arXiv:2603.03145v1 [math.AP] 3 Mar 2026

均值对环面上 Majda–Biello 系统临界适定性的影响

Ke Wang 和 Xin Yang

摘要

本文研究初始数据 u_0 的均值如何影响下述Majda-Biello系统局部适定性的临界指标：

$$\begin{cases} u_t + u_{xxx} + vv_x = 0, \\ v_t + \alpha v_{xxx} + (uv)_x = 0, \\ (u,v)\,|_{t=0} = (u_0, v_0) \in H^s(\mathbb{T}) \times H^s(\mathbb{T}), \end{cases} \qquad x \in \mathbb{T},\ t \in \mathbb{R},$$

其中 $\mathbb{T}$ 表示周期环面，色散系数 α 限制在$(0,4] \setminus \{1\}$ 内，这对应于共振情形。此前，在 u_0的零均值假设下，Oh（Int. Math. Res. Not., (18):3516-3556, 2009）确定了初始数据关于 C^3 局部适定性的Sobole夫正则性的临界指标 $s^*(\alpha)$。特别地，Oh证明了

$$s^*(\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{for } \alpha \text{ such that } \sqrt{12/\alpha - 3} \in \mathbb{Q}\ , \\ \frac{1}{2}, & \text{for a.e. } \alpha \text{ such that } \sqrt{12/\alpha - 3} \notin \mathbb{Q}\ . \end{cases}$$

本文允许 u_0 的均值非零，发现当 $\sqrt{12/\alpha - 3} \in \mathbb{Q}$时，临界指标 $s^*(\alpha)$可从1降至$\frac{1}{2}$。对于 α的其他取值，除一个零测集外，我们还论证临界指标 $s^*(\alpha)$为$\frac{1}{2}$，而与 u_0的均值无关。从 u_0中减去均值后，原来的Majda-Biello系统被略作修改，从而包含一阶项，但初始数据为零均值。我们证明的关键在于引入精细化的丢番图逼近理论，以刻画这些额外一阶项所引起的受扰色散结构的本质共振效应。结果表明，仅当 $\sqrt{12/\alpha - 3} \in \mathbb{Q}$时，共振函数的下界才能得到改进，从而使局部适定性的临界指标可以更小。

目录

1 引言 2 2 预备知识 8 3 定理 1.1 的证明 113.1 压缩映射论证.11 3.2 命题 3.1 的证明.12 3.2.1 情形 1：$\beta \neq 3n^2, n \in \mathbb{N}$ .13 3.2.2 情形 2：$\beta = 3n^2,\ n \in \mathbb{N}$ .17

2010年数学学科分类。35Q53；35G55；35L56 关键词和短语。KdV-KdV系统；Majda-Biello系统；局部适定性；傅里叶限制空间；丢番图逼近理论。

4 定理 1.4的证明 **19**
4.1 最小 γ-偏置类型指标 ν_γ 与 γ-偏置无理测度 μ_γ .19 4.1.1 ν_γ 与 μ_γ 的定义.19 4.1.2 ν_γ 与μ_γ 之间的关系.20 4.1.3 ν_γ 与 μ_γ 的性质.21 4.2 双线性估计.23 4.2.1 双线性估计主要部分的证明.23 4.2.2 双线性估计辅助部分的证明.30

5 适定性差结果 **32**
5.1 定理 1.2的证明.33 5.2 定理 1.5的证明.36

1 引言

周期区域中Majda-Biello系统的初值问题如下

$$\begin{cases} u_t + u_{xxx} + vv_x = 0, \\ v_t + \alpha v_{xxx} + (uv)_x = 0, \\ (u,v)\mid_{t=0} = (u_0, v_0) \in H^s(\mathbb{T}) \times H^s(\mathbb{T}), \end{cases} \qquad x \in \mathbb{T},\, t \in \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

其中 $\mathbb{T} = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$表示长度为 2π的周期环面，色散系数为 $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$， H^s 指Sobole夫空间。该系统由Majda和Biello在 [16] 中提出，作为描述旋转流体（如地球的海洋和大气）中行星波之间非线性共振相互作用的约化渐近模型。

Majda-Biello系统是特殊的耦合 KdV 系统。我们首先回顾 KdV 方程的初值问题:

$$\begin{cases} u_t + u_{xxx} + uu_x = 0, \\ u\mid_{t=0} = u_0 \in H^s(\mathbb{G}), \end{cases} \tag{1.2}$$

其中 $\mathbb{G} = \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{T}$。适定性问题（低正则性）所问的是使 (1.2) 适定的最小 s。经过五十多年的发展，该问题的研究已取得令人满意的结果；例如参见 [1–5, 7, 9–15, 17, 18]。特别地，我们列举一些处理 $s \le 0$ 情形的有影响的工作。首先，通过引入傅里叶限制空间，Bourgain 对 $s \ge 0$ 建立了 (1.2) 在 $H^s(\mathbb{R})$ 与 $H^s(\mathbb{T})$ 中的整体适定性。随后，Kenig、Ponce 与 Vega [13] 进一步改进了该结果，证明了在 $H^{-\frac{3}{4}+}(\mathbb{R})$ 与 $H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{T})$ 中的局部适定性。相应的整体适定性由 Colliander 、 Keel 、 Staffilani 、 Takaoka 与 Tao [5]利用 I-方法得到证明。端点情形 $s = -\frac{3}{4}$ 在 $H^s(\mathbb{R})$ 中由 Gūo [7] 与 Kishīmoto [15] 证明。最后，利用 KdV 方程 (1.2) 的完全可积结构，Kappeler 与 Topalov [9], 对 $s \ge -1$ 建立了 (1.2) 在 $H^s(\mathbb{T})$ 中的整体适定性，Killip 与 Visan̄ [14]对 $s \ge -1$ 建立了其在 $H^s(\mathbb{R})$ 中的整体适定性。Molinet [17, 18]证明了指标 -1 对 $\mathbb{R}$情形与 $\mathbb{T}$ 情形均为最优。此外，若将适定性加强为解析适定性，即解映射是解析的而非仅仅连续，则最优指标在 $\mathbb{R}$ 情形为 $-\frac{3}{4}$，在 $\mathbb{T}$ 情形为 $-\frac{1}{2}$，参见 Christ、Colliander 与 Tao 的 [4]。

在实际应用中，可以将两个或多个 KdV 方程耦合起来，以模拟复杂现象。最广泛使用的模型包括 Majda-Biello系统 [8], Hirota-Satsuma系统 [16], 和 Gear-Grimshaw系统 [6]。得益于单个KdV方程适定性理论的发展，Oh [20] 在研究 Majda-Biello

系统

$$\begin{cases} u_t + u_{xxx} + vv_x = 0, \\ v_t + \alpha v_{xxx} + (uv)_x = 0, & x \in \mathbb{G},\, t \in \mathbb{R}. \\ (u,v)\,|_{t=0} = (u_0, v_0) \in H^s(\mathbb{G}) \times H^s(\mathbb{G}), \end{cases} \tag{1.3}$$

由于 Majda-Biello系统不再完全可积，最有效的方法是依赖于傅里叶限制空间中的压缩映射论证，这会自动导出解析适定性。因此，以下我们将重点讨论解析适定性，并用 $s^*_{\mathbb{G}}(\alpha)$ 表示使得对于任意 $s > s^*_{\mathbb{G}}(\alpha)$，方程组 (1.3) 在 $H^s(\mathbb{G}) \times H^s(\mathbb{G})$ 中局部解析适定的最小值。

当 $\alpha = 1$ 时，(1.3) 中两个方程的主要项都与单个KdV方程中的主要项一致，因此适定性问题可以用类似的方法处理。当 $\alpha < 0$ 和 $\alpha > 4$ 时，系统 (1.3) 不存在本质上的共振效应，结果表明 $s^*_{\mathbb{G}}(\alpha)$ 也与单个 KdV 情形中的指标相同。因此，具有挑战性的情形是 $\alpha \in (0, 4] \setminus \{1\}$。当 $\mathbb{G} = \mathbb{R}$ 时，Oh [20] 证明，对于任意 $\alpha \in (0, 4)$，$s^*_{\mathbb{R}}(\alpha) = 0$。之后，Yang 和 Zhang [23] 研究了端点情形 $\alpha = 4$，并发现 $s^*_{\mathbb{R}}(4) = \frac{3}{4}$。这些临界指标高于单个 KdV 情形中的指标，因而揭示了在共振情形 $\alpha \in (0, 4] \setminus \{1\}$ 下，单个KdV方程与耦合 KdV 系统 (1.3) 之间的本质差异。当 $\mathbb{G} = \mathbb{T}$ 时，Oh 在假设 u_0 具有零均值并结合丢番图逼近理论的情况下证明，对于几乎所有 $\alpha \in (0, 4] \setminus \{1\}$，$s^*_{\mathbb{T}}(\alpha) \in [\frac{1}{2}, 1]$，且 $s^*_{\mathbb{T}}(\alpha) = \frac{1}{2}$。假设 u_0 具有零均值是建立双线性估计 [13, 20] 所必需的。在单个 KdV 情形中，从初始数据中减去其均值后，新的初始数据会自动满足这一假设，而新方程会多出一阶项，但该项不会影响方程的共振结构。然而，由于耦合 KdV 系统中 u与 v 之间的相互作用，一阶项的出现可能会给系统带来额外的复杂性。因此，本文旨在探究对于满足 $\mathbb{G} = \mathbb{T}$ 且 $\alpha \in (0, 4] \setminus \{1\}$ 的 (1.3)，u_0 的均值是否以及如何影响临界指标 $s^*(\alpha)$。

对于初始数据 $u_0 \in H^s(\mathbb{T})$，其傅里叶变换定义为

$$\widehat{u}_0(\xi) = \int_0^{2\pi} e^{-ix\xi} u_0(x)\, dx.$$

因此，u_0 的均值可表示为 $\frac{1}{2\pi}\widehat{u}_0(0)$。对于 u_0 的均值非零的情况，即 $\widehat{u}_0(0) \neq 0$，我们作如下变换：

$$\widetilde{u}(x,t) = u(x,t) - \frac{1}{2\pi}\widehat{u}_0(0), \quad \widetilde{v}(x,t) = v(x,t).$$

为方便起见，我们记 $\beta = \frac{1}{2\pi}\widehat{u}_0(0)$。于是，目标问题 (1.1) 转化为如下问题。

$$\begin{cases} \widetilde{u}_t + \widetilde{u}_{xxx} + \widetilde{v}\widetilde{v}_x = 0, \\ \widetilde{v}_t + \alpha\widetilde{v}_{xxx} + \beta\widetilde{v}_x + (\widetilde{u}\widetilde{v})_x = 0, & x \in \mathbb{T}, t \in \mathbb{R}. \\ (\widetilde{u}, \widetilde{v})\,|_{t=0} = (u_0 - \beta, v_0) \in H^s(\mathbb{T}) \times H^s(\mathbb{T}), \end{cases} \tag{1.4}$$

(1.4) 的好处是，其初始数据 $\widetilde{u}(\cdot, 0)$ 的均值自动为零，且这种零均值性质随时间演化而保持不变。
(1.4) 的不足之处是多出了一阶项 $\beta\widetilde{v}_x$。对于 $\mathbb{T}$ 上的单个 KdV 方程，如 [3] 中所述，这个额外项不会造成任何问题。但对于特定系数下的耦合 KdV 系统，它确实会对临界指标 s^* 产生实质性影响，参见 [22]。

基于　对于 (1.4) 的形式，我们考虑以下带有额外一阶　er

项 βv_x 和零均值初值 u_0。

$$\begin{cases} u_t + u_{xxx} + vv_x = 0, \\ v_t + \alpha v_{xxx} + \beta v_x + (uv)_x = 0, \qquad\qquad x \in \mathbb{T},\, t \in \mathbb{R}, \\ (u,v)\mid_{t=0} = (u_0, v_0) \in H_0^s(\mathbb{T}) \times H^s(\mathbb{T}), \end{cases} \tag{1.5}$$

其中

$$H_0^s(\mathbb{T}) := \left\{ f \in H^s(\mathbb{T}) : \int_0^{2\pi} f(x)\, dx = 0 \right\}.$$

我们用 $s^*(\alpha,\beta)$ 表示使得对于任意 $s > s^*(\alpha,\beta)$，问题 (1.5) 在 $H_0^s(\mathbb{T})\times H^s(\mathbb{T})$ 中局部解析适定的最小值。我们首先研究 $\alpha = 4$ 的情形，该情形对应于最强的共振效应，并发现对于大多数 β 的取值，$s^*(4,\beta)$ 小于 $s^*(4,0)$。为方便记号起见，我们将“局部适定”简称为“LWP”。

定理 1.1。设 $\alpha = 4$，并假设问题 (1.5) 中的 u_0 具有零均值。那么对于任意，*(1.5)* 在 $H_0^s(\mathbb{T}) \times H^s(\mathbb{T})$ 中解析局部适定。

$$\begin{cases} s \geq 1, & for\ \beta = 3n^2, n \in \mathbb{N}, \\ s \geq 1/2, & for\ \beta \neq 3n^2, n \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{1.6}$$

在上述定理中，“解析局部适定”指解映射

$$\Phi : (u_0, v_0) \in H_0^s(\mathbb{T}) \times H^s(\mathbb{T}) \longmapsto (u,v) \in C\big([0,T]; H_0^s(\mathbb{T}) \times H^s(\mathbb{T})\big)$$

是解析的，其中存在时间 T 取决于 (u_0, v_0) 的范数。在这一要求下，定理 1.1 中的指标是尖锐的。事实上，如果 s 低于定理 1.1 中的阈值，那么对于某些 k，解映射甚至不是 C^k。

定理 1.2。在定理 *1.1* 的假设下，系统 *(1.5)* 在 $H_0^s(\mathbb{T}) \times H^s(\mathbb{T})$ 中不满足 C^k 局部适定性，若

$$\begin{cases} k \geq 2 \ and\ s < 1, & for\ \beta = 3n^2,\ n \in \mathbb{N}, \\ k \geq 3 \ and\ s < 1/2, & for\ \beta \neq 3n^2,\ n \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{1.7}$$

结合定理 1.1 和定理 1.2 的结果，我们得出，对于空间 $H_0^s(\mathbb{T}) \times H^s(\mathbb{T})$ 中以 $\alpha = 4$ 为初始数据的初值问题 (1.5)，其临界指标为

$$s^*(4,\beta) := \begin{cases} 1, & \text{for } \beta = 3n^2, n \in \mathbb{N}, \\ 1/2, & \text{for } \beta \neq 3n^2, n \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{1.8}$$

现在将这一结果应用于由 (1.1) 变换得到的 (1.4)，我们完整地回答了当 $\alpha = 4$ 时，u_0 的均值如何影响 (1.1) 的解析适定性的临界指标。对于任意 $\beta \in \mathbb{R}$，我们引入以下记号表示初始数据空间：

$$H_\beta^s(\mathbb{T}) \times H^s(\mathbb{T}) = \left\{ (u_0, v_0) \in H^s(\mathbb{T}) \times H^s(\mathbb{T}) : \frac{1}{2\pi}\widehat{u}_0(0) = \beta \right\}. \tag{1.9}$$

推论 1.3. 空间 $H_\beta^s(\mathbb{T}) \times H^s(\mathbb{T})$ 中以 $\alpha = 4$ 为初始数据的初值问题 (1.1) 的解析局部适定性临界指标为

$$s_\beta^*(4) = \begin{cases} 1, & for\ \beta = 3n^2, n \in \mathbb{N}, \\ 1/2, & for\ \beta \neq 3n^2, n \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{1.10}$$

我们 注意，当推论 1.3 中的 $\alpha = 4$ 和 $\beta = 0$ 时，我们恢复了 [20] 中的结果，即临界 al

指标为 1。与推论 1.3 中 $\alpha = 4$ 的其他情形相比，这里的新意在于，当初始数据 u_0 具有非零均值 β，且不具有 $3n^2$,$n \in \mathbb{N}$ 的形式时，我们将临界指标降低到了 1 2 。

接下来，我们讨论 $\alpha \in (0, 4) \setminus \{1\}$ 的情形。正如 Oh [20] 所发现的，这种情形下的共振效应与丢番图逼近理论密切相关，方程 (1.5) 在 $\beta = 0$ 时的适定性临界指标由数的最小型指数决定

$$R_\alpha := \sqrt{12/\alpha - 3}, \tag{1.11}$$

关于最小型指数的含义，参见 [20] 中的定义 1 和定义 2。在本文中，系数 β 在 (1.5) 中非零，因此我们引入偏置最小型指标，以纳入 β 的影响，更多细节参见定义 1.7。关于问题 (1.5) 的适定性结果，以下指标 $s_{\alpha,\ \beta}$ 至关重要:

$$s_{\alpha,\beta} := \max\{\nu_\lambda(c_1),\, \nu_\lambda(c_2)\}, \tag{1.12}$$

其中

$$c_1 = \frac{1}{2} + \frac{R_\alpha}{6}, \quad c_2 = \frac{1}{2} - \frac{R_\alpha}{6}, \quad \lambda = \frac{\beta}{\alpha R_\alpha}, \tag{1.13}$$

并且 ν_λ 表示定义 1.7 中所定义的最小 λ偏置型指标。我们引入 (1.12) 和 (1.13) 的原因将在推论 1.6 后说明。尽管无法用 α 和 β 显式表示 $s_{\alpha,\ \beta}$，但我们在命题 4.5 中证明，对于几乎处处的 $\alpha \in (0, 4) \setminus \{1\}$ 以及所有 $\beta \in \mathbb{R}$，都有 $s_{\alpha,\ \beta} = 0$ 。

定理 1.4。 设 $\alpha \in (0,4) \setminus \{1\}$, $\beta \neq 0$，并假设在问题 *(1.5)* 中， u_0 具有零均值。那么，修正的 ***Majda-Biello*** 系统 (1.5) 在 $H_0^s(\mathbb{T}) \times H^s(\mathbb{T})$ 中对

$$\begin{cases} s \geq \frac{1}{2}, & \text{if} \quad R_\alpha \in \mathbb{Q}, \\ s \geq 1, & \text{if} \quad R_\alpha \notin \mathbb{Q} \text{ and } s_{\alpha,\beta} \geq 1, \\ s > \frac{1+s_{\alpha,\beta}}{2}, & \text{if} \quad R_\alpha \notin \mathbb{Q} \text{ and } s_{\alpha,\beta} < 1. \end{cases}$$

此外，对几乎所有的 $\alpha \in (0, 4) \setminus \{1\}$，(1.5) 在 $H_0^s(\mathbb{T}) \times H^s(\mathbb{T})$ 中对 $s > \frac{1}{2}$具有解析局部适定性。-

如果要求解映射为 C^3，则上述指标也是尖锐的；精确陈述见下述定理。

定理 1.5。 在定理 *1.4* 的假设下，修正的 ***Majda-Biello*** 系统 (1.5)在 $H_0^s(\mathbb{T}) \times H^s(\mathbb{T})$ 中对 C^3 不具有局部适定性

$$\begin{cases} s < \frac{1}{2}, & \text{if} \quad R_\alpha \in \mathbb{Q}, \\ s < 1, & \text{if} \quad R_\alpha \notin \mathbb{Q} \text{ and } s_{\alpha,\beta} \geq 1, \\ s < \frac{1+s_{\alpha,\beta}}{2}, & \text{if} \quad R_\alpha \notin \mathbb{Q} \text{ and } s_{\alpha,\beta} < 1. \end{cases}$$

结合定理 1.4 和定理 1.5 的结果，我们得出，对于初值问题 (1.5)，当 $\alpha \in (0, 4) \setminus \{1\}$ 且 $\beta \neq 0$时，在空间 $H_0^s(\mathbb{T}) \times H^s(\mathbb{T})$ 中，临界指标为

$$s^*(\alpha,\beta) := \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{if} \quad R_\alpha \in \mathbb{Q}, \\ 1, & \text{if} \quad R_\alpha \notin \mathbb{Q} \text{ and } s_{\alpha,\beta} \geq 1, \\ \frac{1+s_{\alpha,\beta}}{2}, & \text{if} \quad R_\alpha \notin \mathbb{Q} \text{ and } s_{\alpha,\beta} < 1, \end{cases} \tag{1.14}$$

其中 $s_{\alpha,\ \beta}$ 见式 (1.12)。同时，对于任意固定的 $\beta \neq 0$, $s^*(\alpha,\ \beta)$, $= \frac{1}{2}$对几乎所有 $\alpha \in (0,\ 4) \setminus \{1$ $\}$.

现在将此结果应用于式 (1.4)，我们展示 u_0 的均值对 $\alpha \in (0, 4)$ 下式 (1.1) 临界指标的影响。

推论 1.6。考虑初值问题 (1.1)，其中 $\alpha \in (0,4)\setminus\{1\}$ 属于空间 $H^s_\beta(\mathbb{T})\times H^s(\mathbb{T})$，其中 $\beta \neq 0$。按 *(1.13)* 和 *(1.12)* 定义 c_1、c_2、λ 和 $s_{\alpha,\beta}$。那么，*(1.1)* 在空间 $H^s_\beta(\mathbb{T}) \times H^s(\mathbb{T})$ 中的解析局部适定性的临界指标为

$$s^*_\beta(\alpha) := \begin{cases} \frac{1}{2}, & if \quad R_\alpha \in \mathbb{Q}, \\ 1, & if \quad R_\alpha \notin \mathbb{Q} \ and \ s_{\alpha,\beta} \geq 1, \\ \frac{1+s_{\alpha,\beta}}{2}, & if \quad R_\alpha \notin \mathbb{Q} \ and \ s_{\alpha,\beta} < 1. \end{cases}$$

此外，对于任意固定的 $\beta \neq 0$, $s^*_\beta(\alpha) = \frac{1}{2}$，几乎对所有 $a \in (0,4) \setminus \{1\}$均成立。

我们想指出，当 $\alpha \in (0, 4)\setminus\{1\}$ 且 $\beta = 0$ 时，Oh [20] 发现临界指标为 1（若 $R_\alpha \in \mathbb{Q}$）。推论 1.6 中的结果将临界指标降至 $\frac{1}{2}$（当 $R_\alpha \in \mathbb{Q}$ 且 $\beta \neq 0$ 时）。

接下来，我们简要讨论本文的主要要点。按照处理色散方程的标准方法，关键在于研究与非线性项 vv_x 和 $(uv)_x$ （见 (1.5)）相关的共振函数。例如，采用 [20], 中的记号，(1.5) 中与项 vv_x 相关的共振函数为

$$H(\xi, \xi_1, \xi_2) = \xi^3 - (\alpha\xi_1^3 - \beta\xi_1) - (\alpha\xi_2^3 - \beta\xi_2), \quad \forall\, (\xi, \xi_1, \xi_2) \in \mathcal{A}, \tag{1.15}$$

其中

$$\mathcal{A} := \big\{(\xi, \xi_1, \xi_2) \in \mathbb{Z}^3 : \xi = \xi_1 + \xi_2\big\}.$$

关于共振函数的一般定义，请参见 (4.14)。固定 ξ 并代入 $\xi_2 = \xi - \xi_1$后，(1.15) 中的函数 H 可视为关于 ξ_1的函数，记作 $H^\xi(\xi_1)$:

$$H^\xi(\xi_1) = -3\alpha\xi\left(\xi_1^2 - \xi\xi_1 + \frac{\alpha-1}{3\alpha}\xi^2 - \frac{\beta}{3\alpha}\right) \tag{1.16}$$

$$= -3\alpha\xi\left[(\xi_1 - c_1\xi)(\xi_1 - c_2\xi) - \frac{\beta}{3\alpha}\right], \tag{1.17}$$

其中 c_1 和 c_2 在 (1.13) 中给出。

类似地，与项 $(uv)_x$ 相关的共振函数为

$$\widetilde{H}(\xi, \xi_1, \xi_2) = (\alpha\xi^3 - \beta\xi) - \xi_1^3 - (\alpha\xi_2^3 - \beta\xi_2), \quad \forall\, (\xi, \xi_1, \xi_2) \in \mathcal{A}. \tag{1.18}$$

固定 ξ_1后， H 可视为关于 ξ 的函数，并可因式分解为

$$\widetilde{H}(\xi, \xi_1, \xi_2) = \widetilde{H}^{\xi_1}(\xi) := 3\alpha\xi_1\left[(\xi - c_1\xi_1)(\xi - c_2\xi_1) - \frac{\beta}{3\alpha}\right]. \tag{1.19}$$

我们要指出的是，在 (1.17) 和 (1.19) 中保留相同的系数 c_1 和 c_2，是我们为 H 固定 ξ、同时为 H 固定 ξ_1 的主要原因。事实上，如果我们也为 H 固定 ξ，那么在分解 $\widetilde{H}(\xi, \xi_1, \xi_2)$ 时将产生不同的系数 d_1 和 d_2，例如参见 [20] 中的公式 (19)。由于 (1.17) 中的 $H^\xi(\xi_1)$ 和 (1.19) 中的 $\widetilde{H}^{\xi_1}(\xi)$ 具有相同的系数 c_1 和 c_2，因此对这两项的处理非常相似，所以下面的说明中我们将只关注 $H^\xi(\xi_1)$ 的分析。

当 $\alpha = 4$ 时， $h^\xi(\xi_1)$ 有重根： $\xi_1 = \xi/2$，这意味着 $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$ 且

$$H^\xi(\xi_1) = -3\xi\left[(2\xi_1 - \xi)^2 - \frac{\beta}{3}\right]. \tag{1.20}$$

如果 $\beta = 0$，则存在无穷多对 $(\xi, \xi_1) \in \mathbb{Z}^2$，使得共振函数 $H^\xi(\xi_1)$ 为零，这使得在空间中补偿导数损失变得困难。如果 $\beta = 3n^2$ 与 $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$，我们有

$$H^\xi(\xi_1) = -3\xi(2\xi_1 - \xi - n)(2\xi_1 - \xi + n), \tag{1.21}$$

那么也存在无穷多对 $(\xi, \xi_1) \in \mathbb{Z}^2$ 使得共振函数为零。只有当 $\beta \neq 3n^2$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$都成立时，$(2\xi_1 - \xi)^2 - \frac{\beta}{3}$ 才永不为零，因此可以提高该问题的适定性指标，如定理 1.1 所述。

接下来，当 $\alpha \in (0, 4) \setminus \{1\}$时，我们将 (1.17) 中的 $H^\xi(\xi_1)$ 写作 $H^\xi(\xi_1) = -3\alpha\xi\left[h^\xi(\xi_1) - \frac{\beta}{3\alpha}\right]$，其中

$$h^\xi(\xi_1) := (\xi_1 - c_1\xi)(\xi_1 - c_2\xi).$$

设 $|\xi| = N \gg 1$。若 ξ_1远离 $c_1\xi$和 $c_2\xi$，则 $|h^\xi(\xi_1)| \sim N^2 \gg \frac{|\beta|}{3\alpha}$，因此 $|H^\xi(\xi_1)|$有较大的下界 $\sim N^3$。若 ξ_1 接近 $c_1\xi$，则 $|\xi_1 - c_2\xi| \sim (c_1 - c_2)N$；同时，由 [20] 中的关键步骤可得

$$|\xi_1 - c_1\xi| = |\xi|\left|c_1 - \frac{\xi_1}{\xi}\right| \gtrsim |\xi| \frac{1}{|\xi|^{2+\nu(c_1)+\epsilon}} \sim N^{-1-\nu(c_1)-\varepsilon},$$

其中 $\nu(c_1)$称为 c_1 的最小型指数（见 [20]中的定义 1 和 2）。根据丢番图逼近理论，对于几乎所有的 c_1，都有 $\nu(c_1) \geq 0$ 和 $\nu(c_1) = 0$。当 $\nu(c_1) = 0$时，$|h^\xi(\xi_1)| \gtrsim N^{-\epsilon}$，这为 $|H^\xi(\xi_1)|$ 提供了下界 $N^{1-\varepsilon}$，条件是 $\beta = 0$。然而，在当前 $\beta \neq 0$的情形下，$|h^\xi(\xi_1)|$的下界 $N^{-\varepsilon}$并不支配 $\frac{|\beta|}{3\alpha}$，因此这一论证无法为 $|H^\xi(\xi_1)|$提供下界。为解决这个问题，必须揭示共振函数$H^\xi(\xi_1)$更精细的结构。事实上，当 $|\xi|$ 足够大时

$$|\xi|^2 \geq \frac{24|\beta|}{12 - 3\alpha}, \tag{1.22}$$

那么，我们可以将 $\frac{\beta}{3\alpha}$ 并入 $h^\xi(\xi_1)$，从而将共振函数 $H^\xi(\xi_1)$分解如下：

$$H^\xi(\xi_1) = -3\alpha\xi(\xi_1 - x_1)(\xi_1 - x_2), \tag{1.23}$$

其中

$$x_1 = \frac{1}{2}\xi + \frac{1}{6}\sqrt{(R_\alpha\xi)^2 + \frac{12\beta}{\alpha}}, \qquad x_2 = \frac{1}{2}\xi - \frac{1}{6}\sqrt{(R_\alpha\xi)^2 + \frac{12\beta}{\alpha}}, \qquad R_\alpha = \sqrt{12/\alpha - 3}. \tag{1.24}$$

$\xi > 0$ 的情形和 $\xi < 0$ 的情形可以用类似的方法处理，因此我们重点讨论 $\xi > 0$的情形。由假设 (1.22)，我们可以按照 ξ 的阶展开 x_1 和 x_2 如下：

$$x_1 = c_1\xi + \frac{\lambda}{\xi} + Q_1(\xi), \qquad x_2 = c_2\xi - \frac{\lambda}{\xi} + Q_2(\xi), \qquad \lambda := \frac{\beta}{\alpha R_\alpha}, \tag{1.25}$$

其中 $c_1 = \frac{1}{2} + \frac{R_\alpha}{6}$和 $c_2 = \frac{1}{2} - \frac{R_\alpha}{6}$如 (1.13) 中所定义，并且

$$|Q_j(\xi)| \leq \frac{12\lambda^2}{R_\alpha|\xi|^3} = O(|\xi|^{-3}), \qquad j = 1, 2.$$

分析中较具挑战性的部分在于 (1.23) 中 H^ξ 附近的共振集，也就是说，当 ξ_1 接近 x_1 或 x_2 时。不失一般性，我们考虑 ξ_1 接近 x_1 的区域。在此区域内，根据 (1.25)，ξ_1 也接近 $c_1\xi$，因此

$$|\xi_1 - x_2| \sim |c_1 - c_2|\xi \sim R_\alpha\xi.$$

因此， $H^{\xi}(\xi_1) \sim \xi^2(\xi_1 - x_1)$。根据 (1.25) 中 x_1 的表达式，

$$H^{\xi}(\xi_1) \sim \xi^3 \left[\frac{\xi_1}{\xi} - c_1 - \frac{\lambda}{\xi^2} + O\left(\frac{1}{\xi^4}\right) \right].$$

这启发我们考虑 $\left|c_1 - \frac{\xi_1}{\xi} + \frac{\lambda}{\xi^2}\right|$ 的下界估计；而当 $\beta = 0$ 时，我们只需考虑 $\left|c_1 - \frac{\xi_1}{\xi}\right|$。当 $\beta \neq 0$ 时，这与丢番图逼近类似，但多了一项 $\frac{\lambda}{\xi^2}$。因此，我们需要求出 $\left|c_1 - \frac{\xi_1}{\xi} + \frac{\lambda}{\xi^2}\right|$ 关于 ξ_1，$\xi \in \mathbb{Z}$ 的最佳下界，其中 $\lambda \neq 0$ 和 $|\xi|$ 较大。因此，基于最小型指数这一概念（例如参见 [20] 中的定义 1 和定义 2），我们通过纳入偏差将这一概念推广如下。

定义 1.7。若存在正常数 $K = K(\rho, \nu, \gamma)$ 和 $N = N(\rho, \gamma)$，使得不等式成立，则称实数 ρ 为 γ-偏置型 ν。

$$\left|\rho - \frac{m}{n} + \frac{\gamma}{n^2}\right| \geq \frac{K}{|n|^{2+\nu}}$$

对所有满足 $|n| > N$ 的 $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$，该式均成立。此外，

$$\nu_\gamma(\rho) := \inf\{\nu \in \mathbb{R} : \rho \text{ is of } \gamma\text{-biased type } \nu\}$$

称其为 ρ 的最小 γ-偏置型指标，其中若 $\{\nu \in \mathbb{R} : \rho$ 是 γ-偏置型 $\nu\}$ 空集，则下确界约定为 ∞。

在命题 4.5 中，我们发现，对于任意固定的 γ，几乎处处的 $\rho \in \mathbb{R}$ 都满足 $\nu_\gamma(\rho) = 0$。这意味着，无论 u_0 的均值 β 取何值，几乎处处的 $\alpha \in (0,4) \setminus \{1\}$ 的临界指标都相同。然而，当 $R_\alpha \in \mathbb{Q}$ 时，与已知事实 $\nu_0(c_1) = \nu_0(c_2) = \infty$ 相比，我们证明只要 $\lambda \neq 0$（这等价于 $\beta \neq 0$，因为 $\lambda = \frac{\beta}{\alpha R_\alpha}$），就有 $\nu_\lambda(c_1) = \nu_\lambda(c_2) = 0$。这使得临界适定性指标得以提升，如定理 1.4 和推论 1.6 所示。

本文的组织结构如下。第 2 节介绍记号，并给出一些有用的线性估计。接下来，我们在第 3 节证明最共振情形 $\alpha = 4$ 下的定理 1.1，并在第 4 节证明其他共振情形 $\alpha \in (0, 4) \setminus \{1\}$ 下的定理 1.4。第 3 节和第 4 节证明中的关键要素是双线性估计和偏置最小型指标理论。最后，我们在第 5 节论证适定性差结果，即定理 1.2 和定理 1.5。

2 预备知识

众所周知，当 $s > -\frac{3}{2}$ 时，H^s 中 KdV 型方程的适定性问题是次临界的。在这种情况下，我们可以对方程 (1.5) 进行不变缩放，使缩放后的初始数据在 H^s 中较小，这有助于建立适定性。

令 $\sigma \geq 1$，并通过以下定义的缩放 $(u, v) \longmapsto (u^\sigma, v^\sigma)$ 对方程 (1.5) 进行变换：

$$(u^\sigma, v^\sigma)(x, t) = \frac{1}{\sigma^2}(u, v)\left(\frac{x}{\sigma}, \frac{t}{\sigma^3}\right). \tag{2.1}$$

那么，u^σ 和 v^σ 定义在 $\mathbb{T}_\sigma := [0, 2\pi\sigma)$ 上，而 (u^σ, v^σ) 满足以下方程

$$\begin{cases} u_t^\sigma + u_{xxx}^\sigma + v^\sigma v_x^\sigma = 0, \\ v_t^\sigma + \alpha v_{xxx}^\sigma + \beta_\sigma v_x^\sigma + (u^\sigma v^\sigma)_x = 0, \qquad x \in \mathbb{T}_\sigma,\ t \in \mathbb{R}, \\ (u^\sigma, v^\sigma)\,|_{t=0} = (u_0^\sigma, v_0^\sigma) \in H^s(\mathbb{T}_\sigma) \times H^s(\mathbb{T}_\sigma), \end{cases} \tag{2.2}$$

其中

$$\beta_\sigma := \frac{\beta}{\sigma^2} \qquad \text{and} \qquad (u_0^\sigma, v_0^\sigma)(x) := \left(\frac{1}{\sigma^2} u_0\left(\frac{x}{\sigma}\right), \frac{1}{\sigma^2} v_0\left(\frac{x}{\sigma}\right)\right).$$

基于 $\mathbb{T}_\sigma$，我们将其频率空间记为 $\mathbb{Z}_\sigma := \{k \,|\, k = n/\sigma$，其中 $n \in \mathbb{Z}\}$。对于 $1 \le p < \infty$，如果满足 $f \in L^p(\mathbb{Z}_\sigma)$，则称其为

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{Z}_\sigma)} = \left(\int_{\mathbb{Z}_\sigma} |f(\xi)|^p \, d\xi\right)^{1/p} := \left(\frac{1}{2\pi\sigma} \sum_{\xi \in \mathbb{Z}_\sigma} |f(\xi)|^p\right)^{1/p} < \infty.$$

接着，我们将 $\mathbb{T}_\sigma$ 上的傅里叶变换定义为

$$\widehat{f}(\xi) = \int_0^{2\pi\sigma} e^{-ix\xi} f(x) \, dx, \quad \forall\, \xi \in \mathbb{Z}_\sigma.$$

结合傅里叶逆变换，我们可以将 f 重写如下：

$$f(x) = \int_{\mathbb{Z}_\sigma} e^{ix\xi} \widehat{f}(\xi) \, d\xi = \frac{1}{2\pi\sigma} \sum_{\xi \in \mathbb{Z}_\sigma} e^{ix\xi} \widehat{f}(\xi).$$

由于 (2.2) 是一个非线性系统，且 $(2.2)_2$ 含有一阶项 $\beta_\sigma v_x^\sigma$，我们首先研究如下带一阶项 $\beta_\sigma w_x$ 的齐次 KdV 方程 (2.3)：

$$\begin{cases} \partial_t w + \alpha w_{xxx} + \beta_\sigma w_x = 0, \quad x \in \mathbb{T}_\sigma,\, t \in \mathbb{R}, \\ w(0) = w_0 \in H^s(\mathbb{T}_\sigma), \end{cases} \tag{2.3}$$

其中 $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$、$\beta \in \mathbb{R}$、$\sigma \ge 1$ 和 $\beta_\sigma := \beta/\sigma^2$。(2.3) 的解可显式表示为

$$w(x,t) = \int_{\mathbb{Z}_\sigma} e^{i\xi x} e^{i(\alpha\xi^3 - \beta_\sigma \xi)t} \widehat{w_0}(\xi) \, d\xi =: S_{\alpha,\beta_\sigma}(t) w_0(x). \tag{2.4}$$

当 $\alpha = 1$ 和 $\beta = 0$ 时，相应的半群算子 $S_{\alpha,\,\beta_\sigma}$ 简记为 $S($ $t)$.

KdV 方程 (1.2) 的解通常在傅里叶限制空间中研究，这些空间最初由 [3, 13] 引入。对于实数轴上的情形，KdV 方程是在傅里叶限制空间 $X^{s,\,b}$ 中研究的，其中 $b > \frac{1}{2}$。然而，对于周期情形，b 必须取为 $\frac{1}{2}$，遗憾的是，这并不能保证 $X^{s,\,\frac{1}{2}}$ 属于 $C(\mathbb{R}_t;\, H_x^s)$。因此，我们需要在 Y^s 中考虑这个问题，它是对 $X^{s,\,\frac{1}{2}}$ 的一种调整，使其属于空间 $C(\mathbb{R}_t;\, H_x^s)$，参见例如 [5]。

现在，对于带有一阶项 $\beta_\sigma w_x$ 的 KdV 型方程 (2.3)，我们在下面的定义中引入广义函数空间，以将一阶项的影响纳入考虑。

定义 2.1 ([3, 5, 13])。对于任意的 α、β、s、b、$\sigma \in \mathbb{R}$，满足 $\alpha \ne 0$ 和 $\sigma \ge 1$，傅里叶限制空间 $X^{s,\,b}_{\alpha,\,\beta_\sigma}$ 定义为施瓦茨空间 $\mathscr{S}(\mathbb{T}_\sigma \times \mathbb{R})$ 关于范数的完备化

$$\|\omega\|_{X^{s,b}_{\alpha,\beta_\sigma}} := \left\|\langle\xi\rangle^s \langle \tau - \alpha\xi^3 + \beta_\sigma \xi\rangle^b \widehat{w}(\xi,\tau)\right\|_{L^2(\mathbb{Z}_\sigma \times \mathbb{R})}, \tag{2.5}$$

其中，$\widehat{w}$ 表示 w 的时空傅里叶变换，且

$$\beta_\sigma := \beta/\sigma^2.$$

类似地，空间 $Y^s_{\alpha,\,\beta_\sigma}$ 按照以下范数以相同方式定义 :

$$\|\omega\|_{Y^s_{\alpha,\beta_\sigma}} := \|\omega\|_{X^{s,\frac{1}{2}}_{\alpha,\beta_\sigma}} + \|\langle\xi\rangle^s \widehat{\omega}(\xi,\tau)\|_{L^2_\xi(\mathbb{Z}_\sigma) L^1_\tau(\mathbb{R})}. \tag{2.6}$$

对于技术在控制 Duhamel项 的 $Y^s_{\alpha,\beta_\sigma}$ 范数时所需的技术条件（见式 (2.9)），我们定义 t he

空间$Z^s_{\alpha,\beta_\sigma}$，其范数如下定义

$$\|\omega\|_{Z^s_{\alpha,\beta_\sigma}} := \|w\|_{X^{s,-\frac{1}{2}}_{\alpha,\beta_\sigma}} + \|\langle\xi\rangle^s\langle\tau-\alpha\xi^3+\beta_\sigma\xi\rangle^{-1}\widehat{\omega}(\xi,\tau)\|_{L^2_\xi(\mathbb{Z}_\sigma)L^1_\tau(\mathbb{R})}. \tag{2.7}$$

为记号方便起见，下文将$\|\cdot\|_{X^{s,1}_{0}{}^{b}_{,}}$记为$\|\cdot\|_{X^{s,}_{\sigma}{}^{b}}$；同样地，对 $\|\cdot\|_{Y^s_\sigma}$和 $\|\cdot\|_{Z^s_\sigma}$亦如此。另一方面，我们固定 $\eta\in C_c^\infty$(ℝ)为一个光滑截断函数，其支集在 $[-2,2]$ 上，且在 $[-1,1]$上满足 $\eta\equiv 1$。此外，我们用 $A\lesssim B$表示 $A\le CB$，其中常数 C仅可能依赖于参数 s、 α 和 β。

接下来，我们列出一些关于线性估计的必要且标准的引理，其证明可见于 [3,5,19]。

引理 2.2. 对任意满足 $\alpha\neq 0$ 与 $\sigma\ge 1$的 s、 α、 β、 $\sigma\in\mathbb{R}$，

$$\|\eta(t)S_{\alpha,\beta_\sigma}(t)f\|_{Y^s_{\alpha,\beta_\sigma}}\le C_1\|f\|_{H^s_x(\mathbb{T}_\sigma)}, \tag{2.8}$$

以及对*Duhamel*项，

$$\left\|\eta(t)\int_0^t S_{\alpha,\beta_\sigma}(t-t')g(t')\,dt'\right\|_{Y^s_{\alpha,\beta_\sigma}}\le C_2\|g\|_{Z^s_{\alpha,\beta_\sigma}}. \tag{2.9}$$

其中常数 C_1 和 C_2 仅依赖于 η。

引理 2 .3. 对于任意的 $s,\alpha,\beta,\sigma\in\mathbb{R}$，若满足 $\alpha\neq 0$和 $\sigma\ge 1$，则存在一个普适常数 C，使得 at

$$\|f\|_{L^4_tL^2_x(\mathbb{T}_\sigma\times\mathbb{R})}\le C\|f\|_{X^{0,\frac{1}{4}}_{\alpha,\beta_\sigma}}. \tag{2.10}$$

引理 2 .4. 对于任意的 $s,\alpha,\beta,\sigma\in\mathbb{R}$，若满足 $\alpha\neq 0$和 $\sigma\ge 1$，则存在一个常数 $C=C(\alpha)$，使得t

$$\|f\|_{L^4_{x,t}(\mathbb{T}_\sigma\times\mathbb{R})}\le C\|f\|_{X^{0,\frac{1}{3}}_{\alpha,\beta_\sigma}}. \tag{2.11}$$

根据普朗歇尔恒等式和对偶性，我们按照 L^2 的意义处理双线性估计（例如参见 [21]）。

引理 2.5。 给定 s, b, r, $\{(\alpha_i,\beta_i)\}_{1\le i\le 3}$ 和 $\sigma\ge 1$，双线性估计为

$$\|\partial_x(w_1w_2)\|_{Z^s_{\alpha_3,\beta_3}}\le C\sigma^r\|w_1\|_{Y^s_{\alpha_1,\beta_1}}\|w_2\|_{Y^s_{\alpha_2,\beta_2}},\quad \forall w_1,w_2\in\mathscr{S}(\mathbb{T}_\sigma\times\mathbb{R}).$$

若以下两个估计成立，则该结论成立，

$$\int_\Lambda\frac{\xi_3\langle\xi_3\rangle^s\prod_{i=1}^3 f_i(\xi_i,\tau_i)}{\langle\xi_1\rangle^s\langle\xi_2\rangle^s\langle L_1\rangle^{\frac{1}{2}}\langle L_2\rangle^{\frac{1}{2}}\langle L_3\rangle^{\frac{1}{2}}}\le C\sigma^r\prod_{i=1}^3\|f_i\|_{L^2},\quad \forall f_1,f_2,f_3\in\mathscr{S}(\mathbb{T}_\sigma\times\mathbb{R}), \tag{2.12}$$

and

$$\left\|\frac{1}{\langle L_3\rangle}\int\limits_{\Lambda(\xi_3,\tau_3)}\frac{\xi_2\langle\xi_3\rangle^s}{\langle\xi_1\rangle^s\langle\xi_2\rangle^s}\prod_{i=1}^2\frac{f_i(\xi_i,\tau_i)}{\langle L_i\rangle^{\frac{1}{2}}}\right\|_{L^2_{\xi_3}L^1_{\tau_3}}\le C\sigma^r\prod_{i=1}^2\|f_i\|_{L^2},\quad \forall f_1,f_2\in\mathscr{S}(\mathbb{T}_\sigma\times\mathbb{R}), \tag{2.13}$$

其中

$$L_i=\tau_i-\phi^{\alpha_i,\beta_i}(\xi_i)=\tau_i-\alpha_i\xi_i^3+\beta_i\xi_i,\quad i=1,2,3,$$

and

$$\Lambda:=\left\{(\vec{\xi},\vec{\tau})\in\mathbb{R}^6:\sum_{i=1}^3\xi_i=\sum_{i=1}^3\tau_i=0\right\},\quad \Lambda(\xi_3,\tau_3):=\left\{(\xi_1,\xi_2,\tau_1,\tau_2)\in\mathbb{T}^2_\sigma\times\mathbb{R}^2:(\vec{\xi},\vec{\tau})\in\Lambda\right\}.$$

3 定理 1.1 的证明

在本节中，我们首先给出证明定理 1.1 所需的关键双线性估计，然后运用标准压缩映射方法给出定理 1.1 的简要证明，从而建立系统 (1.5) 的解析局部适定性。随后，我们通过论证关键双线性估计来完成证明。由于定理 1.1 处理的是系统 (1.5)，而该系统经尺度变换后等价于 (2.2)，因此命题 3.1 中的下述双线性估计是基于尺度变换后的系统 (2.2) 给出的。

命题 3.1. 令 $\beta \in \mathbb{R}$ 和 $\sigma \geq 1$。定义 $s^*(4,\beta)$ 为

$$s^*(4,\beta) = \begin{cases} 1, & \beta = 3n^2, n \in \mathbb{N}, \\ 1/2, & others. \end{cases} \tag{3.1}$$

那么对于任意 $s \geq s^*(4,\beta)$，双线性估计 *(3.2)* 对任意属于施瓦茨空间$\mathscr{S}(\mathbb{T}_\sigma \times \mathbb{R})$的 w_1 和 w_2 均成立。

$$\|\partial_x(w_1 w_2)\|_{Z_\sigma^s} \leq C_3\sigma\|w_1\|_{Y_{4,\beta_\sigma}^s}\|w_2\|_{Y_{4,\beta_\sigma}^s}, \tag{3.2}$$

其中 $C_3 = C_3(s,\beta)$。此外，进一步假设 w_1 满足零均值条件，即对任意 t， $\mathscr{F}_x w_1(0,t) = 0$，则双线性估计 *(3.3)* 对任意 $s \geq s^*(4,\beta)$ 也成立。

$$\|\partial_x(w_1 w_2)\|_{Z_{4,\beta_\sigma}^s} \leq C_3\sigma\|w_1\|_{Y_\sigma^s}\|w_2\|_{Y_{4,\beta_\sigma}^s}, \tag{3.3}$$

其中 $C_3 = C_3(s,\beta)$。

3.1 压缩映射论证

通过压缩映射原理证明适定性结果是标准的；参见 [5, 13], ，因此我们仅简要概述定理 1.1 证明的主要步骤。此外，$\beta = 3n^2$ 的情形与 $\beta \neq 3n^2$的证明非常相似，唯一的区别在于命题 3.1 中（3.1）所用的不同情形。因此，我们只给出 $\beta \neq 3n^2$， $n \in \mathbb{N}$情形下定理 1.1 的证明。

对于 $\beta \neq 3n^2$和 $\sigma \geq 1$，我们研究任意$s \geq \frac{1}{2}$下，方程（2.2）在H_0^s（$\mathbb{T}$）$\times H^s$（$\mathbb{T}$）中的局部适定性。为方便起见，我们记

$$r = \|(u_0^\sigma, v_0^\sigma)\|_{H_0^s(\mathbb{T}_\sigma)\times H^s(\mathbb{T}_\sigma)}.$$

经直接计算可得

$$r \leq \sigma^{-\frac{3}{2}}\|(u_0, v_0)\|_{H_0^s(\mathbb{T})\times H^s(\mathbb{T})}, \tag{3.4}$$

因此，只要将 σ 选得足够大， r 就可以任意小。

定义一个算子 Γ 在 $Y_\sigma^s \times Y_{4,\beta_\sigma}^s$ 上为 $\Gamma(u^\sigma, v^\sigma) = (\Gamma_1(u^\sigma, v^\sigma)\ \Gamma_2(u^\sigma, v^\sigma))$ ，其中

$$\begin{cases} \Gamma_1(u^\sigma, v^\sigma) = \eta(t)S(t)u_0^\sigma - 2\eta(t)\displaystyle\int_0^t S(t-t')v^\sigma v_x^\sigma(t')\,dt', \\ \Gamma_2(u^\sigma, v^\sigma) = \eta(t)S_{4,\beta_\sigma}(t)v_0^\sigma - \eta(t)\displaystyle\int_0^t S_{4,\beta_\sigma}(t-t')(u^\sigma v^\sigma)_x(t')\,dt'. \end{cases}$$

由引理 2.2 可得

$$\|\Gamma(u^\sigma, v^\sigma)\|_{Y_\sigma^s \times Y_{4,\beta_\sigma}^s} \leq 2C_1 r + 3C_2\left(\|\partial_x(v^\sigma v^\sigma)\|_{Z^s(\mathbb{T}_\sigma\times\mathbb{R})} + \|\partial_x(u^\sigma v^\sigma)\|_{Z_{4,\beta_\sigma}^s(\mathbb{T}_\sigma\times\mathbb{R})}\right), \tag{3.5}$$

其中， C_1 来自 (2.8)， C_2 来自 (2.9)。然后，利用命题

3.1 中的 (3.1) 的第二种情形，
我们可推得

$$\text{LHS of (3.5)} \le 2C_1 r + 3C_2C_3\sigma\|(u^\sigma, v^\sigma)\|^2_{Y^s_\sigma \times Y^s_{4,\beta_\sigma}},$$

其中 C_3 来自命题 3.1。

考虑球

$$B(3C_1r) = \left\{(u^\sigma, v^\sigma) \in Y^s_\sigma \times Y^s_{4,\beta_\sigma} : \|(u^\sigma, v^\sigma)\|_{Y^s_\sigma \times Y^s_{4,\beta_\sigma}} \le 3C_1 r\right\}.$$

由 (3.4) 可知，存在一个常数 σ_0，使得对于任意 $\sigma \ge \sigma_0$,

$$27C_1C_2C_3\sigma r \le 1, \tag{3.6}$$

这意味着

$$\|\Gamma(u^\sigma, v^\sigma)\|_{Y^s_\sigma \times Y^s_{4,\beta_\sigma}} \le 2C_1 r + 3C_2C_3\sigma(3C_1r)^2 = 2C_1r + 27C_1^2C_2C_3r^2 \le 3C_1r.$$

这保证了 $\Gamma(B(3C_1r)) \subseteq B(3C_1r)$。

同时，对于任意 (u^σ, v^σ),$(\widetilde{u}^\sigma, \widetilde{v}^\sigma) \in B(3C_1r)$，显然有

$$\|\Gamma(u^\sigma, v^\sigma) - \Gamma(\widetilde{u}^\sigma, \widetilde{v}^\sigma)\|_{Y^s_\sigma \times Y^s_{4,\beta_\sigma}} \le 18C_1C_2C_3\sigma r\|(u^\sigma, v^\sigma) - (\widetilde{u}^\sigma, \widetilde{v}^\sigma)\|_{Y^s_\sigma \times Y^s_{4,\beta_\sigma}}.$$

根据估计式 (3.6)，我们验证了 Γ 是一个压缩映射，这意味着当 σ 充分大时，系统 (2.2) 具有解析局部适定性。最后，通过将尺度变换还原到系统 (1.5)，我们证明了定理 1.1。

3.2 命题 3.1 的证明

命题 3.1 中 (3.2) 和 (3.3) 的证明非常相似，因此我们只详细证明 (3.2)，然后说明为何 (3.3) 需要额外假设 w_1 具有零均值。

对于 (3.2)，根据 (2.7) 中 Z^s_σ 空间的定义，双线性估计式 (3.2) 可分解为以下两个估计式:

$$\|\partial_x(w_1w_2)\|_{X^{s,-\frac{1}{2}}_\sigma} \le C_3\sigma\|w_1\|_{Y^s_{4,\beta_\sigma}}\|w_2\|_{Y^s_{4,\beta_\sigma}}, \tag{3.7}$$

$$\|\langle\xi\rangle^s\langle\tau - \alpha\xi^3 + \beta_\sigma\xi\rangle^{-1}\widehat{\partial_x(w_1w_2)}(\xi,\tau)\|_{L^2_\xi(\mathbb{Z}_\sigma)L^1_\tau(\mathbb{R})} \le C_3\sigma\|w_1\|_{Y^s_{4,\beta_\sigma}}\|w_2\|_{Y^s_{4,\beta_\sigma}}. \tag{3.8}$$

Next，我们将先证明 (3.7)，然后利用已得到的 (3.7) 论证 (3.8)

对于 (3.7)，由于 $X^{s,\frac{1}{2}}_{4,\beta_\sigma}$ 范数小于 Y^s_{4,β_σ} 范数，只需证明

$$\|\partial_x(w_1w_2)\|_{X^{s,-\frac{1}{2}}_\sigma} \lesssim \sigma\|w_1\|_{X^{s,\frac{1}{2}}_{4,\beta_\sigma}}\|w_2\|_{X^{s,\frac{1}{2}}_{4,\beta_\sigma}}. \tag{3.9}$$

定义双线性算子:

$$\mathscr{B}_s(f_1,f_2)(\xi,\tau) = \frac{\xi\langle\xi\rangle^s}{\langle L\rangle^{1/2}} \iint\limits_{\substack{\xi_1+\xi_2=\xi\\ \tau_1+\tau_2=\tau}} \frac{f_1(\xi_1,\tau_1)f_2(\xi_2,\tau_2)}{\langle\xi_1\rangle^s\langle\xi_2\rangle^s\langle L_1\rangle^{1/2}\langle L_2\rangle^{1/2}}\,d\xi_1\,d\tau_1, \quad \forall\,\xi\in\mathbb{Z}/\sigma,\ \tau\in\mathbb{R}, \tag{3.10}$$

其中 $f_1, f_2 \in \mathscr{S}(\mathbb{T}_\sigma \times \mathbb{R})$，以及

$$L = \tau - \xi^3, \quad L_1 = \tau_1 - 4\xi_1^3 + \frac{\beta}{\sigma^2}\xi_1, \quad L_2 = \tau_2 - 4\xi_2^3 + \frac{\beta}{\sigma^2}\xi_2, \tag{3.11}$$

根据定义 义 $X^{s}{}_{,\sigma}{}^{-\frac{1}{2}}$，并进行适当的变量代换，不等式 (3.9) 等价于 o:

$$\|\mathscr{B}_s(f_1,f_2)\|_{L^2_{\xi,\tau}} \lesssim \sigma \|f_1\|_{L^2_{\xi_1,\tau_1}} \|f_2\|_{L^2_{\xi_2,\tau_2}}. \tag{3.12}$$

不失一般性，我们假设 f_1 和 f_2 均为非负数。根据 (3.11) 和约束 $\tau_1+\tau_2=\tau$，从 L_1+L_2 中减去 L 后，所有时间频率变量都会消失，即:

$$L_1+L_2-L=\Big(-4\xi_1^3+\frac{\beta}{\sigma^2}\xi_1\Big)+\Big(-4\xi_2^3+\frac{\beta}{\sigma^2}\xi_2\Big)+\xi^3:=H_\sigma(\xi,\xi_1,\xi_2),$$

按照惯例，函数 H_σ 称为共振函数。代入 $\xi_2=\xi-\xi_1$ 后，我们得到

$$H_\sigma(\xi,\xi_1,\xi_2)=-3\xi\left[(2\xi_1-\xi)^2-\frac{\beta}{3\sigma^2}\right].$$

固定 ξ 时，上述表达式可视为关于 ξ_1 的函数。我们将该函数记为 H_σ^ξ，它可以改写如下:

$$H_\sigma^\xi(\xi_1)=-3\xi\left[h^\xi(\xi_1)-\frac{\beta}{3\sigma^2}\right],\quad \text{where}\quad h^\xi(\xi_1):=(2\xi_1-\xi)^2.$$

当 $\beta<0$ 时，对于所有 ξ 和 ξ_1，都有 $h^\xi(\xi_1)-\frac{\beta}{\sigma^2}>0$；当 $\beta>0$ 且 $\beta\neq 3n^2$ 时，$h^\xi(\xi_1)-\frac{\beta}{\sigma^2}$ 在 $\mathbb{R}$ 上有两个根，它们都不属于 $\mathbb{Z}_\sigma$，因为 $\sqrt{\frac{\beta}{3}}\notin\mathbb{Z}$。这些是证明情形 $\beta\neq 3n^2$ 的关键观察。对于剩余情形 $\beta=3n^2$，存在无穷多对 $(\xi,\ \xi_1)\in\mathbb{Z}/\sigma\times\mathbb{Z}/\sigma$，使得共振函数 $H_\sigma^\xi(\xi_1)$ 为零，由此得出结论：临界指标需要为 1，而不是 1 2。

3.2.1 情形 1: $\beta\neq 3n^2$, $n\in\mathbb{N}$

情形 1 中（3.7）的证明

情形 1.1: $\beta>0$ **和** $\beta\neq 3n^2$。当 $\beta>0$, $H_\sigma^\xi(\xi_1)$ 可分解如下:

$$H_\sigma^\xi(\xi_1)=-3\xi\left[(2\xi_1-\xi)^2-\frac{\beta}{3\sigma^2}\right]=-3\xi\left(2\xi_1-\xi+\frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{\beta}{3}}\right)\left(2\xi_1-\xi-\frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{\beta}{3}}\right). \tag{3.13}$$

区域（1）: $|\xi|\le 100\sqrt{\beta}+1$。

对于 $s\ge 0$，任意满足 $\xi=\xi_1+\xi_2$ 的 $(\xi_1,\xi_2,\xi)\in(\mathbb{Z}/\sigma)^3$，以下估计成立:

$$\frac{|\xi|\langle\xi\rangle^s}{\langle\xi_1\rangle^s\langle\xi_2\rangle^s\langle L\rangle^{1/2}}\lesssim\frac{|\xi|\langle\xi\rangle^s}{\langle\xi\rangle^s\langle L\rangle^{1/2}}\lesssim 1. \tag{3.14}$$

由 Hölder 不等式和引理 2.4，得到

$$\begin{aligned}\|\mathscr{B}_s(f_1,f_2)\|_{L^2_{\xi,\tau}}&\lesssim\Big\|\iint\limits_{\substack{\xi_1+\xi_2=\xi\\ \tau_1+\tau_2=\tau}}\frac{f_1(\xi_1,\tau_1)f_2(\xi_2,\tau_2)}{\langle L_1\rangle^{1/2}\langle L_2\rangle^{1/2}}\,d\xi_1\,d\tau_1\Big\|_{L^2_{\xi,\tau}}=\|F_1F_2\|_{L^2_{x,t}}\\&\le\|F_1\|_{L^4_{x,t}}\|F_2\|_{L^4_{x,t}}\lesssim\|F_1\|_{X^{0,\frac13}_{4,\beta\sigma}}\|F_2\|_{X^{0,\frac13}_{4,\beta\sigma}}\le\|f_1\|_{L^2_{x,t}}\|f_2\|_{L^2_{x,t}},\end{aligned} \tag{3.15}$$

其中

$$F_1(x,t)=\mathscr{F}^{-1}\{\langle L_1\rangle^{-\frac12}f_1(\xi_1,\tau_1)\},\quad F_2(x,t)=\mathscr{F}^{-1}\{\langle L_2\rangle^{-\frac12}f_2(\xi_2,\tau_2)\}. \tag{3.16}$$

区域（2）: $|\xi|>1$ 且 $\left|2\xi_1-\xi-\frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{\beta}{3}}\right|\ge\frac{1}{10}|\xi|$。

在这种情形下，我们有

$$\Big|2\xi_1-\xi+\frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{\beta}{3}}\Big|\ge\frac{1}{10}|\xi|-\frac{2}{\sigma}\sqrt{\frac{\beta}{3}}\ge\frac{1}{20}|\xi|.$$

Let

$$MAX_1 := \max\{\langle L\rangle, \langle L_1\rangle, \langle L_2\rangle\}. \tag{3.17}$$

于是由分解 (3.13) 可得

$$MAX_1 \geq \frac{1}{3}\langle -L + L_1 + L_2\rangle \geq |H_\sigma^\xi(\xi_1)| \gtrsim |\xi|^3.$$

区域（2.1）。 $\langle L\rangle = MAX_1$。

在这种情况下,

$$\frac{|\xi|\langle\xi\rangle^s}{\langle\xi_1\rangle^s\langle\xi_2\rangle^s}\frac{1}{\langle L\rangle^{\frac{1}{2}}} \lesssim \frac{\langle\xi\rangle^s}{\langle\xi_1\rangle^s\langle\xi_2\rangle^s} \leq 1.$$

那么其余计算与区域（1）类似。

区域（2.2）。 $\langle L_1\rangle = MAX_1$ 或 $\langle L_2\rangle = MAX_1$。

不失一般性，我们只讨论 $\langle L_1\rangle = MAX_1$ 的情况，因为另一种情况 $\langle L_2\rangle = MAX_1$ 也是类似的。根据引理 2.5，(3.9) 等价于

$$\left|\int \frac{\xi\langle\xi\rangle^s g(\xi,\tau) f_1(\xi_1,\tau_1) f_2(\xi_2,\tau_2)}{\langle\xi_1\rangle^s\langle\xi_2\rangle^s\langle L\rangle^{1/2}\langle L_1\rangle^{1/2}\langle L_2\rangle^{1/2}}\, d\xi_1\, d\tau_1\, d\xi\, d\tau\right| \lesssim \sigma\|f_1\|_{L^2_{\xi_1,\tau_1}}\|f_2\|_{L^2_{\xi_2,\tau_2}}\|g\|_{L^2_{\xi,\tau}}. \tag{3.18}$$

然后，类似于区域（2.1）中的论证，我们有 $\frac{|\xi|\langle\xi\rangle^s}{\langle\xi_1\rangle^s\langle\xi_2\rangle^s}\frac{1}{\langle L_1\rangle^{\frac{1}{2}}} \lesssim 1$。因此，记

$$F_1(x,t) = \mathscr{F}^{-1}\{f_1(\xi_1,\tau_1)\}, \quad F_2(x,t) = \mathscr{F}^{-1}\{\langle L_2\rangle^{-\frac{1}{2}} f_2(\xi_2,\tau_2)\}, \quad G(x,t) = \mathscr{F}^{-1}\{\langle L\rangle^{-\frac{1}{2}} g(-\xi,-\tau)\}, \tag{3.19}$$

由引理 2.4 可知

$$\begin{aligned} LHS \text{ of } (3.18) &\lesssim \left|\iint F_1(x,t)F_2(x,t)G(x,t)\,dx\,dt\right| \leq \|F_1\|_{L^2_{x,t}}\|F_2\|_{L^4_{x,t}}\|G\|_{L^4_{x,t}} \\ &\leq \|F_1\|_{L^2_{x,t}}\|F_2\|_{X^{0,\frac{1}{3}}_{4,\beta_\sigma}}\|G\|_{X^{0,\frac{1}{3}}_{\sigma}} \leq \|f_1\|_{L^2_{\xi_1,\tau_1}}\|f_2\|_{L^2_{\xi_2,\tau_2}}\|g\|_{L^2_{\xi,\tau}}. \end{aligned} \tag{3.20}$$

区域（3）： $|\xi| > 1$和 $\left|2\xi_1 - \xi - \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{\beta}{3}}\right| \leq \frac{1}{10}|\xi|$。

在此定义域中，可以发现

$$\langle\xi_1\rangle \sim \langle\xi_2\rangle \sim \langle\xi\rangle \tag{3.21}$$

于是我们将此定义域分为以下几种情形。

区域（3.1）： $\left|2\xi_1 - \xi - \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{\beta}{3}}\right| \geq \frac{1}{\sigma}$和 $\left|2\xi_1 - \xi + \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{\beta}{3}}\right| \geq \frac{1}{\sigma}$。

此时，共振函数 $H_\sigma^\xi(\xi_1)$ 满足

$$|H_\sigma^\xi(\xi_1)| \geq \frac{1}{\sigma^2}|\xi|,$$

因此，当 $s \geq \frac{1}{2}$ 时，我们利用 (3.21) 推得

$$\frac{|\xi|\langle\xi\rangle^s}{\langle\xi_1\rangle^s\langle\xi_2\rangle^s}\frac{1}{MAX_1^{\frac{1}{2}}} \lesssim \sigma\frac{|\xi|^{\frac{1}{2}}}{\langle\xi\rangle^{\frac{1}{2}}} \leq \sigma.$$

接着，与前文讨论区域（2）时的论证类似，根据 $\langle L\rangle$、$\langle L_1\rangle$ 或 $\langle L_2\rangle$ 是否达到 MAX_1，将区域（3.1）划分为三个子区域，即可验证所需的估计。

区域（3.2）： $\left|2\xi_1 - \xi - \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{\beta}{3}}\right| \leq \frac{1}{\sigma}$或 $\left|2\xi_1 - \xi + \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{\beta}{3}}\right| \leq \frac{1}{\sigma}$。

共振函数可以改写为

$$H_\sigma^\xi(\xi_1) = -\frac{3\xi}{\sigma^2}\left(2\widetilde{\xi_1} - \widetilde{\xi} - \sqrt{\frac{\beta}{3}}\right)\left(2\widetilde{\xi_1} - \widetilde{\xi} + \sqrt{\frac{\beta}{3}}\right),$$

其中 $\widetilde{\xi_1}=\sigma\xi_1$，$\widetilde{\xi}=\sigma\xi\in\mathbb{Z}$。由于 $\beta\neq 3n^2$，这意味着 $\sqrt{\frac{\beta}{3}}\notin\mathbb{Z}$，因此我们有

$$\theta\Big(\sqrt{\frac{\beta}{3}}\Big)\gtrsim 1,$$

其中 $\theta(x)$ 表示 x 与其最近整数之间的距离。因此，

$$|H_\sigma^\xi(\xi_1)|\gtrsim\theta^2\Big(\sqrt{\frac{\beta}{3}}\Big)\frac{|\xi|}{\sigma^2}\gtrsim\frac{|\xi|}{\sigma^2}.$$

其余论证与区域（3.1）的相同。

情形 1.2： $\beta<0$。

此情形的证明与情形 1.1 的证明基本相似。我们仍将证明分为三个子情形。

区域（1）： $|\xi|\leq 1$。

在此情形下，容易得到 $\frac{|\xi|\langle\xi\rangle^s}{\langle\xi_1\rangle^s\langle\xi_2\rangle^s}\lesssim 1$。接下来的证明与情形 1.1 中区域（1）的证明相同。需要强调的是，此区域中的界为绝对常数 1，而情形 1.1 中区域（1）的界取决于 β。

区域（2）： $|\xi|>1$ 且 $|2\xi_1-\xi|\geq\frac{1}{10}|\xi|$。

由于 $\beta<0$，因此有

$$|H_\sigma^\xi(\xi_1)|=3|\xi|\left[h^\xi(\xi_1)-\frac{\beta}{3\sigma^2}\right]\geq 3|\xi|(2\xi_1-\xi)^2\gtrsim|\xi|^3.$$

得益于 β 的负性，对于任意 ξ 和 ξ_1，上述下界均成立。与情形 1.1 中区域（2）的估计相比，该处对 $|H_\sigma^\xi(\xi_1)|$ 的下界要求 $|\xi|$ 大于 $\sqrt{\beta}$。这就是我们在情形 1.1 和情形 1.2 的区域（1）中为 ξ 选择不同上界的原因。**区域（3）：** $|\xi|>1$ 和 $|2\xi_1-\xi|<\frac{1}{10}|\xi|$。

在这种情形下，$\langle\xi\rangle\sim\langle\xi_1\rangle\sim\langle\xi_2\rangle$ 成立，并且我们还可以得到共振函数的下界

$$|H_\sigma^\xi(\xi_1)|=\left|-3\xi\left[(2\xi_1-\xi)^2-\frac{\beta}{3\sigma^2}\right]\right|\gtrsim\frac{|\beta\xi|}{\sigma^2}.$$

同样，这里我们利用 β 的负性，在没有任何限制的情况下得到有效的下界。尽管在上述估计中我们完全舍去了项 $\xi(2\xi_1-\xi)^2$，但这并不会造成太大损失，因为在区域（3）中 $|2\xi_1-\xi|$ 非常小。一旦得到 $|H_\sigma^\xi(\xi_1)|$ 的下界，剩余论证便与情形 1.1 中区域（3）的论证相似，因此省略。

情形 1 中（3.8）的证明

对于第二部分，$L^2_\xi(\mathbb{Z}/\sigma)L^1_\tau(\mathbb{R})$，我们先证明 $\beta>0$ 但 $\beta\neq 3n^2$ 的情形。随后，正如我们在情形 1.2 中讨论的那样，$\beta<0$ 的情形论证类似且实际上更简单，因此略去。

由于 $X^{s,\frac12,4,\beta_\sigma}$ 范数小于 Y^s_{4,β_σ} 范数，（3.8）可归结为

$$\|\langle\xi\rangle^s\langle L\rangle^{-1}\mathscr{F}_x(\partial_x(w_1w_2))\|_{L^2_\xi(\mathbb{Z}/\sigma)L^1_\tau(\mathbb{R})}\lesssim\sigma\|w_1\|_{X^{s,\frac12}_{\alpha,\beta_\sigma}}\|w_2\|_{X^{s,\frac12}_{\alpha,\beta_\sigma}},$$

这可以改写为

$$\|\langle L\rangle^{-\frac12}\mathscr{B}_s(f_1,f_2)\|_{L^2_\xi(\mathbb{Z}/\sigma)L^1_\tau(\mathbb{R})}\lesssim\sigma\|f_1\|_{L^2_{\xi_1,\tau_1}}\|f_2\|_{L^2_{\xi_2,\tau_2}}.\tag{3.22}$$

这部分证明是标准的，利用柯西–施瓦茨不等式将估计式（3.22）化简为已知的估计式（3.12）。接下来，我们在 $\big(0,\frac{1}{100}\big)$ 中取 ϵ 为一个小常数。

区域（1）： $|\xi| \le 100\sqrt{\beta}+1$。

由于 $0<\varepsilon<\frac{1}{100}$，我们有

$$\begin{aligned} LHS \text{ of } (3.22) &\le \|\langle L\rangle^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}\|_{L^\infty_\xi L^2_\tau}\|\langle L\rangle^{\varepsilon}\mathscr{B}_s(f_1,f_2)(\xi,\tau)\|_{L^2_\xi L^2_\tau} \\ &\lesssim_\varepsilon \|\langle L\rangle^{\varepsilon}\mathscr{B}_s(f_1,f_2)(\xi,\tau)\|_{L^2_{\xi,\tau}}. \end{aligned}$$

因此，只需证明

$$\|\langle L\rangle^{\varepsilon}\mathscr{B}_s(f_1,f_2)(\xi,\tau)\|_{L^2_{\xi,\tau}} \lesssim \sigma\|f_1\|_{L^2_{\xi_1,\tau_1}}\|f_2\|_{L^2_{\xi_2,\tau_2}}, \tag{3.23}$$

这与 (3.12) 类似，唯一的区别是 (3.23) 左端多了 $\langle L\rangle^{\epsilon}$ 这一项。当 $|\xi| \le 100\sqrt{\beta}+1$ 时，以下不等式成立

$$\frac{|\xi|\langle\xi\rangle^s\langle L\rangle^{\varepsilon}}{\langle\xi_1\rangle^s\langle\xi_2\rangle^s\langle L\rangle^{\frac{1}{2}}} \lesssim \frac{|\xi|\langle\xi\rangle^s}{\langle\xi\rangle^s\langle L\rangle^{\frac{1}{2}-\varepsilon}} \lesssim \frac{1}{\langle L\rangle^{\frac{1}{3}}} \lesssim 1.$$

与 (3.14) 相比，上述估计更强，因为左端多了 $\langle L\rangle^{\epsilon}$ 这一项。因此，按照情形 1.1 中区域 1 的类似论证，我们得到所需结果 (3.23)。

区域（2）： $|\xi| > 100\sqrt{\beta}+1$，且 $MAX_1 = \langle L_1\rangle$ 或 $MAX_1 = \langle L_2\rangle$。

当 $|\xi|>1$ 且 $MAX_1=\langle L_1\rangle$ 时，(3.23) 的证明与在区域（2.2）和区域（3）中 $MAX_1=\langle L_1\rangle$ 时 (3.7) 的证明类似。唯一的区别是，由于 (3.23) 中多了 $\langle L\rangle^{\epsilon}$ 这一项，我们需要将 (3.18) 和 (3.19) 中的 $\langle L\rangle^{\frac{1}{2}}$ 项调整为 $\langle L\rangle^{\frac{1}{2}-\epsilon}$。由于 $\epsilon<\frac{1}{100}$，因此 $\frac{1}{2}-\epsilon>\frac{1}{3}$，且估计 (3.20) 仍然成立，这就证明了 (3.23)。

当 $MAX_1=\langle L_2\rangle$ 时，(3.23) 的证明与 $MAX_1=\langle L_1\rangle$ 的证明几乎相同，因此略去。

区域（3）： $|\xi|>1$ 且 $MAX_1=\langle L\rangle$。**区域（3.1）**： $\langle L_1\rangle \ge \frac{1}{2}\langle L\rangle^{6\varepsilon}$ 或 $\langle L_2\rangle \ge \frac{1}{2}\langle L\rangle^{6\varepsilon}$。

在这种情况下，我们有以下

$$\frac{\langle L\rangle^{\varepsilon}}{\langle L\rangle^{1/2}\langle L_1\rangle^{1/2}\langle L_2\rangle^{1/2}} \lesssim \frac{1}{\langle L\rangle^{1/2}\langle L_1\rangle^{1/3}\langle L_2\rangle^{1/3}}.$$

上述不等式的目的是通过降低 $\langle L_1\rangle$ 和 $\langle L_2\rangle$ 的幂次（从 $1/2$ 降至 $1/3$），消去分子中的项 $\langle L\rangle^{\varepsilon}$。我们指出，由于引理 2.4，幂次 $1/3$ 已足以得到所需结果。例如，如果将 (3.15) 和 (3.16) 中的项 $\langle L_1\rangle^{\frac{1}{2}}$ 和 $\langle L_2\rangle^{\frac{1}{2}}$ 分别替换为 $\langle L_1\rangle^{\frac{1}{3}}$ 和 $\langle L_2\rangle^{\frac{1}{3}}$，估计式 (3.15) 仍然成立。

区域（3.2）： $\langle L_1\rangle \le \frac{1}{2}\langle L\rangle^{6\varepsilon}$ 和 $\langle L_2\rangle \le \frac{1}{2}\langle L\rangle^{6\varepsilon}$。

回忆起 $H^\xi_\sigma(\xi_1) = L_1+L_2-L$，因此

$$\tau-\xi^3 = L = -H^\xi_\sigma(\xi_1)+L_1+L_2.$$

由于假设 $\langle L_1\rangle \le \frac{1}{2}\langle L\rangle^{6\varepsilon}$ 和 $\langle L_2\rangle \le \frac{1}{2}\langle L\rangle^{6\varepsilon}$，我们知道

$$\tau-\xi^3 = -H^\xi_\sigma(\xi_1)+o((\tau-\xi^3)^{10\varepsilon}) = -H^\xi_\sigma(\xi_1)+o(|H^\xi_\sigma(\xi_1)|^{10\varepsilon}). \tag{3.24}$$

对于固定的 ξ，令

$$\Omega(\xi) = \big\{\eta\in\mathbb{R}: \eta = -H^\xi_\sigma(\xi_1)+o(|H^\xi_\sigma(\xi_1)|^{10\varepsilon}) \text{ for some } \xi_1\in\mathbb{Z}/\sigma\big\}.$$

接下来，如果不等式：

$$|\Omega(\xi)\cap\{|\eta|\sim M\}| \lesssim \sigma M^{\frac{2}{3}}, \tag{3.25}$$

对任意 $|\xi| \geq 1$ 都成立，那么由此不等式可得

$$\begin{aligned}\text{LHS of (3.22)} &\leq \|\langle \tau-\xi^3\rangle^{-\frac{1}{2}}\chi_{\Omega(\xi)}(\tau-\xi^3)\|_{L^{\infty,2}_{\xi,\tau}}\|\mathscr{B}_s(f_1,f_2)\|_{L^2_{\xi,\tau}}\\ &= \sup_{\xi:|\xi|>1}\left(\int_{|\mu|<\sigma^{100}}\langle\mu\rangle^{-1}\,d\mu+\sum_{M:M\geq\sigma^{100}}\int_{|\mu|\sim M}\langle\mu\rangle^{-1}\chi_{\Omega(\xi)}(\mu)\,d\mu\right)^{\frac{1}{2}}\|\mathscr{B}_s(f_1,f_2)\|_{L^2_{\xi,\tau}}\\ &\leq \left(100\ln(\sigma+1)+\sum_{M:M\geq\sigma^{100}(\text{dyadic})}M^{-1}M^{\frac{2}{3}+\frac{1}{100}}\right)^{\frac{1}{2}}\|\mathscr{B}_s(f_1,f_2)\|_{L^2_{\xi,\tau}}\\ &\lesssim \sigma\|\mathscr{B}_s(f_1,f_2)\|_{L^2_{\xi,\tau}} = \text{RHS of (3.22)}.\end{aligned}$$

Fina最后，我们证明 (3.25)。不失一般性，假设 ξ 为正。固定 ξ_1，我们有 ve

$$\left|\left\{\eta\in\mathbb{R}:|\eta|\sim M,\eta=-H^\xi_\sigma(\xi_1)+o(|H^\xi_\sigma(\xi_1)|^{10\varepsilon})\right\}\right|\sim M^{10\varepsilon}.$$

现在，我们估计满足下式的 $\xi_1\in\mathbb{Z}/\sigma$ 的可能取值个数

$$|H^\xi_\sigma(\xi_1)+o(|H^\xi_\sigma(\xi_1)|^{10\varepsilon})|\sim M.$$

设 $|\xi|\sim N\geq 1$ 为二进的。由于

$$H^\xi_\sigma(\xi_1)=-\xi\left[h^\xi(\xi_1)-\frac{\beta}{\sigma^2}\right],$$

其中 $h^\xi(\xi_1)=3(-2\xi_1+\xi)^2$ 对于 $\alpha=4$，有

$$\#\{\xi_1\in\mathbb{Z}/\sigma:|H^\xi_\sigma(\xi_1)|\sim M\}\leq\#\left\{\xi_1\in\mathbb{Z}/\sigma:\left|h^\xi(\xi_1)-\frac{\beta}{\sigma^2}\right|\sim M\right\}=\#\left\{\widetilde{\xi}_1\in\mathbb{Z}:\left|h^{\widetilde{\xi}}(\widetilde{\xi}_1)-\beta\right|\sim\sigma^2M\right\}$$

~ ~其中 $\xi=\sigma\xi$，$\xi_1=\sigma\xi_1\in\mathbb{Z}$。选取满足 $\sigma^{100}>2\beta$ 的 $\sigma\geq1$，则 $M\geq\sigma^{100}>2\beta$ an d

$$\#\left\{\widetilde{\xi}_1\in\mathbb{Z}:\left|h^{\widetilde{\xi}}(\widetilde{\xi}_1)-\beta\right|\sim\sigma^2M\right\}\leq\#\left\{\widetilde{\xi}_1\in\mathbb{Z}:0\leq(-2\widetilde{\xi}_1+\widetilde{\xi})^2\leq\sigma^2\frac{3M}{2}\right\},$$

因此，ξ_1 的个数至多为 $\sim\sigma M^{\frac{1}{2}}$。综上，对 (3.25) 的贡献至多为 $\sigma M^{\frac{1}{2}+10\varepsilon}\leq\sigma M^{\frac{2}{3}}$。至此，我们完成了情形 1 中双线性估计 (3.2) 的证明。

情形 1 中双线性估计(3.3) **的证明**

双线性估计 (3.3) 的证明与 (3.2) 的证明完全遵循相同思路。不过，需要注意的是，在这种情形下，我们要求 w_1 满足零均值条件。回顾 $\alpha=4$ 对应的共振函数 (1.19)：

$$\widetilde{H}^{\xi_1}(\xi):=3\xi_1\left[(2\xi-\xi_1)^2-\frac{\beta}{3}\right].$$

固定 ξ_1 时，我们将 $\widetilde{H}^{\xi_1}(\xi)$ 视为 ξ 的函数，这与 (3.2) 对应的共振函数 (1.20) 类似。因此，第二个双线性估计 (3.3) 的证明与 (3.2) 的证明类似。这里的主要区别是，(3.3) 中存在由 ξ_1 引起的额外奇性。为确保当 $\xi_1=0$ 时估计仍然成立，必须假设 $\mathscr{F}_x w_1(0,\ t)=0$ 对任意 t 均成立；也就是说，w_1 的均值为零。

3.2.2 情形 2：$\beta=3n^2,n\in\mathbb{N}$

对于 $\beta=3n^2,n\in\mathbb{N}^+$ 的情形，存在无穷多个点 $(\xi,\xi_1)\in\mathbb{Z}/\sigma\times\mathbb{Z}/\sigma$，使得共振函数 $H^\xi_\sigma(\xi_1)$ 为零，由此可知，临界指标需要取 1，而不是 $_1{}_2$。回顾 $\beta\neq3n^2$ 情形下的证明，我们注意到，双线性估计 (3.3) 的证明与 (3.2) 的证明完全类似。因此，我们将只给出双线性估计

(3.2) 的证明，而略去双线性估计 (3.3) 的证明。

此外，根据第 3.2.1 节中的情形 1，我们已看到 (3.2) 可拆分为 (3.7) 和 (3.8)；一旦证明了 (3.7)，便可利用 (3.7) 得出估计 (3.8)。因此，在当前的情形 2 中，我们只验证 (3.7)，而将 (3.8) 留给读者。

对于 (3.7)，回顾第 3.2 节开头的讨论，只需证明 (3.12)，即证明

$$\|\mathscr{B}_s(f_1,f_2)\|_{L^2_{\xi,\tau}} \lesssim \sigma \|f_1\|_{L^2_{\xi_1,\tau_1}} \|f_2\|_{L^2_{\xi_2,\tau_2}}.$$

区域（1）。 $|\xi| \le 100n$。

对于 $s \ge 0$，我们有

$$\frac{|\xi|\langle\xi\rangle^s}{\langle\xi_1\rangle^s\langle\xi_2\rangle^s} \lesssim \frac{|\xi|\langle\xi\rangle^s}{\langle\xi\rangle^s} \le 100n, \quad \text{and} \quad \langle\tau-\xi^3\rangle^{\frac12} \ge 1.$$

于是，根据 H¨older 不等式和引理 2.4，可得

$$\begin{aligned}\|\mathscr{B}_s(f_1,f_2)\|_{L^2_{\xi,\tau}} &\lesssim \Big\| \iint\limits_{\substack{\xi_1+\xi_2=\xi\\ \tau_1+\tau_2=\tau}} \frac{f_1(\xi_1,\tau_1)f_2(\xi_2,\tau_2)}{\langle L_1\rangle^{1/2}\langle L_2\rangle^{1/2}}\, d\xi_1\, d\tau_1 \Big\|_{L^2_{\xi,\tau}} = \|F_1F_2\|_{L^2_{x,t}} \\ &\le \|F_1\|_{L^4_{x,t}}\|F_2\|_{L^4_{x,t}} \lesssim \|F_1\|_{X^{0,\frac13}_{4,\beta_\sigma}}\|F_2\|_{X^{0,\frac13}_{4,\beta_\sigma}} \le \|f_1\|_{L^2_{x,t}}\|f_2\|_{L^2_{x,t}},\end{aligned}$$

其中

$$F_1(x,t) = \mathscr{F}^{-1}\{\langle L_1\rangle^{-\frac12} f_1(\xi_1,\tau_1)\}, \quad F_2(x,t) = \mathscr{F}^{-1}\{\langle L_2\rangle^{-\frac12} f_2(\xi_2,\tau_2)\}.$$

区域（2）。 $|\xi| > 100n$ 且 $|2\xi_1 - \xi - \frac{n}{\sigma}| \ge \frac{1}{10}|\xi|$。

在这种情况下，我们有

$$\Big|2\xi_1 - \xi + \frac{n}{\sigma}\Big| \ge \frac{1}{10}|\xi| - \frac{2n}{\sigma} \ge \frac{1}{20}|\xi|,$$

then

$$MAX_1 \ge \frac13\langle -L+L_1+L_2\rangle \ge |H^\xi_\sigma(\xi_1)| = |3\xi|\Big|2\xi_1-\xi+\frac{n}{\sigma}\Big|\Big|2\xi_1-\xi-\frac{n}{\sigma}\Big| \gtrsim |\xi|^3.$$

区域（2.1）。 $\langle L\rangle = MAX_1$。

在这种情况下，对于 ~~$s \ge 0$，我们有~~ $\frac{|\xi|\langle\xi\rangle^s}{\langle\xi_1\rangle^s\langle\xi_2\rangle^s}\frac{1}{\langle\tau-\xi^3\rangle^{\frac12}} \lesssim \frac{\langle\xi\rangle^s}{\langle\xi_1\rangle^s\langle\xi_2\rangle^s} \le 1$。其余论证与区域（1）的情形类似。

区域（2.2）。 $\langle L_1\rangle = MAX_1$ 或 $\langle L_2\rangle = MAX_1$。

由于 (3.12) 关于 L_1 和 L_2 对称，我们只考虑 $\langle L_1\rangle = MAX_1$ 的情形。由对偶性，(3.9) 等价于

$$\Big| \int\limits_{\substack{\xi_1+\xi_2+\xi=0\\ \tau_1+\tau_2+\tau=0}} \frac{\xi\langle\xi\rangle^s g(\xi,\tau) f_1(\xi_1,\tau_1)f_2(\xi_2,\tau_2)}{\langle\xi_1\rangle^s\langle\xi_2\rangle^s\langle L\rangle^{1/2}\langle L_1\rangle^{1/2}\langle L_2\rangle^{1/2}}\, d\xi_1\, d\tau_1\, d\xi\, d\tau \Big| \lesssim \sigma\|f_1\|_{L^2_{\xi_1,\tau_1}}\|f_2\|_{L^2_{\xi_2,\tau_2}}\|g\|_{L^2_{\xi,\tau}}. \tag{3.26}$$

在这种情况下，类似地，我们有 $\frac{|\xi|\langle\xi\rangle^s}{\langle\xi_1\rangle^s\langle\xi_2\rangle^s}\frac{1}{\langle L_1\rangle^{\frac12}} \lesssim 1$。然后，利用 H¨older 不等式和引理 2.4，可得

$$\begin{aligned}LHS \text{ of } (3.26) &\lesssim \Big|\iint F_1(x,t)F_2(x,t)G(x,t)dxdt\Big| \le \|F_1\|_{L^2_{x,t}}\|F_2\|_{L^4_{x,t}}\|G\|_{L^4_{x,t}} \\ &\le \|F_1\|_{L^2_{x,t}}\|F_2\|_{X^{0,\frac13}_{4,\beta_\sigma}}\|G\|_{X^{0,\frac13}_{\sigma}} \le \|f_1\|_{L^2_{\xi_1,\tau_1}}\|f_2\|_{L^2_{\xi_2,\tau_2}}\|g\|_{L^2_{\xi,\tau}}.\end{aligned}$$

其中

$$F_1(x,t) = \mathscr{F}^{-1}\{f_1(\xi_1,\tau_1)\}, \quad G(x,t) = \mathscr{F}^{-1}\{\langle L_2\rangle^{-\frac12} f_2(\xi_2,\tau_2)\}, \quad F_2(x,t) = \mathscr{F}^{-1}\{\langle L\rangle^{-\frac12} g(-\xi,-\tau)\}.$$

区域（3）。 $|\xi| > 100n$ 且 $|2\xi_1 - \xi - \frac{n}{\sigma}| \leq \frac{1}{10}|\xi|$。

在这种情况下，我们有 $\langle \xi_1 \rangle \sim \langle \xi_2 \rangle \sim \langle \xi \rangle$。由于 $s \geq 1$,

$$\frac{|\xi|\langle \xi \rangle^s}{\langle \xi_1 \rangle^s \langle \xi_2 \rangle^s} \sim \frac{|\xi|}{\langle \xi \rangle} \leq 1.$$

其余计算与区域（1）的计算完全相同。

4 定理 1.4 的证明

4.1 最小 γ 偏置型指标 ν_γ 和 γ 偏置无理测度 μ_γ

4.1.1 ν_γ 和 μ_γ 的定义

在开始证明定理 1.4 及其相关的双线性估计之前，我们先回顾最小 γ 偏置型指标的概念，该指标在引言中的定义 1.7 中已有定义。

定义 4.1（即定义 1.7）。 设 $\gamma \in \mathbb{R}$。若实数 ρ 满足：存在正常数 $K = K$（ρ、 ν、 γ）和 $N = N$（ρ、 γ），使得不等式

$$\left| \rho - \frac{m}{n} + \frac{\gamma}{n^2} \right| \geq \frac{K}{|n|^{2+\nu}} \tag{4.1}$$

对所有满足 $|n| > N$ 的 $\in \mathbb{Z}^2$（m、 n）均成立。此外，

$$\nu_\gamma(\rho) := \inf\{\nu \in \mathbb{R} : \rho \textit{ is of } \gamma\textit{-biased type } \nu\} \tag{4.2}$$

称为 ρ 的最小 γ-偏型指标，其中，当 $\{\nu \in \mathbb{R} : \rho$ 是 γ-偏型 $\nu\}$ 为空集时，下确界约定为 ∞ 。

与 [20] 中的定义 1 相比，其中偏性为 $\gamma = 0$ ，且（4.1）对所有满足$n \neq 0$的（m、 n） $\in \mathbb{Z}^2$ 成立；出于以下原因，我们在上述定义 4.1 中额外施加了 $|n| > N$ 下界要求。

（1）首先，当 $\gamma = 0$ 时，对于任意无理数 ρ，（4.1）的左端永不为零，因此可以找到正常数 K ，使（4.1）对所有满足 $n \neq 0$ 的（m、 n） $\in \mathbb{Z}^2$ 成立。

(2) 其次，当 $\gamma \neq 0$ 时，对于任意无理数 ρ，尚不清楚 (4.1) 左侧的 $\rho - \frac{m}{n} + \frac{\gamma}{n^2}$ 是否永不为零，因此 (4.1) 对任何满足 $n \neq 0$ 的 $(m,\ n) \in \mathbb{Z}^2$ 都可能不成立。同时，一旦 (4.1) 左侧对某个 $(m_*,\ n_*)$ 取零值，就恰好存在两对整数：$(m_*,\ n_*)$ 和 $(-m_*,\ -n_*)$，使得 (4.1) 左侧取零值。因此，在 (4.1) 中引入下界条件 $|n| > N$ ，以排除这两对整数。话虽如此，下界 N 可以取为 $|n_*| + 1$ ，它只依赖于 ρ 和 γ。

由于本文同时研究适定性和不适定性，为了便于证明和使用记号，我们引入以下配套定义，即 γ 偏置的无理测度。

定义 4.2。 设 $\gamma \in \mathbb{R}$。实数 ρ 的 γ 偏置无理测度 μ_γ 定义为

$$\mu_\gamma(\rho) := \sup\left\{ \mu \in \mathbb{R} : 0 < \left| \rho - \frac{m}{n} + \frac{\gamma}{n^2} \right| < \frac{1}{|n|^\mu} \textit{ holds for infinitely many } (m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \right\}. \tag{4.3}$$

现在我们来说明这两个指标之间的联系。

4.1.2 ν_γ 与μ_γ之间的关系

命题 4.3. 设 $\gamma \neq 0$。则对于所有 $\rho \in \mathbb{R}$，$\mu_\gamma(\rho) = 2 + \nu_\gamma(\rho)$。特别地，对于所有 $\rho \in \mathbb{Q}$，$\nu_\gamma(\rho) = 0$ 以及$\mu_\gamma(\rho) = 2$。

证明。 我们将证明分为两种情况：（1） ρ 是有理数；（2） ρ 是无理数。

情况（1）： $\rho \in \mathbb{Q}$。

由于 $\rho \in \mathbb{Q}$，我们可以写成

$$\rho = \frac{q}{p}, \quad \text{where } p, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \text{ and } \gcd(p, q) = 1,$$

这意味着

$$\left|\rho - \frac{m}{n} + \frac{\gamma}{n^2}\right| = \left|\frac{qn - mp}{np} + \frac{\gamma}{n^2}\right|.$$

因此，对于任意 $|n| > |p| + |p\gamma|$,

$$\begin{aligned}\left|\frac{qn - mp}{np} + \frac{\gamma}{n^2}\right| &\geq \begin{cases} |\frac{\gamma}{n^2}|, & \text{if} \quad qn - mp = 0, \\ |\frac{1}{np}| - |\frac{\gamma}{n^2}| \geq \frac{1}{n^2}, & \text{if} \quad qn - mp \neq 0, \end{cases} \\ &\geq \frac{1}{n^2} \min\{1, |\gamma|\},\end{aligned}$$

这意味着$\nu_\gamma(\rho) \leq 0$。

若$\nu_\gamma(\rho) < 0$，则存在某个 $\varepsilon > 0$ 使得$\nu_\gamma(\rho) < -\varepsilon$，这意味着存在正的$K(\rho, \nu, \gamma)$和 $N(\rho, \gamma)$使得

$$\left|\rho - \frac{m}{n} + \frac{\gamma}{n^2}\right| \geq \frac{K}{|n|^{2-\varepsilon}}, \quad \text{for any } n > N.$$

同时，通过选取$(m, n) = k(q, p)$ $k \in \mathbb{Z}^*$，我们发现对任意 $n > N$,

$$0 < \frac{K}{|n|^{2-\varepsilon}} \leq \left|\rho - \frac{m}{n} + \frac{\gamma}{n^2}\right| = \frac{|\gamma|}{n^2},$$

当 $n \to \infty$时，这构成矛盾。因此，$\nu_\gamma(\rho) \geq 0$。结合我们先前已验证的事实$\nu_\gamma(\rho) \leq 0$，我们得出结论：对 $\rho \in \mathbb{Q}$有 $\nu(\rho) = 0$。

类似于上述证明，我们也可以证明对 $\rho \in \mathbb{Q}$有$\mu_\gamma(\rho) = 2$。因此，当 $\rho \in \mathbb{Q}$时，$\mu_\gamma(\rho) = \nu_\gamma(\rho) + 2$。

情形（2）： $\rho \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

首先，对于 $\rho \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$，我们证明 $\nu_\gamma(\rho) + 2 \geq \mu_\gamma(\rho)$。根据 μ_γ 的定义，对于任意 $\varepsilon_1 > 0$，存在无穷多个 $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$，使得

$$0 < \left|\rho - \frac{m}{n} + \frac{\gamma}{n^2}\right| < \frac{1}{n^{\mu_\gamma(\rho) - \varepsilon_1}}.$$

因此，对于任意 $\varepsilon_2 > 0$，不存在正数 K 和 N 使得

$$\left|\rho - \frac{m}{n} + \frac{\gamma}{n^2}\right| \geq \frac{K}{n^{\mu_\gamma(\rho) - \varepsilon_1 - \varepsilon_2}},$$

对于所有满足 $n > N$ 的 $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$。因此，我们有 $\nu_\gamma(\rho) + 2 \geq \mu_\gamma(\rho) - \varepsilon_1 - \varepsilon_2$，这意味着 $\nu_\gamma(\rho) + 2 \geq \mu_\gamma(\rho)$。

反之，给定 $\mu_\gamma(\rho)$，则对于任意 $\varepsilon > 0$，至多存在有限多个 $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$，使得

$$0 < \left|\rho - \frac{m}{n} + \frac{\gamma}{n^2}\right| < \frac{1}{|n|^{\mu_\gamma(\rho) + \varepsilon}}.$$

与此同时，该方程

$$\rho - \frac{m}{n} + \frac{\gamma}{n^2} = 0, \tag{4.4}$$

最多有两个解（m，n）$\in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$。注意到（$m$，$n$）满足（4.4）当且仅当（$-m$，$-n$）满足（4.4），因此只需证明（4.4）至多有一个解（m，n）$\in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ 满足 $n > 0$。事实上，若存在（m_1，n_1）和（m_2，n_2），其中 n_1 和 n_2为正，且（4.4）成立，并且（m_1，n_1）$\neq$（m_2，n_2），那么 n_1 必定与 n_2 和 $n_1^2 - n_2^2 \neq 0$不同。此外，

$$\rho - \frac{m_1}{n_1} + \frac{\gamma}{n_1^2} = \rho - \frac{m_2}{n_2} + \frac{\gamma}{n_2^2} = 0,$$

so

$$\gamma = \frac{n_1 n_2 (m_2 n_1 - m_1 n_2)}{n_1^2 - n_2^2} \in \mathbb{Q}.$$

因此，

$$\rho = \frac{m_1}{n_1} - \frac{\gamma}{n_1^2} \in \mathbb{Q},$$

这与 $\rho \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$矛盾。因此，我们证明了对于任意 $\rho \in \mathbb{R} \setminus \{\mathbb{Q}\}$ 和 $\gamma \in \mathbb{R}$，方程（4.4）至多有两个解（m，n），且它们只依赖于 ρ 和 γ。因此，存在一个正整数 $N = N$（ρ，γ），使得（4.4）不存在满足 $|n| > N$的解（m，n）。

到目前为止，我们证明了对于满足 $\in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ 和 $|n| > N$ 的 (m, n)，除至多有限多个满足下式的 (m, n) 外，

$$0 < \left|\rho - \frac{m}{n} + \frac{\gamma}{n^2}\right| < \frac{1}{|n|^{\mu_\gamma(\rho)+\varepsilon}}, \tag{4.5}$$

所有其他的 (m, n) 都满足

$$\left|\rho - \frac{m}{n} + \frac{\gamma}{n^2}\right| \geq \frac{1}{|n|^{\mu_\gamma(\rho)+\varepsilon}}.$$

因此，存在一个正数 $K_1 = K_1(\rho, \gamma, \mu_\gamma(\rho))$，使得对于满足 (4.5) 的那有限多个 (m, n)，有

$$\left|\rho - \frac{m}{n} + \frac{\gamma}{n^2}\right| \geq \frac{K_1}{|n|^{\mu_\gamma(\rho)}}.$$

因此，对于任意满足 $\in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ 和 $|n| > N$ 的 (m, n)，

$$\left|\rho - \frac{m}{n} + \frac{\gamma}{n^2}\right| \geq \frac{K}{|n|^{\mu_\gamma(\rho)+\epsilon}},$$

其中 $K := \min\{K_1, 1\}$。根据定义 4.1，这意味着 $\mu_\gamma(\rho) + \varepsilon \geq \nu_\gamma(\rho) + 2$，进而推出 $\mu_\gamma(\rho) \geq \nu_\gamma(\rho) + 2$。

因此，对于任意 $\rho \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$，也有 $\mu_\gamma(\rho) = \nu_\gamma(\rho) + 2$。 □

注 4.4. 我们指出，当 $\gamma = 0$ 和 $\rho \in \mathbb{Q}$时，命题 *4.3* 不成立。事实上，当 $\gamma = 0$时，我们有 $\mu_0(\rho) = 1$ 和 $\nu_0(\rho) = \infty$，其中 $\rho \in \mathbb{Q}$。

4.1.3 ν_γ 和 μ_γ的性质

接下来，我们推导 ν_γ 和 μ_γ的一些性质。

命题 4.5. 设 $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$。则以下性质成立。

(1) 对任意 $\rho \in \mathbb{R}$ 和 $k \in \mathbb{Z}$，有 $\nu_\gamma(\rho + k) = \nu_\gamma(\rho)$ 以及 $\mu_\gamma(\rho + k) = \mu_\gamma(\rho)$。 *(2)* 对任意 $\rho \in \mathbb{R}$，有 $\nu_\gamma(\rho) \geq 0$ 和 $\mu_\gamma(\rho) \geq 2$。 *(3)* 对几乎处处的 $\rho \in \mathbb{R}$，有 $\nu_\gamma(\rho) = 0$ 和 $\mu_\gamma(\rho) = 2$。

证明。 根据命题 4.3，我们只需证明 μ_γ 满足上述性质。

(1) 这一部分显然。

（2）若 $\rho \in \mathbb{Q}$，则已经证明$\mu_\gamma(\rho) = 0$ 且$\mu_\gamma(\rho) = 2$。因此，剩下需要研究的是 $\rho \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$的情形。在此情形下，众所周知 $\mu_0(\rho) \geq 2$，例如参见 [24]第13页的命题1。因此，对任意 $\epsilon > 0$，存在无穷多个(m, n)使得

$$0 < \left|\rho - \frac{m}{n}\right| < \frac{1}{|n|^{2-\varepsilon}}. \tag{4.6}$$

对任意固定的 n，上述不等式仅对有限多个 m成立。此外，(4.6)对一对(m, n)成立，当且仅当它对一对$(-m, -n)$成立。因此，我们可以找到无穷多对(m, n)使得(4.6)成立，其中 $n > 0$ 足够大以至于 $n^\varepsilon \geq 2 + |\gamma|$。因此，

$$\left|\rho - \frac{m}{n} + \frac{\gamma}{n^2}\right| \leq \left|\rho - \frac{m}{n}\right| + \left|\frac{\gamma}{n^2}\right| < \frac{1}{n^{2-2\varepsilon}}.$$

同时，由于 $\rho \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$，至多存在一对$(m, n)$使得 $n > 0$ 且 $\rho - \frac{m}{n} + \frac{\gamma}{n^2} = 0$。因此，存在无穷多个$(m, n)$使得 $n > 0$ 且

$$0 < \left|\rho - \frac{m}{n} + \frac{\gamma}{n^2}\right| < \frac{1}{n^{2-2\varepsilon}},$$

这意味着 $\mu_\gamma(\rho) \geq 2 - 2\varepsilon$。令 $\varepsilon \to 0^+$ 趋于……，我们有 $\mu_\gamma(\rho) \geq 2$。

(3) 由于 $\mu_\gamma(\rho) \geq 2$，且 μ_γ 在整数平移下保持不变，因此我们只需证明，对任意 $\epsilon > 0$，$m(A_\varepsilon) = 0$，其中

$$A_\varepsilon = \{\rho \in [0, 1) : \mu(\rho) > 2 + \varepsilon\}.$$

根据定义及第 (2) 部分的讨论，对任意 $\rho \in A_\varepsilon$，都存在无穷多个整数对（m，n），使得 $n > 0$，并且

$$\left|\rho - \frac{m}{n} + \frac{\gamma}{n^2}\right| < \frac{1}{n^{2+\varepsilon}}.$$

注意，满足上述不等式的 n 集合的上确界为无穷大，否则满足上述条件的整数对（m，n）只能有有限多个。因此，给定任意整数 $K > |\gamma| > 0$，必定存在一个 $n > K$ 和一个 m，使得

$$\rho \in I_\gamma(m, n) = \left(\frac{m}{n} - \frac{\gamma}{n^2} - \frac{1}{n^{2+\varepsilon}}, \frac{m}{n} - \frac{\gamma}{n^2} + \frac{1}{n^{2+\varepsilon}}\right).$$

由于 $0 \leq \rho < 1$，我们有

$$\frac{m}{n} - \frac{\gamma}{n^2} - \frac{1}{n^{2+\varepsilon}} < 1, \quad \text{and} \quad \frac{m}{n} - \frac{\gamma}{n^2} + \frac{1}{n^{2+\varepsilon}} > 0,$$

这意味着 $0 \leq m \leq n + 1$。因此，

$$\rho \in \bigcup_{n=K+1}^{\infty} \bigcup_{m=0}^{n+1} I_\gamma(m, n).$$

因此，

$$m(A_\varepsilon) \le \sum_{n=K+1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n+1} |I_\gamma(m,n)| = \sum_{n=K+1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n+1} \frac{2}{n^{2+\varepsilon}}$$
$$\le 4\sum_{n=K+1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}} \le 4\int_K^{\infty} \frac{1}{x^{1+\varepsilon}}\,dx = \frac{4}{\varepsilon K^\varepsilon}.$$

设 $K\to\infty$，则 $m(A_\varepsilon)=0$，由此完成证明。

□

4.2 双线性估计

接下来，我们证明定理 1.4。根据第 3.1 节中定理 1.1 的证明所采用的压缩映射论证，只需验证以下两个双线性估计。

命题 4.6。设 $\alpha\in(0,\ 4)\setminus\{1\}$, $\beta\neq 0$ 和 $\sigma\ge 1$。设 $s^*(\alpha,\beta)$ 如 *(1.14)* 中所定义。那么对于任意 $s>s^*(\alpha,\beta)$，双线性估计 *(4.7)* 对施瓦茨空间 $\mathscr{S}(\mathbb{T}_\sigma\times\mathbb{R})$ 中任意的 w_1 和 w_2 均成立。

$$\|\partial_x(w_1w_2)\|_{Z^s_\sigma(\mathbb{T}_\sigma\times\mathbb{R})} \le C\sigma\|w_1\|_{Y^s_{\alpha,\beta_\sigma}(\mathbb{T}_\sigma\times\mathbb{R})}\|w_2\|_{Y^s_{\alpha,\beta_\sigma}(\mathbb{T}_\sigma\times\mathbb{R})}, \tag{4.7}$$

其中 $C=C(s,\alpha,\beta)$。此外，在 w_1 满足额外的零均值条件时，即 $\mathscr{F}_x w_1(0,\ t)=0$ 对任意 t，以下双线性估计 *(4.8)* 对任意 $s>s^*(\alpha,\beta)$ 也成立。

$$\|\partial_x(w_1w_2)\|_{Z^s_{\alpha,\beta_\sigma}(\mathbb{T}_\sigma\times\mathbb{R})} \le C\sigma\|w_1\|_{Y^s_\sigma(\mathbb{T}_\sigma\times\mathbb{R})}\|w_2\|_{Y^s_{\alpha,\beta_\sigma}(\mathbb{T}_\sigma\times\mathbb{R})}, \tag{4.8}$$

其中 $C=C(s,\ \alpha,\ \beta)$。此外，当 $R_\alpha\in\mathbb{Q}$ 时，*(4.7)* 和 *(4.8)* 中 s 的值域都可以扩展到包含端点，即 $s\ge\frac{1}{2}$。

(4.7) 和 (4.8) 的证明非常相似，因此我们只详细证明 (4.7)，然后说明为什么 (4.8) 需要额外假设 w_1 是零均值的。

对于 (4.7)，根据空间 $Z^s_\sigma(\mathbb{T}_\sigma\times\mathbb{R})$ 的定义，只需证明以下两个估计：

$$\|\partial_x(w_1w_2)\|_{X^{s,-\frac{1}{2}}_\sigma} \le C_1\sigma\|w_1\|_{Y^s_{\alpha,\beta_\sigma}}\|w_2\|_{Y^s_{\alpha,\beta_\sigma}}, \tag{4.9}$$

$$\|\langle\xi\rangle^s\langle\tau-\alpha\xi^3+\beta_\sigma\xi\rangle^{-1}\widehat{\partial_x(w_1w_2)}(\xi,\tau)\|_{L^2_\xi(\mathbb{Z}_\sigma)L^1_\tau(\mathbb{R})} \le C_1\sigma\|w_1\|_{Y^s_{\alpha,\beta_\sigma}}\|w_2\|_{Y^s_{\alpha,\beta_\sigma}}. \tag{4.10}$$

4.2.1 双线性估计主要部分的证明

证明 of (4.9)。首先，根据定义 2.1 中空间 $Y^s_{\alpha,\ \beta_\sigma}$ 的定义，只需证明 ow

$$\|\partial_x(w_1w_2)\|_{X^{s,-\frac{1}{2}}_\sigma} \lesssim \sigma\|w_1\|_{X^{s\cdot\frac{1}{2}}_{\alpha,\beta_\sigma}}\|w_2\|_{X^{s,\frac{1}{2}}_{\alpha,\beta_\sigma}}. \tag{4.11}$$

受 (3.9) 的证明启发，我们定义如下双线性算子：

$$\mathscr{B}_s(f_1,f_2)(\xi,\tau) = \frac{\xi\langle\xi\rangle^s}{\langle L\rangle^{1/2}} \iint\limits_{\substack{\xi_1+\xi_2=\xi\\ \tau_1+\tau_2=\tau}} \frac{f_1(\xi_1,\tau_1)f_2(\xi_2,\tau_2)}{\langle\xi_1\rangle^s\langle\xi_2\rangle^s\langle L_1\rangle^{1/2}\langle L_2\rangle^{1/2}}\,d\xi_1\,d\tau_1, \quad \forall\,\xi\in\mathbb{Z}/\sigma,\ \tau\in\mathbb{R},$$

其中

$$L=\tau-\xi^3, \quad L_1=\tau_1-\alpha\xi_1^3+\frac{\beta}{\sigma^2}\xi_1, \quad L_2=\tau_2-\alpha\xi_2^3+\frac{\beta}{\sigma^2}\xi_2. \tag{4.12}$$

因此，(4.11) 转化为

$$\|\mathscr{B}_s(f_1,f_2)\|_{L^2_{\xi,\tau}} \lesssim \sigma\|f_1\|_{L^2_{\xi_1,\tau_1}}\|f_2\|_{L^2_{\xi_2,\tau_2}}. \tag{4.13}$$

根据 (4.12)，如果我们用 L_1+L_2 减去 L，所有时间频率变量都会消失，即:

$$L_1+L_2-L=\Big(-\alpha\xi_1^3+\frac{\beta}{\sigma^2}\xi_1\Big)+\Big(-\alpha\xi_2^3+\frac{\beta}{\sigma^2}\xi_2\Big)+\xi^3:=H_\sigma(\xi,\xi_1,\xi_2), \tag{4.14}$$

w这里，函数 H_σ 称为共振函数。代入 $\xi_2=\xi-\xi_1$，我们得到 in

$$H_\sigma(\xi,\xi_1,\xi_2)=-3\alpha\xi\xi_1^2+3\alpha\xi^2\xi_1+(1-\alpha)\xi^3+\frac{\beta}{\sigma^2}\xi.$$

固定 ξ 时，上述表达式可视为关于 ξ_1的函数。我们将此函数记为 H_σ^ξ，可改写如下:

$$H_\sigma^\xi(\xi_1)=-3\alpha\xi\Big(\xi_1^2-\xi\xi_1+\frac{\alpha-1}{3\alpha}\xi^2-\frac{\beta}{3\alpha\sigma^2}\Big). \tag{4.15}$$

当 $\alpha\in(0,4)\setminus\{1\}$时，一方面，

$$\xi_1^2-\xi\xi_1+\frac{\alpha-1}{3\alpha}\xi^2=0$$

有两个根 $\xi_1=c_1\xi$ 和 $c_2\xi$，其中

$$c_1=\frac{1}{2}+\frac{R_\alpha}{6},\qquad c_2=\frac{1}{2}-\frac{R_\alpha}{6},\qquad R_\alpha=\sqrt{12/\alpha-3}, \tag{4.16}$$

因此 $H_\sigma^\xi(\xi_1)$可表示为

$$H_\sigma^\xi(\xi_1)=-3\alpha\xi(\xi_1-c_1\xi)(\xi_1-c_2\xi)+\frac{\beta\xi}{\sigma^2}. \tag{4.17}$$

另一方面，如果 $|\xi|$ 足够大，使得

$$|\xi|^2\geq\frac{24|\beta|}{(12-3\alpha)\sigma^2}=\frac{24|\beta|}{\alpha R_\alpha^2\sigma^2}, \tag{4.18}$$

于是，共振函数 H_σ^ξ 可分解如下:

$$H_\sigma^\xi(\xi_1)=-3\alpha\xi\left(\xi_1-x_1\right)\left(\xi_1-x_2\right), \tag{4.19}$$

其中

$$x_1=\frac{1}{2}\xi+\frac{1}{6}\sqrt{(R_\alpha\xi)^2+\frac{12}{\alpha}\frac{\beta}{\sigma^2}},\quad x_2=\frac{1}{2}\xi-\frac{1}{6}\sqrt{(R_\alpha\xi)^2+\frac{12}{\alpha}\frac{\beta}{\sigma^2}}.$$

我们还可以按 $|\xi|$ 的阶进一步展开 x_1 和 x_2，得到

$$\begin{cases}x_1=\frac{1}{2}\xi+\frac{1}{6}R_\alpha|\xi|+\frac{\lambda}{\sigma^2|\xi|}+Q_1(\xi),\\ x_2=\frac{1}{2}\xi-\frac{1}{6}R_\alpha|\xi|-\frac{\lambda}{\sigma^2|\xi|}+Q_2(\xi),\end{cases}\qquad\lambda:=\frac{\beta}{\alpha R_\alpha},$$

其中

$$|Q_j(\xi)|\leq\frac{12\lambda^2}{R_\alpha\sigma^4}|\xi|^{-3},\qquad j=1,2,\qquad\forall\,\xi\text{ satisfies (4.18)}. \tag{4.20}$$

T当 $\xi>0$ 时的情形与当 $\xi<0$ 时的情形类似，因此我们只讨论前一种情形。

在剩余的证明中，我们假设 $\xi>0$。于是，对于满足 (4.18) 的正 ξ，由 (4.20) 可知，x_1 和 x_2 可以改写为

$$x_1=c_1\xi+\frac{\lambda}{\sigma^2\xi}+Q_1(\xi),\qquad x_2=c_2\xi-\frac{\lambda}{\sigma^2\xi}+Q_2(\xi). \tag{4.21}$$

由于 $\alpha \neq 1$， c_1 和 c_2 均不为零。

区域（1）。$0 < \xi \leq E_{\alpha,\ \beta,\ s}$，其中 $E_{\alpha,\ \beta,\ s}$ 是一个仅依赖于 α、 β 和 s 的常数。$E_{\alpha,\ \beta,\ s}$ 的具体选择将在后面确定。

对于 $s \geq 0$，我们有

$$\frac{\xi\langle\xi\rangle^s}{\langle\xi_1\rangle^s\langle\xi_2\rangle^s\langle\tau-\xi^3\rangle^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{\xi\langle\xi\rangle^s}{\langle\xi\rangle^s\langle\tau-\xi^3\rangle^{\frac{1}{2}}} \leq E_{\alpha,\beta,s}.$$

于是，由 H¨older 不等式和引理 2.4 可得

$$\begin{aligned}\|\mathscr{B}_s(f_1,f_2)\|_{L^2_{\xi,\tau}} &\lesssim \Big\| \iint\limits_{\substack{\xi_1+\xi_2=\xi\\ \tau_1+\tau_2=\tau}} \frac{f_1(\xi_1,\tau_1)f_2(\xi_2,\tau_2)}{\langle L_1\rangle^{1/2}\langle L_2\rangle^{1/2}}\,d\xi_1\,d\tau_1\Big\|_{L^2_{\xi,\tau}} = \|F_1F_2\|_{L^2_{x,t}} \\ &\leq \|F_1\|_{L^4_{x,t}}\|F_2\|_{L^4_{x,t}} \lesssim \|F_1\|_{X^{0,\frac{1}{3}}_{4,\beta_\sigma}}\|F_2\|_{X^{0,\frac{1}{3}}_{4,\beta_\sigma}} \leq \|f_1\|_{L^2_{x,t}}\|f_2\|_{L^2_{x,t}}\end{aligned} \tag{4.22}$$

其中

$$F_1(x,t) = \mathscr{F}^{-1}\{\langle L_1\rangle^{-\frac{1}{2}}f_1(\xi_1,\tau_1)\}, \quad F_2(x,t) = \mathscr{F}^{-1}\{\langle L_2\rangle^{-\frac{1}{2}}f_2(\xi_2,\tau_2)\}. \tag{4.23}$$

区域（2）。$\xi > E_{\alpha,\ \beta,\ s}$， $|\xi_1 - c_1\xi| \geq \frac{1}{2\sigma}$ 和 $|\xi_1 - c_2\xi| \geq \frac{1}{2\sigma}$，其中 c_1 和 c_2 如（4.16）中所定义。

通过选择 $E_{\alpha,\ \beta,\ s}$ 使得

$$E_{\alpha,\beta,s} \geq \frac{4}{R_\alpha}\Big(1+\frac{|\beta|}{\alpha}\Big), \tag{4.24}$$

那么对于任意的 $\xi > E_{\alpha,\beta,s}$，(4.18) 都成立，而且，

$$\frac{\lambda}{\sigma^2\xi} + \frac{12\lambda^2}{R_a\sigma^4}\xi^{-3} \leq \frac{1}{2\sigma}.$$

因此，由 (4.21) 和 (4.20) 可得

$$x_1 \in \Big[c_1\xi - \frac{1}{2\sigma}, c_1\xi + \frac{1}{2\sigma}\Big], \qquad x_2 \in \Big[c_2\xi - \frac{1}{2\sigma}, c_2\xi + \frac{1}{2\sigma}\Big], \tag{4.25}$$

其中 x_1 和 x_2 是 (4.19) 中二次函数 $H^\xi_\sigma(\xi_1)$ 的两个根。由于对 $k = 1,2$，约束条件 $|\xi_1 - c_k\xi| \geq \frac{1}{2\sigma}$ 成立，我们知道 —

$$\big|H^\xi_\sigma(\xi_1)\big| \geq \min\Big\{\Big|H^\xi_\sigma\Big(c_1\xi - \frac{1}{2\sigma}\Big)\Big|, \Big|H^\xi_\sigma\Big(c_1\xi + \frac{1}{2\sigma}\Big)\Big|, \Big|H^\xi_\sigma\Big(c_2\xi - \frac{1}{2\sigma}\Big)\Big|, \Big|H^\xi_\sigma\Big(c_2\xi + \frac{1}{2\sigma}\Big)\Big|\Big\}.$$

通过直接计算，由 (4.17) 可得

$$\Big|H^\xi_\sigma\Big(c_1\xi - \frac{1}{2\sigma}\Big)\Big| = \Big|\frac{3\alpha\xi}{2\sigma}\Big[(c_1-c_2)\xi - \frac{1}{2\sigma}\Big] + \frac{\beta\xi}{\sigma^2}\Big| = \Big|\frac{\alpha R_\alpha}{2\sigma}\xi^2 - \frac{3\alpha}{4\sigma^2}\xi + \frac{\beta}{\sigma^2}\xi\Big|.$$

由于 $\xi > E_{\alpha,\beta,s}$，其中 $E_{\alpha,\beta,s}$ 具有与 (4.24) 中相同的下界，因此由上述等式可得

$$\Big|H^\xi_\sigma\Big(c_1\xi - \frac{1}{2\sigma}\Big)\Big| \geq \frac{\alpha R_\alpha}{4\sigma}\xi^2.$$

类似地，我们可以证明，对于 ~~$k =$~~ $1, 2$， $\frac{\alpha R_\alpha}{4\sigma}\xi^2$ 是 $|H^\xi_\sigma(c_k\xi \pm \frac{1}{2\sigma})|$ 的共同下界，这意味着

$$\big|H^\xi_\sigma(\xi_1)\big| \geq \frac{\alpha R_\alpha}{4\sigma}\xi^2.$$

令 $MAX_1 := \max\{\langle L\rangle, \langle L_1\rangle, \langle L_2\rangle\}$，则由关系式 (4.14) 可得

$$MAX_1 \geq \frac{1}{3}|H^\xi_\sigma(\xi_1)| \gtrsim \frac{\xi^2}{\sigma}.$$

区域（2.1）。 $\langle L\rangle = MAX_1$。

在这种情况下，我们有 $\langle \tau - \xi^3 \rangle = \langle L \rangle \gtrsim \xi^2/\sigma$，因此

$$\frac{|\xi|\langle \xi \rangle^s}{\langle \xi_1 \rangle^s \langle \xi_2 \rangle^s} \frac{1}{\langle \tau - \xi^3 \rangle^{\frac{1}{2}}} \lesssim \sigma^{\frac{1}{2}} \frac{\langle \xi \rangle^s}{\langle \xi_1 \rangle^s \langle \xi_2 \rangle^s} \lesssim \sigma^{\frac{1}{2}},$$

其中最后一个不等式由 $\xi = \xi_1 + \xi_2$ 和 $s \geq 0$ 得出。接下来的论证与 (4.22) 中的类似，只是多了一个系数 $\sigma^{\frac{1}{2}}$。

区域（2.2）。$\langle L_1 \rangle = MAX_1$或 $\langle L_2 \rangle = MAX_1$。

我们只考虑 $\langle L_1 \rangle = MAX_1$ 的情形。由对偶性，(4.11) 等价于

$$\left| \int \frac{\xi \langle \xi \rangle^s g(\xi,\tau) f_1(\xi_1,\tau_1) f_2(\xi_2,\tau_2)}{\langle \xi_1 \rangle^s \langle \xi_2 \rangle^s \langle L \rangle^{1/2} \langle L_1 \rangle^{1/2} \langle L_2 \rangle^{1/2}} \, d\xi_1 \, d\tau_1 \, d\xi \, d\tau \right| \lesssim \sigma \|f_1\|_{L^2_{\xi_1,\tau_1}} \|f_2\|_{L^2_{\xi_2,\tau_2}} \|g\|_{L^2_{\xi,\tau}}. \tag{4.26}$$

与区域（2.1）中的讨论类似，我们有

$$\frac{|\xi|\langle \xi \rangle^s}{\langle \xi_1 \rangle^s \langle \xi_2 \rangle^s} \frac{1}{\langle L_1 \rangle^{\frac{1}{2}}} \lesssim \sigma^{\frac{1}{2}}.$$

于是，由 H¨older 不等式可得

$$LHS \text{ of } (4.26) \lesssim \sigma^{\frac{1}{2}} \left| \iint F_1(x,t) F_2(x,t) G(x,t) \, dx \, dt \right| \leq \sigma^{\frac{1}{2}} \|F_1\|_{L^2_{x,t}} \|F_2\|_{L^4_{x,t}} \|G\|_{L^4_{x,t}}, \tag{4.27}$$

其中

$$F_1(x,t) = \mathscr{F}^{-1}\{f(\xi_1,\tau_1)\}, \quad G(x,t) = \mathscr{F}^{-1}\{\langle L_2 \rangle^{-\frac{1}{2}} f_2(\xi_2,\tau_2)\}, \quad F_2(x,t) = \mathscr{F}^{-1}\{\langle L \rangle^{-\frac{1}{2}} g(-\xi,-\tau)\}. \tag{4.28}$$

现在，我们将引理 (2.4) 应用于 (4.27)，得到

$$LHS \text{ of } (4.26) \lesssim \sigma^{\frac{1}{2}} \|F_1\|_{L^2_{x,t}} \|F_2\|_{X^{0,\frac{1}{3}}_{4,\beta_\sigma}} \|G\|_{X^{0,\frac{1}{3}}} \leq \sigma^{\frac{1}{2}} \|f_1\|_{L^2_{\xi_1,\tau_1}} \|f_2\|_{L^2_{\xi_2,\tau_2}} \|g\|_{L^2_{\xi,\tau}} \leq RHS \text{ of } (4.26). \tag{4.29}$$

区域（3）。$\xi > E_{\alpha,\ \beta,\ s}$, $|\xi_1 - c_1\xi| \leq \frac{1}{2\sigma}$ 或 $|\xi_1 - c_2\xi| \leq \frac{1}{2\sigma}$。

(4.21) 中的频率 ξ 属于 $\mathbb{Z}/\sigma$，因此，为了利用丢番图逼近理论中的经典结果来估计 $|\xi_1 - x_1|$ 和 $|\xi_1 - x_2|$，将 ξ 转化为整数会很有帮助。于是，我们引入

$$\widetilde{\xi} := \sigma\xi \quad \text{and} \quad \widetilde{\xi_1} := \sigma\xi_1,$$

$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$，使得 ξ 和 ξ_1 都是整数。由于约束 $|\xi| > E_{\alpha,\ \beta,\ s}$，(4.18) 自动成立。因此，由 (4.21) 可得

$$x_1 = \frac{1}{\sigma}\left[c_1\widetilde{\xi} + \frac{\lambda}{\widetilde{\xi}}\right] + Q_1(\xi), \qquad x_2 = \frac{1}{\sigma}\left[c_2\widetilde{\xi} - \frac{\lambda}{\widetilde{\xi}}\right] + Q_2(\xi). \tag{4.30}$$

因此，

$$\begin{cases} |\xi_1 - x_1| \geq \dfrac{1}{\sigma}\left|\widetilde{\xi_1} - c_1\widetilde{\xi} - \dfrac{\lambda}{\widetilde{\xi}}\right| - |Q_1(\xi)|, \\ \\ |\xi_1 - x_2| \geq \dfrac{1}{\sigma}\left|\widetilde{\xi_1} - c_2\widetilde{\xi} + \dfrac{\lambda}{\widetilde{\xi}}\right| - |Q_2(\xi)|. \end{cases} \tag{4.31}$$

现在我们只关注满足以下条件的区域

$$|\xi_1 - c_1\xi| \leq \frac{1}{2\sigma} \tag{4.32}$$

因为区域 $|\xi_1 - c_2\xi| \le \frac{1}{2\sigma}$ 的证明类似。在此区域中，我们首先证明，只要 $E_{\alpha,\ \beta,\ s}$ 足够大， ξ_1、 ξ_2 和 ξ 的大小就相当。由于 $c_1 + c_2 = 1$ 和 $\xi_1 + \xi_2 = \xi$，因此

$$|\xi_2 - c_2\xi| = |\xi_1 - c_1\xi| \le \frac{1}{2\sigma}. \tag{4.33}$$

除了约束 (4.24) 外，我们还要求

$$E_{\alpha,\beta,s} \ge \frac{1}{|c_2|} = \frac{6}{|3 - R_\alpha|}. \tag{4.34}$$

我们指出，分母 $|c_2|$ 或 $|3 - R_\alpha|$ 非零，因为 $\alpha \ne 1$。因此，由于 $\xi > E_{\alpha,\ \beta,\ s}$ 和 $\sigma \ge 1$，由 (4.16) 和 (4.34) 可得

$$|c_2\xi| \ge \frac{1}{\sigma} \quad \text{and} \quad |c_1\xi| \ge \frac{1}{\sigma}. \tag{4.35}$$

将 (4.34) 与 (4.35) 结合可得

$$\langle \xi_1 \rangle \sim \langle \xi_2 \rangle \sim \langle \xi \rangle, \tag{4.36}$$

这意味着对任意 $s \ge \frac{1}{2}$，

$$\frac{|\xi|\langle \xi \rangle^s}{\langle MAX_1 \rangle^{\frac{1}{2}} \langle \xi_1 \rangle^s \langle \xi_2 \rangle^s} \lesssim \frac{|\xi|^{\frac{1}{2}}}{\langle MAX_1 \rangle^{\frac{1}{2}}}. \tag{4.37}$$

接下来，我们估计共振函数 H_σ^ξ 的大小，它可分解如下（见 (4.19)）：

$$H_\sigma^\xi(\xi_1) = -3\alpha\xi(\xi_1 - x_1)(\xi_1 - x_2). \tag{4.38}$$

由于 ξ_1 接近 $c_1\xi$，且 x_2 接近 $c_2\xi$，因此 ξ_1 与 x_2 之间的距离应接近 $(c_1 - c_2)\xi$。事实上，

$$\begin{aligned} |\xi_1 - x_2| &= |(\xi_1 - c_1\xi) + (c_1 - c_2)\xi + (c_2\xi - x_2)| \\ &\ge (c_1 - c_2)\xi - |\xi_1 - c_1\xi| - |c_2\xi - x_2|, \end{aligned}$$

由 (4.32) 和 (4.25) 可得

$$|\xi_1 - x_2| \ge (c_1 - c_2)\xi - \frac{1}{\sigma} = \frac{R_\alpha}{3}\xi - 1 \ge \frac{R_\alpha}{12}\xi,$$

其中最后一个不等式由 $\xi > E_{\alpha,\ \beta,\ s} \ge \frac{4}{R_\alpha}$ 得出，如 (4.24) 所示。因此，我们可由此推得 (4.38)

$$|H_\sigma^\xi(\xi_1)| \gtrsim |\xi|^2|\xi_1 - x_1|. \tag{4.39}$$

接下来，我们将讨论分为三种情形。

情形 3.1. $R_\alpha \in \mathbb{Q}$.

在此情形下， $c_1 = -\frac{1}{2} + \frac{R_\alpha}{6} \in \mathbb{Q}$。令

$$c_1 = \frac{q}{p}, \qquad \text{where} \quad p, q \in \mathbb{Z}^+ \text{ and } \gcd(p, q) = 1. \tag{4.40}$$

然后利用 (4.20) 和 (4.31)， $|\xi_1 - x_1|$ 有如下下界：

$$|\xi_1 - x_1| \ge \frac{1}{\sigma}\left|\widetilde{\xi_1} - c_1\widetilde{\xi} - \frac{\lambda}{\widetilde{\xi}}\right| - |Q_1(\xi)| \ge \frac{1}{\sigma}\left(\left|\frac{p\widetilde{\xi_1} - q\widetilde{\xi}}{p} - \frac{\lambda}{\widetilde{\xi}}\right| - \frac{12\lambda^2}{R_\alpha|\widetilde{\xi}|^3}\right). \tag{4.41}$$

- W当 $p\widetilde{\xi_1} - q\widetilde{\xi} = 0$ 时，我们有 $\frac{12\lambda^2}{R_\alpha|\widetilde{\xi}|^3} \leqq \frac{\lambda}{2\widetilde{\xi}}$，因为 $|\xi| > E_{\alpha,\ \beta,\ s}$。因此，由 (4.41) 可得

$$|\xi_1 - x_1| \gtrsim \frac{1}{\sigma^2|\xi|}.$$

- 当 $p\xi_1 - \widetilde{q\xi} \neq \widetilde{0}$ 时，我们有

$$|p\widetilde{\xi_1} - q\widetilde{\xi}| \geq 1.$$

因此，由 (4.41) 可得

$$\sigma|\xi_1 - x_1| \geq \left|\frac{p\widetilde{\xi_1} - q\widetilde{\xi}}{p} - \frac{\lambda}{\widetilde{\xi}}\right| - \frac{12\lambda^2}{R_\alpha|\widetilde{\xi}|^3} \geq \frac{1}{p} - \frac{|\lambda|}{\widetilde{\xi}} - \frac{12\lambda^2}{R_\alpha\widetilde{\xi}^3}.$$

由于 ξ 满足 (4.18)，因此可以直接验证

$$\sigma|\xi_1 - x_1| \geq \frac{1}{p} - \frac{3|\lambda|}{2\widetilde{\xi}}. \tag{4.42}$$

为了得到 (4.42) 的正下界，我们需要

$$E_{\alpha,\beta,s} \geq 2p|\lambda| = \frac{2p|\beta|}{\alpha R_\alpha}, \tag{4.43}$$

$\widetilde{\ }$，它仅依赖于 α 和 β，于是 $\xi \geq \xi \geq 2p|\lambda|$，并且

$$\frac{1}{p} - \frac{3|\lambda|}{2\widetilde{\xi}} \gtrsim \frac{1}{\widetilde{\xi}}.$$

将其代入 (4.42) 可得

$$|\xi_1 - x_1| \gtrsim \frac{1}{\sigma\widetilde{\xi}} = \frac{1}{\sigma^2\xi}.$$

总之，无论 $p\widetilde{\xi_1} - q\widetilde{\xi} = 0$ 与否，始终有 $|\xi_1 - x_1| \gtrsim \frac{1}{\sigma^2\xi}$。因此，

$$|H^\xi_\sigma(\xi_1)| \gtrsim |\xi|^2|\xi_1 - x_1| \gtrsim \frac{|\xi|}{\sigma^2}.$$

因此，对于任意 $s \geq \frac{1}{2}$，由 (4.37) 可得

$$\frac{|\xi|\langle\xi\rangle^s}{\langle MAX_1\rangle^{\frac{1}{2}}\langle\xi_1\rangle^s\langle\xi_2\rangle^s} \lesssim \frac{|\xi|^{\frac{1}{2}}}{\langle MAX_1\rangle^{\frac{1}{2}}} \lesssim \sigma.$$

其余论证与 (4.22) 的类似，只是多了一个系数 σ。

情形 3.2. $R_\alpha \notin \mathbb{Q}$ **和** 最大值$\{\nu_\lambda(c_1)\ \nu_\lambda(c_2)\} \geq 1$。

在这种情况下，$s^*(\alpha,\ \beta) = 1$。于是，对于 $s \geq 1$，由 (4.36) 可得

$$\frac{|\xi|\langle\xi\rangle^s}{\langle\xi_1\rangle^s\langle\xi_2\rangle^s} \lesssim 1.$$

因此，其余计算与 (4.22) 中的相同。

情形 3.3。 $R_\alpha \notin \mathbb{Q}$ **且** 最大值$\{\nu_\lambda(c_1)\ \nu_\lambda(c_2)\} < 1$。

按照 [20], 中的思路，我们应用丢番图逼近理论来处理这种情况。回顾定义 4.1，其中要求 $|n|$满足下界 N，因此我们需要确保 $|\xi| > N$，以便应用这一理论。同时，需要注意的是，我们还存在 $|\xi_1 - c_2\xi| \leq \frac{1}{2\sigma}$这种情况；对于这种情况，在后续证明中应当用 $\nu_\lambda(c_2)$ 替换 $\nu_\lambda(c_1)$。这一替换直接

给出了所需的指标 (1.12)，如下所示：

$$s_{\alpha,\beta} = \max\{\nu_\lambda(c_1), \nu_\lambda(c_2)\}.$$

为便于后续正确使用指标 (1.12)，我们定义

$$N(\alpha,\beta) = \max\{N_1, N_2\}, \tag{4.44}$$

其中 $N_i = N_i(c_i,\ \lambda)$，$i = 1,\ 2$，恰为 $\nu_\lambda(c_i)$ 的定义中给出的下界 N_i，且它仅依赖于 α 和 β。因此，我们要求

$$E_{\alpha,\beta,s} \geq N(\alpha,\beta) + 1 \tag{4.45}$$

以确保当 $|\xi| \geq E_{\alpha,\ \beta,\ s}$ 时，$|\xi| > N(\alpha,\ \beta)$ 成立。由于 $s > s^*(\alpha,\ \beta)$，我们在下面定义一个正参数 ε：

$$\varepsilon = 2s - 1 - s(\alpha,\beta) = 2[s - s^*(\alpha,\beta)].$$

于是 $0 < \varepsilon \leq 2s-1-\nu_\lambda(c_1)$。若 $s \geq 1$，则与情形 3.2 类似，所需估计自动成立。接下来，我们假设 $s^*(\alpha,\ \beta) < s < 1$，这意味着

$$\nu(c_1) + \varepsilon \leq 2s - 1 < 1.$$

由 (4.31) 和 (4.20)，可得

$$\begin{aligned} |\xi_1 - x_1| &\geq \frac{|\widetilde{\xi}|}{\sigma}\left|c_1 - \frac{\widetilde{\xi}_1}{\widetilde{\xi}} + \frac{\lambda}{\widetilde{\xi}^2}\right| - |Q_1(\xi)| \\ &\geq |\xi|\left(\left|c_1 - \frac{\widetilde{\xi}_1}{\widetilde{\xi}} + \frac{\lambda}{\widetilde{\xi}^2}\right| - \frac{12\lambda^2}{R_\alpha|\widetilde{\xi}|^4}\right). \end{aligned} \tag{4.46}$$

根据 $\nu_\lambda(c_1)$ 的定义，存在一个正数 $K_1 = K_1(c_1,\ \nu_\lambda(c_1) + \varepsilon,\ \lambda)$，它仅依赖于 α、β 和 s；并且存在一个正整数 $N_1 = N_1(c_1,\ \lambda)$，使得

$$\left|c_1 - \frac{m}{n} + \frac{\lambda}{n^2}\right| \geq \frac{K_1}{|n|^{2+\nu_\lambda(c_1)+\varepsilon}}, \qquad \forall\,(m,n) \in \mathbb{Z}^2,\ |n| > N_1.$$

~ ~ ~在（4.46）中，$(\xi_1,\ \xi) \in \mathbb{Z}^2$ 和 $\xi \geq \xi > N_1$，因此我们可以将上述性质代入（4.46），得到

$$|\xi_1 - x_1| \geq |\xi|\left(\frac{K_1}{|\widetilde{\xi}|^{2+\nu_\lambda(c_1)+\varepsilon}} - \frac{12\lambda^2}{R_\alpha|\widetilde{\xi}|^4}\right). \tag{4.47}$$

现在我们进一步要求 ξ 满足一个下界：

$$E_{\alpha,\beta,s} \geq \frac{24\lambda^2}{R_\alpha K_1}, \tag{4.48}$$

于是我们有 $\widetilde{\xi} \geq \xi \geq \frac{24\lambda^2}{R_\alpha K_1}$，这意味着

$$\frac{12\lambda^2}{R_\alpha|\widetilde{\xi}|^4} \leq \frac{1}{2}\frac{K_1}{|\widetilde{\xi}|^3} \leq \frac{1}{2}\frac{K_1}{|\widetilde{\xi}|^{2+\nu_\lambda(c_1)+\varepsilon}},$$

其中，最后一个不等式是由于 $\nu_\lambda(c_1) + \varepsilon \leq 1$。将此估计代入 (4.47) 可得

to

$$|\xi_1 - x_1| \geq \frac{1}{2}|\xi| \frac{K_1}{|\widetilde{\xi}|^{2+\nu_\lambda(c_1)+\varepsilon}} \gtrsim \frac{|\xi|^{-1-\nu_\lambda(c_1)-\varepsilon}}{\sigma^{2+\nu_\lambda(c_1)+\varepsilon}}. \tag{4.49}$$

结合 (4.39) 和 (4.49)，可得

$$|H_\sigma^\xi(\xi_1)| \gtrsim |\xi|^2 |\xi_1 - x_1| \gtrsim \frac{|\xi|^{1-\nu_\lambda(c_1)-\varepsilon}}{\sigma^{2+\nu_\lambda(c_1)+\varepsilon}}. \tag{4.50}$$

综上，选取 $E_{\alpha,\ \beta,\ s}$ 使其满足 (4.24)、(4.34)、(4.43)、(4.45) 和 (4.48)，即可证明情形 3.3 中区域（3）的共振函数 $|H_\sigma^\xi(\xi_1)|$ 的下界估计 (4.50)。

最后，得益于下界估计 (4.50)，其余论证与 Oh 的论文相同（参见 [20] 中第一部分命题 3.7 的证明里情形 3 从公式 (46) 开始的论证）。

□

4.2.2 双线性估计辅助部分的证明

证明 (4.10)。对于这一部分，只需证明：

$$\|\langle L\rangle^{-\frac{1}{2}} \mathscr{B}_s(f_1, f_2)\|_{L^2_\xi(\mathbb{Z}/\sigma)L^1_\tau(\mathbb{R})} \lesssim \sigma \|f_1\|_{L^2_{\xi_1,\tau_1}} \|f_2\|_{L^2_{\xi_2,\tau_2}}. \tag{4.51}$$

首先，我们记 $E_{\alpha,\ \beta,\ s}$ 为与 (4.9) 的证明中相同的常数。然后，我们将区域划分为若干子区域。

区域（1）。$|\xi| \leq E_{\alpha,\ \beta,\ s}$，或 $|\xi| > E_{\alpha,\ \beta,\ s}$，其中 $MAX_1 = \langle L_1\rangle$ 或 $MAX_1 = \langle L_2\rangle$。

该区域的证明与第 3.2.1 节中证明（3.8）时对区域（1）和区域（2）的证明完全相同，因此这里省略细节。

区域（2）。$|\xi| > E_{\alpha,\beta,s}$ 和 $MAX_1 = \langle L\rangle$。

区域（2.1）。$\langle L_1\rangle \geq \frac{1}{2}\langle L\rangle^{6\varepsilon}$ 或 $\langle L_2\rangle \geq \frac{1}{2}\langle L\rangle^{6\varepsilon}$，其中 ε 是 $(0, 1\,100)$ 中的某个小数 —— .

在这种情况下，我们有以下不等式：

$$\frac{\langle L\rangle^{\varepsilon}}{\langle L\rangle^{1/2}\langle L_1\rangle^{1/2}\langle L_2\rangle^{1/2}} \lesssim \frac{1}{\langle L\rangle^{1/2}\langle L_1\rangle^{1/3}\langle L_2\rangle^{1/3}}.$$

上述不等式旨在通过降低 $\langle L_1\rangle$ 和 $\langle L_2\rangle$ 的幂次（从 $1/2$ 降至 $1/3$），消去分子中的项 $\langle L\rangle^{\varepsilon}$。我们指出，根据引理 2.4，幂次 $1/3$ 足以得到所需结果。例如，如果将（4.22）和（4.23）中的项 $\langle L_1\rangle^{\frac{1}{2}}$ 和 $\langle L_2\rangle^{\frac{1}{2}}$ 分别替换为 $\langle L_1\rangle^{\frac{1}{3}}$ 和 $\langle L_2\rangle^{\frac{1}{3}}$，估计式（4.22）仍然成立。

区域（2.2）。$\langle L_1\rangle \leq \frac{1}{2}\langle L\rangle^{6\varepsilon}$ 和 $\langle L_2\rangle \leq \frac{1}{2}\langle L\rangle^{6\varepsilon}$。

回顾（4.14），其中

$$H_\sigma^\xi(\xi_1) = L_1 + L_2 - L,$$

因此 $|H_\sigma^\xi(\xi_1)| \sim |L| \gtrsim (|L_1| + |L_2|)^{\frac{1}{6\varepsilon}}$，这意味着

$$L = -H_\sigma^\xi(\xi_1) - (L_1 + L_2) = -H_\sigma^\xi(\xi_1) + o(|H_\sigma^\xi(\xi_1)|^{10\varepsilon}).$$

Let

$$\Omega(\xi) = \{\eta \in \mathbb{R} : \eta = -H_\sigma^\xi(\xi_1) + o(|H_\sigma^\xi(\xi_1)|^{10\varepsilon}) \text{ for some } \xi_1 \in \mathbb{Z}/\sigma\}.$$

接下来，按照情形 1 中区域（3.2）的（3.8）证明所采用的策略，只需证明

$$|\Omega(\xi) \cap \{|\eta| \sim M\}| \lesssim \sigma M^{\frac{2}{3}}, \tag{4.52}$$

对所有 $|\xi| > E_{\alpha,\beta,s}$，以及所有二进的 $M \geq 1$。

为证明 (4.52)，不失一般性，我们假设 ξ 为正且 $|\xi_1| \geq |\xi_2|$，因为 $H^\xi_\sigma(\xi_1)$ 关于 ξ_1和 ξ_2对称。此外，对任意满足 $|\eta| \sim M$ 的 $\eta \in \Omega(\xi)$，易见 $|H^\xi_\sigma(\xi_1)| \sim M$。对任意这样的 ξ_1，成立

$$\left|\left\{\eta \in \mathbb{R} : |\eta| \sim M, \eta = -H^\xi_\sigma(\xi_1) + o(|H^\xi_\sigma(\xi_1)|^{10\varepsilon})\right\}\right| \lesssim M^{10\varepsilon}. \tag{4.53}$$

现在，对任意固定的 ξ，且$|\xi| > E_{\alpha,\beta,s}$，我们估计满足 $|H^\xi_\sigma(\xi_1)| \sim M$ 的 $\xi_1 \in \mathbb{Z}/\sigma$ 的可能取值个数 N_ξ，即

$$N_\xi := \#\{\xi_1 \in \mathbb{Z}/\sigma : |H^\xi_\sigma(\xi_1)| \sim M\}.$$

由 (4.53) 及选择 $\varepsilon < \frac{1}{100}$，我们可知 —

$$\text{LHS of } (4.52) \lesssim N_\xi M^{10\varepsilon} \leq N_\xi M^{\frac{1}{10}}.$$

因此，为了证明 (4.52)，只需证明

$$N_\xi \lesssim \sigma M^{\frac{2}{3}-\frac{1}{10}}. \tag{4.54}$$

由于我们假设 ξ 为正且 $|\xi_1| \geq |\xi_2|$，故 $\xi_1 \geq \frac{\xi}{2}$。因此，我们根据它们是否接近 $c_1\xi$，将定义域划分为三个子区域。

区域 (2.2a) $\frac{\xi}{2} \leq \xi_1 \leq c_1\xi - 1$。

回顾 (4.17)，它表明

$$H^\xi_\sigma(\xi_1) = -3\alpha\xi(\xi_1 - c_1\xi)(\xi_1 - c_2\xi) + \frac{\beta\xi}{\sigma^2} = -3\alpha\xi\left(\left(\xi_1 - \frac{\xi}{2}\right)^2 + \frac{\alpha-4}{12\alpha}\xi^2 - \frac{\beta}{3\alpha\sigma^2}\right). \tag{4.55}$$

注意到 $H^\xi_\sigma(\xi_1)$ 作为 ξ_1 的函数关于 $[\xi/2, c_1\xi - 1]$ 递减。因此，我们只需计算 $H^\xi_\sigma(\xi_1)$ 在端点 $\xi/2$ 与 $c_1\xi - 1$ 处的取值，以确定其值域。直接计算得到

$$H^\xi_\sigma\left(\frac{\xi}{2}\right) = 3\alpha\xi\left(\frac{4-\alpha}{12\alpha}\xi^2 + \frac{\beta}{3\alpha\sigma^2}\right) = 3\alpha\xi\left(\frac{R_\alpha^2}{36}\xi^2 + \frac{\beta}{3\alpha\sigma^2}\right)$$

and

$$H^\xi_\sigma(c_1\xi - 1) = 3\alpha\xi\left((c_1 - c_2)\xi - 1 + \frac{\beta}{3\alpha\sigma^2}\right),$$

其中 $|\xi| > E_{\alpha,\ \beta,\ s}$。借助 (4.24)，我们有

$$\frac{R_\alpha^2}{36}\xi^2 \geq \frac{2|\beta|}{3\alpha} \qquad \text{and} \qquad (c_1 - c_2)\xi \geq 2 + \frac{2|\beta|}{3\alpha},$$

因此 $H^\xi_\sigma(\frac{\xi}{2})$与 $H^\xi_\sigma(c_1\xi - 1)$ 均为正，且

$$\left|H^\xi_\sigma\left(\frac{\xi}{2}\right)\right| \sim |\xi|^3 \quad \text{and} \quad \left|H^\xi_\sigma(c_1\xi - 1)\right| \sim |\xi|^2,$$

这意味着存在某个 $p \in [2,3]$ 使得 $|H^\xi_\sigma(\xi_1)| \sim |\xi|^p$，即 $|\xi| \sim |H^\xi_\sigma(\xi_1)|^{1/p} \sim M^{1/p}$。现在，对任意固定的 ξ，若满足$|\xi| > E_{\alpha,\ \beta,\ s}$且 $|\xi| \sim M^{1/p}$，则区间 $[\xi/2, c_1\xi - 1]$的长度量级为 $M^{1/p} \leq M^{1/2}$，故该区间中 ξ_1 至多有 $\sigma M^{1/2}$ 个可能值，从而证明 (4.54)。

区域 (2.2b). $c_1\xi - 1 \leq \xi_1 \leq c_1\xi + 1$.

在这种情况下，2σ 至多有 ξ_1个可能值，这也满足 (4.54)。**区域 (2.2c)**。 $\xi_1 \geq c_1\xi + 1$。

在这种情况下，由 (4.55) 可知， $H_\sigma^\xi(\xi_1)$ 是递减的，并且

$$H_\sigma^\xi(c_1\xi+1) = -3\alpha\xi\left((c_1-c_2)\xi+1-\frac{\beta}{3\alpha\sigma^2}\right),$$

其中 $|\xi| > E_{\alpha,\ \beta,\ s}$。回忆到 $(c_1-c_2)\xi \geq 2+\frac{2|\beta|}{3\alpha}$，因此我们有 $H_\sigma^\xi(c_1\xi+1) < 0$ 且 $|H_\sigma^\xi(c_1\xi+1)| \gtrsim |\xi|^2$。同时，由于 $H_\sigma^\xi(\xi_1)$ 在 $[c_1\xi+1,\infty)$ 上递减，我们知道 $H_\sigma^\xi(\xi_1) < 0$ 且 $M \sim |H_\sigma^\xi(\xi_1)| \gtrsim |\xi|^2$。注意到 $H_\sigma^\xi(\xi_1)$ 可以改写为

$$H_\sigma^\xi(\xi_1) = -3\alpha\xi\Big(\xi_1-\frac{\xi}{2}\Big)^2+\frac{\alpha R_\alpha^2}{12}\xi^3+\frac{\xi\beta}{\sigma^2}.$$

固定 $\xi \sim N$，其中 N 是一个二进数。记 $h^\xi(\xi_1) = -3\alpha\xi(\xi_1-\frac{\xi}{2})^2$。则

$$h^\xi(\xi_1) = H_\sigma^\xi(\xi_1)-\frac{\alpha R_\alpha^2}{12}\xi^3-\frac{\xi\beta}{\sigma^2},$$

这意味着

$$|h^\xi(\xi_1)| \leq |H_\sigma^\xi(\xi_1)|+\frac{\alpha R_\alpha^2}{6}\xi^3 \leq |H_\sigma^\xi(\xi_1)|+2\xi^3.$$

因此，

$$\#\{\xi_1\in\mathbb{Z}/\sigma : \xi_1\geq c_1\xi+1 \text{ and } |H_\sigma^\xi(\xi_1)|\sim M\} \leq \#\{\xi_1\in\mathbb{Z}/\sigma : \xi_1\geq c_1\xi+1 \text{ and } |h^\xi(\xi_1)|\lesssim M+N^3\}. \tag{4.56}$$

回忆到 $h^\xi(\xi_1) = -3\alpha\xi(\xi_1-\frac{\xi}{2})^2$ 且 $M \sim |H_\sigma^\xi(\xi_1)| \gtrsim |\xi|^2 \sim N^2$，则

$$\text{RHS of } (4.56) \lesssim \sigma\left(\frac{M+N^3}{N}\right)^{\frac{1}{2}} \lesssim \sigma M^{\frac{1}{2}},$$

这验证了 (4.54)。 □

至此，(4.7) 的证明完成。接下来，我们将说明为什么 (4.8) 需要额外假设函数 w_1 具有零均值。回顾共振函数 (1.19)：

$$\widetilde{H}^{\xi_1}(\xi) := 3\alpha\xi_1\left[(\xi-c_1\xi_1)(\xi-c_2\xi_1)-\frac{\beta}{3\alpha}\right].$$

固定 ξ_1 时，我们将 $\widetilde{H}^{\xi_1}(\xi)$ 视为关于 ξ的函数，这与 (4.7) 中的共振函数 (1.17) 类似。因此，第二个双线性估计 (4.8) 的证明与 (4.7) 类似。这里的主要区别在于，(4.8) 中由 ξ_1 引起的额外奇性。为确保当 $\xi_1 = 0$时该估计成立，必须假设对于任意 t， $\mathscr{F}_x w_1(0,t) = 0$，即 w_1 的均值为零。

因此，命题 4.6 得证。

5 不适定性结果

回顾一下，解映射为 C^k $(k\geq 1)$ 意味着存在 $T>0$，使得从初始数据 $(u_0,v_0)\in H^s(\mathbb{T})\times H^s(\mathbb{T})$ 到局部解 $(u,v)\in C([0,T];\ H^s(\mathbb{T})\times H^s(\mathbb{T}))$ 的映射为 C^k。取 $(u_0,v_0) = (\delta\phi,\delta\psi)$，则 (1.5) 变为

$$\begin{cases} u_t+u_{xxx}+vv_x = 0, \\ v_t+\alpha v_{xxx}+\beta v_x+(uv)_x = 0, \qquad x\in\mathbb{T},\ t\in\mathbb{R}, \\ (u_0,v_0) = (\delta\phi(x),\delta\psi(x)), \end{cases} \tag{5.1}$$

其中 $\delta \geq 0$ 以及 $(\phi, \psi) \in H^s(\mathbb{T}) \times H^s(\mathbb{T})$。

将 (5.1) 的解记为 $(u(x,t,\delta)\ v(x,t,\delta))$。则由 Duhamel原理 可得

$$\begin{cases} u(x,t,\delta) = \delta S(t)\phi(x) - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^t S(t-t')\partial_x(v^2)(x,t',\delta)\,dt', \\ v(x,t,\delta) = \delta S_{\alpha,\beta}(t)\psi(x) - \displaystyle\int_0^t S_{\alpha,\beta}(t-t')\partial_x(uv)(x,t',\delta)\,dt', \end{cases} \tag{5.2}$$

其中 $S(t)$ 与 $S_{\alpha,\beta}(t)$ 是如 (2.4) 所定义的半群算子。

当 $\delta = 0$ 时，(5.1) 中的初始数据 (u_0, v_0) 为 (0,0)，且唯一解亦为 $(0,0)$，这意味着 $(u(t,0)\ v(t,0)) = (0,0)$。然后对 $(u(x,t,\delta)\ v(x,t,\delta))$ 关于 δ 在 0 处求导，由 (5.2) 可得

$$\begin{cases} \partial_\delta u(x,t,0) = [S(t)\phi](x) =: \phi_1(x,t), \\ \partial_\delta v(x,t,0) = [S_{\alpha,\beta}(t)\psi](x) =: \psi_1(x,t). \end{cases} \tag{5.3}$$

为方便起见，令

$$P_{\alpha,\beta}(\eta) = \alpha\eta^3 - \beta\eta,$$

then

$$\begin{cases} \mathscr{F}_x\phi_1(\xi,t) = \mathscr{F}_x[S(t)\phi](\xi) = e^{itP_{1,0}(\xi)}\widehat{\phi}(\xi), \\ \mathscr{F}_x\psi_1(\xi,t) = \mathscr{F}_x[S_{\alpha,\beta}(t)\psi](\xi) = e^{itP_{\alpha,\beta}(\xi)}\widehat{\psi}(\xi), \end{cases}$$

其中 $\mathscr{F}_x$ 表示关于空间变量 x 的傅里叶变换。对 $(u(x,t,\delta)\ v(x,t,\delta))$ 关于 δ 在 0 处取二阶与三阶导数，我们有

$$\begin{cases} \partial_\delta^2 u(x,t,0) = -\displaystyle\int_0^t S(t-t')\partial_x(\psi_1^2)(x,t')\,dt' =: \phi_2(x,t), \\ \partial_\delta^2 v(x,t,0) = -2\displaystyle\int_0^t S_{\alpha,\beta}(t-t')\partial_x(\phi_1\psi_1)(x,t')\,dt' =: \psi_2(x,t), \end{cases} \tag{5.4}$$

and

$$\begin{cases} \partial_\delta^3 u(x,t,0) = -3\displaystyle\int_0^t S(t-t')\partial_x(\psi_1\psi_2)(x,t')\,dt' =: \phi_3(x,t), \\ \partial_\delta^3 v(x,t,0) = -3\displaystyle\int_0^t S_{\alpha,\beta}(t-t')\partial_x(\phi_1\psi_2+\phi_2\psi_1)(x,t')\,dt' =: \psi_3(x,t). \end{cases} \tag{5.5}$$

N注意，如果解映射是 C^k，那么存在一个时间 $T > 0$ 和一个常数 C，使得 at

$$\sup_{0\leq t\leq T} \|(\phi_k,\psi_k)(\cdot,t)\|_{H^s(\mathbb{T})\times H^s(\mathbb{T})} \leq C\|(\phi,\psi)\|^k_{H^s(\mathbb{T})\times H^s(\mathbb{T})}, \quad k = 1,2,3. \tag{5.6}$$

5.1 定理 1.2 的证明

情形 1: $\alpha = 4$ 和 $\beta = 3n^2$，其中 $n \in \mathbb{N}$。

在这种情形下，当解映射至少为 C^2 时，我们将证明 $s \geq 1$。对于任意正整数 $N \geq 10|n| + 10$，若 $\frac{N+n}{2}$ 和 $\frac{N-n}{2}$ 都是整数，则定义 ——

$$\phi(x) = 0, \quad \psi(x) = \frac{1}{\pi N^s}\Big[\cos\Big(\frac{N+n}{2}x\Big) + \cos\Big(\frac{N-n}{2}x\Big)\Big], \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

因此,

$$\widehat{\phi}(\xi) = 0, \quad \widehat{\psi}(\xi) = \frac{1}{N^s}\left(\delta\Big(|\xi| - \frac{N+n}{2}\Big) + \delta\Big(|\xi| - \frac{N-n}{2}\Big)\right), \quad \forall \xi \in \mathbb{Z}, \tag{5.7}$$

其中 δ 表示狄拉克δ函数。由于 $N \geq 10|n|+10$，容易看出 $\|(\phi,\ \psi)\|_{H^s\times H^s} \sim 1$。

Mea同时，由于假设解映射是 C^2，因此由 (5.6) 和 $k=2$ th 可得 at

$$\sup_{0\le t\le T}\|\phi_2(\cdot,t)\|_{H^s(\mathbb{T})}\lesssim\|(\phi,\psi)\|^2_{H^s(\mathbb{T})\times H^s(\mathbb{T})}\lesssim 1, \tag{5.8}$$

其中 T 是某个固定的正数。另一方面，根据(5.4)中 ϕ_2 的定义，对任意$t\in(0,T)$， $\phi_2(\cdot,t)$关于空间变量的傅里叶变换如下:

$$\mathscr{F}_x\phi_2(\xi,t)=-\xi e^{itP_{1,0}(\xi)}\int_{\mathbb{Z}}\int_0^t e^{it'G(\xi_1,\xi-\xi_1,-\xi)}\widehat{\psi}(\xi_1)\widehat{\psi}(\xi-\xi_1)\,dt'\,d\xi_1, \tag{5.9}$$

其中函数 G 在 Γ_3 上定义如下:

$$G(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=P_{\alpha,\beta}(\eta_1)+P_{\alpha,\beta}(\eta_2)+P_{1,0}(\eta_3),\quad\forall\,(\eta_1,\eta_2,\eta_3)\in\Gamma_3. \tag{5.10}$$

当 $\alpha=4$时，我们将 $\eta_2=-(\eta_1+\eta_3)$代入上述公式，得到

$$G(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=-3\eta_3\Big((\eta_3+2\eta_1)^2-\frac{\beta}{3}\Big). \tag{5.11}$$

接下来，我们估计 $|\mathscr{F}_x\phi_2(N,t)|$ ，根据(5.9)，它可以写成如下形式:

$$|\mathscr{F}_x\phi_2(N,t)|=N\left|\int_{\mathbb{Z}}\int_0^t e^{it'G(\xi_1,N-\xi_1,-N)}\widehat{\psi}(\xi_1)\widehat{\psi}(N-\xi_1)\,dt'\,d\xi_1\right|.$$

由于 $\widehat{\psi}$的支集是由四个点组成的集合： $\{\pm\frac{N+n}{2},\pm\frac{N-n}{2}\}$，因此 ξ_1 必须是$\frac{N+n}{2}$ 或 $\frac{N-n}{2}$，才能使 ξ_1 和 $N-\xi_1$ 都位于该支集中。因此,

$$|\mathscr{F}_x\phi_2(N,t)|=\frac{N}{2\pi}\left|\int_0^t\Big[e^{it'G(\frac{N+n}{2},\frac{N-n}{2},-N)}+e^{it'G(\frac{N-n}{2},\frac{N+n}{2},-N)}\Big]\frac{1}{N^{2s}}\,dt'\right|.$$

由于 $\beta=3n^2$，由(5.11)可得

$$G\Big(\frac{N+n}{2},\frac{N-n}{2},-N\Big)=0=G\Big(\frac{N-n}{2},\frac{N+n}{2},-N\Big),$$

这意味着

$$|\mathscr{F}_x\phi_2(N,t)|=\frac{N}{2\pi}\frac{t}{N^{2s}}=\frac{t}{2\pi}N^{1-2s}.$$

因此,

$$\|\phi_2(\cdot,t)\|^2_{H^s(\mathbb{T})}=\int_{\mathbb{Z}}\langle\xi\rangle^{2s}|\mathscr{F}_x\phi_2(\xi,t)|^2\,d\xi\ge\frac{1}{2\pi}N^{2s}|\mathscr{F}_x\phi_2(N,t)|^2\ge\frac{t^2}{8\pi^3}N^{2-2s}.$$

同时，由于 (5.8) 中的 $\|\phi_2(\cdot,t)\|_{H^s(\mathbb{T})}\lesssim 1$ ，于是令 $N\to\infty$，便可得出结论 $s\ge 1$ 。

情形 2： $\alpha=4$ 且对任意 $n\in\mathbb{N}$， $\beta\neq 3n^2$ 。

在这种情况下，当解映射至少为 C^3 时，我们将证明 $s\ge\frac{1}{2}$ 。对于任意正整数 N，定义

$$\phi(x)=0,\quad\psi(x)=\frac{1}{\pi N^s}\cos(Nx),\quad\forall\,x\in\mathbb{R},$$

then

$$\widehat{\phi}=0,\quad\widehat{\psi}=\frac{1}{N^s}\delta(|\xi|-N),\quad\forall\,\xi\in\mathbb{Z}.$$

这意味着 $\|(\phi,\ \psi)\|_{H^s(\mathbb{T})\times H^s(\mathbb{T})}\sim 1$。同时，由于假设解映射是 C^3，因此由 (5.6) 可知，当 $k=3$ 时

$$\sup_{0\le t\le T}\|\psi_3(\cdot,t)\|_{H^s(\mathbb{T})}\lesssim\|(\phi,\psi)\|^3_{H^s(\mathbb{T})\times H^s(\mathbb{T})}\lesssim 1, \tag{5.12}$$

其中 T 是某个固定的正数。另一方面，由于 $\phi = 0$，根据 (5.3) 和 (5.4)， ϕ_1 和 ψ_2 都是恒为零的函数。因此，由 (5.5) 可知，对于任意 $t \in (0,\ T)$,

$$\psi_3(x,t) = -3\int_0^t S_{\alpha,\beta}(t-t')\partial_x(\phi_2\psi_1)(x,t')\,dt'.$$

接下来，我们计算 $\mathscr{F}_x\psi_3(\xi,t)$。根据 (2.4) 中半群算子 $S_{\alpha,\beta}$ 的定义以及上述 $\psi_3(x,t)$ 的表达式，我们得到

$$\mathscr{F}_x\psi_3(\xi,t) = -3\int_0^t e^{iP_{\alpha,\beta}(\xi)(t-t')}\xi\mathscr{F}_x(\phi_2\psi_1)(\xi,t')\,dt'.$$

注意到多项式 $P_{\alpha,\beta}$ 是奇函数，因此 $\mathscr{F}_x\psi_3(\xi,t)$ 可以改写为

$$\mathscr{F}_x\psi_3(\xi,t) = -3\xi e^{iP_{\alpha,\beta}(\xi)t}\int_0^t e^{iP_{\alpha,\beta}(-\xi)t'}\mathscr{F}_x(\phi_2\psi_1)(\xi,t')\,dt'. \tag{5.13}$$

由于 $\psi_1(x,t) = S_{\alpha,\beta}(t)\psi(x)$，因此

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_x(\phi_2\psi_1)(\xi,t') &= \int_{\mathbb{Z}}\mathscr{F}_x\phi_2(\xi_1,t')\mathscr{F}_x\psi_1(\xi-\xi_1,t')\,d\xi_1\\ &= \int_{\mathbb{Z}}\mathscr{F}_x\phi_2(\xi_1,t')e^{iP_{\alpha,\beta}(\xi-\xi_1)t'}\widehat{\psi}(\xi-\xi_1)\,d\xi_1.\end{aligned} \tag{5.14}$$

根据 (5.4),

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_x\phi_2(\xi_1,t') &= -\int_0^{t'} e^{iP_{1,0}(\xi_1)(t'-\tau)}\xi_1\mathscr{F}_x(\psi_1^2)(\xi_1,\tau)\,d\tau\\ &= -\xi_1 e^{iP_{1,0}(\xi_1)t'}\int_0^{t'} e^{iP_{1,0}(-\xi_1)\tau}\mathscr{F}_x(\psi_1^2)(\xi_1,\tau)\,d\tau,\end{aligned} \tag{5.15}$$

其中

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_x(\psi_1^2)(\xi_1,\tau) &= \int_{\mathbb{Z}}\mathscr{F}_x\psi_1(\xi_2,\tau)\mathscr{F}_x\psi_1(\xi_1-\xi_2,\tau)\,d\xi_2\\ &= \int_{\mathbb{Z}} e^{i[P_{\alpha,\beta}(\xi_2)+P_{\alpha,\beta}(\xi_1-\xi_2)]\tau}\widehat{\psi}(\xi_2)\widehat{\psi}(\xi_1-\xi_2)\,d\xi_2.\end{aligned} \tag{5.16}$$

将 (5.16) 代入 (5.15) 得

$$\mathscr{F}_x\phi_2(\xi_1,t') = -\xi_1 e^{iP_{1,0}(\xi_1)t'}\int_0^{t'}\int_{\mathbb{Z}} e^{iG(\xi_2,\xi_1-\xi_2,-\xi_1)\tau}\widehat{\psi}(\xi_2)\widehat{\psi}(\xi_1-\xi_2)\,d\xi_2\,d\tau, \tag{5.17}$$

其中 G 是在 (5.10) 中定义的函数。现在将 (5.17) 代入 (5.14)，得到

$$\begin{aligned}&\mathscr{F}_x(\phi_2\psi_1)(\xi,t')\\ &= -\int_{\mathbb{Z}}\xi_1 e^{i[P_{\alpha,\beta}(\xi-\xi_1)+P_{1,0}(\xi_1)]t'}\widehat{\psi}(\xi-\xi_1)\bigg(\int_0^{t'}\int_{\mathbb{Z}} e^{iG(\xi_2,\xi_1-\xi_2,-\xi_1)\tau}\widehat{\psi}(\xi_2)\widehat{\psi}(\xi_1-\xi_2)\,d\xi_2\,d\tau\bigg)\,d\xi_1.\end{aligned}$$

最后，将上述公式与 (5.13) 结合，可得

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_x\psi_3(\xi,t) = -3\xi e^{iP_{\alpha,\beta}(\xi)t}&\int_0^t\int_{\mathbb{Z}}\xi_1 e^{iG(-\xi,\xi-\xi_1,\xi_1)t'}\widehat{\psi}(\xi-\xi_1)\\ &\bigg(\int_0^{t'}\int_{\mathbb{Z}} e^{iG(\xi_2,\xi_1-\xi_2,-\xi_1)\tau}\widehat{\psi}(\xi_2)\widehat{\psi}(\xi_1-\xi_2)\,d\xi_2\,d\tau\bigg)\,d\xi_1\,dt'.\end{aligned} \tag{5.18}$$

Next，我们将 $\xi = N$ 固定在 $\mathscr{F}_x\psi_3(\xi,t)$ 中，并估计 $\mathscr{F}_x\psi_3(N,t)$。然后由 (5.18) 可得

$$|\mathscr{F}_x\psi_3(N,t)| = 3N\bigg|\int_{\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{Z}}\Psi_1(\xi_1,\xi_2)\Big(\int_0^t e^{iG(-N,N-\xi_1,\xi_1)t'}\int_0^{t'} e^{iG(\xi_2,\xi_1-\xi_2,-\xi_1)\tau}\,d\tau\,dt'\Big)\,d\xi_2\,d\xi_1\bigg|,$$

其中

$$\Psi_1(\xi_1,\xi_2) := \xi_1\widehat{\psi}(N-\xi_1)\widehat{\psi}(\xi_2)\widehat{\psi}(\xi_1-\xi_2).$$

定义 $\mathcal{D}$ 为 Ψ_1 的支集，即

$$\mathcal{D} := \big\{(\xi_1,\xi_2)\in\mathbb{Z}^2 : \Psi_1(\xi_1,\xi_2)\neq 0\big\}.$$

那么，为了计算 $\mathscr{F}_x\psi_3(N,t)$，我们只需考虑 $\mathcal{D}$ 中的点，因此要求 $\xi_1\neq 0$ 且

$$\xi_2,\ N-\xi_1,\ \xi_1-\xi_2 \in \operatorname{supp}\widehat{\psi} = \{N,-N\}.$$

因此， $\mathcal{D}$ 恰好包含一个点:

$$\mathcal{D} = \{(2N,N)\}.$$

根据 $\mathcal{D}$，我们有

$$|\mathscr{F}_x\psi_3(N,t)| = \frac{3N}{4\pi^2N^{3s}}\bigg|\sum_{(\xi_1,\xi_2)=(2N,N)}\xi_1\Big(\int_0^t e^{iG(-N,N-\xi_1,\xi_1)t'}\int_0^{t'} e^{iG(\xi_2,\xi_1-\xi_2,-\xi_1)\tau}\,d\tau\,dt'\Big)\bigg|. \tag{5.19}$$

回顾 (5.11)，其中表明，对于任意 $(\eta_1,\eta_2,\eta_3)\in\Gamma_3$,

$$G(\eta_1,\eta_2,\eta_3) = -3\eta_3\Big((\eta_3+2\eta_1)^2-\frac{\beta}{3}\Big),$$

so

$$G(-N,-N,2N) = 2\beta N \quad\text{and}\quad G(N,N,-2N) = -2\beta N.$$

因此

$$\begin{aligned}\text{RHS of (5.19)} &\sim N^{2-3s}\bigg|\int_0^t e^{2\beta Nit'}\int_0^{t'} e^{-2\beta Ni\tau}\,d\tau\,dt'\bigg| \\ &= \frac{N^{1-3s}}{2\beta}\bigg|\int_0^t\big(1-e^{2\beta Nit'}\big)\,dt'\bigg| \geq \frac{N^{1-3s}}{2\beta}\Big(t-\frac{1}{|\beta|N}\Big).\end{aligned}$$

因此，通过固定 $t=T$ 并要求 $N > \frac{2}{|\beta|T}$, ——

$$|\mathscr{F}_x\psi_3(N,T)| \gtrsim N^{1-3s}T. \tag{5.20}$$

结合 (5.20) 与 (5.12)，我们推出

$$1 \gtrsim \|\psi_3(\cdot,T)\|_{H^s(\mathbb{T})} \gtrsim \Big(N^{2s}\big|\mathscr{F}_x\psi_3(N,T)\big|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \gtrsim N^{1-2s}T.$$

令 $N\to\infty$ 趋于无穷，我们得出 $s\geq\frac{1}{2}$ 是必要的。

5.2 定理 1.5 的证明

在本证明中， $\alpha\in(0,4)\setminus\{1\}$ 和 $\beta\neq 0$。我们将分三种情形证明该定理。**情形 1**:
$R_\alpha\in\mathbb{Q}$。

在此 情形下，我们将证明 $s\geq\frac{1}{2}$ 当解映射至少为 C^3。由于 $R_\alpha\in\mathbb{Q}$，我们有 ve

c_1， $c_2 \in \mathbb{Q}$，其中 c_1， c_2 在（4.16）中给出：

$$c_1 = \frac{1}{2} + \frac{R_\alpha}{6}, \quad c_2 = \frac{1}{2} - \frac{R_\alpha}{6}, \quad R_\alpha = \sqrt{12/\alpha - 3}.$$

因此，我们可以选择整数 N 使得 $c_1 N$， $c_2 N \in \mathbb{Z}$。

我们定义

$$\phi(x) = 0, \quad \psi(x) = \frac{1}{\pi N^s}\big[\cos(c_1 N x) + \cos(c_2 N x)\big], \quad \forall\, x \in \mathbb{R},$$

then

$$\widehat{\phi}(\xi) = 0, \quad \widehat{\psi}(\xi) = \frac{1}{N^s}\big[\delta(|\xi| - c_1 N) + \delta(|\xi| - c_2 N)\big], \quad \forall\, \xi \in \mathbb{Z}. \tag{5.21}$$

为简化记号，我们定义

$$N_1 := c_1 N \quad \text{and} \quad N_2 := c_2 N.$$

选择 $(\phi,\ \psi)$ 意味着 $\|(\phi,\ \psi)\|_{H^s(\mathbb{T}) \times H^s(\mathbb{T})} \sim 1$。

接下来，我们固定 $\xi = N_1$ 并估计 $|\mathscr{F}_x \psi_3(N_1,\ t)|$。选择 ξ 的值为 N_1，使得 (5.31) 成立。于是，由 (5.18) 可得

$$|\mathscr{F}_x \psi_3(N_1, t)| = 3N_1 \bigg| \int_{\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{Z}} \Psi_2(\xi_1, \xi_2) \bigg(\int_0^t e^{iG(-N_1, N_1 - \xi_1, \xi_1)t'} \int_0^{t'} e^{iG(\xi_2, \xi_1 - \xi_2, -\xi_1)\tau}\, d\tau\, dt' \bigg) d\xi_2\, d\xi_1 \bigg|, \tag{5.22}$$

其中，函数 G 如 (5.10) 中所定义，并且

$$\Psi_2(\xi_1, \xi_2) := \xi_1 \widehat{\psi}(N_1 - \xi_1) \widehat{\psi}(\xi_2) \widehat{\psi}(\xi_1 - \xi_2). \tag{5.23}$$

对于任意 $(\eta_1, \eta_2, \eta_3) \in \Gamma_3$，我们将 ξ_2 替换为 $-(\xi_1 + \xi_3)$，得到

$$\begin{aligned} G(\eta_1, \eta_2, \eta_3) &= P_{\alpha,\beta}(\eta_1) + P_{\alpha,\beta}(\eta_2) + P_{1,0}(\eta_3) \\ &= -3\alpha\eta_3 \Big(\eta_1^2 + \eta_3 \eta_1 + \frac{\alpha - 1}{3\alpha} \eta_3^2 \Big) + \beta \eta_3 \\ &= -3\alpha \eta_3 (\eta_1 + c_1 \eta_3)(\eta_1 + c_2 \eta_3) + \beta \eta_3. \end{aligned} \tag{5.24}$$

记 $\mathcal{D}$ 为 Ψ_2的支集，即

$$\mathcal{D} := \big\{ (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{Z}^2 : \Psi_2(\xi_1, \xi_2) \neq 0 \big\}. \tag{5.25}$$

那么，我们只需考虑 $\mathcal{D}$ 中的点来计算 $\mathscr{F}_x \psi_3(N_1, t)$，因此要求 $\xi_1 \neq 0$ 并且

$$\xi_2,\ N_1 - \xi_1,\ \xi_1 - \xi_2 \in \operatorname{supp} \widehat{\psi}.$$

由于 $c_1 + c_2 = 1$，这意味着 $N_1 + N_2 = N$， ξ_1 和 ξ_2 的合格取值可总结如下表，其中“✓”表示 $(\xi_1, \xi_2) \in \mathcal{D}$。

ξ_1 \ ξ_2	N_1	N_2	$-N_1$	$-N_2$
$2N_1$	✓			
N	✓	✓		
$N_1 - N_2$	✓			✓

表 1：使得 $(\xi_1, \xi_2) \in \mathcal{D}$的 ξ_1, ξ_2 取值

根据 $\mathcal{D}$，我们有

$$|\mathscr{F}_x\psi_3(N_1,t)| = \frac{3N_1}{4\pi^2N^{3s}}\left|\sum_{(\xi_1,\xi_2)\in\mathcal{D}}\xi_1\left(\int_0^t e^{iG(-N_1,N_1-\xi_1,\xi_1)t'}\int_0^{t'} e^{iG(\xi_2,\xi_1-\xi_2,-\xi_1)\tau}\,d\tau\,dt'\right)\right|. \tag{5.26}$$

同时，由 (5.24) 可知

$$G(\xi_2,\xi_1-\xi_2,-\xi_1) = 3\alpha\xi_1(\xi_2-c_1\xi_1)(\xi_2-c_2\xi_1)-\beta\xi_1. \tag{5.27}$$

由于 $G(\xi_2,\ \xi_1-\xi_2,\ -\xi_1)\neq 0$ 对任意 $(\xi_1,\ \xi_2)\in\mathcal{D}$均成立，因此

$$\int_0^{t'} e^{iG(\xi_2,\xi_1-\xi_2,-\xi_1)\tau}\,d\tau = \frac{-i}{G(\xi_2,\xi_1-\xi_2,-\xi_1)}\Big[e^{iG(\xi_2,\xi_1-\xi_2,-\xi_1)t'}-1\Big],$$

and

$$|\mathscr{F}_x\psi_3(N_1,t)| = \frac{3N_1}{4\pi^2N^{3s}}\left|\sum_{(\xi_1,\xi_2)\in\mathcal{D}}\frac{\xi_1}{G(\xi_2,\xi_1-\xi_2,-\xi_1)}\int_0^t \mathcal{G}(\xi_1,\xi_2,t')\,dt'\right|, \tag{5.28}$$

其中我们设

$$\mathcal{G}(\xi_1,\xi_2,t') := e^{it'[G(-N_1,N_1-\xi_1,\xi_1)+G(\xi_2,\xi_1-\xi_2,-\xi_1)]}-e^{it'G(-N_1,N_1-\xi_1,\xi_1)}. \tag{5.29}$$

由于 $|\mathcal{G}(\xi_1,\ \xi_2,\ t')|$ 至多是一个常数，因此项 $G\ \ \xrightarrow{\xi_1}{(\xi_2,\ \xi_1-\xi_2,\ -\xi_1)}$ 起着更重要的作用。令

$$F(\xi_1,\xi_2) = \frac{\xi_1}{G(\xi_2,\xi_1-\xi_2,-\xi_1)},\quad \forall\,(\xi_1,\xi_2)\in\mathcal{D}. \tag{5.30}$$

根据分解 (5.27)，我们有

$$F(\xi_1,\xi_2) = \frac{1}{3\alpha(\xi_2-c_1\xi_1)(\xi_2-c_2\xi_1)-\beta}.$$

因此，ξ_2 与 $c_1\xi_1$ 和 $c_2\xi_1$ 之间的距离决定了 F 的大小。

根据表 1，我们将 $\mathcal{D}$ 分为两部分：$\mathcal{D}=\mathcal{D}_1\cup\mathcal{D}_2$，其中

$$\mathcal{D}_1 := \{(N,N_1),(N,N_2)\},\qquad \mathcal{D}_2 := \mathcal{D}\setminus\mathcal{D}_1.$$

当（$\xi_1,\ \xi_2$）$\in\mathcal{D}_1$时，无论（$\xi_1,\ \xi_2$）=（$N,\ N_1$）还是（$N,\ N_2$），总有

$$F(\xi_1,\xi_2) = -\frac{1}{\beta}\quad\text{and}\quad \mathcal{G}(\xi_1,\xi_2,t') = 1-e^{it'G(-N_1,-N_2,N)},$$

其中我们用到了以下事实：$N_1+N_2=N$ 以及

$$G(-N_1,-N_2,N) = -G(N_1,N_2,-N) = -G(N_2,N_1,-N) = \beta N. \tag{5.31}$$

因此，

$$I_1(t) := \sum_{(\xi_1,\xi_2)\in\mathcal{D}_1}F(\xi_1,\xi_2)\int_0^t\mathcal{G}(\xi_1,\xi_2,t')\,dt' = -\frac{2}{\beta}\int_0^t\left(1-e^{it'\beta N}\right)dt'.$$

此外，

$$\left|\int_0^t\left(1-e^{it'\beta N}\right)dt'\right| \geq t-\left|\int_0^t e^{it'\beta N}\,dt'\right| \geq t-\frac{2}{|\beta|N}.$$

因此，通过固定 $t = T$ 并要求 $N > \sqrt[4]{|\beta|T}$，我们得到

$$|I_1(T)| \geq \frac{T}{|\beta|}. \tag{5.32}$$

另一方面，对于任意 $(\xi_1, \xi_2) \in \mathcal{D}_2 = \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_1$，我们有如下结论：

$$|F(\xi_1, \xi_2)| = \frac{1}{|3\alpha(\xi_1 - c_1\xi_2)(\xi_1 - c_2\xi_2) - \beta|} \leq \frac{C}{N^2}, \tag{5.33}$$

只要 N 足够大即可，其中 C 是一个仅依赖于 α 和 β 的常数。记

$$I_2(t) := \sum_{(\xi_1,\xi_2)\in\mathcal{D}_2} F(\xi_1, \xi_2) \int_0^t \mathcal{G}(\xi_1, \xi_2, t')\, dt'.$$

由于 $\mathcal{D}_2$ 仅包含三个点，且 $|\mathcal{G}(\xi_1, \xi_2, t')| \leq 2$，我们得出

$$|I_2(T)| \leq \frac{CT}{N^2}. \tag{5.34}$$

将 (5.32) 和 (5.34) 代入 (5.28)，得到

$$\begin{aligned} |\mathscr{F}_x\psi_3(N_1, T)| = \frac{3N_1}{4\pi^2 N^{3s}}|I_1(T) + I_2(T)| &\sim N^{1-3s}|I_1(T) + I_2(T)| \\ &\geq N^{1-3s}(|I_1(T)| - |I_2(T)|) \\ &\geq N^{1-3s}\Big(\frac{1}{|\beta|} - CN^{-2}\Big)T. \end{aligned}$$

因此，要求 N 大于 $\sqrt{2C|\beta|}$，我们得到

$$|\mathscr{F}_x\psi_3(N_1, T)| \gtrsim N^{1-3s}T. \tag{5.35}$$

结合 (5.35) 与 (5.6)，其中 $k = 3$，可推得

$$1 \gtrsim \|\psi_3(\cdot, T)\|_{H^s(\mathbb{T})} \gtrsim \Big(N_1^{2s}\big|\mathscr{F}_x\psi_3(N_1, T)\big|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \gtrsim N^{1-2s}T.$$

代入 $N \to \infty$ 表明 $s \geq \frac{1}{2}$ 是必要的。

情形 2：$R_\alpha \notin \mathbb{Q}$ 和 $s_{\alpha,\,\beta} < 1$。

在此情形下，我们将证明 $s \geq s^*(\alpha,\ \beta)$，其中 $s^*(\alpha,\ \beta) = \frac{1+s_{\alpha,\,\beta}}{2}$ 在 (1.14) 中定义，且解映射至少为 C^3。在假设 $s_{\alpha,\,\beta} < 1$ 下，由 (1.12) 可知，$\nu_\lambda(c_1) < 1$ 和 $\nu_\lambda(c_2) < 1$ 均成立，其中 c_1 和 c_2 是 (4.16) 中的数，且 $\lambda = \frac{\beta}{\alpha R_\alpha}$。证明的主要结构与情形 1 类似，因此我们将省略情形 1 中已经证明的细节。

我们定义

$$\phi = 0, \quad \psi = \frac{1}{\pi N^s}\left[\cos\Big([[c_1 N + \frac{\lambda}{N}]]x\Big) + \cos\Big([[c_2 N - \frac{\lambda}{N}]]x\Big)\right], \quad \forall x \in \mathbb{R}, \tag{5.36}$$

其中记号 $[[\cdot]]$ 表示

$$[[y]] = \begin{cases} \text{the nearest even integer to } y, & \text{if} \quad y \in \mathbb{Z} + 1/2, \\ \text{the nearest integer to } y, & \text{if} \quad y \notin \mathbb{Z} + 1/2. \end{cases} \tag{5.37}$$

例如，$[[2.5]] = 2$, $[[3.5]] = 4$, $[[2.1]] = 2$, $[[2.9]] = 3$。在（5.37）的设定下，很容易证明

对任意整数 N 和任意实数 λ，以下恒等式成立。

$$[[c_1N+\frac{\lambda}{N}]]+[[c_2N-\frac{\lambda}{N}]]=N. \tag{5.38}$$

为简化记号并与前面的证明保持一致，我们定义

$$N_1:=[[c_1N+\frac{\lambda}{N}]] \quad \text{and} \quad N_2:=[[c_2N-\frac{\lambda}{N}]]. \tag{5.39}$$

then

$$\widehat{\phi}(\xi)=0, \quad \widehat{\psi}(\xi)=\frac{1}{\pi N^s}\Big[\delta\big(|\xi|-N_1\big)+\delta\big(|\xi|-N_2\big)\Big], \quad \forall\,\xi\in\mathbb{Z}.$$

固定 $\xi=N_1$，我们估计 $|\mathscr{F}_x\psi_3(N_1,\ t)|$。与情形 1 类似，我们将 $|\mathscr{F}_x\psi_3(N_1,\ t)|$ 计算为 (5.22)，其中Ψ_2 在 (5.23) 中定义。我们还采用 (5.25) 中的记号 $\mathcal{D}$ 表示 Ψ_2 的支集。事实证明，关于 $\mathcal{D}$中的元素，表 1 保持不变，唯一的区别是 (5.39) 中N_1 和 N_2 的新定义。(5.39) 的困难有两方面：一是 c_1N 和 c_2N 的无理性，二是涉及项 $\frac{\lambda}{N}$。根据情形 1 中的 (5.28),

$$|\mathscr{F}_x\psi_3(N_1,t)|=\frac{3N_1}{4\pi^2N^{3s}}\left|\sum_{(\xi_1,\xi_2)\in\mathcal{D}}F(\xi_1,\xi_2)\int_0^t\mathcal{G}(\xi_1,\xi_2,t')\,dt'\right|,$$

其中（见 (5.30) 和 (5.29)）

$$F(\xi_1,\xi_2)=\frac{\xi_1}{G(\xi_2,\xi_1-\xi_2,-\xi_1)},$$

and

$$\mathcal{G}(\xi_1,\xi_2,t')=e^{it'[G(-N_1,N_1-\xi_1,\xi_1)+G(\xi_2,\xi_1-\xi_2,-\xi_1)]}-e^{it'G(-N_1,N_1-\xi_1,\xi_1)}.$$

我们还将 $\mathcal{D}$ 拆分为 $\mathcal{D}_1\cup\mathcal{D}_2$，其中 $\mathcal{D}_1:=\{(N,\ N_1),\ (N,\ N_2)\}$ 以及 $\mathcal{D}_2=\mathcal{D}\setminus\mathcal{D}_1$。然后

$$|\mathscr{F}_x\psi_3(N_1,t)|=\frac{3N_1}{4\pi^2N^{3s}}|I_1(t)+I_2(t)|, \tag{5.40}$$

其中

$$I_1(t)=\sum_{(\xi_1,\xi_2)\in\mathcal{D}_1}F(\xi_1,\xi_2)\int_0^t\mathcal{G}(\xi_1,\xi_2,t')\,dt', \quad I_2(t)=\sum_{(\xi_1,\xi_2)\in\mathcal{D}_2}F(\xi_1,\xi_2)\int_0^t\mathcal{G}(\xi_1,\xi_2,t')\,dt'.$$

我们首先估计 $I_1(t)$。对于任意 $(\xi_1,\ \xi_2)\in\mathcal{D}_1$，无论 $(\xi_1,\ \xi_2)$ 是 $=(N,\ N_1)$，还是 $(N,\ N_2)$，$F(\xi_1,\ \xi_2)$ 和 $\mathcal{G}(\xi_1,\ \xi_2,\ t')$ 的值都保持不变；这里我们利用了 G 关于其前两个变量对称这一事实，因此

$$I_1(t)=2F(N,N_1)\int_0^t\mathcal{G}(N,N_1,t')\,dt'=\frac{2N}{G(N_1,N_2,-N)}\int_0^t\mathcal{G}(N,N_1,t')\,dt'. \tag{5.41}$$

根据 G 的定义 (5.24),

$$\begin{aligned}G(N_1,N_2,-N)&=3\alpha N(N_1-c_1N)(N_1-c_2N)-\beta N\\&=3\alpha N(N_1-x_1)(N_1-x_2),\end{aligned} \tag{5.42}$$

其中

$$x_1=\frac{1}{2}N+\frac{1}{6}\sqrt{(R_\alpha N)^2+\frac{12\beta}{\alpha}}, \qquad x_2=\frac{1}{2}N-\frac{1}{6}\sqrt{(R_\alpha N)^2+\frac{12\beta}{\alpha}}, \qquad R_\alpha=\sqrt{12/\alpha-3}.$$

我们按照 ξ_1 的阶将 x_1 和 x_2 展开如下:

$$x_1 = c_1 N + \frac{\lambda}{N} + Q_1(N), \qquad x_2 = c_2 N - \frac{\lambda}{N} + Q_2(N), \qquad \lambda = \frac{\beta}{\alpha R_\alpha},$$

with

$$|Q_j(N)| \le \frac{12\lambda^2}{R_\alpha N^3} = O(N^{-3}), \qquad j = 1, 2. \tag{5.43}$$

于是由 (5.42) 可得，结合 (5.43) 得到

$$\begin{aligned} |G(N_1, N_2, -N)| &= 3\alpha N \Big| N_1 - c_1 N - \frac{\lambda}{N} - Q_1(N) \Big| \Big| N_1 - c_2 N + \frac{\lambda}{N} - Q_2(N) \Big| \\ &\sim N^2 \Big| N_1 - c_1 N - \frac{\lambda}{N} - Q_1(N) \Big| \\ &= N^3 \Big| c_1 - \frac{N_1}{N} + \frac{\lambda}{N^2} + \frac{Q_1(N)}{N} \Big|. \end{aligned} \tag{5.44}$$

一方面，将 (5.43) 与 (5.44) 结合，得到

$$|G(N_1, N_2, -N)| \lesssim N^3 \Big| c_1 - \frac{N_1}{N} + \frac{\lambda}{N^2} \Big| + \frac{1}{N}. \tag{5.45}$$

F对于任意 $\varepsilon > 0$，由定义 4.2 及 N_1 的选择，存在无穷多个 N 使得 t

$$\Big| c_1 - \frac{N_1}{N} + \frac{\lambda}{N^2} \Big| \le \frac{1}{N^{\mu_\lambda(c_1) - \varepsilon}}.$$

由于 $\lambda = \frac{\beta}{\alpha R_\alpha} \neq 0$，由命题 4.3 可知 $\nu_\lambda(c_1) = \mu_\lambda(c_1) - 2$，因此

$$\Big| c_1 - \frac{N_1}{N} + \frac{\lambda}{N^2} \Big| \le \frac{1}{N^{\nu_\lambda(c_1) + 2 - \varepsilon}}. \tag{5.46}$$

结合 (5.45) 与 (5.46)，我们得出存在无穷多个 N 使得

$$|G(N_1, N_2, -N)| \lesssim N^{1 - \nu_\lambda(c_1) + \varepsilon} + \frac{1}{N}, \tag{5.47}$$

由于 $\nu_\lambda(c_1) < 1$，因此我们知道 $|G(N_1, N_2, -N)| \lesssim N^{1 - \nu_\lambda(c_1)^+ \varepsilon}$ 且

$$|F(N, N_1)| = \frac{2N}{|G(N_1, N_2, -N)|} \gtrsim N^{\nu_\lambda(c_1) - \varepsilon}. \tag{5.48}$$

另一方面,

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(N, N_1, t') &= e^{it'[G(-N_1, N_1 - N, N) + G(N_1, N - N_1, -N)]} - e^{it' G(-N_1, N_1 - N, N)} \\ &= 1 - e^{-it' G(N_1, N_2, -N)}, \end{aligned}$$

这意味着

$$\left| \int_0^t \mathcal{G}(N, N_1, t')\, dt' \right| \ge t - \frac{2}{|G(N_1, N_2, -N)|}. \tag{5.49}$$

根据定义 4.1，对于 $\varepsilon' := \frac{1 - \nu_{\lambda(c_1)}}{2} > 0$，存在 $K > 0$ ，使得

$$\Big| c_1 - \frac{N_1}{N} + \frac{\lambda}{N^2} \Big| \ge \frac{K}{N^{2 + \nu_\lambda(c_1) + \varepsilon'}}, \tag{5.50}$$

对于所有充分大的 N。于是由 (5.44)、(5.43) 和 (5.50) 可得

$$\begin{aligned} |G(N_1,N_2,-N)| &\gtrsim N^3\left|c_1-\frac{N_1}{N}+\frac{\lambda}{N^2}\right|-N^2|Q_1(N)| \\ &\gtrsim N^{1-\nu_\lambda(c_1)-\varepsilon'}-\frac{1}{N}\sim N^{\frac{1-\nu_\lambda(c_1)}{2}}, \end{aligned} \tag{5.51}$$

对所有充分大的 N 都成立。现在固定 $t=T$，然后应用 (5.49) 和 (5.51)，得到

$$\left|\int_0^t \mathcal{G}(N,N_1,t')\,dt'\right|\geq T-CN^{-\frac{1-\nu_\lambda(c_1)}{2}}\geq\frac{T}{2}, \tag{5.52}$$

对充分大的 N 成立。将 (5.48) 和 (5.52) 代入 (5.41)，得到

$$|I_1(T)|\gtrsim N^{\nu_\lambda(c_1)-\varepsilon}\,T. \tag{5.53}$$

接下来，我们估计 $I_2(T)$。对于任意 $(\xi_1,\xi_2)\in\mathcal{D}_2$，我们知道

$$|F(\xi_1,\xi_2)|=\frac{1}{|3\alpha(\xi_2-c_1\xi_1)(\xi_2-c_2\xi_1)-\beta|}\sim\frac{1}{N^2}.$$

因此，

$$|I_2(T)|\lesssim\sum_{(\xi_1,\xi_2)\in\mathcal{D}_2}N^{-2}\int_0^T|\mathcal{G}(\xi_1,\xi_2,t')|\,dt'\lesssim N^{-2}T, \tag{5.54}$$

最后，根据 (5.53) 和 (5.54)，由 (5.40) 可得

$$\left|\mathscr{F}_x\psi_3(N_1,T)\right|\gtrsim N^{1-3s}(|I_1(T)|-|I_2(T)|)\gtrsim N^{1-3s+\nu_\lambda(c_1)-\varepsilon}T.$$

因此，我们应用 (5.6) 并取 $k=3$，得出

$$1\gtrsim\|\psi_3(\cdot,T)\|_{H^s}\gtrsim\left(N_1^{2s}\left|\mathscr{F}_x\psi_3(N_1,T)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\gtrsim N^{-2s+1+\nu_\lambda(c_1)-\varepsilon}T.$$

由 $N\to\infty$，可得 $s\geq\frac{1}{2}+\frac{\nu_\lambda(c_1)}{2}-\frac{\varepsilon}{2}$。由于 $\varepsilon>0$ 是任意的，我们知道 $s\geq\frac{1}{2}+\frac{\nu_\lambda(c_1)}{2}$。类似地，我们也可以验证 $s\geq\frac{1}{2}+\frac{\nu_\lambda(c_2)}{2}$。最终，我们得到 $s\geq\frac{1+s_{\alpha,\beta}}{2}$。

情形 3

：$R_\alpha\notin\mathbb{Q}$ and $s_{\alpha,\beta}\geq 1$.

在这种情形下，我们将证明当解映射至少为 C^2 时，$s\geq 1$。由于 $s_{\alpha,\beta}:=\max\{\nu_\lambda(c_1),\nu_\lambda(c_2)\}\geq 1$，不失一般性，我们假设 $\nu_\lambda(c_1)\geq 1$，因为另一种情形 $\nu_\lambda(c_2)\geq 1$ 可以类似地处理。我们取与情形 2 中相同的初始数据，如式 (5.36) 所示，其中 N_1,N_2 由式 (5.39) 定义。回顾式 (5.9) 中的 $\mathscr{F}_x\phi_2$，我们固定 $\xi=N$ 并估计 $|\mathscr{F}_x\phi_2(N,t)|$，它可表示如下：

$$|\mathscr{F}_x\phi_2(N,t)|=N\left|\int_{\mathbb{Z}}\int_0^t e^{it'G(\xi_1,N-\xi_1,-N)}\widehat{\psi}(\xi_1)\widehat{\psi}(N-\xi_1)\,dt'\,d\xi_1\right|.$$

由于 ξ_1 和 $N-\xi_1$ 都必须属于 ψ的支集，因此 ξ_1 必定是 N_1 或 N_2。将这两种情况相加，得到

$$|\mathscr{F}_x\phi_2(N,t)|=\frac{N}{2\pi}\left|\int_0^t 2e^{it'G(N_1,N_2,-N)}\frac{1}{N^{2s}}\,dt'\right|=\frac{2N^{1-2s}}{\pi}\frac{\left|\sin\left(\frac{G(N_1,N_2,-N)t}{2}\right)\right|}{\left|G(N_1,N_2,-N)\right|}, \tag{5.55}$$

其中，在第一个等式中，我们利用了 $G(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$ 关于其前两个变量对称这一事实。

对于任意 $\varepsilon > 0$，由 (5.47) 可得

$$|G(N_1, N_2, -N)| \lesssim N^{1-\nu_\lambda(c_1)+\varepsilon} + \frac{1}{N} \lesssim N^{\varepsilon},$$

其中，最后一个不等式由 $\nu_\lambda(c_1) \geq 1$ 得出。取 $t = t_N := N^{-2\varepsilon}T$，则

$$\frac{G(N_1, N_2, -N)t_N}{2} \lesssim N^{-\varepsilon}\, T \to 0, \qquad \text{as } N \to +\infty.$$

注意到当 $|x|$较小时，$\sin_x{}^x \geq \frac{1}{2}$，因此当 N 充分大时，

$$\frac{\left|\sin\left(\frac{G(N_1,N_2,-N)t_N}{2}\right)\right|}{\left|G(N_1, N_2, -N)\right|} \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{t_N}{2} = \frac{1}{4} N^{-2\varepsilon} T. \tag{5.56}$$

T因此，取 N 充分大，使得 (5.56) 成立，由 (5.55) 可得 at

$$|\mathscr{F}_x \phi_2(N, t_N)| \gtrsim N^{1-2s-2\varepsilon} T. \tag{5.57}$$

最后，由于 $t_N \in [0, T]$，我们应用 (5.6) 并取 $k = 2$，得到

$$1 \gtrsim \|\phi_2(\cdot, t_N)\|_{H^s(\mathbb{T})} \gtrsim \left(N^{2s} \left|\mathscr{F}_x \phi_2(N, t_N)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \gtrsim N^{1-s-\varepsilon} T.$$

令 $N \to \infty$，我们得出 $s \geq 1 - \varepsilon$，这意味着 $s \geq 1$，因为 ε 是任意的。

致谢

X.Yang 获得国家自然科学基金（项目编号：12401299）、江苏省自然科学基金（项目编号：BK20241260）和江苏省应用数学科学研究中心（项目编号：BK20233002）的资助。

参考文献

[1] J. L. Bona 和 R. Scott. Korteweg-de Vries 方程在分数阶 Sobolev 空间中的解. Duke Math. J., 43(1):87–99, 1976.[2] J. L. Bona 和 R. Smith. Korteweg-de Vries 方程的初值问题. Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A, 278(1287):555–601, 1975.[3] J. Bourgain. 某些格子子集的傅里叶变换限制现象及其在非线性演化方程中的应用. II. KdV 方程. Geom. Funct. Anal., 3(3):209–262, 1993.[4] M. Christ、J. Colliander 和 T. Tao. 典范散焦方程的渐近性、频率调制与低正则性适定性问题. Amer. J. Math., 125(6):1235–1293, 2003.[5] J. Colliander、M. Keel、G. Staffilani、H. Takaoka 和 T. Tao. 在 $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{T}$上的 KdV 方程与修正 KdV 方程的尖锐整体适定性. J. Amer. Math. Soc., 16(3):705–749, 2003.[6] J. A. Gear 和 R. Grimshaw. 内孤立波之间的弱相互作用与强相互作用. Stud. Appl. Math., 70(3):235–258, 1984.[7] Z. Guo. Korteweg-de Vries 方程在 $H^{-3/4}(\mathbb{R})$中的整体适定性. J. Math. Pures Appl. (9), 91(6):583–597, 2009.[8] R. Hirota 和 J. Satsuma. 耦合 Korteweg-de Vries 方程的孤子解. Phys. Lett. A, 85(8):407– 408, 1981.[9] T. Kappeler 和 P. Topalov. KdV 方程在 $H^{-1}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ 中的整体适定性 . Duke Math. J., 135(2):327–360, 2006.

[10] T. Kato. 关于 Korteweg-de Vries 方程. Manuscripta Math., 28(1-3):89–99, 1979.[11] T. Kato. 关于（广义）Korteweg-de Vries 方程的柯西问题. 载于应用数学研究，第 8 卷 Adv. Math. Suppl. Stud.，第 93–128 页. Academic Press，纽约，1983.[12] C. E. Kenig、G. Ponce 和 L. Vega. Korteweg-de Vries 方程初值问题的适定性. J. Amer. Math. Soc., 4(2):323–347, 1991.[13] C. E. Kenig 、 G. Ponce 和 L. Vega. 一个双线性估计及其在 KdV 方程中的应用. J. Amer. Math. Soc., 9(2):573–603, 1996.[14] R. Killip 和 M. Visan. KdV 方程在 H^{-1} 中适定. Ann. of Math. (2), 190(1):249–305, 2019.[15] N. Kishimoto. 临界正则性下 Korteweg-de Vries 方程柯西问题的适定性. Differential Integral Equations, 22(5-6):447–464, 2009.[16] A. J. Majda 和 J. A. Biello. 正压罗斯贝波与赤道斜压罗斯贝波的非线性相互作用. J. Atmos. Sci., 60(15):1809 – 1821, 2003.[17] L. Molinet. 关于 KdV 方程不适定性的一则注记. Differential Integral Equations, 24(7-8):759–765, 2011.[18] L. Molinet. 环面上 KdV 方程与 mKdV 方程的尖锐不适定性结果. Adv. Math., 230(4- 6):1895–1930, 2012.[19] C. T. Oh. 一参数族耦合 KdV 型系统的适定性理论及其不变吉布斯测度. ProQuest LLC, 安娜堡, MI, 2007. 博士论文–马萨诸塞大学阿默斯特分校.[20] T. Oh. 耦合 KdV 型系统适定性理论中的丢番图条件：局部理论. Int. Math. Res. Not. IMRN, (18):3516–3556, 2009.[21] T. Tao. L^2-函数的多线性加权卷积及其在非线性色散方程中的应用. Amer. J. Math., 123(5):839–908, 2001.[22] X. Yang、S.-H. Li 和 B.-Y. Zhang. 低阶项对 Majda-Biello 系统适定性的影响. J. Evol. Equ., 24(4):Paper No. 95, 32, 2024.[23] X. Yang 和 B.-Y. Zhang. $\mathbb{R}$ 上耦合 KdV-KdV 系统的局部适定性. Evol. Equ. Control Theory, 11(5):1829–1871, 2022.[24] X. Yang 和 B.-Y. Zhang. $\mathbb{T}$ 上耦合 KdV-KdV 系统柯西问题的适定性与临界指标集. Discrete Contin. Dyn. Syst., 42(11):5167–5199, 2022.(K. Wang) 数学学院，东南大学，南京，江苏 211189，中国 Email: ke.wang.math@seu.edu.cn (X. Yang) 数学学院，东南大学，南京，江苏 211189，中国 Email: xinyang@seu.edu.cn