arXiv:2603.03114v1 [math.SP] 3 Mar 2026

点谱酉算子的弹道运动缺失与几乎弹道运动的存在

CHRISTOPHER CEDZICH、JAKE FILLMAN 和 LUIS VELÁZQUEZ

谨以此文献给 *Barry Simon*，祝贺他八十寿辰。

摘要。我们将 Simon 及其合作者的两项结果推广到离散时间酉动力学的情形。我们证明，纯点谱会排除弹道运动，并给出一族例子，说明这一结论在扩展 Cantero–Moral-Velázquez（CMV）矩阵这一类中是最优的：也就是说，存在具有纯点谱的扩展 CMV 矩阵，其量子动力学可以任意接近弹道运动。

1. 引言

1.1. **概述**。本文探讨希尔伯特空间 $\ell^2(\mathbb{Z})$ 上具有有限程相互作用的酉算子的量子动力学特征。这类算子在文献中称为“量子行走”；将希尔伯特空间适当地重新划分为局域单元 [16], 后，它们描述了单粒子在离散时间中的运动，并具有内部自由度 [3,40]。这一类中最简单的算子是扩展 Cantero–Moral–Velázquez（CMV）矩阵 [11], ，它们在单位圆上的正交多项式（OPUC）理论中发挥着重要作用；参见 [45,46] 及其中的参考文献。

从量子模拟 [24], 的角度来看，人们自然关注离散时间演化的动力学性质，即对于给定初态 ψ 以及满足适当局域性条件的幺正算子 U ， $U^t\psi$ 随 $t \to \infty$ 的行为。这一方向的已知结果包括周期情形中的弹道输运（即位置可观测量的线性标度） [2,18,29], 、存在退相干噪声时的扩散输运 [2], 、某些准晶体中的反常输运 [18], ，以及各类模型在独立同分布随机性情形下的动力学局域化 [1,5,6,32,35]。一种特别令人惊讶的输运类型，是可良好逼近的无理电场中量子游走所呈现的层级运动 [17]: 初态越来越好的复现与越来越远的远行交替出现。此外，还可以考察在何种条件下对 (U,ψ) 是“常返的”，即 $U^t\psi$ 是否返回其初态 ψ [7,30,31]。

人们通常首先从实现动力学的酉算子的（与时间无关的）谱问题入手，研究随时间变化的问题。更具体地说，RAGE 定理[1] 为算子的谱分解与其对应的（酉）动力学之间提供了具体（尽管较为粗略）的联系：大体而言，对应于纯点谱的波包部分是局域的，而对应于连续谱的部分则是离域的。更准确地说，如果初始态的谱测度 ψ 为纯点谱，那么对任意 $\varepsilon > 0$, 都存在一个（依赖于ε的）空间区域，使波包以 $1-\varepsilon$的概率不会逃离该区域。另一方面，如果

[1]这个名称由 Reed 和 Simon 创造 [41] 以纪念 Ruelle 的重要贡献 [42],Amrein 和 Georgescu [4] 以及 Enss [22]1

初始态的谱测度是连续谱，那么随着 $t \to \infty$，相应的波包将离开任何固定的紧集（按时间平均意义而言）。离散时间情形下更精确的表述可见，例如 [23,25]。第一个主要结果是对 ℓ^2（$\mathbb{Z}$）中带状酉算子相关论述的细化：点谱会阻止弹道输运（在所考虑情形下可能达到的最快输运）；薛定谔算子的类似结果由 Simon 证明，详见 [44]。关于弹道运动的更多结果与讨论，可见综述 [19]。

更精确地说，若幺正算子 $U\colon \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ 满足：存在某个 $R > 0$ 使得

$$|\langle \delta_n, U\delta_m \rangle| = 0 \text{ whenever } |n-m| > R. \tag{1.1}$$

此外，我们将位置算子 $X\colon D(X) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ 定义为

$$[X\psi](n) = n\psi(n), \qquad D(X) = \left\{ \psi \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} : \sum_{n\in\mathbb{Z}} |n\psi(n)|^2 < \infty \right\}. \tag{1.2}$$

定理 1.1。设 U 是一个带状幺正算子，其点谱仅为纯点谱，且所有特征向量都属于 $D(X)$。[2] 那么，对任意 $\psi \in D(X)$，均有

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^2} \|XU^t\psi\|^2 = 0. \tag{1.3}$$

关于定理 1.1，我们再作几点说明。首先，这并非 RAGE 定理一般性结论的直接推论；该结论指出，波函数仅以概率 $1-\varepsilon$保持局限。也就是说，波包仍可能有少量部分逃逸至无穷远；事实上，确有一些例子（如随机二聚体模型）同时呈现纯点谱和近弹道输运[18, 20, 33]。其次，与薛定谔算子的情形相比，这里还需要一个额外假设：我们明确要求特征向量属于 $D(X)$。这一假设的原因从证明中便可看出。当 H是一个离散薛定谔算子时，[3] 动量算子 $P = \mathbf{i}[X,H] := \mathbf{i}(XH - HX)$等于 $\mathbf{i}(S - S^*)$，其中 S 是作用于 $\delta_n \mapsto \delta_{n+1}$ 上的移位 $\ell^2(\mathbb{Z})$。随后，简单计算可得

$$\langle \psi, P\psi \rangle = \mathbf{i}\langle \psi, S\psi - S^*\psi \rangle = 0$$

对于任意实值 ψ。由于 H 的特征向量可以选取为实值的，这直接表明，对 H的所有特征向量 ψ都有 $\langle \psi、 P\psi \rangle = 0$。然而，在当前情形中，“动量”算子 $P = [X,U]$一般更为复杂，并且容易看出，一般而言，对所有实值 ψ并不成立 $\langle \psi、 P\psi \rangle = 0$（而且无论如何，一般带状酉算子的特征函数通常并不能像薛定谔算子的特征函数那样以同样的方式实化）。我们转而需要使用另一种（形式）计算来直接证明，对 U的特征向量 ψ有 $\langle \psi、 P\psi \rangle = 0$，但该形式计算需要 $\psi \in D$（X）。澄清这一假设是否必要，或者另一种论证能否去掉它（或许在适当的特殊情形中），将是有意义的。最后，在将希尔伯特空间 ℓ^2（$\mathbb{Z}$）重新分组为（有限维）局域单元之后，该结果仍然成立，正如对量子游走 [16]所做的那样。这需要对位置算子的定义作一修改，但不难看出，在作必要改动后证明仍然适用。

[2]特别是，任何特征向量呈指数衰减的带状 U 都满足这一假设。[3]此处所述的论证经过适当修改后，也可推广到雅可比矩阵。

1.2. ECMV矩阵中的一个病态例子。 在带状酉矩阵中，最重要的例子类之一是扩展的 Cantero–Moral–Velázquez（ECMV）矩阵。给定 $n \in \mathbb{Z}$的系数 $\alpha_n \in \mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C}: |z| < 1\}$，相应的ECMV矩阵由 $\mathcal{E} = \mathcal{LM}$定义，其中

$$\mathcal{L} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \Theta(\alpha_{2n}), \qquad \mathcal{M} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \Theta(\alpha_{2n+1}) \tag{1.4}$$

由以下内容指定

$$\Theta(\alpha) = \begin{bmatrix} \overline{\alpha} & \rho \\ \rho & -\alpha \end{bmatrix}, \quad \rho := \sqrt{1-|\alpha|^2}, \tag{1.5}$$

约定 $\Theta(\alpha_j)$ 作用于子空间 $\ell^2(\{j, j+1\})$。一方面，从单位圆上的正交多项式和单位圆盘上的调和分析的角度来看，这种设定很自然。另一方面，在某些情况下，考虑复化的ρ也相当自然，这会直接导出与整数格上的分步量子行走等价的算子。鉴于 CGMV 联系及其先前的研究[9,10,13][4]，这两种设定仅相差一个简单的规范变换。我们强调，调整 ρ的相位并非仅仅是过时的做法；在识别隐对称性和简化证明时，这样做往往很方便，甚至不可或缺，参见例如 [12,13]。

从这一类中一个合适的成员出发，我们将看到，定理 1.1 无法进一步加强，因为纯点谱可以与几乎弹道运动并存。更确切地说，我们有以下结论：

定理 1.2。 *对于任意递增函数 $f:(0,\infty) \to (0,\infty)$，若满足 $f(t) \to \infty$ 当 $t \to \infty$时，则存在一个 GECMV 矩阵 $\mathcal{E}$，它具有纯点谱、指数衰减的特征向量，并满足如下形式的几乎弹道运动界*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{f(t)}{t^2} \|X\mathcal{E}^t\delta_0\|^2 = \infty. \tag{1.6}$$

定理 1.2 的例子将由酉几乎 Mathieu 算子的适当有限秩扰动构造而成 [14],，其思路与 [21,37]中的构造相同。

让我们以关于设定选择的一般性哲学评论来结束引言部分的讨论。一个幺正算子 U 常常可以写成 $U = \exp(-\mathrm{i}H)$，其中 H为适当的自伴算子，因此人们自然会问，为何不直接利用生成元 H 以及关于酉群 $\exp(-\mathrm{i}tH)$ 的已有结果，再将其简单地特化到 $t \in \mathbb{Z}$。然而，这一观点至少存在三个问题。首先，并非每个带状酉算子都具有足够局部的自伴生成元，移位 $[U\psi](n) = \psi(n+1)$的例子即可说明这一点。其次，更重要的是，所考虑的幺正算子 U 通常具有人们希望加以利用的某种结构，而这种结构在过渡到自伴生成元时可能被完全掩盖或破坏。最后，近年来已成功利用不同平台实现此类离散时间量子模拟器，例如光晶格中的中性原子 [36]，或使用相干光 [43] 或单光子 [48], 的时分复用装置，甚至金属-绝缘体转变等微妙的动力学与谱特征在若干时间步之后即可显现 [28,39]。

[4]请注意，阿诺德原理在此处适用，正如 [47]中所述：这一联系至少早在十年前就已在 [8] 中被指出（当时没有明确提及“量子行走”），此后又被多次重新发现。

致谢。J.F. 的部分研究得到美国国家科学基金会项目 DMS-2513006 以及西蒙斯基金会项目 MPS-TSM-00013720 的资助。L.V. 的部分研究得到项目 PID2021-124472NBI00 的资助，该项目由西班牙大学部、创新部和科学部/AEI/10.13039/501100011033 以及“欧洲区域发展基金：通往欧洲之路”资助。

2. 弹道运动的缺失

在给出定理1.1的证明之前，我们先做几点准备性说明。一般而言，若 B是一个算子，我们将记 $B_U(t) = U^{-t}BU^t$, $t \in \mathbb{Z}$为B 关于 U的海森堡演化。当不致引起混淆时，我们会省略 U ，直接记作$B(t)$。对于 $B = X$位置算子，我们注意到以下简单事实，可通过直接计算证明：

命题 2.1. 若 U 是一个带状酉算子，则 $D(X)$ 是 U-不变的，且 $X(t)$ 在 $D(X(t)) = D(X)$ 上自伴，对所有 $t \in \mathbb{Z}$均成立。

接下来我们观察到

$$X(t+1) - X(t) = U^{-1}U^{-t}(XU - UX)U^t = U^{-1}P(t)$$

其中 P 是离散动量算子

$$P := [X, U] = XU - UX. \tag{2.1}$$

由于 X 无界， P 最初仅定义在 $D(X)$ 上；然而，通过直接计算很容易看出， P在 $D(X)$ 上有界，因此（由于 $D(X)$ 在 $\ell^2(\mathbb{Z})$ 中稠密）可唯一延拓为定义在整个 $\ell^2(\mathbb{Z})$ 上的有界线性算子。因此，我们有

$$X(t) - X = U^{-1}\sum_{s=0}^{t-1} P(s) \tag{2.2}$$

在 $D(X)$ 上。

引理 2.2。 设 ϕ 和 ψ 是带状酉算子 U 的特征向量，且满足定理1.1的假设。则

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^2} \sum_{s,\widetilde{s}=0}^{t-1} \langle P(s)\phi, P(\widetilde{s})\psi\rangle = 0. \tag{2.3}$$

证明。 设 $\{\varphi_1, \ldots\}$ 表示由 U 的特征向量组成的完备正交归一集，其对应特征值为 $\{z_1, \ldots\}$。设 w 和 z 分别为对应于 ϕ 和 ψ 的特征值。在基 $\{\varphi_j\}$ 下展开可得

$$\begin{aligned}
\langle P(s)\phi, P(\widetilde{s})\psi\rangle &= w^{-s}z^{\widetilde{s}} \left\langle U^{-s}P\phi, U^{-\widetilde{s}}P\psi \right\rangle \\
&= w^{-s}z^{\widetilde{s}} \left\langle P\phi, \sum_{j=1}^{\infty} \left\langle \varphi_j, U^{s-\widetilde{s}}P\psi \right\rangle \varphi_j \right\rangle \\
&= w^{-s}z^{\widetilde{s}} \sum_{j=1}^{\infty} z_j^{s-\widetilde{s}} \left\langle \varphi_j, P\psi \right\rangle \left\langle P\phi, \varphi_j \right\rangle .
\end{aligned}$$

由柯西–施瓦茨不等式可得

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\langle \varphi_j, P\psi\rangle||\langle P\phi, \varphi_j\rangle| \leq \left[\sum_{j=1}^{\infty} |\langle \varphi_j, P\psi\rangle|^2\right]^{1/2} \left[\sum_{j=1}^{\infty} |\langle P\phi, \varphi_j\rangle|^2\right]^{1/2}$$

$$
\begin{aligned}
&= \|P\psi\|\|P\phi\| \\
&< \infty.
\end{aligned}
$$

因此，根据控制收敛定理，式（2.3）的左端变为

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t^2}\sum_{s,\widetilde{s}=0}^{t-1}\langle P(s)\phi, P(\widetilde{s})\psi\rangle = \sum_{j=1}^{\infty}\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t^2}\sum_{s,\widetilde{s}=0}^{t-1} w^{-s}z_j^{s-\widetilde{s}}z^{\widetilde{s}}\left\langle\varphi_j, P\psi\right\rangle\left\langle P\phi, \varphi_j\right\rangle.$$

当 $z \neq w$ 时，右侧的量经直接计算可知趋于零。在 $w = z$ 的情况下，只有含有 $z_j = z = w$ 的项保留下来，因此所讨论的量化简为

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t^2}\sum_{s,\widetilde{s}=0}^{t-1}\langle P(s)\phi, P(\widetilde{s})\psi\rangle = \sum_{j:z_j=z}\langle\varphi_j, P\psi\rangle\langle P\phi, \varphi_j\rangle.$$

证明只需再说明，对于所有满足 $z_j = z = w$ 的 j，都有 $\langle\varphi_j,\ P\psi\rangle = 0 = \langle P\phi,\ \varphi_j\rangle$。由于 ψ 和 φ_j 属于 $D(X)$，直接计算可得

$$\langle\varphi_j, P\psi\rangle = \langle\varphi_j, Xz\psi\rangle - \langle Xz^{-1}\varphi_j, \psi\rangle = 0,$$

类似地，计算可得 $\langle P\phi,\ \varphi_j\rangle = 0$。 □

定理 *1.1* 的证明。设 U 是满足定理假设的算子，并令 $\{\varphi_1, \ldots\}$ 表示 U 的一组完备正交归一特征向量，其对应的特征值为 $\{z_1, \ldots\}$。

由（2.2）可得，对于 $\psi \in D(X)$：

$$\|XU^t\psi\|^2 = \|U^{-t}XU^t\psi\|^2 = \left\|\left(X + U^{-1}\sum_{s=0}^{t-1}P(s)\right)\psi\right\|^2 = \sum_{s,\widetilde{s}=0}^{t-1}\langle P(s)\psi, P(\widetilde{s})\psi\rangle + O(t),$$

其中在最后一步中，我们利用了 P 有界这一事实。因此，

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t^2}\|XU^t\psi\|^2 = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t^2}\sum_{s,\widetilde{s}=0}^{t-1}\langle P(s)\psi, P(\widetilde{s})\psi\rangle. \tag{2.4}$$

现在，假设 $\psi \in D(X)$ 是$\{\varphi_j\}$中（有限个）元素的线性组合，即 $\psi = \sum_{j=1}^{N} c_j\varphi_j$. 我们有

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t^2}\langle P(s)\psi, P(\widetilde{s})\psi\rangle &= \frac{1}{t^2}\left\langle\sum_{k=1}^{N}c_kP(s)\varphi_k, P(\widetilde{s})\sum_{j=1}^{N}c_j\varphi_j\right\rangle \\
&= \frac{1}{t^2}\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\overline{c_k}c_j\left\langle P(s)\varphi_k, P(\widetilde{s})\varphi_j\right\rangle,
\end{aligned}$$

根据引理 2.2，该式趋于零。由于这些向量 $\{\varphi_j\}$ 构成一组标准正交基，证明至此完成。 □

3. 一个病态例子

本节通过构造一族显式的扩展 CMV 矩阵来证明定理1.2 。这些矩阵具有纯点谱和指数衰减的特征函数，同时按照（1.6）的意义呈现近弹道输运。它们以 [14, 27]中引入的酉几乎 Mathieu 算子（UAMO）为基础：我们考虑 $\mathcal{E}^{\mathrm{UAMO}}_{\lambda_1\,\lambda_2\,\Phi,,,\theta}$ ，其 Verblunsky 系数为

$$\alpha^{\mathrm{UAMO}}_{2n-1} = \lambda_2 \sin 2\pi(n\Phi+\theta), \qquad \alpha^{\mathrm{UAMO}}_{2n} = \lambda_1', \tag{3.1}$$

其中 $\lambda' := \sqrt{1-\lambda^2}$。这属于紧阿贝尔群 $\mathbb{T}\times\mathbb{Z}_2$ 上，基动力系统 $(\theta, j) \mapsto (\theta+\Phi/2, j+1)$ 及采样函数所对应的遍历 CMV 矩阵的研究背景。

$$f(\theta, j) = \begin{cases} \lambda_2 \sin 2\pi\theta & j = 0 \\ \lambda_1' & j = 1. \end{cases} \tag{3.2}$$

在超临界区间 $\lambda_1 < \lambda_2$ 中，已知对于几乎处处的 Φ, θ，在 Φ 的一个满测集上，$\mathcal{E}^{\mathrm{UAMO}}_{\lambda_1\,\lambda_2\,\Phi,,,\theta}$ 表现出安德森局域化；也就是说，$\mathcal{E}^{\mathrm{UAMO}}_{\lambda_1\,\lambda_2\,\Phi,,,\theta}$ 具有一组完备的指数衰减特征向量。

固定这样的 $\lambda_1 < \lambda_2$ 并考虑 $\beta_0, \beta_1 \in \mathbb{D}$ 的以下变体：$\mathcal{E}_{\Phi,\theta,\beta_0,\beta_1}$ ，它们由 $\mathcal{E}^{\mathrm{UAMO}}_{\lambda_1\,\lambda_2\,\Phi,,,\theta}$ 给出：

$$\alpha_n = \begin{cases} \beta_n & n = 0, 1 \\ \alpha^{\mathrm{UAMO}}_n & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{3.3}$$

定理 3.1。对于任意递增函数 $f\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$，满足 $f(t) \to \infty$ 当 $t \to \infty$时，以及任意满足 $\lambda_1 < \lambda_2$ 的 $\lambda_1, \lambda_2 \in [0,1]$，存在 Φ, θ, β_0和 β_1，使得 $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\Phi,\theta,\beta_0,\beta_1}$呈现安德森局域化与几乎弹道运动共存的形式

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{f(t)}{t^2} \|X\mathcal{E}^t\delta_0\|^2 = \infty. \tag{3.4}$$

在整个讨论过程中，令 $f\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$ 表示满足以下条件的递增函数$f(t) \to \infty$ 当 $t \to \infty$时。式 (3.4) 中的动力学结论有时称为 准弹道运动；参见 [34]，其中介绍了可从自伴算子的定量重复性质推导出的结果。

3.1. 判别式估计。 我们需要对一个适当周期问题的判别式作一个简单估计；当频率 Φ 为有理数时，该周期问题自然出现。给定$\alpha \in \mathbb{D}$ 和 $z \in \mathbb{C}$，相应的 ***Szegő*** 矩阵 为

$$\mathrm{Sz}(\alpha, z) = \frac{1}{\rho}\begin{bmatrix} z & -\overline{\alpha} \\ -\alpha z & 1 \end{bmatrix}, \quad \rho := \sqrt{1-|\alpha|^2}. \tag{3.5}$$

利用这一点，我们定义

$$\mathrm{Sz}_{[n,m]}(z) \equiv \mathrm{Sz}_{[n,m]}(z;\mathcal{E}) := \mathrm{Sz}(\alpha_n, z)\,\mathrm{Sz}(\alpha_{n-1}, z)\cdots\mathrm{Sz}(\alpha_m, z) \tag{3.6}$$

若 $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ 是周期性的，即对于某个 $p \in \mathbb{N}$, $\alpha_{n+p} \equiv \alpha_n$，我们可以借助 Floquet 分解研究相应 CMV 算子 $\mathcal{E}$ 的谱特性与动力学特性。这里简要回顾一下。首先，由于我们不要求周期是最小的，因此可任意假设周期为 $p = 2q$ ，其中 $q \in \mathbb{N}$。单值化矩阵 和判别式 分别定义为

$$\mathrm{mon}(z) = z^{-q}\,\mathrm{Sz}_{[1,2q]}(z), \quad \mathrm{discr}(z) = \mathrm{trace}\,\mathrm{mon}(z). \tag{3.7}$$

方程 $\operatorname{discr}(z) = 0$ 有 $2q$ 个互不相同的解，我们按照辐角对它们排序，并记为 $z_1(\pi/2), \dots, z_{2q}(\pi/2)$。接着，我们对 $z_j(k)$作连续延拓，使得

$$\operatorname{discr} z_j(k) = 2\cos k, \quad k \in [0,\pi],\ j = 1,2,\dots,2q. \tag{3.8}$$

对（3.8）两边求导并重新整理，得到

$$\frac{\mathrm{d}z_j}{\mathrm{d}k} = -\frac{2\sin k}{\operatorname{discr}'(z_j(k))}. \tag{3.9}$$

利用求导乘积法则可知，

$$|\operatorname{discr}'(z)| \le C^q, \quad z \in \partial\mathbb{D}, \tag{3.10}$$

其中 $C = C(\alpha) > 0$ 是一个仅依赖于 $\max|\alpha_j|$ 的常数。将这一结果与（3.9）结合，可得到以下有用的初等下界

$$\left|\frac{\mathrm{d}z_j}{\mathrm{d}k}\right| \ge 2C^{-q}\sin k, \quad k \in [0,\pi]. \tag{3.11}$$

3.2. 动力学估计。 我们首先证明两个与当前模型无关的引理：第一个给出几乎弹道运动的迭代判据，第二个则为一般酉算子提供一些有用的界。

引理 3.2。 设 U 是作用于 $\ell^2(\mathbb{Z})$ 上的酉算子。若存在满足以下条件的 $T_m \to \infty$

$$\frac{1}{T_m}\sum_{t=T_m}^{2T_m-1}\sum_{|n|\ge\frac{T_m}{f(T_m)^{1/5}}}|\langle\delta_n, U^t\delta_0\rangle|^2 \ge \frac{1}{f(T_m)^{2/5}}, \qquad m \in \mathbb{N}, \tag{3.12}$$

于是 (3.4)成立。

证明。 对于每个 $m \in \mathbb{N}$，（3.12）意味着存在某个整数 $t_m \in [T_m, 2T_m - 1]$，使得

$$\sum_{|n|\ge\frac{T_m}{f(T_m)^{1/5}}}|\langle\delta_n, U^{t_m}\delta_0\rangle|^2 \ge \frac{1}{f(T_m)^{2/5}}.$$

但于是

$$\begin{aligned}
\limsup_{t\to\infty}\frac{f(t)}{t^2}\|XU^t\delta_0\|^2 &= \limsup_{t\to\infty}\frac{f(t)}{t^2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}|n|^2|\langle\delta_n, U^t\delta_0\rangle|^2 \\
&\ge \limsup_{m\to\infty}\frac{f(t_m)}{t_m^2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}|n|^2|\langle\delta_n, U^{t_m}\delta_0\rangle|^2 \\
&\ge \limsup_{m\to\infty}\frac{f(t_m)}{(2T_m)^2}\frac{T_m^2}{f(T_m)^{2/5}}\sum_{|n|\ge\frac{T_m}{f(T_m)^{1/5}}}|\langle\delta_n, U^{t_m}\delta_0\rangle|^2 \\
&\ge \limsup_{m\to\infty}\frac{f(T_m)^{1/5}}{4} \\
&= \infty,
\end{aligned}$$

正如所声称的。 □

引理 3.3。设 $\mathcal{H}$ 是一个希尔伯特空间，$P\colon\ \mathcal{H}\to\mathcal{H}$ 是一个正交投影，$U\colon\ \mathcal{H}\to\mathcal{H}$ 是酉算子，且 $\delta=\varphi+\psi$ 是一个单位向量，满足 $\langle\varphi、\ \psi\rangle=0$。那么，

$$\frac{1}{T}\sum_{t=T}^{2T-1}\|(\mathbf{1}-P)U^t\delta\|^2\geq\|\psi\|^2-3\left(\frac{1}{T}\sum_{t=T}^{2T-1}\|PU^t\psi\|^2\right)^{1/2}\tag{3.13}$$

对每个 $T\in\mathbb{N}$。

证明。由于 U 是酉算子，P 是正交投影，$\delta=\varphi+\psi$ 是单位向量，且$\langle\varphi,\ \psi\rangle=0$，(3.13) 的左端可以改写为

$$\begin{aligned}\frac{1}{T}\sum_{t=T}^{2T-1}\|(\mathbf{1}-P)U^t\delta\|^2&=\frac{1}{T}\sum_{t=T}^{2T-1}\left(\|U^t(\varphi+\psi)\|^2-\|PU^t(\varphi+\psi)\|^2\right)\\&=\|\varphi\|^2+\|\psi\|^2-\frac{1}{T}\sum_{t=T}^{2T-1}\left(\|PU^t\varphi\|^2+\|PU^t\psi\|^2+2\,\mathrm{Re}\langle PU^t\varphi,PU^t\psi\rangle\right)\\&\geq\|\varphi\|^2+\|\psi\|^2-\frac{1}{T}\sum_{t=T}^{2T-1}\left(\|\varphi\|^2+\|PU^t\psi\|^2+2\,\mathrm{Re}\langle PU^t\varphi,PU^t\psi\rangle\right)\\&=\|\psi\|^2-[\![\psi,\psi]\!]_T-2\,\mathrm{Re}[\![\varphi,\psi]\!]_T,\end{aligned}\tag{3.14}$$

其中

$$[\![x,y]\!]_T:=\frac{1}{T}\sum_{t=T}^{2T-1}\langle PU^tx,PU^ty\rangle,\quad x,y\in\mathcal{H},\ T\in\mathbb{N}.\tag{3.15}$$

由于 P是正交投影，且 U是酉算子，我们注意到，对任意的 x，y，直接有 $|[\![x,\ y]\!]_T|\leq\!|x\|\|y\|$ 。此外，由柯西–施瓦茨不等式，我们得到

$$\begin{aligned}|[\![x,y]\!]_T|&\leq\frac{1}{T}\sum_{t=T}^{2T-1}\|PU^tx\|\|PU^ty\|\\&\leq\left[\frac{1}{T}\sum_{t=T}^{2T-1}\|PU^tx\|^2\right]^{1/2}\left[\frac{1}{T}\sum_{t=T}^{2T-1}\|PU^ty\|^2\right]^{1/2}\\&=[\![x,x]\!]_T^{1/2}[\![y,y]\!]_T^{1/2}.\end{aligned}\tag{3.16}$$

利用（3.16）来估计（3.14），我们注意到

$$\begin{aligned}&\left([\![\psi,\psi]\!]_T+2\,\mathrm{Re}[\![\varphi,\psi]\!]_T\right)^2\\&\quad=[\![\psi,\psi]\!]_T^2+4[\![\psi,\psi]\!]_T\cdot\mathrm{Re}[\![\varphi,\psi]\!]_T+4\left[\mathrm{Re}[\![\varphi,\psi]\!]_T\right]^2\\&\quad\leq[\![\psi,\psi]\!]_T+4[\![\psi,\psi]\!]_T+4[\![\psi,\psi]\!]_T\\&\quad=9[\![\psi,\psi]\!]_T,\end{aligned}$$

进而给出

$$\|\psi\|^2-[\![\psi,\psi]\!]_T-2\,\mathrm{Re}[\![\varphi,\psi]\!]_T\geq\|\psi\|^2-3[\![\psi,\psi]\!]_T^{1/2},\tag{3.17}$$

从而完成论证。 □

表述下一个引理需要引入一些额外的记号。给定一个幺正算子 U 和向量 $\varphi,\ \psi \in \mathcal{H}$, 混合谱测度 $\mu_{U,\,\varphi,\,\psi}$ 定义为

$$\int f(z)\,\mathrm{d}\mu_{U,\varphi,\psi}(z) := \langle \varphi, f(U)\psi\rangle \tag{3.18}$$

对于有界的博雷尔可测 f。当 $\varphi = \psi$时，我们简记$\mu_{U,\,\psi} = \mu_{U,\,\psi,\,\psi}$。如果谱测度$\mu_{U,\,\psi}$ 是绝对连续的（相对于 $\partial\mathbb{D}$上的勒贝格测度），我们将其密度记为$F_{U,\,\psi}$，即

$$\langle \psi, f(U)\psi\rangle = \int_{\partial\mathbb{D}} f(z)F_{U,\psi}(z)\,\frac{\mathrm{d}z}{2\pi\mathbf{i}z}. \tag{3.19}$$

在这种情况下，我们定义 $|||\psi|||_U := \|F_{U,\,\psi}\|_\infty^{1/2}$。否则，令 $|||\psi|||_U = \infty$。对于 $\partial\mathbb{D}$上的有限博雷尔测度 μ，我们将其傅里叶变换记为 $\widehat{\mu}$，定义为

$$\widehat{\mu}(t) = \int z^{-t}\,\mathrm{d}\mu(z), \quad t \in \mathbb{Z}. \tag{3.20}$$

同样，如果 $\partial\mathbb{D} \to \mathbb{C}$ 是勒贝格可积的，我们记作 F：

$$\widehat{F}(t) = \int_{\partial\mathbb{D}} z^{-t}F(z)\,\frac{\mathrm{d}z}{2\pi\mathbf{i}z}.. \tag{3.21}$$

引理 3.4. 设 $\mathcal{H}$ 是一个希尔伯特空间，$U:\ \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ 是酉算子，且 $\varphi,\psi \in \mathcal{H}$。如果$\mu_\psi$ 是绝对连续的，那么

$$\sum_{t\in\mathbb{Z}} |\langle \varphi, U^t\psi\rangle|^2 \le |||\psi|||^2\|\varphi\|^2 \tag{3.22}$$

证明。由柯西–施瓦茨不等式可知$\mu_{U,\,\varphi,\,\psi}$ 相对于$\mu_{U,\,\psi}$是绝对连续的，因此也相对于勒贝格测度绝对连续，所以其关于勒贝格测度的密度$F_{\varphi,\,\psi}$ 定义良好。由帕塞瓦尔公式，(3.22)左侧等价于

$$\sum_t |\widehat{\mu}_{U,\varphi,\psi}(t)|^2 = \|\widehat{\mu}_{U,\varphi,\psi}\|^2_{\ell^2(\mathbb{Z})} = \|F_{\varphi,\psi}\|^2_{L^2(\partial\mathbb{D})}. \tag{3.23}$$

令 $\mathcal{P}_{\mathrm{ac}}$ 表示到 U 的绝对连续子空间上的正交投影。记 $\varphi_{\mathrm{ac}} = \mathcal{P}_{\mathrm{ac}}\varphi$，我们注意到

$$|F_{\varphi,\psi}| \le F_\psi^{1/2}F_{\varphi_{\mathrm{ac}}}^{1/2} \tag{3.24}$$

由柯西–施瓦茨不等式，几乎处处成立。结合 (3.23) 可得

$$\sum_t |\widehat{\mu}_{U,\varphi,\psi}(t)|^2 \le \int_{\partial\mathbb{D}} |F_\psi||F_{\varphi_{\mathrm{ac}}}| \le |||\psi|||^2\|\varphi_{\mathrm{ac}}\|^2 \le |||\psi|||^2\|\varphi\|^2, \tag{3.25}$$

如前所述。 □

至此，一般性讨论告一段落。现在固定 $\lambda_1 < \lambda_2$，并考虑 β_0,β_1 的变体$\mathcal{E}_{\Phi,\theta,\beta_0,\beta_1}$，即酉几乎 Mathieu 算子$\mathcal{E}^{\mathrm{UAMO}}_{\lambda_1\,\lambda_2\,\Phi,,,\theta}$，它们在 (3.3) 中给出。

引理 3.5。对于所有 Φ_1、$\Phi_2 \in \mathbb{T}$ 和 $t \in \mathbb{R}$，有

$$\sup_{\theta\in\mathbb{T},\,\beta_j\in\mathbb{D}} \left\|\mathcal{E}^t_{\Phi_1,\theta,\beta_0,\beta_1}\delta_0 - \mathcal{E}^t_{\Phi_2,\theta,\beta_0,\beta_1}\delta_0\right\| \le 2\pi\lambda_2|\Phi_1 - \Phi_2|t^2.$$

注意到右侧显然不超过 2，因此该引理的结论仅在时间 $t \lesssim |\Phi_1 - \Phi_2|^{-1/2}$ 时才是非平凡的。

引理的证明3.5。考虑 $\mathcal{E}_j = \mathcal{E}_{\Phi_j,\,\theta,\,\beta_0,\,\beta_1}$。记 $\mathcal{E}_j = \mathcal{L}_j\mathcal{M}_j$ 为 $\mathcal{L}\mathcal{M}$ 分解，其中 $\mathcal{E}_j$ 如（1.4）所示。注意到 $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$（且二者均为酉算子），因此得到以下初等估计：

$$\|(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2)\psi\| = \|(\mathcal{M}_1 - \mathcal{M}_2)\psi\| \le 2\pi\lambda_2|\Phi_1 - \Phi_2|\|X\psi\|.$$

将这个估计与望远镜求和论证结合起来，我们得到

$$\left\|\mathcal{E}_1^t\delta_0 - \mathcal{E}_2^t\delta_0\right\| \le 2\pi\lambda_2|\Phi_1 - \Phi_2|\sum_{s=0}^{t-1}\|X\mathcal{E}_2^s\delta_0\|\,, \tag{3.26}$$

关于 θ, β_0, β_1 一致成立。

利用 $X\delta_0 = 0$ 和 $\|P(s)\| \le 2$，我们可以进一步估计（3.26）右端，从而得到

$$\left\|\mathcal{E}_1^t\delta_0 - \mathcal{E}_2^t\delta_0\right\| \le 2\pi\lambda_2|\Phi_1 - \Phi_2|\sum_{s=0}^{t-1}2s = 2\pi\lambda_2|\Phi_1 - \Phi_2|t(t-1), \tag{3.27}$$

由此即可得出所述结论。 □

引理 3.6。给定 $\Phi \in \mathbb{Q}$，存在常数 $C_1 = C_1(\Phi)$、$C_2 = C_2(\Phi) \in (0,\infty)$，使得对于任意 $\theta \in \mathbb{T}$ 以及任意 β_0、$\beta_1 \in \mathbb{D}$，都存在一个分解

$$\delta_0 = \varphi_{\theta,\beta_0,\beta_1} + \psi_{\theta,\beta_0,\beta_1} \tag{3.28}$$

其中 $\varphi = \varphi_{\theta,\,\beta_0,\,\beta_1}$ 和 $\psi = \psi_{\theta,\,\beta_0,\,\beta_1}$ 具有以下性质：

$$\langle\varphi,\psi\rangle = 0 \tag{3.29}$$

$$\|\psi\| \ge C_1 \tag{3.30}$$

$$|||\psi|||_{\mathcal{E}_{\Phi,\theta,\beta_0,\beta_1}} \le C_2. \tag{3.31}$$

证明。设 $\Phi \in \mathbb{Q}$ 给定。首先，考虑未扰动算子 $\mathcal{E}_{\Phi,\,\theta} := \mathcal{E}_{\Phi,\,\theta,\,\alpha_0,\,\alpha_1}$。将 $\Phi = p/q$ 写成最简分数，可知 $\mathcal{E}_{\Phi,\,\theta}$ 的周期为 $2q$。对于 $\theta \in \mathbb{T}$ 和$k \in [0,2\pi]$，记 $z_{1,\,\theta}(k)\ldots, z_{2q,\,\theta}(k)$为按辐角排序的 Floquet 特征值，并定义

$$I_\theta = z_{1,\theta}([\pi/3, 2\pi/3]). \tag{3.32}$$

将此与估计式（3.11）结合，得到

$$\ell(\Phi) := \inf_{\theta\in\mathbb{T}}|I_\theta| > 0. \tag{3.33}$$

我们声称，所需的 ψ 和 φ 可通过以下方式构造

$$\psi_{\theta,\beta_0,\beta_1} = \chi_{I_\theta}(\mathcal{E}_{\Phi,\theta,\beta_0,\beta_1})\delta_0, \quad \varphi_{\theta,\beta_0,\beta_1} = \delta_0 - \psi_{\theta,\beta_0,\beta_1}. \tag{3.34}$$

由于谱投影是正交投影，（3.29）自动成立。

对于 $n < m$，记 $\mathrm{Sz}_{[n,m]}(z,\mathcal{E}_{\Phi,\theta,\beta_0,\beta_1})$ 为 (3.6) 中定义的 $\mathcal{E}_{\Phi,\theta,\beta_0,\beta_1}$ 的 Szegő 矩阵。首先注意，应用 [26, 引理 2.2] 可得，对所有 $\theta \in \mathbb{T}$, $z \in I_\theta$ 和 $m \in \mathbb{Z}$，$\mathrm{Sz}_{[1,2mq]}(z,\mathcal{E}_{\Phi,\theta,\beta_0,\beta_1})$ 都一致有界。通过插值可知，对于 $\theta \in \mathbb{T}$, $z \in I_\theta$ 和 $n \in \mathbb{Z}$，$\mathrm{Sz}_{[1,n]}(z,\mathcal{E}_{\Phi,\theta,\beta_0,\beta_1})$ 一致有界。上述讨论意味着以下一致界

$$\sup\{\|\,\mathrm{Sz}_{[1,n]}(z,\mathcal{E}_{\Phi,\theta,\beta_0,\beta_1})\| : \theta \in \mathbb{T},\ z \in I_\theta,\ \beta_j \in \mathbb{D},\ n \in \mathbb{Z}\} < \infty. \tag{3.35}$$

这足以建立 Carathéodory 函数边界值的上界和下界，进而得到所需的估计 [38, Section 5]。更具体地说，所需的上界表述为 [38,Lemma 5.2]，而所需的下界则可

通过同样的辐角，利用 Jitomirskaya–Last 不等式中相应的下界推出。□

现在我们来到了最后一个引理，它给出了一个归纳方案，用于构造合适的Φ，使其在 θ、β_0 和 β_1 中一致地呈现所需的几乎弹道运动。

引理 3.7。存在一个无理数 $\Phi \in \mathbb{T}$，使得对每个 $\theta \in \mathbb{T}$ 和 $\beta_0,\ \beta_1 \in \mathbb{D}$，$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\Phi,\ \theta,\ \beta_0,\ \beta_1}$ 均满足 (3.12)。

证明。我们归纳地选取 $\Phi_m \in \mathbb{Q}$、T_m、Δ_m，使其满足以下性质：

(i) $\Phi_{m+1} - \Phi_m = 2^{-k_m!}$ 对某个满足以下条件的 $k_m \in \mathbb{N}$：对所有 m，均有 $k_m < k_{m+1}$。

(ii) 对每个 $\theta \in \mathbb{T}$、$\beta_0,\ \beta_1 \in \mathbb{D}$ 和满足 $|\Phi - \Phi_m| < \Delta_m$ 的 Φ，均有

$$\frac{1}{T_m}\sum_{t=T_m}^{2T_m-1}\sum_{|n|\geq \frac{T_m}{f(T_m)^{1/5}}} |\langle \delta_n, \mathcal{E}^t_{\Phi,\theta,\beta_0,\beta_1}\delta_0\rangle|^2 \geq \frac{1}{f(T_m)^{2/5}}. \tag{3.36}$$

(iii) 对每个 $k = 1, \dots, m$。

我们从 $\Phi_1 = 0$ 开始，并说明在给定 $T_1, \dots, T_{m-1}$、$\Delta_1, \dots, \Delta_{m-1}$、$\Phi_1, \dots, \Phi_m$ 的情况下，如何选取 T_m、Δ_m、Φ_{m+1}。

注意，Φ_1 的选取和性质 (i) 确保每个 Φ_m 都是有理数，并且序列 $\{\Phi_m\}$ 收敛到无理极限 $\Phi = \lim \Phi_m$。事实上，上述假设意味着 $\Phi_{m+1} = p_m/2^{k_m!}$ 其中 $p_m \in \mathbb{N}$，并且

$$|\Phi - \Phi_{m+1}| = \sum_{j=m+1}^{\infty} 2^{-k_j!} \leq 2^{-k_{m+1}!+1}. \tag{3.37}$$

如果 Φ 是有理数，设为 $\Phi = r/s$，那么就有

$$|\Phi - \Phi_{m+1}| = \left|\frac{r}{s} - \frac{p_m}{2^{k_m!}}\right| \geq \frac{1}{s\,2^{k_m!}}$$

对任意 m。因此，由于 $2^{k_m!-k_{m+1}!^{+1}} \to 0$，这将与 (3.37) 矛盾。由此可得 Φ 是无理数。

给定 Φ_m，应用引理 3.6 并令 $C_1 = C_1(\Phi_m)$ 和 $C_2 = C_2(\Phi_m)$，使用该引理中的记号。选择 $T_m \geq 2T_{m-1}$ (并满足条件 $T_1 \geq 2$，从而得到$T_m \geq 2^m$)，使得

$$C_1^2 - 3\sqrt{\frac{2C_2^2}{f(T_m)^{1/5}}} \geq \frac{2}{f(T_m)^{2/5}}.$$

这是可行的，因为在此阶段，C_1，C_2均为固定值，且 $f(T) \to \infty$如 $T \to \infty$。

给定 $\theta \in \mathbb{T}$ 和 $\beta_0,\ \beta_1 \in \mathbb{D}$，考虑分解

$$\delta_0 = \varphi_{\theta,\beta_0,\beta_1} + \psi_{\theta,\beta_0,\beta_1}$$

由引理3.6给出。

记投影到 张成空间$\{\delta_n : |n| < {}_f{}^{T_m}_{T_m}{}^{()^{1/5}}\}$ 为 P_m，我们首先利用引理 3.4注意到

$$\begin{aligned}\frac{1}{T_m}\sum_{t=T_m}^{2T_m-1}\|P_m\mathcal{E}^t_{\Phi_m,\theta,\beta_0,\beta_1}\psi_{\theta,\beta_0,\beta_1}\|^2 &\leq \frac{1}{T_m}\#\left\{n : |n| < \frac{T_m}{f(T_m)^{1/5}}\right\}|||\psi_{\omega,\lambda_0,\lambda_1}|||^2 \\ &\leq \frac{2C_2^2}{f(T_m)^{1/5}}.\end{aligned}$$

结合引理3.3，可得下界

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{T_m}\sum_{t=T_m}^{2T_m-1}\sum_{|n|\geq\frac{T_m}{f(T_m)^{1/5}}}|\langle\delta_n,\mathcal{E}^t_{\Phi_m,\theta,\beta_0,\beta_1}\delta_0\rangle|^2\\
&=\frac{1}{T_m}\sum_{t=T_m}^{2T_m-1}\|(\mathbf{1}-P_m)\mathcal{E}^t_{\Phi_m,\theta,\beta_0,\beta_1}\delta_0\|^2\\
&\geq\|\psi\|^2-3\left(\frac{1}{T_m}\sum_{t=T_m}^{2T_m-1}\|P_m\mathcal{E}^t_{\Phi_m,\theta,\beta_0,\beta_1}\psi_{\Phi_m,\theta,\beta_0,\beta_1}\|^2\right)^{1/2}\\
&\geq C_1^2-3\sqrt{\frac{2C_2^2}{f(T_m)^{1/5}}}\\
&\geq\frac{2}{f(T_m)^{2/5}}.
\end{aligned}$$

根据引理 3.5，我们于是可以选取 $\Delta_m>0$，使得对于任意 $\Phi\in\mathbb{T}$ 满足 $|\Phi-\Phi_m|\leq\Delta_m$，都有

$$\frac{1}{T_m}\sum_{t=T_m}^{2T_m-1}\sum_{|n|\geq\frac{T_m}{f(T_m)^{1/5}}}|\langle\delta_n,\mathcal{E}^t_{\Phi_m,\theta,\beta_0,\beta_1}\delta_0\rangle|^2\geq\frac{1}{f(T_m)^{2/5}}.$$

最后，选取足够大的 $k_m\geq k_{m-1}+1$ （约定 $k_0=0$），使得 $|\Phi_{m+1}-\Phi_k|<\Delta_k$ 对于 $k=1,\ldots,m$。

这一过程保证 (i)–(iii) 对所有 m 均成立，因此极限 $\Phi=\lim_{m\to\infty}\Phi_m$ 是无理数，并且对每个 $\theta\in\mathbb{T}$、β_0，$\beta_1\in\mathbb{D}$ 和 m 均满足以下条件：

$$\frac{1}{T_m}\sum_{t=T_m}^{2T_m-1}\sum_{|n|\geq\frac{T_m}{f(T_m)^{1/5}}}|\langle\delta_n,\mathcal{E}^t_{\Phi_m,\theta,\beta_0,\beta_1}\delta_0\rangle|^2\geq\frac{1}{f(T_m)^{2/5}}. \tag{3.38}$$

根据引理3.5，我们推得 (3.12) 对 $\mathcal{E}_{\Phi,\,\theta,\,\beta_0,\,\beta_1}$ 成立，证明至此完成。 □

定理 *3.1* 的证明。 设给定一个单调 $f:\ \mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ 满足 $\lim_{t\to\infty}f(t)=\infty$ 的对象。算子 $\mathcal{E}$ 将具有形式 (3.3)，其中 $\Phi\in\mathbb{T}$ 无理数通过应用引理 3.7 选取，而 $\beta_j\in\mathbb{D}$。

这确保了近弹道输运陈述（3.4）对算子$\mathcal{E}=\mathcal{E}_{\Phi、\,\theta、\,\beta_0、\,\beta_1}$ 形式为（3.4）并采用此 Φ的选择时，对 $\theta\in\mathbb{T}$ 和β_0的 $\beta_1\in\mathbb{D}$所有选择均一致成立。另一方面，由于存在一条遵循 [46, 定理 10.2.5][5] 和 [14, 定理 2.9], 的 $\theta\in\mathbb{T}$ 与 β_0，$\beta_1\in\mathbb{D}$ 使得$\mathcal{E}_{\Phi、\,\theta、\,\beta_0}$均具有带指数衰减的特征函数的纯点谱（事实上，几乎所有选择都适用），从而证明得证。 □

定理 *1.2* 的证明。 这是定理3.1的直接推论。 □

[5]严格来说， [46] 适用于半直线情形中改变最左侧的 Verblunsky系数；然而，可以将该结果推广到扩展 CMV情形。 除此之外，作者将在即将发表的工作中讨论这一问题 [15]。

参考文献

[1] A. Ahlbrecht、V. B. Scholz 和 A. H. Werner。一维整数格上的无序量子行走。《数学物理杂志》，52(10):102201, 48，2011年。arXiv:1101.2298。[2] A. Ahlbrecht、H. Vogts、A. H. Werner 和 R. F. Werner。带随机硬币的量子行走的渐近演化。《数学物理杂志》，52(4):042201, 36，2011年。arXiv:1009.2019。[3] A. Ambainis、E. Bach、A. Nayak、A. Vishwanath 和 J. Watrous。一维量子行走。载于第三十三届 ACM 计算理论年会论文集——STOC ’01，第37–49页，希腊赫尔松尼索斯，2001年。ACM出版社。[4] W. Amrein 和 V. Georgescu。量子力学中束缚态与散射态的刻画。技术报告，日内瓦大学，1973 年。[5] J. Asch、O. Bourget 和 A. Joye。远离相变的 Chalker-Coddington模型的动力学局域化。《统计物理学杂志》，147(1):194–205，2012年。arXiv:1112.4093。[6] H. Boumaza 和 A. Khouildi。随机散射拉链的动力学局域化。《数学物理快报》，115(3):64，2025年。arXiv:2407.19158。[7] J. Bourgain、F. A. Grünbaum、L. Velázquez 和 J. Wilkening。子空间的量子回归与算子值Schur函数。《数学物理通讯》，329(3):1031–1067，2014年。arXiv:1302.7286。[8] O. Bourget、J. S. Howland 和 A. Joye。酉带矩阵的谱分析。《数学物理通讯》，243:191–227，2003年。arXiv:math-ph/0204016。[9] M.-J. Cantero、F. A. Grünbaum、L. Moral 和 L. Velázquez。矩阵值Szegő多项式与量子随机游走。《纯粹与应用数学通讯》，63(4):464–507，2010年。arXiv:0901.2244。[10] M.-J. Cantero、F. A. Grünbaum、L. Moral 和 L. Velázquez。量子行走的CGMV方法。《量子信息处理》，11(5):1149–1192，2012年。[11] M. J. Cantero、L. Moral 和 L. Velázquez。五对角矩阵与单位圆上的正交多项式的零点。《线性代数及其应用》，362:29–56，2003年。arXiv:math/0204300。[12] C. Cedzich 和 J. Fillman。通过反射证明量子行走和CMV矩阵不存在束缚态。《谱理论杂志》，14(4):1513–1536，2024年。arXiv:2402.11024。[13] C. Cedzich、J. Fillman、L. Li、D. C. Ong 和 Q. Zhou。通过规范对称确定殆周期CMV矩阵的精确迁移率边。《国际数学研究通知》，第6906–6941页，2024年。arXiv:2307.10909。[14] C. Cedzich、J. Fillman 和 D. C. Ong。关于幺正几乎马丢算子的一切。《数学物理通讯》，403(2):745–794，2023年。arXiv:2112.03216。[15] C. Cedzich、J. Fillman 和 L. Velázquez。预印本。[16] C. Cedzich 、 T. Geib 和 R. F. Werner。将量子行走分解为移位与硬币操作的算法。《数学物理快报》，112(85)，2022年。arXiv:2102.12951。[17] C. Cedzich、T. Rybár、A. H. Werner、A. Alberti、M. Genske 和 R. F. Werner。电场中的量子行走传播。《物理评论快报》，111:160601，2013年。arXiv:1302.2081。[18] D. Damanik、J. Fillman 和 D. C. Ong。通过转移矩阵的幂律界估计整数格上量子行走的扩散。《纯粹与应用数学杂志》，105(3):293–341，2016年。arXiv:1505.07292。[19] D. Damanik、T. Malinovitch 和 G. Young。什么是弹道输运？《谱理论杂志》，2024年10月。[20] S. De Bièvre 和 F. Germinet。随机二聚薛定谔算子的动力学局域化。《统计物理学杂志》，98(5-6):1135–1148，2000年。arXiv:math-ph/9907006。[21] R. del Rio、S. Jitomirskaya、Y. Last 和 B. Simon。具有奇异连续谱的算子。IV. Hausdorff维数、秩一微扰与局域化。《数学分析杂志》，69:153–200，1996年。[22] V. Enss。量子力学势散射的渐近完备性：I. 短程势。《数学物理通讯》，61(3):285–291，1978年。[23] V. Enss 和 K. Veselić。含时哈密顿量的束缚态与传播态。《亨利·庞加莱研究所年刊A辑》，39(2):159–191，1983年。[24] R. P. Feynman。用计算机模拟物理。《国际理论物理学杂志》，21:467–488，1982年。[25] J. Fillman 和 D. C. Ong。极限周期CMV算子的纯奇异连续谱及其在量子行走中的应用。《泛函分析杂志》，272(12):5107–5143，2017年。arXiv:1610.06159。[26] J. Fillman、D. C. Ong 和 T. Vandenboom。遍历CMV算子的谱逼近及其在量子行走中的应用。《数学分析与应用杂志》，467 147，2017 1 132 1712 04620 ( ): – 。arXiv: . .[27] J. Fillman、D. C. Ong 和 Z. Zhang。酉临界殆Mathieu算子的谱特征。《数学物理通讯》，351(2):525–561，2017年。arXiv: 1512.07641。

[28] M. Genske、W. Alt、A. Steffen、A. H. Werner、R. F. Werner、D. Meschede 和 A. Alberti。用单个原子实现电量子行走。《物理评论快报》，110:190601，2013年5月。arXiv:1302.2094。[29] G. Grimmett、S. Janson 和 P. F. Scudo。量子随机游走的弱极限。《物理评论E辑》，69(2):026119，2004年。arXiv:quant-ph/0309135。[30] F. A. Grünbaum、C. F. Lardizabal 和 L. Velázquez。量子马尔可夫链：回归、Schur函数与分裂规则。《亨利·庞加莱年刊》，21(1):189–239，2020年。arXiv:1907.01310。[31] F. A. Grünbaum、L. Velázquez、A. H. Werner 和 R. F. Werner。离散时间幺正演化的回归。《数学物理通讯》，320(2):543–569，2013年。arXiv:1202.3903。[32] E. Hamza、A. Joye 和 G. Stolz。幺正安德森模型的动力学局域化。《数学物理分析与几何》，12(4):381–444，2009年。arXiv:0903.0028。[33] S. Jitomirskaya、H. Schulz-Baldes 和 G. Stolz。随机聚合物模型中的离域。《数学物理通讯》，233(1):27–48，2003年。arXiv:math-ph/0405024。[34] S. Jitomirskaya 和 S. Zhang。奇异连续谱测度的定量连续性及准周期薛定谔算子的算术判据。《欧洲数学学会杂志》，24:1723–1767，2022年。[35] A. Joye 和 M. Merkli。随机环境中量子行走的动力学局域化。《统计物理学杂志》，140(6):1025–1053，2010年。arXiv:1004.4130。[36] M. Karski、L. Förster、J.-M. Choi、A. Steffen、W. Alt、D. Meschede 和 A. Widera。利用单个光学囚禁原子在位置空间中的量子行走。《科学》，325(5937):174–177，2009年。arXiv:0907.1565。[37] Y. Last。量子动力学与奇异连续谱的分解。《泛函分析杂志》，142(2):406–445，1996年。[38] L. Li、D. Damanik 和 Q. Zhou。小准周期Verblunsky系数CMV矩阵的绝对连续谱。《美国数学会汇刊》，375(9):6093–6125，2022年。arXiv:2102.00586。[39] Q. Lin、C. Cedzich、Q. Zhou 和 P. Xue。Aubry-André-Harper模型中局域化与谱相变的实验观测，2025年。arXiv:2508.08255。[40] D. A. Meyer。从量子元胞自动机到量子格气。《统计物理学杂志》，85(5):551–574，1996年。arXiv:quant-ph/9604003。[41] M. Reed 和 B. Simon。《现代数理物理方法》，第III卷：散射理论。学术出版社，纽约，1979年。[42] D. Ruelle。关于势散射理论中束缚态的一则说明。《新物理学杂志A辑》(1965–1970)，61(4):655–662，1969年。[43] A. Schreiber、K. N. Cassemiro、V. Potocek、A. Gabris、P. J. Mosley、E. Andersson、I. Jex 和 C. Silberhorn。沿线行走的光子：一种具有可调硬币算符的量子行走。《物理评论快报》，104(5):050502，2010年。arXiv:0910.2197。[44] B. Simon。弹道运动的缺失。《数学物理通讯》，134(1):209–212，1990年11月。[45] B. Simon。《单位圆上的正交多项式》，第1部分，第54卷，《美国数学会专题讲座出版物》第1部分。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2005年。经典理论。[46] B. Simon。《单位圆上的正交多项式》，第2部分，第54卷，《美国数学会专题讲座出版物》第2部分。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2005年。谱理论。[47] B. Simon。CMV矩阵：五年之后。《计算与应用数学杂志》，208(1):120–154，2007年。arXiv:math/0603093。[48] P. Xue、H. Qin、B. Tang 和 B. C. Sanders。单光子在空间中进行一维量子行走时准周期动力学的观测。《新物理学杂志》，16(5):053009，2014年。arXiv:1312.0123。[49] F. Yang。幺正几乎马丢算子的安德森局域化。《非线性》，37(8):论文编号085010，共23页，2024年。arXiv:2201.05779。[C. Cedzich] 数学与计算机科学学院，哈根远程大学，Universitätsstr. 1，58097 哈根，德国。电子邮箱：christopher.cedzich@fernuni-hagen.de[J. Fillman] 数学系，德克萨斯农工大学，科利奇站，TX 77843，美国。电子邮箱：fillman@tamu.edu[L. Velázquez] 应用数学系与IMA，萨拉戈萨大学，María de Luna 3，50018 萨拉戈萨，西班牙。电子邮箱：velazque @unizar.es