta}_I^\rho(S) + \langle \nabla_S f(\bar{X}\bar{Y}^{\mathbb{T}}, \bar{S}), S - \bar{S}\rangle + \frac{\iota}{2}\|S - \bar{S}\|_F^2 + \delta_{\mathcal{B}^S}(S),\\
&\omega_J^{\rho, I^1, I^2}(X, Y; \bar{X}, \bar{Y}, \bar{S}, \iota_1, \iota_2) := \lambda\big(\Theta_{I^1}^\rho(X) + \Theta_{I^2}^\rho(Y)\big) + \langle \nabla_Z f(\bar{X}\bar{Y}^{\mathbb{T}}, \bar{S})\bar{Y}, X - \bar{X}\rangle\\
&\quad + \langle \nabla_Z f(\bar{X}\bar{Y}^{\mathbb{T}}, \bar{S})^{\mathbb{T}}\bar{X}, Y - \bar{Y}\rangle + \frac{\iota_1}{2}\|X - \bar{X}\|_F^2 + \frac{\iota_2}{2}\|Y - \bar{Y}\|_F^2 + \delta_{\mathcal{B}^X}(X) + \delta_{\mathcal{B}^Y}(Y).
\end{aligned}$$

算法 4（**AJA-PG 算法**）：针对 (FR) 的自适应联合交替近端梯度算法**初始化：**选取 $(X^0, Y^0, S^0) \in \mathcal{B}$, $0 < \iota \leq \bar{\iota}$, $0 < c_{\min} \leq c_{\max}$, $\varrho > 1$ 以及 $K, \tilde{K} \in \mathbb{N}$。令 $\{r_k\}$ 和$\{s_k\}$为正序列，满足

$$r_k = r, \forall k \geq K \text{ and } s_k = s, \forall k \geq \tilde{K}. \tag{37}$$

设 $\{\iota_{1,k}^B\}, \{\iota_{2,k}^B\}, \{\iota_k^B\} \subseteq [\iota, \bar{\iota}]$ 和 $\{c_{1,k}\}, \{c_{2,k}\} \subseteq [c_{\min}, c_{\max}]$。对于任意 $k \geq 0$，记 $\mathbb{I}_k := \mathbb{I}_{X^k} \cap \mathbb{I}_{Y^k}$，$I^{1,k} = I^{r_k, X^k_{\mathbb{I}_k}}$，$I^{2,k} = I^{r_k, Y^k_{\mathbb{I}_k}}$ 和 $J^k = J^{s_k, S^k}$。令 $k = 0$。

步骤 1： 通过 JA-J 子程序计算 (X^{k+1}, Y^{k+1})，其中 ω_J、f_J 和 (X^k, Y^k) 分别替换为 $\omega^{r_k}_{J^{I^{1,k}, I^{2,k}}}$、$f_J^{r_k}$ 和 $(X^k_{\mathbb{I}_k}, Y^k_{\mathbb{I}_k})$，然后转到步骤 2。

步骤 2： 通过 JA-A 子程序计算 S^{k+1}，其中 ω_A 和 f_A 分别替换为 $\omega^{s_k}_{A^{J^k}}$ 和 $f_A^{s_k}$，然后转到步骤 3。

步骤 3： 更新 $k \leftarrow k+1$ 并返回步骤 1。

与命题 7 的分析类似，根据 [27, 命题 9]，，命题 7 的结论同样适用于问题 (FR) 的 AJA-PG 算法，其中 G 和 (X^k, Y^k) 分别替换为 $F^{r,s}_\theta$ 和 $(X^k_{\mathbb{I}_k}, Y^k_{\mathbb{I}_k})$。

— —

在后续分析中，我们将使用以下假设。

假设 3。

(i) θ_1 由式 *(17)* 定义，且是局部利普希茨连续的，并且

$$\bar{\eta} := \inf\{\eta \in \partial^c \theta_1(t) : t \in \mathbb{R}_+\} > 0.$$

(ii) 假设 *2 (i)* 成立，参数 $\tilde{\eta}$ 从 $(0, \bar{\eta}]$ 中选取，且问题 *(FR)* 中的参数 r 和 s 按以下方式选取

$$\begin{aligned} &0 < r < \min\left\{\min\{1, \tilde{\eta}\} \cdot \lambda / \max\{L_X, L_Y\}, \tau\right\} \text{ if } \lambda > 0, \\ &0 < s < \min\{1, \tilde{\eta}\} \cdot \beta / L_S \text{ if } \beta > 0. \end{aligned} \tag{38}$$

显然，假设 3 (i) 蕴含 θ_1 的单调不减性质。根据假设 3 (i)，我们可以对其近端算子得出以下计算推论，该算子在后续分析中起着关键作用。

命题 8。定义函数 $\theta_1 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$，其中 $\theta_1(t) = t, \forall t \in \mathbb{R}_+$。假设假设 *3 (i)* 成立，且常数 $\rho, \bar{\rho}$ 满足 $0 < \rho \leq \min\{\tilde{\eta}, 1\}\bar{\rho}$。对于任意给定的 $\gamma, \varsigma > 0$ 和 $l, u \in \mathbb{R}^l$，若满足 $l \leq \mathbf{0} \leq u$，则对任意 $z \in \mathbb{R}^l$，

- 如果 $\|z\|_1 \leq \gamma/\bar{\rho}$，近端算子$_{\gamma\theta_1(\|\cdot\|_1/\rho)+\delta_{[l,u]}(\cdot)}(z)$ = 近端算子$_{\gamma\bar{\theta}_1(\|\cdot\|_1/\bar{\rho})+\delta_{[l,u]}(\cdot)}(z) = \mathbf{0}$;
- 若 $\|z\|_2 \leq \gamma/\bar{\rho}$，近端算子$_{\gamma\theta_1(\|\cdot\|_2/\rho)+\delta_{B_\varsigma}(\cdot)}(z)$ =近端算子$_{\gamma\bar{\theta}_1(\|\cdot\|_2/\bar{\rho})+\delta_{B_\varsigma}(\cdot)}(z) = \mathbf{0}$。

证明。根据假设 3 (i) 和 $\theta_1(t) = t, \forall t \in [0, +\infty)$，可得当 $t \geq 0$ 时，$\theta_1(t/\rho) \geq \theta_1(t/\bar{\rho})$，当 $\|z\|_1 \leq \gamma/\bar{\rho}$ 时，近端算子$_{\gamma\bar{\theta}_1(\|\cdot\|_1/\bar{\rho})+\delta_{[l,u]}(\cdot)}(z) = \mathbf{0}$，当 $\|z\|_2 \leq \gamma/\bar{\rho}$ 时，近端算子$_{\gamma\bar{\theta}_1(\|\cdot\|_2/\bar{\rho})+\delta_{B_\varsigma}(\cdot)}(z) = \mathbf{0}$。此外，根据 θ_1 和 $\rho \leq \bar{\rho}$的单调不减性质，可得 $\theta_1(\|z\|_q/\rho) \geq \theta_1(\|z\|_q/\bar{\rho}) \geq \theta_1(\|z\|_q/\bar{\rho})$ $\forall q \in \{1, 2\}$。结合 $\theta_1(0) = \theta_1(0)$，即可得到所述结论。 □

接下来，在问题（FB）的可行域有界这一假设下，我们将分析 AJA-PG 算法生成的指标集、迭代序列及其相应函数值的收敛性。

定理 5. 若假设 *3* 成立且 $\mathcal{B}$ 有界，则由 ***AJA-PG*** 算法生成的序列$\{(X^k, Y^k, S^k)\}$ 具有以下性质。

(i) $\mathbb{I}_{X^{k+1}} \subseteq \mathbb{I}_k \subseteq \mathbb{I}_{X^k}$, $\mathbb{I}_{Y^{k+1}} \subseteq \mathbb{I}_k \subseteq \mathbb{I}_{Y^k}, \forall k \geq 0$和 $\mathbb{J}_{S^{k+1}} \subseteq \mathbb{J}_{S^k}, \forall k \geq K$。

(ii) 存在 $\hat{K} \geq K, \mathbb{I} \subseteq [d]$和 $\mathbb{J} \subseteq [m,n]$使得 $\mathbb{I}_{X^k} = \mathbb{I}_{Y^k} = \mathbb{I}$和 $\mathbb{J}_{S^k} = \mathbb{J}, \forall k \geq K$，并且 *hence*

$$\underline{X}^k_{\mathbb{I}_k} = X^k \ \textit{and}\ \underline{Y}^k_{\mathbb{I}_k} = Y^k, \forall k \geq \hat{K}. \tag{39}$$

(iii) 存在 $\check{K} \geq \hat{K}$，使得 (X^k, Y^k, S^k) 对任意 $k \geq \check{K}$均具有一致性和孤立性性质 ***(C1)*** 和 ***(C2)***。

(iv) $\lim_{k\to\infty} F(X^k, Y^k, S^k)$ 存在。

(v) $\{(X^k, Y^k, S^k)\}$ 的任意聚点都是问题 ***(FB)*** 和 ***(FR)*** 的强驻点。

(vi) 若 $f(XY^{\mathbb{T}}, S)$ 是半代数的，则$\lim_{k\to\infty}(X^k, Y^k, S^k) = (X^*, Y^*, S^*)$，且其收敛速率至多为 *R*-次线性收敛，即

$$\exists\ \alpha \in (1/2, 1) \text{ and } c > 0,\ \text{s.t. } \|(X^k, Y^k, S^k) - (X^*, Y^*, S^*)\|_F \leq ck^{-\frac{1-\alpha}{2\alpha-1}},\ \forall k.$$

证明。 (i) 鉴于 $\mathcal{B}$ 的有界性以及 ∇f的局部利普希茨连续性，假设 2 (i) 自然成立。由注 3 和 (38) 可知， $Q^{k+1}_i = \mathbf{0}, \bar{Q}^{k+1}_i = \mathbf{0}$, $\forall i \notin \mathbb{I}_k$，并且当 $k \geq \tilde{K}$,$|\tilde{Q}^{k+1}_{ij}| \leq L_S/\iota_k < \beta/\ \iota_k s\ \ \forall\ i\ \ j\ \notin \mathbb{J}_{S^k}$ 8, ( ) (,) 时。于是，根据命题可得

$$X^{k+1}_i = Y^{k+1}_i = \mathbf{0} \text{ if } i \notin \mathbb{I}_k,\ \forall k \geq 0, \tag{40}$$

$$S^{k+1}_{ij} = 0 \text{ if } (i,j) \notin \mathbb{J}_{S^k},\ \forall k \geq \tilde{K}, \tag{41}$$

因此 $\mathbb{I}_{X_{k+1}} \subseteq \mathbb{I}_k, \forall k \geq 0$且 $\mathbb{J}_{S^{k+1}} \subseteq \mathbb{J}_{S^k}, \forall k \geq K$。结合 $\mathbb{I}_k = \mathbb{I}_{X^k} \cap \mathbb{I}_{Y^k}$，可得$\mathbb{I}_{X^{k+1}} \subseteq \mathbb{I}_k \subseteq \mathbb{I}_{X^k}$且 $\mathbb{I}_{Y^{k+1}} \subseteq \mathbb{I}_k \subseteq \mathbb{I}_{Y^k}, \forall k \geq 0$。

（ii）由（i）和 $\mathbb{I}_k = \mathbb{I}_{X^k} \cap \mathbb{I}_{Y^k}$，我们有 $\mathbb{I}_{k+1} \subseteq \mathbb{I}_{X^{k+1}} \subseteq \mathbb{I}_k \subseteq [d]$ and $\mathbb{I}_{k+1} \subseteq \mathbb{I}_{Y^{k+1}} \subseteq \mathbb{I}_k \subseteq [d]$。这意味着 $\lim_{k\to\infty} \mathbb{I}_k$ 存在，因此 $\lim_{k\to\infty} \mathbb{I}_{X^k}$ 和 $\lim_{k\to\infty} \mathbb{I}_{Y^k}$ 存在。此外，由于（i）中的 $\mathbb{J}_{S^{k+1}} \subseteq \mathbb{J}_{S^k} \subseteq [m,n]$, $\forall k \geq K$，我们可知 $\lim_{k\to\infty} \mathbb{J}_{S^k}$ 存在。因此，（i）中的陈述自然成立。由 $\mathbb{I}_{X^k} = \mathbb{I}_{Y^k},\ \forall k \geq K$，可得（39）。

（iii）根据（ii）中的 $\mathbb{I}_{X^k} = \mathbb{I}_{Y^k},\ \forall k \geq \hat{K}$，我们可知 $(X^k,\ Y^k,\ S^k)\ k \geq \hat{K}$ 具有一致性性质（C1）。

此外，我们证明了 $(X^k,\ Y^k,\ S^k)$ 经过有限次迭代后具有孤立性质 (C2) .

由 $\mathcal{B}$ 的有界性可知，存在正数 ς 和 L_f，使得 $\|(X,Y,S)\|^2_F \leq \varsigma,\ \forall (X,Y,S) \in \mathcal{B}$ 且 $\nabla_{(X,Y,S)} f(XY^{\mathbb{T}}, S)$ 在 $\mathcal{B}$ 上是 Lipschitz连续的，其模为 L_f。根据 (39) 和命题 7 (ii)，我们得到 $\lim_{k\to+\infty} \|(X^{k+1}, Y^{k+1}, S^{k+1}) - (X^k, Y^k, S^k)\|_F = 0$。于是存在一个 $\bar{K} \geq \max\{\hat{K}, K\}$，使得对于任意 $k \geq K$，都有对于 $i \in [d]$,

$$\max\{\|X^{k+1}_i - X^k_i\|_2, \|Y^{k+1}_i - Y^k_i\|_2\} < (\lambda\tilde{\eta}/r - \max\{L_X, L_Y\})/\max\{\underline{\iota}, \varrho(c_{\max} + L_f)\}, \tag{42}$$

并且对于 $(i,\ j) \in [m,n]$,

$$|S^{k+1}_{ij} - S^k_{ij}| < (\beta\tilde{\eta}/s - L_S)/\max\{\underline{\iota}, \varrho(c_{\max} + L_f)\}, \tag{43}$$

其中，r 和 s 由（37）给出。此外，根据（39）以及（26）的最优性条件，其中$\iota_{i,\ k} = \bar{\iota}_{i,\ k},\ \ i \in [2]$，可得

$$\mathbf{0} \in \nabla_Z f(X^k Y^{k^{\mathbb{T}}}, S^k) Y^k + \bar{\iota}_{1,k}(X^{k+1} - X^k) + \lambda\partial_X \Theta^r_{I^{1,k}}(X^{k+1}) + N_{\mathcal{B}^X}(X^{k+1}). \tag{44}$$

考虑 $\lambda > 0$ 并假设

$$\exists\ \bar{k} \geq \bar{K} \text{ and } \bar{j} \in [d],\ \text{s.t. } \|X^{\bar{k}}_{\bar{j}}\|_2 < r. \tag{45}$$

那么 $I^{1,\bar{k}}_{\bar{j}} = 1^{\circ}$。结合假设 (ii) 中的

$$r < \tau \qquad 3 \qquad \|\bar{\gamma}\|_2 >$$

可得，若 $\lambda\tilde{\eta}/r\ \forall\bar{\gamma} \in \lambda\partial_{X_{\bar{j}}}\Theta^{r}_{I^{1,k}}\ X^{\bar{k}+1} + N_{\mathcal{B}^{X}_{\bar{j}}}\ X^{\bar{k}+1}_{\bar{j}} \qquad 3 \qquad 7$ $X^{\bar{k}+1}_{\bar{j}} \neq \mathbf{0}$，则 $,(\,)\,(\,)$。此外，结合假设 (ii)、命题 (iii) 和 (42)，我们得到 $\|\nabla_Z f(X^{\bar{k}}Y^{\bar{k}^{\mathbb{T}}}, S^{\bar{k}})Y^{\bar{k}}_{\bar{j}} + \bar{\iota}_{1,\bar{k}}(X^{\bar{k}+1}_{\bar{j}} - X^{\bar{k}}_{\bar{j}})\|_2 < \lambda\tilde{\eta}/r$。若 $X^{\bar{k}+1}_{\bar{j}} \neq \mathbf{0}$，则与 (44) 矛盾。因此，当 (45) 成立时，我们得到 $X^{\bar{k}+1}_{\bar{j}} = \mathbf{0}$，这意味着存在 $\check{}\,K \geq \hat{}\,K$，使得当 $\lambda > 0$ 时，对所有 $k \geq \check{}\,K$，均有 $\|X^k_j\|_2 \notin (\mathbf{0}, r)\ \forall j \in [d]$。类似地，对于 Y^k 和 S^k，我们也有陈述 (iii) 中的相应结果。

(iv) 根据 (iii) 和命题 7(ii)，我们可以得到 $\lim_{k\to\infty,k\in\mathcal{K}} (X^k, Y^k, S^k) = (X^*, Y^*, S^*)$ 的存在性。$\check{}$

(v) 根据 (ii) 和 (iii)，存在 $I \in [2]^d$ 和 $J \in [2]^{m\times n}$，使得 $I^{1,k} = I^{2,k} = I, J^k = J, \forall k \geq \check{}\,K$。结合定理 3 和定理 4，该陈述成立。

(vi) 定义 $\hat{}\ f(X,Y,S) := f(XY^{\mathbb{T}}, S) + \delta_{\mathcal{B}^X_{\bar{\mathbb{I}}}}(X) + \delta_{\mathcal{B}^Y_{\bar{\mathbb{I}}}}(Y) + \delta_{\mathcal{B}^S_{\bar{\mathbb{J}}}}(S)\ \forall (X,Y,S)$。由于 $\mathcal{B}^X_{\bar{\mathbb{I}}}, \mathcal{B}^Y_{\bar{\mathbb{I}}}, \mathcal{B}^S_{\bar{\mathbb{J}}}$ 是 $\hat{}$ 半代数且 f 是半代数的，由 [2, 第4节3], f 是一个具有 -Lojasiewicz指数$\alpha \in [0,1$的KL函数）。结合 [3, 定理2.9] 与 [1, 定理 2], ，不难证明所需结论。

□

注释4. 存在一些常见的光滑半代数函数，例如平方损失函数$f(Z,S) = \sum_{(i,j)\in\Omega}(Z+S-M^o)^2_{ij}$以及*Huber*损失函数 $f(Z,S) = \sum_{(i,j)\in\Omega} h\big((Z+S-M^o)_{ij}\big)$，其中 h 是 *[20]* 中的*Huber*函数，$\Omega \subseteq [m]\times[n]$ 是一个指标集。*Huber*损失函数是处理数据中异常值时稳健回归常用的损失函数。

注释5。根据定理 *5*（*i*），

- 对于低秩诱导正则项 $nnzc(X) + nnzc(Y)$，只需更新 $\mathbb{I}_k$ 中所示的 X^k 和 Y^k 的非零列；
- 对于稀疏正则项 $\|S\|_0$，经过 $\tilde{K}$次迭代后，只需更新 $\mathbb{J}_{S^k}$ 中所示的 S^k 的非零元素。

经过有限次迭代后，一旦 X^k 和 Y^k 的列以及 S^k 的元素更新为零，它们便不再变化。根据 X^k 和 Y^k 的一致性，*AJA-PG* 实际上是在求解秩相应递减的问题（*FB*）。

注释6。考虑将球约束替换为盒约束 $\mathcal{B}^X := [\boldsymbol{\tau^1}, \boldsymbol{\tau^2}] \subseteq \mathbb{R}^{m\times d}$ 和 $\mathcal{B}^Y := [\boldsymbol{\pi^1}, \boldsymbol{\pi^2}] \subseteq \mathbb{R}^{n\times d}$的问题（*FB*）。若将 $\tau \geq \|\mathcal{B}^Z\|^{1/2}_{\max}$ 改为 $\mathcal{B}^X \times \mathcal{B}^Y \supseteq \|\mathcal{B}^Z\|^{1/2}_{\max}[-\mathbf{1},\mathbf{1}]$，则同样可以得到命题*2*中问题（*L*）、（*FB*）和（*LB*）之间的关系。注意，若 $\min_{i,\ j,\ k,\ l\in[d]}\{\boldsymbol{\tau}^1_i, \boldsymbol{\tau}^2_j, \boldsymbol{\pi}^1_k,\ \boldsymbol{\pi}^2_l\} \geq (\|\mathcal{B}^Z\|_{\max}/d)^{1/2}$，则 $\mathcal{B}^X \times \mathcal{B}^Y \supseteq \|\mathcal{B}^Z\|^{1/2}_{\max}[-\mathbf{1},\mathbf{1}]$。此外，在第*2*、*3*、*4*节中，将 $\|\cdot\|_2$ 替换为 $\|\cdot\|_1$ 且不要求假设*2*和*3*中的条件 $r < \tau$ 时，具有此类盒约束的问题（*FB*）也满足相应的理论结果。

5 数值实验

本节中，我们测试 AJA-PG 算法在合成数据集和真实数据集上的问题（FB）求解性能。本节中的所有计算结果均通过在 MacBook Pro（3.2 GHz，16 GB RAM）上运行 MATLAB 2022a 得到。AJA-PG 算法的运行时间（秒）采用与 [27, 40], 相同的方式测量，其中包括计算初始点所花费的时间。报告的数值结果是相关算法进行十次随机试验所生成数据的平均值。

我们使用 AJA-PG 算法，通过 $\theta_1(t) = t,\ \forall t \in \mathbb{R}_+$ 求解松弛问题 (FR)，以处理问题（FB），其中 $f(Z,\ S) := \frac{1}{2}\|\mathcal{P}_\Omega(Z+S-M^o)\|^2_F,\ \forall Z \in \mathbb{R}^{m\times n}$给定矩阵为 $M^o \in \mathbb{R}^{m\times n}$，观测条目的指标集为 $\Omega \subseteq [m]\times[n]$。考虑到 [9,46], 中建议的正则化参数，在数值实验中，如果 $\beta \neq 0$，我们使用 $\lambda = \sqrt{\max\{m,n\}\,\beta/2}$。在本节中，AJA-PG$_{\text{ball}}$和

AJA-PG$_{\rm box}$ 算法分别对应于带有球约束和盒约束的问题（FB）的 AJA-PG 算法。

我们将问题（LB）中 $\mathcal{B}^Z \times \mathcal{B}^S$ 的所有矩阵的所有分量的最大绝对值记为 a_1，并将矩阵 M^o 的最大绝对值记为 a_2。根据理论需要，我们设置 $\Delta := a_1\sqrt{mn}$、$L_X := n(a_1+a_2)\sqrt{m}\Delta$、$L_Y := m(a_1+a_2)\sqrt{n}\Delta$、$L_S := a_1+a_2$、$r := 0.99\lambda/\max\{L_X, L_Y\}$ 和 $s := 0.99\beta/L_S$。令 $r_k = \sqrt{2\lambda}$、$\forall k \le k_{\max}$ 和 $\max\left\{\frac{\sqrt{2\lambda}}{k-k_{\max}}, r\right\}$；否则，令 $s_k = \sqrt{2\beta}$、$\forall k \le k_{\max}$ 和 $\max\left\{\frac{\sqrt{2\beta}}{k-k_{\max}}, s\right\}$。初始点与 [27] 中相同。对于 AJA-PG，将第 5.1 小节中的停止准则设为 $\frac{|F(X^k,Y^k,S^k)-F_0(X^{k-1},Y^{k-1},S^{k-1})|}{\max\{1,F(X^k,Y^k,S^k)\}} \le 10^{-5}$，或迭代次数达到 $k = 500$；第 5.2 小节中的停止准则与 [27] 中的相同。

5.1 合成数据

在本部分中，我们考虑带有 $\beta = 1$ 的问题（FB），并采用与 [36] 中相同的数据设置[1]。秩为 r 的低秩矩阵 Z^l 按 $PQ^{\mathbb{T}}$ 生成，其中 $P \in \mathbb{R}^{n\times r}$ 和 $Q \in \mathbb{R}^{n\times r}$ 是相互独立的矩阵，其元素为从标准高斯分布中采样的独立同分布随机变量。稀疏矩阵 $S^u \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 的生成方式为：其支撑集均匀随机选取，其非零元素为在区间 $[-5,5]$ 上均匀采样的独立同分布随机变量。输入矩阵为 $M^o = Z^l + S^u + R^u$，其中高斯噪声为 $R^u = nf \times \text{randn}(n)$，$nf \ge 0$ 为噪声因子。我们将 AJA-PG 与 [36], 中的 D-N 和 F-N 算法、[16] 中的 WNNM 算法以及 [30] 中的 PSVT 算法在与 [36] 相同的设置下进行了比较。为进行定量评估，我们通过 RSE 和运行时间衡量低秩分量恢复的性能。相同设置下以及不同稀疏度和秩下的比较结果如表 1 所示。AJA-PG$_{\rm ball}$ 和 AJA-PG$_{\rm box}$ 算法均具有更好的数值性能，且 AJA-PG$_{\rm box}$ 算法耗时最短。

表1：在具有 $r^\star = 5$、$sr = 0.9$ 以及五种方阵维度的问题上，不同方法的平均RSE和运行时间

指标	大小（n）	方法					
		PSVT	WNNM	D-N	F-N	AJA-PG $_{\rm ball}$	AJA-PG $_{\rm box}$
RSE	500	0.130	0.046	0.045	0.043	**0.035**	**0.035**
	1000	0.128	0.034	0.032	0.030	**0.025**	**0.025**
	1500	0.128	0.029	0.027	0.025	**0.021**	**0.021**
	2000	0.127	0.026	0.023	0.022	**0.018**	**0.018**
	2500	0.127	0.024	0.021	0.020	**0.016**	**0.016**
Time	500	1.65	8.66	0.57	0.46	0.29	**0.28**
	1000	7.68	37.63	1.38	1.22	0.64	**0.62**
	1500	18.07	109.89	2.99	2.30	1.16	**1.10**
	2000	37.31	237.90	5.27	3.80	1.95	**1.87**
	2500	72.22	500.96	8.42	7.59	3.50	**3.35**

5.2 真实数据

本部分采用真实数据集，在与 [27] 相同的非均匀采样设置和不同采样率（SR）下，对 AJA-PG 算法与 [27] 中的第一个算法（记为 AAPG ）在矩阵补全问题上的性能进行比较。我们使用一些真实数据集（ Jester 笑话数据集和 MovieLens 数据集），比较 AJA-PG$_{\rm ball}$ 和 AAPG 算法在 [27] 中所考虑问题上的数值表现。表 2 中，数据集 Jester-1 、 Jester-2 和 Jester-3 来自 Jester 笑话数据集 [2], ，而数据集 Movie-100K 和 Movie-1M 来自 MovieLens 数据集[3]。为了衡量计算所得

[1] https://www.dropbox.com/s/npyc2t5zkjlb7tt/CodeBFMNM.zip?dl=0
[2] http://www.ieor.berkeley.edu/~goldberg/jester-data/
[3] http://www.grouplens.org/node/73

解的精度，与 [27], 相同，我们采用归一化平均绝对误差（NMAE）。在与 [27, 第 6.2], 小节相同的数据和算法设置下，不同采样率（SR）下的比较结果列于表 2。随着数据维度增加，AJA-PG$_{\rm ball}$ 算法在运行时间方面具有显著优势，并且在几乎所有测试中都能获得更高的解的精度。

表 2：AAPG 和 AJA-PG$_{\rm ball}$ 算法在 Jester 笑话数据集和 MovieLens 数据集上的平均 NMAE、秩和运行时间

数据集	(m, n)	SR	AAPG			AJA-PG$_{\rm ball}$		
			NMAE	秩	时间	NMAE	rank	time
Jester-1	(1000, 100)	0.15	0.1925	1.6	**0.21**	**0.1899**	1.8	**0.21**
		0.25	0.1804	1.8	**0.11**	**0.1802**	1.8	**0.11**
Jester-2	(2000, 100)	0.15	0.1902	1.8	0.39	**0.1894**	1.8	**0.33**
		0.25	0.1802	1.7	0.17	**0.1800**	1.7	**0.16**
Jester-3	(4000, 100)	0.15	0.2267	2.3	0.67	**0.2232**	2.2	**0.52**
		0.25	0.2213	2.5	0.45	**0.2174**	2.4	**0.38**
Movie-100K	(943, 1682)	0.10	0.2202	2.0	1.39	**0.2199**	2.0	**1.02**
		0.15	0.2138	1.9	1.21	**0.2128**	1.5	**0.73**
		0.20	0.2075	1.7	1.18	**0.2074**	1.9	**0.93**
		0.25	0.2042	1.6	1.04	**0.2041**	1.5	**0.72**
Movie-1M	(6040, 3706)	0.10	0.2040	1.4	24.6	**0.2038**	1.5	**19.3**
		0.15	0.1953	1.5	31.3	**0.1948**	1.5	**19.7**
		0.20	0.1918	1.7	32.6	**0.1917**	1.6	**16.1**
		0.25	**0.1872**	1.8	31.3	0.1882	1.7	**17.0**

6 结论

据我们所知，本研究首次探讨了基于矩阵分解的秩和 ℓ_0 正则化矩阵优化问题。在稳健主成分分析（RPCA）的背景下，低秩结构为分解模型带来了计算优势。我们分别从全局极小点和驻点的角度，确立了秩和 ℓ_0 正则化模型与其分解模型之间的等价性。对于带界约束的分解模型，我们构建了一个具有普遍适用性的等价非凸松弛框架，由此确立了因式分解问题与一类连续非凸松弛问题在最优性条件意义下的多重等价性。此外，我们设计了联合交替近端梯度（JA-PG）算法来求解一般分解问题，并证明了该算法在秩和 ℓ_0 正则化问题上的收敛性，即收敛至驻点。进一步地，我们提出了自适应 JA-PG（AJA-PG）算法，用于求解带界约束的分解问题及其松弛问题。我们证明，AJA-PG 算法能够收敛至这些问题满足更强最优性条件的驻点。最后，通过数值实验，我们展示了所提出的模型和算法在若干常见问题上的有效性。

参考文献

[1] H. Attouch 和 J. Bolte。关于涉及解析特征的非光滑函数的近端算法收敛性。《数学规划》，116(1-2)：5–16，2009。

[2] H. Attouch、J. Bolte、P. Redont 和 A. Soubeyran。非凸问题的近端交替最小化与投影方法：一种基于 Kurdyka-Lojasiewicz 不等式的方法。数学运筹研究，35(2)：438–457，2010。

[3] H. Attouch、J. Bolte和B.F. Svaiter。半代数与温和问题下降方法的收敛：近端算法、前向–后向分裂与正则化高斯-赛德尔方法。《数学规划》，137(1-2):91–129，2013。

[4] W. Bian和X. Chen。带基数惩罚的非光滑凸回归的光滑近端梯度算法。《SIAM数值分析杂志》，58(1):858–883，2020。[5] W. Bian和X. Chen。带基数惩罚的非光滑凸凹鞍点问题。《数学规划》，第1–47页，2024。[6] J. Bolte、S. Sabach和M. Teboulle。非凸非光滑问题的近端交替线性化最小化。《数学规划》，146(1-2):459–494，2014。[7] T. Bouwmans、S. Javed、H. Zhang、Z. Lin和R. Otazo。论鲁棒主成分分析在图像与视频处理中的应用。《IEEE会刊》，106(8):1427–1457，2018。[8] J.-F. Cai、E.J. Cand`es和Z. Shen。用于矩阵补全的奇异值阈值算法。《SIAM优化杂志》，20(4):1956–1982，2010。[9] E. J. Cand`es、X. Li、Y. Ma和J. Wright。鲁棒主成分分析？《ACM杂志》，58(3):1–37，2011。[10] F. H. Clarke。最优化与非光滑分析。纽约：Wiley，1983。[11] Y. Cui和J.-S. Pang。现代非凸不可微优化。SIAM，2021。[12] J. Fan、L. Ding、Y. Chen和M. Udell。用于高效低秩矩阵恢复的因子组稀疏正则化。见《神经信息处理系统进展》，第32卷。Curran Associates, Inc.，2019。[13] J. Fan和R. Li。基于非凹惩罚似然的变量选择及其oracle性质。《美国统计学会杂志》，96(456):1348–1360，2001。[14] S. Foucart和M.-J. Lai。通过 ℓ_q最小化求欠定线性系统在$0 < q \leq 1$情形下的最稀疏解。《应用与计算调和分析》，26(3):395–407，2009。[15] P.-V. Giampouras、A.-A. Rontogiannis和K.-D. Koutroumbas。基于交替迭代重加权低秩矩阵分解的鲁棒主成分分析。见《IEEE国际图像处理会议论文集》，第3383–3387页，2018。[16] S. Gu、Q. Xie、D. Meng、W. Zuo、X. Feng和L. Zhang。加权核范数最小化及其在低层视觉中的应用。《国际计算机视觉杂志》，121(2):183–208，2017。[17] S. Gu、L. Zhang、W. Zuo和X. Feng。加权核范数最小化及其在图像去噪中的应用。见《IEEE计算机视觉与模式识别会议论文集》，第2862–2869页，2014。[18] J. Guo、Y. Sun、J. Gao、Y. Hu和B. Yin。基于低秩矩阵分解的秩一致性诱导多视图子空间聚类。《IEEE神经网络与学习系统汇刊》，33(7):3157–3170，2022。[19] Y. Hu、D. Zhang、J. Ye、X. Li和X. He。基于截断核范数正则化的快速精确矩阵补全。《IEEE模式分析与机器智能汇刊》，35(9):2117–2130，2013。[20] P.J. Huber。稳健回归：渐近性、猜想与蒙特卡罗。《统计年鉴》，5(1):799–821，1973。[21] X. Jia、C. Kanzow和P. Mehlitz。在Kurdyka-Łojasiewicz性质下且无全局利普希茨假设时近端梯度法的收敛性分析。《SIAM优化杂志》，33(4):3038–3056，2023。[22] C. Kanzow和L. Lehmann。在Kurdyka-Łojasiewicz性质下且无全局利普希茨假设时非单调近端梯度方法的收敛。《优化理论与应用杂志》，207，4，2025。

[23] C. Kanzow and P. Mehlitz. 重新审视单调与非单调近端梯度方法的收敛性质。《优化理论与应用杂志》，195(2):624–646，2022。[24] P. Latafat, A. Themelis, and P. Patrinos. 用于非光滑非凸问题的块坐标与增量聚合近端梯度方法。《数学规划》，193(1):195–224，2022。[25] H.A. Le Thi, T. Pham Dinh, H.M. Le, and X.T. Vo. 稀疏优化的DC近似方法。《欧洲运筹学杂志》，244(1):26–46，2015。[26] W. Li, W. Bian, and K.-C. Toh. 一类稀疏组 ℓ_0 正则化优化问题的差分凸算法。《SIAM优化杂志》，32(3):1614–1641，2022。[27] W. Li, W. Bian, and K.-C. Toh. 通过等价因子化列稀疏正则化模型求解秩正则化最小化问题。《数学规划》，212(1-2):273–318，2025。[28] Y. Liu, S. Bi, and S. Pan. 零范数与秩优化问题的等价利普希茨替代函数。《全球优化杂志》，72(4):679–704，2018。[29] D.R. Luke. 秩约束集的近端正则性及其对算法的启示。《数学成像与视觉杂志》，47(3):231–238，2013。[30] T.-H. Oh, Y.-W. Tai, J.-C. Bazin, H. Kim, and I.S. Kweon. 鲁棒主成分分析中的奇异值部分和最小化：算法与应用。《IEEE模式分析与机器智能汇刊》，38(4):744–758，2016。[31] L. Pan and X. Chen. 使用截断折叠凹函数进行图像恢复的组稀疏优化。《SIAM成像科学杂志》，14(1):1–25，2021。[32] D. Peleg and R. Meir. 向量稀疏度优化的双线性表述。《信号处理》，8(2):375–389，2008。[33] J.-P. Penot.《无导数微积分》。施普林格纽约，2013。[34] T. Pock and S. Sabach. 面向非凸非光滑问题的惯性近端交替线性化最小化（iPALM）。《SIAM成像科学杂志》，9:1756–1787，2016。[35] R.T. Rockafellar and R. J-B. Wets. 变分分析。施普林格，1998。[36] F. Shang, J. Cheng, Y. Liu, Z.-Q. Luo, and Z. Lin. 用于鲁棒主成分分析的双线性因子矩阵范数最小化：算法与应用。《IEEE模式分析与机器智能汇刊》，40(9):2066–2080，2018。[37] F. Shang, Y. Liu, and J. Cheng. 易处理的Schatten拟范数最小化的可扩展算法。载于《第30届AAAI人工智能大会论文集》，第2016–2022页，2016。[38] E. Soubies, L. Blanc-F´eraud, and G. Aubert. 用于 ℓ_2-ℓ_0最小化的精确连续惩罚的统一观点。《SIAM优化杂志》，27(3):2034–2060，2017。[39] N. Srebro and A. Shraibman. 秩、迹范数与最大范数。载于《学习理论》。COLT，第545–560页。施普林格柏林海德堡，2005。[40] T. Tao, Y. Qian, and S. Pan. 低秩矩阵恢复的列ℓ_2,0范数正则化分解模型及其计算。《SIAM优化杂志》，32(2):959–988，2022。[41] F. Wen, R. Ying, P. Liu, and R.-C. Qiu. 基于广义非凸正则化的鲁棒主成分分析。《IEEE电路与系统视频技术汇刊》，30(6):1497–1510，2020。[42] F. Wen, R. Ying, P. Liu, and T.-K. Truong. 使用近端块坐标下降算法的非凸正则化鲁棒主成分分析。《IEEE信号处理汇刊》，67(20):5402–5416，2019。

[43] Y. Xu and W. Yin. 一种基于块坐标更新的非凸优化全局收敛算法。《计算科学杂志》，72:700–734，2017。[44] Q. Yao, J.-T. Kwok, T. Wang, and T.-Y. Liu. 使用非凸正则项的大规模低秩矩阵学习。《*IEEE* 模式分析与机器智能汇刊》，41(11):2628–2643，2019。[45]C.-H. Zhang. 极小极大凹惩罚下近乎无偏的变量选择。《统计年鉴》，38(2):894–942，2010。[46] H. Zhang, Z. Lin, C. Zhang, and E. Chang. 通过离群点追踪实现鲁棒主成分分析的精确可恢复性及紧致恢复界。载于第*29*届*AAAI*人工智能大会论文集，第3143–3149页，2015。[47] X. Zhao, M. Bai, D. Sun, and L. Zheng. 鲁棒张量补全：等价替代函数、误差界与算法。《*SIAM*成像科学杂志》，15(2):625–669，2022。