arXiv:2603.03151v1 [math.AP] 3 Mar 2026

无黏可压缩流体中刚体的弱强唯一性

QIANFENG LI 和 EMIL WIEDEMANN*

摘要。我们研究浸没于无黏可压缩等熵流体中的自由刚体的耦合运动。通过消失黏性极限，我们获得了该模型的局部时间耗散测度值解的存在性。此外，我们建立了所得测度值解的弱强唯一性。据我们所知，这是关于可压缩无黏流体流固耦合的首个数学结果。关键的新技术在于，为无黏系统的弱形式构造测试函数的适当近似，因为检验函数空间取决于黏性参数。

1. 引言

1.1. 数学描述。 我们考虑固定区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$内等熵、可压缩、无黏流体与一个（质量可能不均匀的）刚体的耦合运动。在时刻 $t \in \mathbb{R}^+$，刚体占据 $\mathcal{B}_t \subset \Omega$，而流体占据 $\mathcal{F}_t := \Omega \setminus \mathcal{B}_t$。流体密度、速度和压力分别记为 ρ_F、u_F 和 p_F，而 ρ_B 和 u_B分别表示刚体的密度和速度。

由于固体是刚性的，其速度场可分解为平移和旋转：

$$u_B(t,x) = V(t) + \omega(t) \times \big(x - X(t)\big), \tag{1.1}$$

其中 $V(t)$ 和 $\omega(t)$ 分别为平移速度和角速度，而 $X(t)$ 是质心，

$$M := \int_{\mathcal{B}_t} \rho_B(t,x)\,\mathrm{d}x, \qquad X(t) := \frac{1}{M}\int_{\mathcal{B}_t} \rho_B(t,x)\,x\,\mathrm{d}x. \tag{1.2}$$

对于等熵多方流体，

$$p_F = \rho_F^\gamma, \qquad \gamma > 1. \tag{1.3}$$

耦合动力学方程为

$$\begin{cases} \partial_t \rho_F + \operatorname{div}(\rho_F u_F) = 0, & t>0,\ x \in \mathcal{F}_t, \\ \partial_t(\rho_F u_F) + \operatorname{div}\big(\rho_F u_F \otimes u_F + p_F \mathbb{I}\big) = 0, & t>0,\ x \in \mathcal{F}_t, \\ \partial_t \rho_B + u_B \cdot \nabla \rho_B = 0, & t>0,\ x \in \mathcal{B}_t, \\ X'(t) = V(t), & \\ MV'(t) = \displaystyle\int_{\partial \mathcal{B}_t} p_F\, n\,\mathrm{d}S, & \\ \big(\mathcal{J}(t)\,\omega(t)\big)' = \displaystyle\int_{\partial \mathcal{B}_t} \big(x - X(t)\big) \times \big(p_F\, n\big)\,\mathrm{d}S, & \end{cases} \tag{1.4}$$

关键词和短语。 流固耦合模型、可压缩欧拉方程、耗散测度值解、弱强唯一性、黏度消失极限。

*通讯作者。

满足滑移边界条件

$$\begin{cases} u_F \cdot n = 0, & t > 0,\ x \in \partial\Omega, \\ (u_F - u_B) \cdot n = 0, & t > 0,\ x \in \partial\mathcal{B}_t, \end{cases} \tag{1.5}$$

以及初始数据

$$\begin{cases} (\rho_F, u_F)\big|_{t=0} = \big(\rho_F^0(x),\, u_F^0(x)\big), & x \in \mathcal{F}_0, \\ (X, V, \omega)\big|_{t=0} = \big(X_0,\, V_0,\, \omega_0\big), & \\ (\rho_B, u_B)\big|_{t=0} = \big(\rho_B^0(x),\, V_0 + \omega_0 \times (x - X_0)\big), & x \in \mathcal{B}_0. \end{cases} \tag{1.6}$$

这里以及全文中， n 是 $\partial\mathcal{F}_t$ 的内向单位法向量（因此在流固界面上， $\partial\mathcal{B}_t$的外向单位法向量为该向量），而 $\mathbb{I}$是 3×3单位矩阵。惯性张量为

$$\mathcal{J}(t) = \int_{\mathcal{B}_t} \rho_B(t,x) \Big(|x - X(t)|^2 \mathbb{I} - (x - X(t)) \otimes (x - X(t)) \Big)\, \mathrm{d}x. \tag{1.7}$$

固体构型可表示为

$$\mathcal{B}_t = \big\{\, X(t) + \mathbb{O}_t\, x : x \in \mathcal{B}_0 \,\big\}, \tag{1.8}$$

其中 $\mathbb{O}_t \in SO(3)$是旋转矩阵。其演化满足

$$\dot{\mathbb{O}}_t\, \mathbb{O}_t^{\top} = [\omega(t)]_{\times}, \qquad \mathbb{O}_0 = \mathbb{I}, \tag{1.9}$$

其中 $[\omega]_{\times}$ 是反对称矩阵，满足对所有 $v \in \mathbb{R}^3$均有 $[\omega]_{\times} v = \omega \times v$ 。

注 1.1. 刚体的动量方程为

$$\partial_t(\chi_{\mathcal{B}_t}\rho_B u_B) + \operatorname{div}\big(\chi_{\mathcal{B}_t}\rho_B u_B \otimes u_B\big) = p_F n \delta_{\partial\mathcal{B}_t} \tag{1.10}$$

对 $C_c^\infty((0,T);\mathcal{R}(\Omega))$ 中的测试函数，在分布意义下成立，并且

$$\mathcal{R}(\Omega) := \{\xi : \Omega \to \mathbb{R}^3 \big| \xi = \alpha + \eta \times (\cdot - X), \alpha, \eta, X \in \mathbb{R}^3\}. \tag{1.11}$$

这里， $\chi_{\mathcal{B}_t}$ 是 $\mathcal{B}_t$ 上的特征函数， $\delta_{\partial\mathcal{B}_t}$ 是 $\partial\mathcal{B}_t$上的狄拉克测度。证明留待附录给出。

1.2. 文献综述与主要结果。 流固耦合广泛存在于自然系统和工程结构中，长期以来一直受到数学家的关注。关于流固耦合模型的介绍可见 [13]。正如 [14], 所指出的，在粘性流动中，界面处允许滑移是自然的，因为经典的无滑移条件会导致固体与区域边界之间出现不现实的碰撞行为。无碰撞悖论最初是在20世纪60年代的斯托克斯系统背景下提出的 [2, 4], ，随后在纳维-斯托克斯方程层面得到证实 [20, 21]。与此同时，在纳维型边界条件下，可能发生碰撞 [26, 15]。

在纳维滑移边界条件框架下，已有若干研究成果：在有界区域中，浸没于不可压纳维–斯托克斯流中的刚体运动，在三维中直至发生碰撞均存在勒雷型弱解 [14]；随后，这项研究被拓展至多方可压缩粘性流动，并证明当绝热指数大于 $\frac{3}{2}$ [25]时弱解局部存在；此外，利用拉格朗日坐标，证明了当绝热指数大于 1 [8]时，多方可压缩粘性流动的强解局部存在且唯一。在粘性流体-刚体系统的无滑移边界条件背景下，文献 [5, 6, 18, 22]研究了直至发生碰撞的弱解存在性。这些结果也被推广至可能发生碰撞的情形 [27, 10, 9]。通过将理想流体-刚体系统约化为闭无穷维流形上的常微分方程 [1], ，文献 [23]证明了强解在局部时间内存在且唯一。

就消失黏性极限而言，目前似乎仅有文献 [3]中的结果。在该研究中，对于不可压情形，证明了 [14] 中的模型在消失黏性极限下收敛为耗散 Young 测度值解，并建立了相应的弱强唯一性。之所以需要考虑测度值解而非分布意义下的解，是因为众所周知的紧性缺失会阻碍在消失黏性极限下得到欧拉方程的弱解；即使不存在运动刚体，这一问题依然存在。关于测度值解及其弱强唯一性的介绍，参见 [28] 。

在本文中，我们令可压黏性流体-刚体系统的弱解 [25]在黏度趋于零时收敛，从而得到无黏可压缩流体-刚体系统的一个Young测度值解。我们建立了弱强唯一性。一个关键的新要素（下文定理 1.1证明中的第2步）是精细构造与黏度相关的测试函数的适当逼近。事实上，弱形式中检验函数的空间依赖于刚体的位置，因而依赖于黏性参数。因此，我们不能用固定的测试函数来检验欧拉方程与纳维–斯托克斯方程的弱形式。这一问题在 [3]中显然被忽略了。

我们陈述主要结果如下。

定理 1.1（Young测度值解的存在性）。 假设绝热指数满足 $\gamma > \frac{3}{2}$，且区域Ω 与 $\mathcal{B}_0$ 为正则区域并满足

$$\operatorname{dist}(\partial\Omega, \mathcal{B}_0) > 2\sigma$$

对于某个 正数 σ。假设初始数据满足以下条件：

$$\begin{aligned}
&\rho_F^0 \in L^\gamma(\mathcal{F}_0), \qquad \rho_F^0 u_F^0 \in L^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}(\mathcal{F}_0), \qquad u_F^0 \chi_{\{\rho_F^0>0\}} \in L^2(\mathcal{F}_0),\\
&\rho_F^0 u_F^0 \chi_{\{\rho_F^0=0\}} = 0, \qquad \rho_B^0 \in L^\infty(\mathcal{B}_0), \qquad u_B^0 = V_0 + \omega_0 \times (x - X_0),\\
&\inf_{\mathcal{F}_0} \rho_F^0 \geq 0, \qquad \inf_{\mathcal{B}_0} \rho_B^0 > 0.
\end{aligned} \tag{1.12}$$

定义初始 *Young* 测度为

$$\nu_0 = \chi_{\mathcal{F}_0}\, \delta_{(\rho_F^0, \sqrt{\rho_F^0}\, u_F^0)} + \chi_{\mathcal{B}_0}\, \delta_{(\rho_B^0, \sqrt{\rho_B^0}\, u_B^0)}.$$

那么，可压无黏流固耦合系统 (1.4)–(1.7) 存在一个局部时间内的耗散 *Young* 测度值解

$$(\nu,\, \mathcal{D}(t),\, \mathcal{B}_t)$$

其含义见定义 *2.1*。

*He*在本文中，我们用 $\chi_{\mathcal{Q}}$ 表示集合 $\mathcal{Q}$ 的示性函数 .

注 1.2。 对于单原子气体，绝热指数为 $\gamma = \frac{5}{3}$，满足定理 *1.1* 中的假设 $\gamma > \frac{3}{2}$ 。事实上，我们认为 $\gamma > \frac{3}{2}$ 并非耗散测度值解存在性的必要条件：这一要求源于我们采用可压缩纳维–斯托克斯方程的解进行逼近，而目前仅已知当 $\gamma > \frac{3}{2}$ 时这类解存在。采用不同的逼近方式（尽管其物理相关性可能较低），原则上可以在整个范围 $\gamma > 1$ 内得到测度值解。例如， [11] 中就采用了这种方法。不过请注意，下一个定理（弱强唯一性）对任意 $\gamma > 1$ 均可证明。

定理 1.2（弱强唯一性）。 假设问题 (1.4)–(1.7) 存在一个耗散 *Young* 测度值解

$$(\nu = \chi_{\mathcal{F}_{1,t}}\nu + \chi_{\mathcal{B}_{1,t}}\delta_{(\rho_{B1}, \sqrt{\rho_{B1}}u_{B1})},\ \mathcal{D}(t),\ \mathcal{B}_{1,t})_{t\in[0,T]},$$

以及一个强解

$$(\rho_{F2}, u_{F2}, \rho_{B2}, u_{B2}, \mathcal{B}_{2,t})_{t\in[0,T]},$$

使得以下正则性和相容性条件成立：

$$
\begin{aligned}
&u_{B1}(t,x) = V_1(t) + \omega_1(t) \times (x - X_1(t)), && V_1(\cdot),\, \omega_1(\cdot) \in L^\infty(0,T);\\
&u_{B2}(t,x) = V_2(t) + \omega_2(t) \times (x - X_2(t)), && V_2(\cdot),\, \omega_2(\cdot) \in C^1(0,T);\\
&\rho_{F2}, u_{F2}, \nabla_x \rho_{F2}, \nabla_x u_{F2} \in C\left(\bigcup_{t\in[0,T]} \{t\} \times \overline{\mathcal{F}_{2,t}} \right), && \partial_t \rho_{F2},\, \partial_t u_{F2} \in L^1\big([0,T]; C(\overline{\mathcal{F}_{2,t}})\big);\\
&n \cdot (\nabla_x u_{F2} - \nabla_x u_{B2}) n\big|_{\partial\mathcal{B}_{2,t}} = 0, && \rho_{B2} \in C^1\left(\bigcup_{t\in[0,T]} \{t\} \times \overline{\mathcal{B}_{2,t}} \right);\\
&\inf_{t\in[0,T]} \inf_{x\in\mathcal{F}_{2,t}} \rho_{F2}(x,t) > 0, && \max_{i=1,2} \sup_{t\in[0,T]} \operatorname{dist}(\partial\Omega, \partial\mathcal{B}_{i,t}) > \tfrac{3\sigma}{2}.
\end{aligned}
\tag{1.13}
$$

这里，$n|_{\partial\mathcal{B}_{2,\,t}}$ 表示$\partial\mathcal{B}_{2,\,t}$处的单位外法向量。

于是，耗散测度值解与强解重合，具体而言，

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{B}_{1,t} = \mathcal{B}_{2,t}, && t \in (0,T),\\
&\nu = \chi_{\mathcal{F}_{1,t}} \delta_{(\rho_{F2}, \sqrt{\rho_{F2}} u_{F2})} + \chi_{\mathcal{B}_{2,t}} \delta_{(\rho_{B2}, \sqrt{\rho_{B2}} u_{B2})}, && t \in (0,T),\\
&\mathcal{D}(t) = 0, && t \in (0,T).
\end{aligned}
\tag{1.14}
$$

此处及下文中，我们用 $\mathcal{Q}$ 表示集合 $\overline{\mathcal{Q}}$的闭包。

由于刚体运动取决于周围流体的速度，因而也取决于黏度，无黏流固耦合系统弱形式中的容许测试函数 ϕ通常不适用于有黏情形。因此，在分析消失黏性极限时，必须构造经过适当修正、 ϕ^ϵ 且仍与有黏问题相容的测试函数。然而，非线性项 $\rho^\epsilon u^\epsilon \otimes u^\epsilon \chi_{\mathcal{F}_t^\epsilon}$和 $(\rho^\epsilon)^\gamma \chi_{\mathcal{F}_t^\epsilon}$仅在 $L^1(\Omega)$ 中一致有界，因此，即便在 $\partial\mathcal{B}_t^\epsilon$ 附近的薄层内对测试函数稍作修改，也可能影响序列的收敛行为

$$
\int_0^T \int_\Omega \left(\rho^\epsilon u^\epsilon \otimes u^\epsilon \chi_{\mathcal{F}_t^\epsilon} + (\rho^\epsilon)^\gamma \chi_{\mathcal{F}_t^\epsilon} \mathbb{I} \right) : \nabla \phi^\epsilon \mathrm{d}x \mathrm{d}t.
$$

为确保极限测度值解不依赖于检验函数的具体构造，并且这些非线性项所产生的相应缺陷测度受能量耗散 $\mathcal{D}(t)$ 控制，我们提出更强的正则性要求：与黏性情形只需界面处法向分量具有 C^0 正则性不同，无黏性表述要求检验函数在流固界面两侧均具有完整的 C^1 正则性。

本文其余部分安排如下。第 2 节回顾广义Young测度的若干基本结果，并给出无黏流固耦合系统中测度值解的精确定义。随后，我们验证，在消失黏性极限下，具有纳维滑移边界条件的黏性流固耦合问题的解收敛到无黏系统的耗散 Young 测度值解。第 3 节引入适当的坐标变换，在与耗散测度值解相关的区域上重新定义强解。通过详细的相对能量分析，我们证明耗散解与重新定义的强解一致。因此，重新定义的强解与原强解一致，从而证明定理 1.2。

2. Young测度值解的存在性

2.1. 广义Young测度的基本结果。本文对无黏可压缩流体-刚体系统的初始数据不施加超出基本可积性要求的其他正则性假设。因此，我们在Young测度值解的框架下表述该问题。有关可压缩欧拉系统的Young测度值解理论，尤其是能够刻画集中效应的相关理论，请参阅 [19] 及其中的参考文献。

一种或许更经济的表述是 [11]，中引入的耗散测度值解 这一概念，其中集中效应被纳入一个一般的缺陷测度。

令 $\mathcal{P}(\mathbb{R}^{l+m})$表示 $\mathbb{R}^{l+m}$上的概率测度集合，并令 $\mathcal{M}(X)$表示区域 X上的有限拉东测度集合。我们回顾以下关于有界序列收敛到 Young 测度的基本结果。

引理 2.1. 对于 $1 < p$、 $q < \infty$，用$C_{p,q}$表示由函数 $f \in C(\mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m;\, \mathbb{R})$ 构成的函数空间，其中存在 $C > 0$ 使得

$$|f(\lambda_1, \lambda')| \leq C(1 + |\lambda_1|^\gamma + |\lambda'|^2)$$

对所有$(\lambda_1, \lambda') \in \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m$。

设 $\{(u_k, w_k)\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^{l+m}$是一个在 $L^\infty\big([0,T];\, L^p(\Omega) \times L^q(\Omega)\big)$中一致有界的序列。那么存在一个子序列（不重新标记）、一个 *Young* 测度 $\nu \in L^\infty_w(\Omega; \mathcal{P}(\mathbb{R}^{l+m}))$，以及一族集中缺陷测度

$$m_t^{(\cdot)} : C_{p,q} \longrightarrow \mathcal{M}(\overline{\Omega}),$$

使得

$$f(u_n(t,x), w_n(t,x))\, \mathcal{L} \overset{*}{\rightharpoonup} \int_{\mathbb{R}^{l+m}} f(\lambda_1, \lambda')\, \mathrm{d}\nu\, \mathcal{L} + m_t^f \otimes \mathrm{d}t, \tag{2.1}$$

对任意 $f \in C_{p,q}$。这里 $\mathcal{L}$ 表示 $\mathbb{R}^4$上的勒贝格测度，而 $\mathrm{d}t$ 是 $\mathbb{R}$上的勒贝格测度。

此外，如果

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f(u_n, w_n)\|_{L^r((0,T)\times\Omega)} < +\infty$$

对于某个 $r > 1$，那么

$$m_t^f = 0. \tag{2.2}$$

此外，根据 [11, 引理 2.1]，，集中缺陷测度满足以下比较原理。

引理 2.2。 设 $\{(u_k, w_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$, ν 和 m^f 如引理 *2.1* 中所述。设 $G \in C_0(\mathbb{R}^{l+m}; \mathbb{R}^+)$ 和$F \in C_0(\mathbb{R}^{l+m}; \mathbb{R})$ 满足

$$F(z) \leq |G(z)|, \quad \forall\, z \in \mathbb{R}^{l+m},$$

并假设

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|G(u_n, w_n)\|_{L^1([0,T]\times\Omega)} < +\infty.$$

那么，相应的集中缺陷测度满足

$$|m^F| \leq m^G. \tag{2.3}$$

2.2. **耗散 Young 测度值解的定义**。为简化记号，我们定义

$$\mathcal{H}^T := \bigcup_{s\in(0,T)} \{s\} \times \mathcal{H}_s,$$

其中 $\mathcal{H}_t$ 是一个时变区域。特别地，我们将使用以下简写：

$$\Omega^T,\ \overline{\Omega^T},\ \mathcal{F}^T,\ \overline{\mathcal{F}^T},\ \mathcal{B}^T.$$

我们进一步定义，对于 $(\lambda_1,\ \lambda') \in \mathbb{R}^{1+3}$ 和 $\nu \in L^\infty_w(\Omega; \mathcal{P}(\mathbb{R}^{1+3}))$，

$$\langle f(\lambda_1,\lambda'),\nu\rangle := \int_{\mathbb{R}^{1+3}} f(\lambda_1,\lambda')\,\mathrm{d}\nu.$$

接下来，我们引入用于定义黏性流固耦合模型弱解的容许测试函数类：

$$\mathcal{V}_{\mathcal{B}^T} := \left\{ \phi \in C([0,T];L^2(\Omega)) \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{there exist } \phi^F \in C^\infty([0,T];C^\infty(\overline{\Omega})),\\ \phi^B \in C^\infty([0,T];\mathcal{R}(\Omega)) \text{ such that:}\\ \phi\big|_{\mathcal{F}_t} = \phi^F, \phi\big|_{\mathcal{B}_t} = \phi^B, \phi^F\cdot n\big|_{\partial\Omega} = 0\\ (\phi^F-\phi^B)\cdot n\big|_{\partial\mathcal{B}_t} = 0, \end{array} \right\}, \tag{2.4}$$

这里回顾一下

$$\mathcal{R}(\Omega) := \{\xi : \Omega \to \mathbb{R}^3 \big| \xi = \alpha + \eta\times(\cdot - X), \alpha,\eta,X\in\mathbb{R}^3\},$$

并且 n 表示 $\partial\mathcal{B}_t$的单位外法向量。此外，我们定义以下测试函数，用于定义我们无黏流固耦合模型的耗散 Young 测度值解：

$$\tilde{\mathcal{V}}_{\mathcal{B}^T} := \{\phi\in\mathcal{V}_{\mathcal{B}^T} \big| n\cdot\nabla(\phi^F-\phi^B)n\big|_{\partial\mathcal{B}_t} = 0\}. \tag{2.5}$$

注 2.1. 对任意 $\phi \in \mathcal{V}_{\mathcal{B}^T}$，这些约束

$$(\phi^F-\phi^B)\cdot n|_{\partial\mathcal{B}_t} = 0, \quad n\cdot\nabla(\phi^F-\phi^B)n|_{\partial\mathcal{B}_t} = 0,$$

意味着 $\phi\cdot n$ 在跨越 $\partial\mathcal{B}_t$ 时具有 C^1 正则性。

现在我们可以陈述无黏可压缩流体-刚体系统的耗散 Young 测度值解的精确定义。

定义 2.1. 三元组 $(\nu,\mathcal{D},\mathcal{B}_t)$ 称为系统 (1.4)–(1.6) 在 $t\in[0,T]$ 上的耗散 Young 测度值解，如果下列性质成立：

(1) 基本正则性：$\nu \in L^\infty_w(\Omega^T;\mathcal{P}(\mathbb{R}^{1+3}))$，$\mathcal{D}\in L^\infty([0,T])$ 其中 $\mathcal{D}\ge 0$，且 $\mathcal{B}_t$ 是一个随时间变化的区域。*(2)* 刚体运

动（$\mathcal{B}_t$）：存在绝对连续函数 $V(t)$ 与 $\omega(t)$ 使得 t

$$\nu|_{\mathcal{B}^T} = \delta_{(\rho_B(t,x),\sqrt{\rho_B(t,x)}\,u_B(t,x))},$$

其中 $u_B(t,x) = V(t) + \omega(t)\times(x-X(t))$。对于每个 $\phi(t,x)\in C^\infty(\overline{\Omega^T};\mathbb{R})$，

$$\begin{aligned} &\iint_{\mathcal{B}^t} \rho_B\,\phi_\tau + \rho_B u_B\cdot\nabla\phi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau + \int_{\mathcal{B}_0}\rho_0\phi(0,x)\,\mathrm{d}x - \int_{\mathcal{B}_t}\rho_B\phi(t,x)\,\mathrm{d}x = 0,\\ &\iint_{\mathcal{B}^t} \phi_\tau + u_B\cdot\nabla\phi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau + \int_{\mathcal{B}_0}\phi(0,x)\,\mathrm{d}x - \int_{\mathcal{B}_t}\phi(t,x)\,\mathrm{d}x = 0. \end{aligned} \tag{2.6}$$

(3) 质量守恒：对于每个 $\psi(t,x) \in C^\infty(\overline{\Omega^T};\mathbb{R})$，

$$\begin{aligned} 0 = &\iint_{\mathcal{F}^t} \langle \lambda_1, \nu\rangle \psi_\tau \mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau + \langle \sqrt{\lambda_1}\lambda', \nu\rangle \cdot \nabla\psi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau \\ &+ \int_{\mathcal{F}_0} \langle \lambda_1, \nu_0\rangle \psi(0,x)\,\mathrm{d}x - \int_{\mathcal{F}_t} \langle \lambda_1, \nu\rangle \psi(t,x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{2.7}$$

(4) 动量平衡：存在 $\nu^M \in L^1([0,T];\ \mathcal{M}(\mathcal{F}_t))$ 满足

$$\Big| \int_{\mathcal{F}_t} \nabla\Phi^F \,\mathrm{d}\nu^M \Big| \le \zeta(t)\,\mathcal{D}(t)\,\|\Phi^F(t,\cdot)\|_{C^1(\mathcal{F}_t)}, \tag{2.8}$$

对于某个 $\zeta(\cdot) \in L^1([0,T])$，使得对于任意 $\Psi \in \tilde{\mathcal{V}}_{\mathcal{B}^T}$ 及由 (Ψ^F, Ψ^B) 根据(2.4)对应得到的

$$\begin{aligned} 0 = &\iint_{\mathcal{F}^t} \langle \sqrt{\lambda_1}\lambda', \nu\rangle \Psi^F_\tau + \langle \lambda'\otimes\lambda' + \lambda_1^\gamma \mathbb{I}, \nu\rangle : \nabla\Psi^F \,\mathrm{d}\nu\,\mathrm{d}\tau + \iint_{\mathcal{B}^t} \rho_B u_B \Psi^B_\tau \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \iint_{\mathcal{F}^t} \nabla\Psi^F \,\mathrm{d}\nu^M\,\mathrm{d}\tau \\ &+ \int_\Omega \langle \sqrt{\lambda_1}\lambda', \nu_0\rangle \Psi(0,x)\,\mathrm{d}x - \int_{\mathcal{F}_t} \langle \sqrt{\lambda_1}\lambda', \nu\rangle \Psi^F(t,x)\,\mathrm{d}x - \int_{\mathcal{B}_t} \langle \sqrt{\lambda_1}\lambda', \nu\rangle \Psi^B(t,x)\,\mathrm{d}x, \end{aligned} \tag{2.9}$$

其中

$$\nu_0 = \delta_{(\rho_F^0, \sqrt{\rho_F^0}\,u_F^0)} \chi_{\mathcal{F}_0} + \delta_{(\rho_B^0, \sqrt{\rho_B^0}(V_0 + \omega_0\times(\cdot - X_0)))} \chi_{\mathcal{B}_0}.$$

(5) 动能耗散：对于所有 $t \in [0,T]$，

$$\begin{aligned} E_{mvs}(t) &:= \int_{\mathcal{F}_t} \Big\langle \frac{|\lambda'|^2}{2} + \frac{\lambda_1^\gamma}{\gamma-1}, \nu \Big\rangle \mathrm{d}x + \int_{\mathcal{B}_t} \frac{\rho_B |u_B|^2}{2}\,\mathrm{d}x + \mathcal{D}(t) \\ &\le \int_{\mathcal{F}_0} \frac{(\rho_F^0)^\gamma}{\gamma-1} \mathrm{d}x + \int_\Omega \frac{\rho_F^0 |u_F^0|^2}{2} \mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{2.10}$$

注记 2.2. 将(1.4) 中流体的动量方程与附录 *A* 中定理*A.1*所述刚体的动量方程相结合，我们导出耦合流体-刚体系统动量平衡(2.9)的弱形式。

注记 2.3. 耗散*Young*测度值解定义中的检验函数可以通过一个直接的论证推广到以下函数类：

$$\begin{aligned} &\phi, \nabla_x\phi \in C\Big(\overline{\mathcal{B}^T}\Big), \quad \partial_t\phi \in L^1\big([0,T]; C(\overline{\mathcal{B}_t})\big) \quad \textit{in } (2.6), \\ &\psi, \nabla_x\psi \in C\Big(\overline{\mathcal{F}^T}\Big), \quad \partial_t\psi \in L^1\big([0,T]; C(\overline{\mathcal{F}_t})\big) \quad \textit{in } (2.7), \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} &\Psi^F, \nabla_x\Psi^F \in C\Big(\overline{\mathcal{F}^T}\Big), \quad \partial_t\Psi^F \in L^1\big([0,T]; C(\overline{\mathcal{F}_t})\big), \\ &\Psi^B, \nabla_x\Psi^B \in C\Big(\overline{\mathcal{B}^T}\Big), \quad \partial_t\Psi^B \in L^1\big([0,T]; C(\overline{\mathcal{B}_t})\big), \\ &(\Psi^F - \Psi^B)\cdot n|_{\partial\mathcal{B}_t} = 0, \quad n\cdot\nabla(\Psi^F - \Psi^B)n|_{\partial\mathcal{B}_t} = 0 \quad \textit{in } (2.9). \end{aligned} \tag{2.11}$$

因此，在定理*1.2*的证明中，将强解用作测试函数是容许的。

2.3. **Young 测度值解的存在性**。 通过具有 Navier滑移边界条件的可压缩粘性流体-刚体系统的消失黏度极限，我们为流固耦合模型得到一个耗散 Young 测度值解。

The 具有 Navier边界条件的可压缩黏性流固系统是

$$
\begin{cases}
\partial_t \rho_F^\epsilon + \operatorname{div}_x(\rho_F^\epsilon u_F^\epsilon) = 0, \\
\partial_t(\rho_F^\epsilon u_F^\epsilon) + \operatorname{div}_x(\rho_F^\epsilon u_F^\epsilon \otimes u_F^\epsilon + p_F^\epsilon \mathbb{I}) - \epsilon \operatorname{div}_x \mathcal{T}(u_F^\epsilon) = 0, \qquad t \in (0,T),\ x \in \mathcal{F}_t^\epsilon, \\
\partial_t \rho_B^\epsilon + u_B^\epsilon \cdot \nabla \rho_B^\epsilon = 0, \\
\dfrac{\mathrm{d}X^\epsilon}{\mathrm{d}t}(t) = V^\epsilon(t), \\
M\dfrac{\mathrm{d}V^\epsilon}{\mathrm{d}t}(t) = \displaystyle\int_{\partial\mathcal{B}_t^\epsilon} \big(p_F^\epsilon \mathbb{I} - \epsilon \mathcal{T}(u_F^\epsilon)\big)\cdot n \,\mathrm{d}S, \\
\big(\mathcal{J}^\epsilon(t)\,\omega^\epsilon(t)\big)' = \displaystyle\int_{\partial\mathcal{B}_t^\epsilon} (x - X^\epsilon(t)) \times \big((p_F^\epsilon \mathbb{I} - \epsilon\mathcal{T}(u_F^\epsilon))\, n\big)\,\mathrm{d}S, \quad t \in (0,T), \\
u_F^\epsilon \cdot n = 0, \quad (\mathcal{T}(u_F^\epsilon)\cdot n)\times n = -\epsilon(u_F^\epsilon \times n), \qquad t \in (0,T),\ x \in \partial\Omega, \\
(u_F^\epsilon - u_B^\epsilon)\cdot n = 0, \quad (\mathcal{T}(u_F^\epsilon)\cdot n)\times n = -\epsilon\big((u_F^\epsilon - u_B^\epsilon)\times n\big), \quad t \in (0,T),\ x \in \partial\mathcal{B}_t^\epsilon,
\end{cases}
\tag{2.12}
$$

其中

$$
p_F^\epsilon = (\rho_F^\epsilon)^\gamma, \qquad \mathcal{T}(u_F^\epsilon) = \nabla u_F^\epsilon + (\nabla u_F^\epsilon)^\top + (\operatorname{div} u_F^\epsilon)\,\mathbb{I},
$$

并且（V^ϵ、ω^ϵ、X^ϵ、u_B^ϵ、$\mathcal{J}^\epsilon$）之间的关系与无黏情形下（V、ω、X、u_B、$\mathcal{J}$）中的关系相同。

（2.12）的弱解理论已在 [25] 中建立；下面我们对其进行概述。

引理 2.3。 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 和 $\mathcal{B}_0 \subset\Omega$ 为正则有界区域。假设对于某个$\sigma > 0$,

$$
\operatorname{dist}(\mathcal{B}_0, \partial\Omega) > 2\sigma.
$$

设 $\gamma > \frac{3}{2}$，并假设初始数据满足

$$
\begin{aligned}
&\rho_F^\epsilon\big|_{t=0} \in L^\gamma(\mathcal{F}_0), \qquad \rho_F^\epsilon(0,x) \geq 0, \qquad \inf \rho_B^\epsilon\big|_{t=0} > 0, \\
&\rho_F^\epsilon u_F^\epsilon\big|_{t=0} \in L^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}(\mathcal{F}_0), \qquad \big(\rho_F^\epsilon u_F^\epsilon\, 1_{\{\rho_F^\epsilon = 0\}}\big)\big|_{t=0} = 0, \\
&|u_F^\epsilon|^2\big|_{t=0} \in L^1(\mathcal{F}_0), \qquad u_B^\epsilon\big|_{t=0} = \ell_0 + \omega_0 \times (x - X_0), \quad x \in \mathcal{B}_0, \quad \textit{for some } \ell_0, \omega_0 \in \mathbb{R}^3.
\end{aligned}
$$

于是存在一个与 ϵ 无关的时间 $T > 0$，使得系统 (2.12) 在 $[0,T)$ 上存在一个有限能量弱解，满足

$$
\mathcal{B}_t^\epsilon \subset \Omega, \qquad \operatorname{dist}(\mathcal{B}_t^\epsilon, \partial\Omega) > \tfrac{3\sigma}{2}, \quad t \in [0,T).
$$

若三元组 $(\mathcal{B}_t^\epsilon, \rho^\epsilon(t,x)\ u^\epsilon(t,x))$ 满足以下条件，则称其为 有限能量弱解：

1. 对于 $t \in [0,T)$,

$$
\mathcal{B}_t^\epsilon \subset \Omega, \quad \operatorname{dist}(\mathcal{B}_t^\epsilon, \partial\Omega) > 0, \quad \chi_{\mathcal{B}^\epsilon}(t,x) \in L^\infty\big([0,T)\times\Omega\big).
$$

2. $u^\epsilon \in \mathcal{U}_{\mathcal{B}^{\epsilon T}}$，其中

$$
\mathcal{U}_{\mathcal{B}^{\epsilon T}} := \left\{ u \in L^2([0,T];L^2(\Omega)) \;\middle|\; \begin{array}{l} \textit{there exist } u^F \in L^2([0,T];H^1(\overline{\Omega})), \\ u^B \in L^2([0,T];\mathcal{R}(\Omega)) \textit{ such that:} \\ u\big|_{\mathcal{F}^{\epsilon T}} = u^F, u\big|_{\mathcal{B}^{\epsilon T}} = u^B, u^F\cdot n\big|_{\partial\Omega} = 0 \\ u^F\cdot n\big|_{\partial\mathcal{B}^{\epsilon T}} = u^B\cdot n\big|_{\partial\mathcal{B}^{\epsilon T}} \end{array} \right\}. \tag{2.13}
$$

3. $\rho^\epsilon \geq 0$, $\rho^\epsilon \in L^\infty(0,T;\ L^\gamma(\Omega))$，以及 $\rho^\epsilon|u^\epsilon|^2 \in L^\infty(0,T;\ L^1(\Omega))$。

4. 对于任意 $\phi_i \in C_c^\infty(\Omega^T;\ \mathbb{R})$、 $i = 1$、2、3,

$$\begin{aligned} 0 = &\int_0^t\!\!\int_{\mathcal{B}_\tau^\epsilon} \rho^\epsilon\, \partial_\tau\phi_1 + \rho^\epsilon u^\epsilon\cdot\nabla\phi_1 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau + \int_{\mathcal{B}_0}\rho^\epsilon(0,x)\phi_1(0,x)\,\mathrm{d}x \\ &+ \int_0^t\!\!\int_{\mathcal{B}_\tau^\epsilon} \partial_\tau\phi_2 + u^\epsilon\cdot\nabla\phi_2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau + \int_{\mathcal{B}_0}\phi_2(0,x)\,\mathrm{d}x \\ &+ \int_0^t\!\!\int_{\mathcal{F}_\tau^\epsilon} \rho^\epsilon\, \partial_\tau\phi_3 + \rho^\epsilon u^\epsilon\cdot\nabla\phi_3 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau + \int_{\mathcal{F}_0}\rho^\epsilon(0,x)\phi_3(0,x)\,\mathrm{d}x \\ &- \int_{\mathcal{B}_t^\epsilon}\rho^\epsilon(t,x)\phi_1(t,x)\,\mathrm{d}x - \int_{\mathcal{B}_t^\epsilon}\phi_2(t,x)\,\mathrm{d}x - \int_{\mathcal{F}_t^\epsilon}\rho^\epsilon(t,x)\phi_3(t,x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{2.14}$$

5. 对于任意 $\phi \in \mathcal{V}_{\mathcal{B}^{\epsilon T}}$，若其对应的 (ϕ^F, ϕ^B) 如 (2.4)所示,

$$\begin{aligned} &-\int_0^t\!\!\int_{\mathcal{F}_\tau^\epsilon}\rho^\epsilon u^\epsilon\cdot\partial_\tau\phi^F - \int_0^t\!\!\int_{\mathcal{B}_\tau^\epsilon}\rho^\epsilon u^\epsilon\cdot\partial_\tau\phi^B - \int_0^t\!\!\int_{\mathcal{F}_\tau^\epsilon}(\rho^\epsilon u^\epsilon\otimes u^\epsilon):\nabla\phi^F \\ &+\int_0^t\!\!\int_{\mathcal{F}_\tau^\epsilon}\big(\epsilon\mathcal{T}(u^\epsilon) - p_F^\epsilon\mathbb{I}\big):\nabla\phi^F + \epsilon\int_0^t\!\!\int_{\partial\Omega}(u_F^\epsilon\times n)\cdot(\phi^F\times n)\,\mathrm{d}S\,\mathrm{d}\tau \\ &+\epsilon\int_0^t\!\!\int_{\partial\mathcal{B}_\tau^\epsilon}\big((u_F^\epsilon - u_B^\epsilon)\times n\big)\cdot\big((\phi^F-\phi^B)\times n\big)\,\mathrm{d}S\,\mathrm{d}\tau \\ &= \int_\Omega \rho^\epsilon u^\epsilon\cdot\phi\big|_{\tau=0}\,\mathrm{d}x - \int_\Omega\rho^\epsilon u^\epsilon\cdot\phi\big|_{\tau=t}\,\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{2.15}$$

6. （能量不等式）

$$\begin{aligned} &E^\epsilon(t) + \epsilon\int_0^t\!\!\int_{\mathcal{F}_\tau^\epsilon}\big(|\nabla u_F^\epsilon|^2 + |\operatorname{div} u_F^\epsilon|^2\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau + \epsilon\int_0^t\!\!\int_{\partial\Omega}|u_F^\epsilon\times n|^2\,\mathrm{d}S\,\mathrm{d}\tau \\ &\quad+\epsilon\int_0^t\!\!\int_{\partial\mathcal{B}_\tau^\epsilon}|(u_F^\epsilon - u_B^\epsilon)\times n|^2\,\mathrm{d}S\,\mathrm{d}\tau \ \le\ E^\epsilon(0), \end{aligned} \tag{2.16}$$

其中

$$E^\epsilon(t) := \int_\Omega\frac{\rho^\epsilon|u^\epsilon|^2}{2}\,\mathrm{d}x + \int_{\mathcal{F}_t^\epsilon}\frac{(\rho^\epsilon)^\gamma}{\gamma-1}\,\mathrm{d}x.$$

我们改进了引理 2.3 中关于 u_B^ϵ 和 ρ_B^ϵ 的界。

引理 2.4. 成立

$$0 < \inf_{\mathcal{B}_0}\rho_B^0(x) \ \le\ \rho_B^\epsilon \ \le\ \sup_{\mathcal{B}_0}\rho_B^0(x), \tag{2.17}$$

和 $u_B^\epsilon \in L^\infty\big([0,T);\,\mathcal{R}(\Omega)\big)$。

证明。 考虑

$$\begin{aligned} &\partial_t\varrho + \tilde u\cdot\nabla\varrho = 0, \quad (t,x)\in[0,T)\times\Omega, \\ &\varrho\big|_{t=0} = \varrho_0(x) := \begin{cases}\rho_B^0(x) - \inf_{\mathcal{B}_0}\rho_B^0(x), & x\in\mathcal{B}_0,\\ 0, & x\in\mathbb{R}^3\setminus\mathcal{B}_0,\end{cases} \end{aligned} \tag{2.18}$$

其中 $\tilde u \in L^2\big([0,T);\,\mathcal{R}(\Omega)\big)$。注意到 $\varrho_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$。

根据 (2.14) 中 ρ_B^ϵ 方程的弱形式，我们注意到

$$\varrho(t,x) = \begin{cases}\rho_B^\epsilon(t,x) - \inf_{\mathcal{B}_0}\rho_B^0(x), & (t,x)\in\mathcal{B}^{\epsilon T},\\ 0, & (t,x)\in[0,T)\times(\mathbb{R}^3\setminus\mathcal{B}^{\epsilon T}),\end{cases}$$

是 (2.18) 的一个弱解。

根据 DiPerna–Lions理论， [7, 推论 II.1], (2.18) 在$L^\infty\big([0,T)$ 中存在唯一的弱解； $L^\gamma(\mathbb{R}^n)$) 并且满足

$$0 \;\le\; \varrho(t,x) \;\le\; \sup_{\mathcal{B}_0}\rho_B^0(x) - \inf_{\mathcal{B}_0}\rho_B^0(x) \quad \text{for a.e. } (t,x)\in[0,T)\times\mathbb{R}^3.$$

这意味着 (2.17)。现在我们对 u_B^ϵ 进行估计。

利用 $u_B^\epsilon = V^\epsilon(t) + \omega^\epsilon(t)\times(x-X^\epsilon(t))$ 以及 ρ_B^ϵ 的下界，能量不等式 (2.16) 给出，对于某个 $C>0$,

$$\begin{aligned} E^\epsilon(0) &\ge \int_{\mathcal{B}_t^\epsilon}\rho_B^\epsilon|u_B^\epsilon|^2\,\mathrm{d}x \;\ge\; \inf_{\mathcal{B}_0}\rho_B^0\int_{\mathcal{B}_t^\epsilon}|u_B^\epsilon|^2\,\mathrm{d}x \\ &\ge C\Big(|\alpha^\epsilon(t)|^2+|\eta^\epsilon(t)|^2\Big), \end{aligned}$$

因此 $u_B^\epsilon\in L^\infty\big([0,T);\,\mathcal{R}(\Omega)\big)$。证明至此完成。 □

回顾了黏性理论之后，我们现在可以令 (2.12) 中的 $\epsilon\to 0$ 趋于极限，从而证明定理 1.1（耗散 Young测度值解的存在性）。

定理 *1.1* 的证明。 我们将证明分为 4 个部分。

步骤 1：固体部分上的收敛性。 回顾 $u_B^\epsilon\in L^\infty([0,T);\ \mathcal{R}(\Omega))$，由 [14,命题 3.4]和 [7, 定理 II.4],，存在 $u_B\in L^\infty([0,T);\ \mathcal{R}(\Omega))$、$\rho_B\in L^\infty([0,T)\times\Omega)$、一个有界时变区域 $\mathcal{B}_t$，以及 u_B^ϵ，ρ_B^ϵ 和 $\chi_{\mathcal{B}^\epsilon}$ （不重新标记）的一个子序列，使得

$$u_B^\epsilon \xrightarrow{\text{weakly-}*\text{ in } L^\infty([0,T);L^2(\Omega))} u_B, \tag{2.19}$$

$$\chi_{\mathcal{B}^\epsilon T}(t,x) \xrightarrow[\text{weakly-}*\text{ in } L^\infty([0,T)\times\mathbb{R}^3)]{\text{strongly in } C([0,T);L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3))} \chi_{\mathcal{B}^T}(t,x) =: 1_{\mathcal{B}_t}(x), \tag{2.20}$$

and

$$\rho_B^\epsilon(t,x) \xrightarrow[\text{weakly-}*\text{ in } L^\infty([0,T)\times\mathbb{R}^3)]{\text{strongly in } C([0,T);L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3))} \rho_B(t,x). \tag{2.21}$$

此外，对任意 $\phi_1,\ \phi_2\in C_c^\infty(\Omega^T;\ \mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^t\!\!\int_{\mathcal{B}_\tau}\partial_\tau\phi_2 + u_B\cdot\nabla\phi_2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau + \int_{\mathcal{B}_0}\phi_2(0,x)\,\mathrm{d}x - \int_{\mathcal{B}_t}\phi_2(t,x)\,\mathrm{d}x \\ &\quad + \int_0^t\!\!\int_{\mathcal{B}_\tau}\rho_B\,\partial_\tau\phi_1 + \rho_B u_B\cdot\nabla\phi_1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau + \int_{\mathcal{B}_0}\rho_B(0,x)\phi_1(0,x)\,\mathrm{d}x - \int_{\mathcal{B}_t}\rho_B(t,x)\phi_1(t,x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{2.22}$$

我们回顾 [14, 引理 5.4] 以及 (1.8) 中定义的刚体运动。由此，我们在下述引理中建立运动边界 $\partial\mathcal{B}_t^\epsilon\to\partial\mathcal{B}_t$ 的收敛性质。

引理 2.5. 成立

$$\lim_{\epsilon\to 0}\sup_{t\in[0,T]}\mathcal{L}^3\Big(\mathcal{B}_t^\epsilon\Delta\mathcal{B}_t\Big)=0, \tag{2.23}$$

其中 Δ 表示对称差。设

$$G:=\{Q\in SO(3):\,Q\mathcal{B}_0=\mathcal{B}_0\} \tag{2.24}$$

是 $\mathcal{B}_0$ 的旋转对称群。那么，对于任意 $\delta\in(0、1)$，存在 $\epsilon_\delta>0$，使得对于所有 $\epsilon\in(0、\epsilon_\delta]$，以下关系成立：

$$\begin{aligned} \sup_{t\in[0,T]}\inf_{Q\in G}\sup_{x\in\partial\mathcal{B}_0}\big|y^\varepsilon(t,x)-y(t,Qx)\big| &\le \mathcal{O}(1)\,\delta^5, \\ \sup_{t\in[0,T]}\inf_{Q\in G}\sup_{x\in\partial\mathcal{B}_0}\big|n(y^\varepsilon(t,x))-n(y(t,Qx))\big| &\le \mathcal{O}(1)\,\delta^5, \end{aligned} \tag{2.25}$$

其中

$$y^\epsilon(t,x) = X^\epsilon(t) + \mathbb{O}_t^\epsilon x, \qquad y(t,x) = X(t) + \mathbb{O}_t x, \quad x \in \partial\mathcal{B}_0,$$

并且 $n(y^\epsilon(t,x))$ 和 $n(y(t,x))$ 分别表示对应点处 $\partial\mathcal{B}_t^\epsilon$ 和 $\partial\mathcal{B}_t$ 的外单位法向量。

(2.23) 中的收敛性可直接由 [14, 引理 5.4]得出。运动边界及其相应外向单位法向量在刚体对称意义下的收敛性，依赖于刚体对称群 G 上的紧性论证。详细证明见附录 B。

步骤 2：测试函数的逼近。由于固体的位置取决于 ϵ，集合 $\mathcal{V}_{\mathcal{B}^{\epsilon T}}$ 随 ϵ变化。为取极限，我们构造一个序列 $\{\phi^\epsilon\} \subset \mathcal{V}_{\mathcal{B}^{\epsilon T}}\tilde{}$，用以逼近任意给定的 $\phi \in \mathcal{V}_{\mathcal{B}^T}$。

沿用 [14, 第 5.2 节，第 2055], 页，在 $\partial\mathcal{B}_t^\epsilon$的管状邻域中引入正交曲线坐标（$s_1$，$s_2$，$z$）：（$s_1$，$s_2$）为 $\partial\mathcal{B}_t^\epsilon$参数化，而 z是横向有符号距离，且 $z>0$ 位于 $\mathcal{B}_t$之外。特别地，$\partial\mathcal{B}_t^\epsilon = \{z=0\}$。令

$$e_1 = \tfrac{1}{h_1}\partial_{s_1}, \qquad e_2 = \tfrac{1}{h_2}\partial_{s_2}, \qquad e_z = \tfrac{1}{h_z}\partial_z,$$

为相应的标准正交标架，其尺度因子为 h_1，h_2，$h_z>0$。

固定 $\delta>0$，并从引理 2.5 中取 $\epsilon=\epsilon_\delta$。定义

$$\phi^\epsilon = \begin{cases} \phi^F, & z>\delta, \\ \langle\phi^F, e_1\rangle e_1 + \langle\phi^F, e_2\rangle e_2 + \tilde{\phi}_3\, e_z, & z\in(0,\delta), \\ \phi^B, & z<0, \end{cases}$$

其中

$$\tilde{\phi}_3(s_1,s_2,z) = \eta\Big(\frac{3}{2\delta}z\Big)\langle\phi^B, e_z\rangle + \Big(1-\eta\Big(\frac{3}{2\delta}z\Big)\Big)\langle\phi^F, e_z\rangle,$$

且 $\eta\in C^\infty(\mathbb{R})$ 满足

$$\eta(\xi) = \begin{cases} 1, & |\xi|\le 1/2, \\ 0, & |\xi|\ge 1. \end{cases}$$

由于 $\phi\in\mathcal{V}_{\mathcal{B}^T}$，我们有 $\phi^\epsilon\in\mathcal{V}_{\mathcal{B}^{\epsilon T}}$。此外，直接计算可得，对于 $i=1,2$，

$$\partial_{s_i}(\tilde{\phi}_3 e_z) = \eta\Big(\tfrac{3}{2\delta}z\Big)\partial_{s_i}\big(\langle\phi^B, e_z\rangle e_z\big) + \Big(1-\eta\Big(\tfrac{3}{2\delta}z\Big)\Big)\partial_{s_i}\big(\langle\phi^F, e_z\rangle e_z\big), \tag{2.26}$$

and

$$\begin{aligned}\partial_z(\tilde{\phi}_3 e_z) = {}& \eta\Big(\tfrac{3}{2\delta}z\Big)\partial_z\big(\langle\phi^B, e_z\rangle e_z\big) + \Big(1-\eta\Big(\tfrac{3}{2\delta}z\Big)\Big)\partial_z\big(\langle\phi^F, e_z\rangle e_z\big) \\ & + \frac{3}{2\delta}\,\eta'\Big(\tfrac{3}{2\delta}z\Big)\Big(\langle\phi^B, e_z\rangle - \langle\phi^F, e_z\rangle\Big)e_z.\end{aligned} \tag{2.27}$$

对于任意满足 $z\in(0,\ \delta)$ 的点 $A(s_1,\ s_2,\ z)$，定义 $\mathcal{A}_A^\epsilon\in\partial\mathcal{B}_t^\epsilon$为

$$z = \operatorname{dist}(A, \partial\mathcal{B}_t^\epsilon) = \big|A\mathcal{A}_A^\epsilon\big|. \tag{2.28}$$

由引理 2.5，存在 $\mathcal{A}_A\in\partial\mathcal{B}_t$ 使得

$$\big|\mathcal{A}_A^\epsilon\mathcal{A}_A\big| \le \mathcal{O}(1)\delta^5, \qquad \big|n(\mathcal{A}_A^\epsilon) - n(\mathcal{A}_A)\big| \le \mathcal{O}(1)\delta^5, \tag{2.29}$$

其中，$n(\mathcal{A}_A^\epsilon)$ 和 $n(\mathcal{A}_A)$ 分别表示对应点处 $\partial\mathcal{B}_t^\epsilon$ 和 $\partial\mathcal{B}_t$ 的外单位法向量。此外，结合 (2.28) 和 (2.29)，我们得到

$$\big|A\mathcal{A}_A^\epsilon\big| \le \mathcal{O}(1)\delta, \qquad \big|A\mathcal{A}_A\big| \le \big|A\mathcal{A}_A^\epsilon\big| + \big|\mathcal{A}_A\mathcal{A}_A^\epsilon\big| \le \mathcal{O}(1)\delta.$$

~然后，注意到 $\mathcal{V}_{\mathcal{B}^T}$ 的定义，直接计算可得

$$
\begin{aligned}
&\Big|\frac{3}{2\delta}\eta'\Big(\tfrac{3}{2\delta}z\Big)\Big(\langle\phi^B,e_z\rangle-\langle\phi^F,e_z\rangle\Big)e_z\Big|\\
&=\Big|\frac{3}{2\delta}\eta'\Big(\tfrac{3}{2\delta}z\Big)\Big(\langle\phi^B(A),n(\mathcal{A}_A^\epsilon)\rangle-\langle\phi^B(A),n(\mathcal{A}_A)\rangle+\langle\phi^B(A),n(\mathcal{A}_A)\rangle-\langle\phi^B(\mathcal{A}_A),n(\mathcal{A}_A)\rangle\\
&+\langle\phi^F(\mathcal{A}_A),n(\mathcal{A}_A)\rangle-\langle\phi^F(A),n(\mathcal{A}_A)\rangle+\langle\phi^F(A),n(\mathcal{A}_A)\rangle-\langle\phi^F(A),n(\mathcal{A}_A^\epsilon)\rangle\Big)\Big|\\
&\le\mathcal{O}(1)\delta^4+\mathcal{O}(1)\frac{1}{\delta}\left(\Big|\langle\phi^B(A)-\phi^B(\mathcal{A}_A),n(\mathcal{A}_A)\rangle-\langle\phi^F(A)-\phi^F(\mathcal{A}_A),n(\mathcal{A}_A)\rangle\Big|\right)
\end{aligned}
\tag{2.30}
$$

当 dist$(A,\partial\mathcal{B}_t^\epsilon)\le\delta^2$ 时，我们有

$$|A\mathcal{A}_A|\le|A\mathcal{A}_A^\epsilon|+|\mathcal{A}_A^\epsilon\mathcal{A}_A|\le\mathcal{O}(1)\,\delta^2.$$

由于 ϕ^B 和 ϕ^F 具有较高的正则性，由拉格朗日中值定理和 (2.30) 可得

$$\left|\frac{3}{2\delta}\,\eta'\Big(\tfrac{3}{2\delta}z\Big)\Big(\langle\phi^B,e_z\rangle-\langle\phi^F,e_z\rangle\Big)e_z\right|\le\mathcal{O}(1)\,\delta,\qquad z\in[0,\delta^2].\tag{2.31}$$

当 dist$(A,\partial\mathcal{B}_t^\epsilon)\in(\delta^2,\delta)$ 时，我们需要对下式作精细估计

$$\Big|\langle\phi^B(A)-\phi^B(\mathcal{A}_A),n(\mathcal{A}_A)\rangle-\langle\phi^F(A)-\phi^F(\mathcal{A}_A),n(\mathcal{A}_A)\rangle\Big|$$

该式出现在 (2.30) 中。首先，我们注意到

$$\left|\tfrac{\mathcal{A}_AA}{|\mathcal{A}_AA|}-n(\mathcal{A}_A)\right|\;\le\;\mathcal{O}(1)\,\delta^3.\tag{2.32}$$

记 $l_{\mathcal{A}_AA}:=\frac{\mathcal{A}_AA}{|\mathcal{A}_AA|}$。由于 ϕ^B 和 ϕ^F 的法向分量在 $\partial\mathcal{B}_t$两侧有 C^1 接触，即，

$$(\phi^B-\phi^F)\cdot n=0,\qquad n\cdot\nabla(\phi^B-\phi^F)n=0\quad\text{on }\partial\mathcal{B}_t,$$

拉格朗日中值定理给出

$$
\begin{aligned}
&\Big|\langle\phi^B(A)-\phi^B(\mathcal{A}_A),n(\mathcal{A}_A)\rangle-\langle\phi^F(A)-\phi^F(\mathcal{A}_A),n(\mathcal{A}_A)\rangle\Big|\\
&=\Big|\langle\partial_{l_{\mathcal{A}_AA}}\phi^B(A_1),n(\mathcal{A}_A)\rangle-\langle\partial_{l_{\mathcal{A}_AA}}\phi^F(A_2),n(\mathcal{A}_A)\rangle\Big|\Big|A\mathcal{A}_A\Big|\\
&\le\Big|\langle\partial_{n(\mathcal{A}_A)}\phi^B(A_1),n(\mathcal{A}_A)\rangle-\langle\partial_{n(\mathcal{A}_A)}\phi^F(A_2),n(\mathcal{A}_A)\rangle\Big|\Big|A\mathcal{A}_A\Big|+\mathcal{O}(1)\delta^3\\
&\le\Big|\langle\partial_{n(\mathcal{A}_A)}\phi^B(A_1),n(\mathcal{A}_A)\rangle-\langle\partial_{n(\mathcal{A}_A)}\phi^B(\mathcal{A}_A),n(\mathcal{A}_A)\rangle\\
&\quad+\langle\partial_{n(\mathcal{A}_A)}\phi^F(\mathcal{A}_A),n(\mathcal{A}_A)\rangle-\langle\partial_{n(\mathcal{A}_A)}\phi^F(A_2),n(\mathcal{A}_A)\rangle\Big|\Big|A\mathcal{A}_A\Big|+\mathcal{O}(1)\delta^3\\
&\le\Big|\langle\partial_{l_{\mathcal{A}_AAn(\mathcal{A}_A)}}\phi^B(A_1'),n(\mathcal{A}_A)\rangle\Big|\Big|A_1\mathcal{A}_A\Big|\Big|A\mathcal{A}_A\Big|\\
&\quad+\Big|\langle\partial_{l_{\mathcal{A}_AAn(\mathcal{A}_A)}}\phi^F(A_2'),n(\mathcal{A}_A)\rangle\Big|\Big|A_2\mathcal{A}_A\Big|\Big|A\mathcal{A}_A\Big|+\mathcal{O}(1)\delta^3\\
&\le\mathcal{O}(1)\delta^2,
\end{aligned}
\tag{2.33}
$$

其中 $A_i,A_i',i=1,2$ 是线段 $\mathcal{A}_AA.$ 上的点。然后，将 (2.33) 代入 (2.30)，可得

$$\Big|\frac{3}{2\delta}\eta'\Big(\tfrac{3}{2\delta}z\Big)\Big(\langle\phi^B,e_z\rangle-\langle\phi^F,e_z\rangle\Big)e_z\Big|\le\mathcal{O}(1)\,\delta,\qquad z\in(\delta^2,\delta].\tag{2.34}$$

最后，将 (2.31) 和 (2.34) 代入 (2.27)，并回顾 (2.26)，即可得到以下引理中测试函数的逼近性质：

引理 2.6。 逼近后的测试函数满足

$$\begin{aligned}\phi^\epsilon &= \phi^F\chi_{\{z\geq 0\}} + \phi^B\chi_{\{z<0\}} + \eta\Big(\frac{3}{2\delta}z\Big)\langle \phi^B-\phi^F, e_z\rangle e_z\chi_{\{0\leq z\leq\delta\}},\\ &= \phi^F\chi_{\{z\geq 0\}} + \phi^B\chi_{\{z<0\}} + \mathcal{O}(\delta),\end{aligned} \tag{2.35}$$

and

$$\begin{aligned}\nabla\phi^\epsilon &= \nabla\phi^F\chi_{\{z\geq 0\}} + \nabla\phi^B\chi_{\{z<0\}} + \eta\Big(\frac{3}{2\delta}z\Big)\nabla\left(\langle \phi^B-\phi^F, e_z\rangle e_z\right)\chi_{\{0\leq z\leq\delta\}} + \mathcal{O}(1)\delta\\ &= \nabla\phi^F\chi_{\{z\geq 0\}} + \nabla\phi^B\chi_{\{z<0\}} + \mathcal{O}(\delta).\end{aligned} \tag{2.36}$$

注 2.4. 两个公式中的最后一个等式成立，是因为 C^1 在 $\partial\mathcal{B}_t$处的法向~分量具有 $\phi\in\mathcal{V}_{\mathcal{B}^T}$ 正则性。

步骤 3：构造 $(\nu,\mathcal{D},\mathcal{B}_t)$。 由 (2.16) 可得,

$$\chi_{\mathcal{F}_t^\epsilon}\rho^\epsilon\in L^\infty(0,T;L^\gamma(\Omega)),\qquad \chi_{\mathcal{F}_t^\epsilon}\sqrt{\rho^\epsilon}\,|u^\epsilon|\in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)).$$

根据引理 2.1，存在

$$\mathcal{Y}\in L^\infty_w\big((0,T)\times\Omega;\mathcal{P}(\mathbb{R}^{1+3})\big),\qquad m_t^{(\cdot)}: C_{\gamma,2}\to\mathcal{M}(\overline{\Omega})$$

使得对任意 $f\in C_{\gamma,2}$,

$$f(\chi_{\mathcal{F}_t^\epsilon}\rho^\epsilon,\chi_{\mathcal{F}_t^\epsilon}\sqrt{\rho^\epsilon}u^\epsilon)\,\mathcal{L}\overset{*}{\rightharpoonup}\int_{\mathbb{R}^{1+3}} f(\lambda_1,\lambda')\,\mathrm{d}\mathcal{Y}\,\mathcal{L}+m_t^f\otimes\mathrm{d}t \tag{2.37}$$

当 δ和 $\epsilon=\epsilon_\delta$趋于零时。此外，若 $f(0,0)=0$，则 (2.37) 中的极限测度支撑于 $\mathcal{F}^T$。

~设 $\phi\in\mathcal{V}_{\mathcal{B}^T}$和 ϕ^ϵ为相应的逼近。那么，对于满足 $f(0,0)=0$的 $f\in C_{\gamma,2}$，根据引理 2.5、(2.37) 以及引理 2.6 中 ϕ^ϵ 的性质，我们得到

$$\begin{aligned}&\int_0^T\int_\Omega f(\chi_{\mathcal{F}_\tau^\epsilon}\rho^\epsilon,\chi_{\mathcal{F}_\tau^\epsilon}\sqrt{\rho^\epsilon}u^\epsilon)\,\nabla\phi^\epsilon\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau\\ &\qquad\downarrow\ (\epsilon\to 0)\\ &\int_0^T\int_{\mathcal{F}_\tau}\langle f(\lambda_1,\lambda'),\mathcal{Y}\rangle\,\nabla\phi^F\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau+\int_0^T\int_{\overline{\mathcal{F}_\tau}}\nabla\phi^F\,\mathrm{d}m_\tau^f\,\mathrm{d}\tau.\end{aligned} \tag{2.38}$$

现在我们设

$$\nu=\begin{cases}\mathcal{Y}, & (t,x)\in\mathcal{F}^T,\\ \delta_{(\rho_B,\sqrt{\rho_B}u_B)}, & (t,x)\in\mathcal{B}^T,\end{cases}$$

and

$$\nu^M=m_t^{\lambda'\otimes\lambda'+\lambda_1^\gamma},\qquad \mathcal{D}(t)=m_t^{\frac{|\lambda'|^2}{2}+\frac{\lambda_1^\gamma}{\gamma-1}}(\Omega), \tag{2.39}$$

其中 $\mathcal{B}^T$ 和 (ρ_B,u_B) 如步骤 1 所示。

步骤 4：验证所构造的 $\nu,\mathcal{D},\mathcal{B}^T$ **是一个解**。 由

$$\sup_{\epsilon>0}\|\chi_{\mathcal{F}_t^\epsilon}\rho^\epsilon\|_{L^\infty(0,T;L^\gamma(\Omega))}+\sup_{\epsilon>0}\|\chi_{\mathcal{F}_t^\epsilon}\sqrt{\rho^\epsilon}u^\epsilon\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}<+\infty,$$

我们得到

$$\sup_{\epsilon>0}\|\chi_{\mathcal{F}_t^\epsilon}\rho^\epsilon u^\epsilon\|_{L^\infty(0,T;L^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}(\Omega))}<+\infty.$$

结合这些界、引理 2.5、(2.23)、(2.19)、(2.21)，并令 (2.14) 中取极限，我们得出 ν、$\mathcal{D}$、$\mathcal{B}^T$ 满足定义 2.1 的第 (1)–(3) 项。

对于动量平衡，我们估计

$$\Big|\epsilon\int_0^t\int_{\mathcal{F}_\tau^\epsilon}\mathcal{T}(u^\epsilon):\nabla\phi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau\Big|\le\sqrt{\epsilon}\,\|\sqrt{\epsilon}\,\mathcal{T}(u^\epsilon)\|_{L^2(\mathcal{F}^{\epsilon T})}\,\|\nabla\phi\|_{L^2(\mathcal{F}^{\epsilon T})},$$

$$\Big|\epsilon\int_0^t\int_{\partial\Omega}(u_F^\epsilon\times n)\cdot(\phi^F\times n)\,\mathrm{d}S\,\mathrm{d}\tau\Big|\le\sqrt{\epsilon}\,\|\sqrt{\epsilon}\,u_F^\epsilon\times n\|_{L^2(0,T;L^2(\partial\Omega))}\,\|\phi^F\times n\|_{L^2(0,T;L^2(\partial\Omega))},$$

$$\Big|\epsilon\int_0^t\int_{\partial\mathcal{B}_\tau^\epsilon}\big[(u_F^\epsilon-u_B^\epsilon)\times n\big]\cdot\big[(\phi^F-\phi^B)\times n\big]\,\mathrm{d}S\,\mathrm{d}\tau\Big|$$

$$\le\sqrt{\epsilon}\,\|\sqrt{\epsilon}(u_F^\epsilon-u_B^\epsilon)\times n\|_{L^2(0,T;L^2(\partial\mathcal{B}_\tau^\epsilon))}\,\|(\phi^F-\phi^B)\times n\|_{L^2(0,T;L^2(\partial\mathcal{B}_\tau^\epsilon))}.$$

结合 (2.16)，可得

$$\begin{aligned}&\epsilon\int_0^t\int_{\mathcal{F}_\tau^\epsilon}\mathcal{T}(u^\epsilon):\nabla\phi\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\xrightarrow{\epsilon\to0}0,\\&\epsilon\int_0^t\int_{\partial\Omega}(u_F^\epsilon\times n)\cdot(\phi^F\times n)\xrightarrow{\epsilon\to0}0,\\&\epsilon\int_0^t\int_{\partial\mathcal{B}_\tau^\epsilon}[(u_F^\epsilon-u_B^\epsilon)\times n]\cdot[(\phi^F-\phi^B)\times n]\xrightarrow{\epsilon\to0}0.\end{aligned}\tag{2.40}$$

因此，由 (2.38) 和刚体收敛，令 (2.15) 中的 $\epsilon\to0$，可得 ν，$\mathcal{D}$，$\mathcal{B}^T$，ν^M满足定义 2.1 中的第 (4) 项（动量平衡）。

最后，根据 (2.39) 中 $\mathcal{D}(t)$ 的定义，ν，$\mathcal{D}$，$\mathcal{B}^T$满足第 (5) 项（动能耗散）。定理 1.1 的证明至此完成。□

3. 弱强唯一性

本节证明所构造的耗散 Young 测度值解满足弱强唯一性。将第 2 节中得到的耗散 Young 测度值解记为

$$(\nu=\chi_{\overline{\mathcal{F}_{1,t}}}\nu+\chi_{\mathcal{B}_{1,t}}\delta_{(\rho_{B1},\sqrt{\rho_{B1}}u_{B1})},\mathcal{D}(t),\mathcal{B}_{1,t})_{t\in[0,T]},$$

并将流体-刚体系统的强解记为

$$(\rho_{F2},u_{F2},\rho_{B2},u_{B2},\mathcal{B}_{2,t})_{t\in[0,T]},$$

其中

$$u_{Bi}=V_i(t)+\omega_i(t)\times(x-X_i(t)),\qquad i=1,2.\tag{3.1}$$

我们进一步假设，本节中的强解和耗散弱解满足定理 1.2 中的条件。

3.1. 坐标变换。定义

$$\Omega_\sigma:=\{x\in\Omega:\mathrm{dist}(x,\partial\Omega)>\sigma\},\qquad\Omega_{\frac{\sigma}{2}}:=\{x\in\Omega:\mathrm{dist}(x,\partial\Omega)>\tfrac{\sigma}{2}\}.$$

假设 $\max_{i=1,2}\sup^{t\in[0,T]}\mathrm{dist}(\partial\Omega\,\partial\mathcal{B}_{i,t})>\frac{3\sigma}{2}$ 意味着 —

$$\mathcal{B}_{i,t}\subset\Omega_\sigma,\qquad i=1,2,\ t\in(0,T).$$

令 $\xi(x)\in C_c^\infty(\Omega)$ 为一个光滑截断，使得 $\xi=1$ 在 Ω_σ 且 $\xi=0$ 在 $\Omega\setminus\Omega_2^\sigma$。参见 [16, 引理 1], , 我们定义截断速度场

$$\Lambda_i(t,x)=-\frac{1}{2}\mathrm{curl}(\xi(x)(x\times V_i(t)+|x-X_i(t)|^2\omega_i(t))),\qquad i=1,2,\tag{3.2}$$

满足

$$\mathrm{div}(\Lambda_i)=0,\ \Lambda_i\big|_{\Omega_\sigma}=u_{Bi},\ \Lambda_i\big|_{\Omega\setminus\Omega_{\sigma/2}}=0,\quad i=1,2.\tag{3.3}$$

此外，根据 (2.17) 和 (2.21)，ρ_{B1} 有正的下界。结合能量耗散不等式，可得 $u_{B1} \in L^\infty(0,T;\mathcal{R}(\Omega))$，即，

$$\sup_{t\in(0,T)} (|V_1(t)| + |\omega_1(t)|) < +\infty.$$

因此，

$$\Lambda_1 \in L^\infty(0,T;C^\infty(\Omega)), \qquad \Lambda_2 \in C^1(0,T;C^\infty(\Omega)). \tag{3.4}$$

现在我们将流映射定义为

$$Z_i(t,\cdot) : \Omega \to \Omega, \qquad x \mapsto Z_i(t,x), \quad i = 1,2,$$

其为以下方程的唯一解

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} Z_i(t,x) = \Lambda_i(t, Z_i(t,x)), \\ Z_i(0,x) = x. \end{cases} \tag{3.5}$$

下面的引理总结了这些坐标变换的一些有用性质。

引理 3.1。定义

$$\tilde{Z}_1(t,\cdot) := Z_1(t,\cdot) \circ Z_2^{-1}(t,\cdot), \qquad \tilde{Z}_2(t,\cdot) := Z_2(t,\cdot) \circ Z_1^{-1}(t,\cdot).$$

于是，对于每个固定的 t，以下性质成立：

$$\begin{aligned} &\tilde{Z}_1 \circ \tilde{Z}_2 = \mathbb{I}, \\ &\tilde{Z}_1(t,\cdot) \text{ and } \tilde{Z}_2(t,\cdot) \text{ are volume-preserving maps,} \\ &\tilde{Z}_1(t,x) = X_1(t) + \mathbb{O}_{1,t}\mathbb{O}_{2,t}^\top (x - X_2(t)), \qquad \text{in a neighborhood of } \mathcal{B}_{2,t}, \\ &\tilde{Z}_2(t,x) = X_2(t) + \mathbb{O}_{2,t}\mathbb{O}_{1,t}^\top (x - X_1(t)), \qquad \text{in a neighborhood of } \mathcal{B}_{1,t}, \end{aligned} \tag{3.6}$$

其中 $\mathbb{O}_{i,\,t}$ 是与 $\mathcal{B}_{i,\,t}$ 的刚体运动相对应的旋转矩阵，定义如下。此外，(1.9).

$$\tilde{Z}_2(t, \mathcal{B}_{1,t}) = \mathcal{B}_{2,t}, \qquad t \in (0,T). \tag{3.7}$$

引理 3.1 允许我们分别在区域 $\cup_{t\in(0,T)}\{t\} \times \mathcal{F}_{1,\,t}$ 和 $\cup_{t\in(0,T)}\{t\} \times \mathcal{B}_{1,\,t}$ 上重新定义 ρ_{F2}，u_{F2} 以及 ρ_{B2}，u_{B2}。引入变量替换

$$\tau = t, \qquad y = \tilde{Z}_2(t,x), \tag{3.8}$$

我们设

$$U_2(t,x) = \frac{\partial x}{\partial y}(\tau,y)\, u_{F2}(\tau,y), \qquad R_2(t,x) = \rho_{F2}(\tau,y), \qquad P_2(t,x) = p_{F2}(\tau,y), \tag{3.9}$$

and

$$\begin{aligned} &\tilde{V}_2(t) = \mathbb{O}_{1,t}\mathbb{O}_{2,t}^\top V_2(t), \qquad \tilde{\omega}_2(t) = \mathbb{O}_{1,t}\mathbb{O}_{2,t}^\top \omega_2(t), \\ &\tilde{u}_{B2}(t,x) = \tilde{V}_2(t) + \tilde{\omega}_2(t) \times (x - X_1(t)), \qquad \tilde{\rho}_{B2}(t,x) = \rho_{B2}(\tau,y). \end{aligned} \tag{3.10}$$

采用爱因斯坦求和约定，我们注意到

$$\partial_\tau = \partial_t + \frac{\partial x_i}{\partial \tau}\partial_{x_i}, \qquad \partial_{y_i} = \frac{\partial x_j}{\partial y_i}\partial_{x_j},$$

and

$$u_{F2}^i(\tau,y) = \frac{\partial y_i}{\partial x_l}(t,x)\, U_2^l(t,x).$$

此外，回顾雅可比公式

$$\partial_{x_l} \det(\frac{\partial y}{\partial x}) = \det(\frac{\partial y}{\partial x}) \operatorname{tr}\Big(\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \partial_{x_l}\frac{\partial y}{\partial x}\Big),$$

˜并且由于 $Z_2(t,\ \cdot)$ 是保体积映射，我们有

$$\operatorname{tr}\Big(\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\partial_{x_l}\frac{\partial y}{\partial x}\Big)=\frac{\partial x_j}{\partial y_i}\partial_{x_l}(\frac{\partial y_i}{\partial x_j})=0.$$

Here $\det(\cdot)$ 和 $\operatorname{tr}(\cdot)$ 分别表示矩阵的行列式和迹。

现在，我们可以推导 $R_2, U_2, P_2, \tilde{u}_{B2}$ 的控制方程。为此，直接计算可得

$$\begin{aligned}
0&=\partial_\tau\rho_{F2}(\tau,y)+\partial_{y_i}(\rho_{F2}u^i_{F2})\\
&=\partial_t R_2+\frac{\partial x_i}{\partial\tau}\partial_{x_i}R_2+\frac{\partial x_j}{\partial y_i}\partial_{x_j}(R_2U_2^l\frac{\partial y_i}{\partial x_l})\\
&=\partial_t R_2+\partial_{x_i}(R_2U_2^i)+\frac{\partial x_i}{\partial\tau}\partial_{x_i}R_2+\frac{\partial x_j}{\partial y_i}\partial_{x_j}(\frac{\partial y_i}{\partial x_l})R_2U_2^l\\
&=\partial_t R_2+\partial_{x_i}(R_2U_2^i)+\frac{\partial x_i}{\partial\tau}\partial_{x_i}R_2+\frac{\partial x_j}{\partial y_i}\partial_{x_l}(\frac{\partial y_i}{\partial x_j})R_2U_2^l\\
&=\partial_t R_2+\partial_{x_i}(R_2U_2^i)+\frac{\partial x_i}{\partial\tau}\partial_{x_i}R_2.
\end{aligned}\tag{3.11}$$

同理,

$$\begin{aligned}
0&=\partial_\tau(\rho_{F2}u^i_{F2})+\partial_{y_l}(\rho_{F2}u^i_{F2}u^l_{F2}+p_{F2}\delta^{il})\\
&=\frac{\partial y_i}{\partial x_l}\partial_t(R_2U_2^l)+\partial_t\Big(\frac{\partial y_i}{\partial x_l}\Big)R_2U_2^l+\frac{\partial x_j}{\partial\tau}\frac{\partial y_i}{\partial x_l}\partial_{x_j}(R_2U_2^l)+\frac{\partial x_j}{\partial\tau}\partial_{x_j}\Big(\frac{\partial y_i}{\partial x_l}\Big)R_2U_2^l\\
&\quad+\frac{\partial y_i}{\partial x_m}\partial_{x_j}\big(R_2U_2^mU_2^j\big)+\partial_{x_j}\Big(\frac{\partial y_i}{\partial x_m}\Big)R_2U_2^mU_2^j+\frac{\partial x_j}{\partial y_l}\frac{\partial y_i}{\partial x_m}\partial_{x_j}\Big(\frac{\partial y_l}{\partial x_n}\Big)R_2U_2^mU_2^n\\
&\quad+\frac{\partial x_j}{\partial y_l}\partial_{x_j}\Big(P_2\delta^{il}\Big),
\end{aligned}\tag{3.12}$$

化简后得到

$$\begin{aligned}
0&=\partial_t(R_2U_2^l)+\partial_{x_j}(R_2U_2^lU_2^j+P_2\delta^{lj})\\
&\quad+\frac{\partial x_l}{\partial y_i}\Big(\partial_t\frac{\partial y_i}{\partial x_k}+\frac{\partial x_j}{\partial\tau}\partial_{x_j}\frac{\partial y_i}{\partial x_k}\Big)R_2U_2^k+\frac{\partial x_j}{\partial\tau}\partial_{x_j}(R_2U_2^l)\\
&\quad+\frac{\partial x_l}{\partial y_i}\partial_{x_j}\Big(\frac{\partial y_i}{\partial x_m}\Big)R_2U_2^mU_2^j+\Big(\frac{\partial x_l}{\partial y_i}\frac{\partial x_j}{\partial y_i}-\delta^{lj}\Big)\partial_{x_j}P_2
\end{aligned}\tag{3.13}$$

刚体方程变换为

$$\begin{aligned}
m\frac{\mathrm{d}\tilde{V}_2(t)}{\mathrm{d}t}&=m(\tilde{\omega}_2-\omega_1)\times\tilde{V}_2+\int_{\partial\mathcal{B}_1(t)}P_2\,n\,\mathrm{d}S,\\
\mathcal{J}_1\frac{\mathrm{d}\tilde{\omega}_2(t)}{\mathrm{d}t}&=\mathcal{J}_1\tilde{\omega}_2\times\tilde{\omega}_2-(\tilde{\omega}_2-\omega_1)\times(\mathcal{J}_1\tilde{\omega}_2)+\int_{\partial\mathcal{B}_1(t)}(x-X_1(t))\times P_2\,n\,\mathrm{d}S,
\end{aligned}\tag{3.14}$$

其中，$\mathcal{J}_1$ 和 $\mathcal{J}_2$ 是两个构型的惯性张量，并满足

$$\mathcal{J}_1=\mathbb{O}_{1,t}\mathbb{O}_{2,t}^\top\mathcal{J}_2\mathbb{O}_{2,t}\mathbb{O}_{1,t}^\top.$$

相应的边界条件为

$$\begin{aligned}
&U_2\cdot n=\tilde{u}_{B2}\cdot n\quad\text{on }(0,T)\times\partial\mathcal{B}_{1,t},\\
&U_2\cdot n=0\quad\text{on }(0,T)\times\partial\Omega.
\end{aligned}\tag{3.15}$$

˜最后，我们记录以下关于 $Z_i(t,x)$、$i=1,2$ 的估计（见 [3, 引理 3.1–3.2] 和[17,推论 1]）。

引理 3.2. 对于 $t\in(0,T)$，成立

$$\begin{aligned}\|\tilde Z_i(t,\cdot)-\mathrm{Id}\|_{W^{3,\infty}(\mathcal{F}_t)}&\le \mathcal{O}(1)\big(\|V_1-\tilde V_2\|_{L^2(0,T)}+\|\omega_1-\tilde\omega_2\|_{L^2(0,T)}\big),\\ \|\partial_t\tilde Z_i(t,\cdot)\|_{W^{1,\infty}(\mathcal{F}_t)}&\le \mathcal{O}(1)\big(|V_1(t)-\tilde V_2(t)|+|\omega_1(t)-\tilde\omega_2(t)|\big).\end{aligned}\tag{3.16}$$

3.2. **定理 1.2 的证明（相对能量分析）**。在本小节中，为清晰起见，我们将测度值解记为 $(\nu,\mathcal{D}(t)\ \mathcal{B}_t)_{t\in(0,T)}$，并将重新定义的（变换后的）˜强解记为 $(R,U,V(t)\ \tilde\omega(t)\ \tilde u_B,\tilde\rho_B,\mathcal{B}_t)$。

根据 (3.11)–(3.15)，有

$$\begin{cases}\partial_t R+\partial_{x_i}(RU^i)\ =\ -\dfrac{\partial x_i}{\partial\tau}\,\partial_{x_i}R\ =:\ \mathcal{H},\\ \partial_t(RU^l)+\partial_{x_j}(RU^lU^j+P\,\delta^{lj})\\ \quad=\ -\dfrac{\partial x_l}{\partial y_i}\Big(\partial_t\dfrac{\partial y_i}{\partial x_k}+\dfrac{\partial x_j}{\partial\tau}\partial_{x_j}\dfrac{\partial y_i}{\partial x_k}\Big)R_2U_2^k-\dfrac{\partial x_j}{\partial\tau}\partial_{x_j}(R_2U_2^l)\\ \quad-\dfrac{\partial x_l}{\partial y_i}\partial_{x_j}\Big(\dfrac{\partial y_i}{\partial x_m}\Big)R_2U_2^mU_2^j-\Big(\dfrac{\partial x_l}{\partial y_i}\dfrac{\partial x_j}{\partial y_i}-\delta^{lj}\Big)\partial_{x_j}P_2\ =:\ \mathcal{G}^l,\qquad (t,x)\in\mathcal{F}^T,\\ U\cdot n=\tilde u_B\cdot n\quad\text{on }(0,T)\times\partial\mathcal{B}_t,\\ U\cdot n=0\quad\text{on }(0,T)\times\partial\Omega,\\ m\,\dfrac{\mathrm{d}\tilde V(t)}{\mathrm{d}t}=m(\tilde\omega-\omega)\times\tilde V+\displaystyle\int_{\partial\mathcal{B}(t)}P\,n\,\mathrm{d}S,\\ \mathcal{J}\,\dfrac{\mathrm{d}\tilde\omega(t)}{\mathrm{d}t}=\mathcal{J}\tilde\omega\times\tilde\omega-(\tilde\omega-\omega)\times(\mathcal{J}\tilde\omega)+\displaystyle\int_{\partial\mathcal{B}(t)}(x-X(t))\times P\,n\,\mathrm{d}S,\qquad t\in(0,T).\end{cases}\tag{3.17}$$

按照 [19, 11], ，定义相对能量

$$\begin{aligned}E_{\mathrm{rel}}(t)=&\int_{\mathcal{F}_t}\frac12\Big\langle\big|\lambda'-\sqrt{\lambda_1}\,U\big|^2,\nu\Big\rangle\,\mathrm{d}x+\int_{\mathcal{F}_t}\Big\langle\frac{\lambda_1^\gamma}{\gamma-1}-\frac{\gamma R^{\gamma-1}\lambda_1}{\gamma-1}+R^\gamma,\nu\Big\rangle\,\mathrm{d}x\\ &+\int_{\mathcal{B}_t}\frac12\,\rho_B\,|u_B-\tilde u_B|^2\,\mathrm{d}x,\end{aligned}\tag{3.18}$$

展开后为

$$\begin{aligned}E_{\mathrm{rel}}(t)=&\int_{\mathcal{F}_t}\Big\langle\frac{|\lambda'|^2}{2}+\frac{\lambda_1^\gamma}{\gamma-1},\nu\Big\rangle\,\mathrm{d}x+\frac12\int_{\mathcal{B}_t}\rho_B|u_B|^2\,\mathrm{d}x\\ &+\int_{\mathcal{F}_t}\Big(\frac12\langle\lambda_1,\nu\rangle|U|^2+R^\gamma\Big)\,\mathrm{d}x+\frac12\int_{\mathcal{B}_t}\rho_B|\tilde u_B|^2\,\mathrm{d}x\\ &-\int_{\mathcal{F}_t}\Big\langle\sqrt{\lambda_1}\lambda',\nu\Big\rangle\cdot U+\frac{\gamma}{\gamma-1}\langle\lambda_1,\nu\rangle R^{\gamma-1}\,\mathrm{d}x-\int_{\mathcal{B}_t}\rho_B\,u_B\cdot\tilde u_B\,\mathrm{d}x\\ =&\,E_{\mathrm{mvs}}(t)+\int_{\mathcal{F}_t}\Big(\frac12\langle\lambda_1,\nu\rangle|U|^2+R^\gamma\Big)\,\mathrm{d}x+\frac12\int_{\mathcal{B}_t}\rho_B|\tilde u_B|^2\,\mathrm{d}x\\ &-\int_{\mathcal{F}_t}\Big\langle\sqrt{\lambda_1}\lambda',\nu\Big\rangle\cdot U+\frac{\gamma}{\gamma-1}\langle\lambda_1,\nu\rangle R^{\gamma-1}\,\mathrm{d}x-\int_{\mathcal{B}_t}\rho_B\,u_B\cdot\tilde u_B\,\mathrm{d}x,\end{aligned}\tag{3.19}$$

其中，$E_{\mathrm{mvs}}(t)$ 在 (2.10) 中定义。

将 $\Psi^F = U$, $\Psi^B = \tilde{u}_B$ 代入 (2.9) 得

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{F}_t} \left\langle \sqrt{\lambda_1}\lambda', \nu \right\rangle \cdot U(t,\cdot)\,\mathrm{d}x + \int_{\mathcal{B}_t} \rho_B u_B \cdot \tilde{u}_B\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^t \int_{\mathcal{F}_\tau} \left\langle \sqrt{\lambda_1}\lambda', \nu \right\rangle \cdot \partial_\tau U + \left\langle \lambda' \otimes \lambda' + \lambda_1^\gamma \mathbb{I}, \nu \right\rangle : \nabla U\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau \\
&\quad + \int_0^t \int_{\mathcal{B}_\tau} \rho_B u_B \cdot \partial_\tau \tilde{u}_B\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau + \int_0^t \int_{\overline{\mathcal{F}_\tau}} \nabla U\,\mathrm{d}\nu^M\,\mathrm{d}\tau \\
&\quad + \int_{\mathcal{F}_0} R_0 |U_0|^2\,\mathrm{d}x + \int_{\mathcal{B}_0} \rho_{B0} |u_{B0}|^2\,\mathrm{d}x.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

类似地，在 (2.7) 中分别取 $\psi|_{\mathcal{F}^T} = \frac{1}{2}|U|^2$ 和 $\psi|_{\mathcal{F}^T} = \gamma R^{\gamma-1}$，得到

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_{\mathcal{F}_t} \langle \lambda_1, \nu \rangle |U|^2\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^t \int_{\mathcal{F}_\tau} U \cdot \partial_\tau U\,\langle \lambda_1, \nu \rangle + \left\langle \sqrt{\lambda_1}\lambda', \nu \right\rangle \cdot (\nabla U\, U)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau + \frac{1}{2}\int_{\mathcal{F}_0} R_0 |U_0|^2\,\mathrm{d}x,
\end{aligned} \tag{3.21}$$

and

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{F}_t} \langle \lambda_1, \nu \rangle \gamma R^{\gamma-1}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^t \int_{\mathcal{F}_\tau} (\gamma-1)\gamma R^{\gamma-2}\,\partial_\tau R\,\langle \lambda_1, \nu \rangle + (\gamma-1)\gamma R^{\gamma-2} \left\langle \sqrt{\lambda_1}\lambda', \nu \right\rangle \cdot \nabla R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau + \int_{\mathcal{F}_0} \gamma R_0^\gamma\,\mathrm{d}x.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

对于刚性部分，在 (2.6) 中取 $\phi|_{\mathcal{B}^T} = \tilde{u}_B$ 得到

$$\frac{1}{2}\int_{\mathcal{B}_t} \rho_B |\tilde{u}_B|^2\,\mathrm{d}x = \int_0^t \int_{\mathcal{B}_\tau} \rho_B\,\tilde{u}_B \cdot \partial_\tau \tilde{u}_B + \rho_B u_B \cdot \big(\nabla \tilde{u}_B\,\tilde{u}_B\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau + \frac{1}{2}\int_{\mathcal{B}_0} \rho_{B0} |u_{B0}|^2\,\mathrm{d}x. \tag{3.23}$$

将 (3.20)–(3.23) 代入 (3.19)，并对耗散 Young 测度值解使用能量不等式 (2.10)，可得

$$\begin{aligned}
E_{\mathrm{rel}}(t) \le &\int_{\mathcal{F}_t} R^\gamma\,\mathrm{d}x + \int_0^t \int_{\mathcal{F}_\tau} U \cdot \partial_\tau U\,\langle \lambda_1, \nu \rangle + \left\langle \sqrt{\lambda_1}\lambda', \nu \right\rangle \cdot (\nabla U\, U)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau \\
&+ \int_0^t \int_{\mathcal{B}_\tau} \rho_B(\tilde{u}_B - u_B) \cdot \partial_\tau \tilde{u}_B + \rho_B u_B \cdot (\nabla \tilde{u}_B\,\tilde{u}_B)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau \\
&- \int_0^t \int_{\mathcal{F}_\tau} \left\langle \sqrt{\lambda_1}\lambda', \nu \right\rangle \cdot \partial_\tau U + \left\langle \lambda' \otimes \lambda' + \lambda_1^\gamma \mathbb{I}, \nu \right\rangle : \nabla U\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau - \int_0^t \int_{\overline{\mathcal{F}_\tau}} \nabla U\,\mathrm{d}\nu^M\,\mathrm{d}\tau \\
&- \gamma \int_0^t \int_{\mathcal{F}_\tau} R^{\gamma-2}\,\partial_\tau R\,\langle \lambda_1, \nu \rangle + \gamma R^{\gamma-2} \left\langle \sqrt{\lambda_1}\lambda', \nu \right\rangle \cdot \nabla R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau - \int_{\mathcal{F}_0} R_0^\gamma\,\mathrm{d}x - \mathcal{D}(t).
\end{aligned} \tag{3.24}$$

结合 (2.8)，可得

$$
\begin{aligned}
&E_{\mathrm{rel}}(t)+\mathcal{D}(t)\\
&\le \mathcal{O}(1)\int_0^t \mathcal{D}(\tau)\,\mathrm{d}\tau+\underbrace{\int_{\mathcal{F}_t} R^\gamma\,\mathrm{d}x-\int_{\mathcal{F}_0} R_0^\gamma\,\mathrm{d}x-\gamma\int_0^t\int_{\mathcal{F}_\tau} R^{\gamma-2}\,\partial_\tau R\,\langle\lambda_1,\nu\rangle\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau}_{\mathcal{I}_0}\\
&\quad+\underbrace{\int_0^t\int_{\mathcal{F}_\tau} U\cdot\partial_\tau U\,\langle\lambda_1,\nu\rangle+\Big\langle\sqrt{\lambda_1}\lambda',\nu\Big\rangle\cdot(\nabla U\,U)-\Big\langle\sqrt{\lambda_1}\lambda',\nu\Big\rangle\cdot\partial_\tau U-\Big\langle\lambda'\otimes\lambda',\nu\Big\rangle:\nabla U\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau}_{\mathcal{I}_1}\\
&\quad\underbrace{-\int_0^t\int_{\mathcal{F}_\tau}\langle\lambda_1^\gamma,\nu\rangle\,\nabla\cdot U+\gamma R^{\gamma-2}\Big\langle\sqrt{\lambda_1}\lambda',\nu\Big\rangle\cdot\nabla R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau}_{\mathcal{I}_2}\\
&\quad+\underbrace{\int_0^t\int_{\mathcal{B}_\tau}\rho_B(\tilde u_B-u_B)\cdot\partial_\tau\tilde u_B+\rho_B u_B\cdot(\nabla\tilde u_B\,\tilde u_B)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau}_{\mathcal{I}_3}.
\end{aligned}
\tag{3.25}
$$

为阐明 $\sum_{i=0}^3\mathcal{I}_i$ 中的抵消关系，我们重写每一项。根据雷诺输运定理（见附录），

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I}_0&=\int_{\mathcal{F}_t} R^\gamma\,\mathrm{d}x-\int_{\mathcal{F}_0} R_0^\gamma\,\mathrm{d}x-\gamma\int_0^t\int_{\mathcal{F}_\tau} R^{\gamma-2}\,\partial_\tau R\,\langle\lambda_1,\nu\rangle\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau\\
&=\underbrace{\int_0^t\int_{\mathcal{F}_\tau}\gamma R^{\gamma-2}\,\partial_\tau R\,(R-\langle\lambda_1,\nu\rangle)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau}_{\mathcal{I}_{01}}+\int_0^t\int_{\partial\mathcal{F}_\tau} R^\gamma\,u_B\cdot n\,\mathrm{d}S\,\mathrm{d}\tau.
\end{aligned}
\tag{3.26}
$$

利用（3.17）中的第二行，直接计算可得

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I}_1&=\int_0^t\int_{\mathcal{F}_\tau}\big\langle\lambda_1U-\sqrt{\lambda_1}\lambda',\nu\big\rangle\cdot\partial_\tau U+\big\langle U\otimes(\lambda_1U-\sqrt{\lambda_1}\lambda'),\nu\big\rangle:\nabla U\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau\\
&\quad+\int_0^t\int_{\mathcal{F}_\tau}\big\langle(\lambda'-\sqrt{\lambda_1}U)\otimes(\sqrt{\lambda_1}U-\lambda'),\nu\big\rangle:\nabla U\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau\\
&=\int_0^t\int_{\mathcal{F}_\tau}\big\langle(\lambda'-\sqrt{\lambda_1}U)\otimes(\sqrt{\lambda_1}U-\lambda'),\nu\big\rangle:\nabla U\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau\\
&\quad+\int_0^t\int_{\mathcal{F}_\tau}\frac{\mathcal{G}-\mathcal{H}U}{R}\cdot\big\langle\lambda_1U-\sqrt{\lambda_1}\lambda',\nu\big\rangle\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau-\int_0^t\int_{\mathcal{F}_\tau}\gamma R^{\gamma-2}\,\nabla R\cdot\big\langle\lambda_1U-\sqrt{\lambda_1}\lambda',\nu\big\rangle\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau.
\end{aligned}
\tag{3.27}
$$

这里 $\mathcal{G}:=(\mathcal{G}^1,\mathcal{G}^2,\mathcal{G}^3)^\top$，其中 $\mathcal{G}^l,l=1,2,3$ 如（3.17）所示。

此外，

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I}_2&=-\int_0^t\int_{\mathcal{F}_\tau}\langle\lambda_1^\gamma,\nu\rangle\,\nabla\cdot U\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau+\gamma\int_0^t\int_{\mathcal{F}_\tau} R^{\gamma-2}\Big\langle\sqrt{\lambda_1}\lambda',\nu\Big\rangle\cdot\nabla R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau\\
&=\int_0^t\int_{\mathcal{F}_\tau}\big(R^\gamma-\langle\lambda_1^\gamma,\nu\rangle\big)\,\nabla\cdot U\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau-\int_0^t\int_{\partial\mathcal{F}_\tau} R^\gamma\,U\cdot n\,\mathrm{d}S\,\mathrm{d}\tau\\
&\quad+\underbrace{\int_0^t\int_{\mathcal{F}_\tau}\gamma R^{\gamma-2}\,\big\langle RU-\sqrt{\lambda_1}\lambda',\nu\big\rangle\cdot\nabla R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau}_{\mathcal{I}_{21}}.
\end{aligned}
\tag{3.28}
$$

由于 $\tilde{u}_B(x) = V(t) + \tilde{\omega}(t) \times (x - X_1(t))$，矩阵 $\nabla \tilde{u}_B$ 是反对称的，因此

$$u_B \cdot (\nabla \tilde{u}_B \, u_B) = 0, \qquad (\tilde{u}_B - u_B) \cdot \big(\nabla \tilde{u}_B (\tilde{u}_B - u_B)\big) = 0.$$

因此,

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_3 &= \int_0^t \int_{\mathcal{B}_\tau} \rho_B (\tilde{u}_B - u_B) \cdot \partial_\tau \tilde{u}_B + \rho_B u_B \cdot (\nabla \tilde{u}_B \, \tilde{u}_B) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}\tau \\ &= \int_0^t \int_{\mathcal{B}_\tau} \rho_B \left(\partial_\tau \tilde{u}_B + u_B \cdot \nabla \tilde{u}_B\right) \cdot (\tilde{u}_B - u_B) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}\tau \\ &= \int_0^t \int_{\mathcal{B}_\tau} \rho_B \left(\partial_\tau \tilde{u}_B + \tilde{u}_B \cdot \nabla \tilde{u}_B\right) \cdot (\tilde{u}_B - u_B) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}\tau. \end{aligned} \tag{3.29}$$

利用 (3.17) 中的第一个方程,

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{01} + \mathcal{I}_{21} = &\int_0^t \int_{\mathcal{F}_\tau} \gamma R^{\gamma-2} (R - \langle \lambda_1, \nu \rangle) \, \mathcal{H} + \gamma R^{\gamma-2} \nabla R \cdot \langle \lambda_1 U - \sqrt{\lambda_1} \lambda', \nu \rangle \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}\tau \\ &+ \int_0^t \int_{\mathcal{F}_\tau} \gamma R^{\gamma-1} \, \nabla \cdot U \, (\langle \lambda_1, \nu \rangle - R) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}\tau. \end{aligned} \tag{3.30}$$

将 (3.26)–(3.30) 代入 (3.25)，我们得到

$$\begin{aligned} E_{\mathrm{rel}}(t) + \mathcal{D}(t) \le &\int_0^t \int_{\mathcal{F}_\tau} \gamma R^{\gamma-2} (R - \langle \lambda_1, \nu \rangle) \, \mathcal{H} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}\tau + \int_0^t \int_{\mathcal{F}_\tau} \gamma R^{\gamma-1} \, \nabla \cdot U \, (\langle \lambda_1, \nu \rangle - R) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}\tau \\ &+ \int_0^t \int_{\mathcal{F}_\tau} \left\langle R^\gamma - \lambda_1^\gamma, \nu \right\rangle \nabla \cdot U \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}\tau + \int_0^t \int_{\mathcal{F}_\tau} \frac{\mathcal{G} - \mathcal{H} \, U}{R} \cdot \left\langle \lambda_1 U - \sqrt{\lambda_1} \lambda', \nu \right\rangle \mathrm{d}x \, \mathrm{d}\tau \\ &+ \int_0^t \int_{\mathcal{F}_\tau} \left\langle (\lambda' - \sqrt{\lambda_1} U) \otimes (\sqrt{\lambda_1} U - \lambda'), \nu \right\rangle : \nabla U \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}\tau \\ &+ \int_0^t \int_{\mathcal{B}_\tau} \rho_B \left(\partial_\tau \tilde{u}_B + \tilde{u}_B \cdot \nabla \tilde{u}_B\right) \cdot (\tilde{u}_B - u_B) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}\tau + \mathcal{O}(1) \int_0^t \mathcal{D}(\tau) \, \mathrm{d}\tau. \end{aligned} \tag{3.31}$$

合并 (3.31) 右端的第 2、第 3 和第 5 项，并利用定义 (3.18)，我们最终得到

$$\begin{aligned} E_{\mathrm{rel}}(t) + \mathcal{D}(t) \le \mathcal{O}(1) &\int_0^t \big(E_{\mathrm{rel}}(\tau) + \mathcal{D}(\tau)\big) \, \mathrm{d}\tau \\ &+ \int_0^t \int_{\mathcal{B}_\tau} \rho_B \left(\partial_\tau \tilde{u}_B + \tilde{u}_B \cdot \nabla \tilde{u}_B\right) \cdot (\tilde{u}_B - u_B) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}\tau \\ &+ \int_0^t \int_{\mathcal{F}_\tau} \gamma R^{\gamma-2} (R - \langle \lambda_1, \nu \rangle) \, \mathcal{H} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}\tau \\ &+ \int_0^t \int_{\mathcal{F}_\tau} \frac{\mathcal{G} - \mathcal{H} \, U}{R} \cdot \left\langle \lambda_1 U - \sqrt{\lambda_1} \lambda', \nu \right\rangle \mathrm{d}x \, \mathrm{d}\tau. \end{aligned} \tag{3.32}$$

注意到 (3.17) 中最后两个方程，并按照处理 [24, 项 (4.24)], 的步骤，我们得出

$$\int_0^t \int_{\mathcal{B}_\tau} \rho_B \left(\partial_\tau \tilde{u}_B + \tilde{u}_B \cdot \nabla \tilde{u}_B\right) \cdot (\tilde{u}_B - u_B) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}\tau \; \le \; \mathcal{O}(1) \int_0^t E_{\mathrm{rel}}(\tau) \, \mathrm{d}\tau. \tag{3.33}$$

为了估计 (3.32) 右端的最后两项，并仿照 [24, (4.27)–(4.36)]„ 我们将哑变量 λ_1 分解为

$$\mathbb{K}_1 := \big\{\lambda_1 : \lambda_1 \in (\tfrac{R_-}{2}, 2R_+)\big\}, \quad \mathbb{K}_2 := \big\{\lambda_1 : \lambda_1 \in [0, \tfrac{R_-}{2}]\big\}, \quad \mathbb{K}_3 := \big\{\lambda_1 : \lambda_1 \in [2R_+, +\infty)\big\},$$

其中 $0<R_-:=\inf\ R$ 且 $R_+:=\sup R<+\infty$。令 $\mathbb{K}_i$ 上的特征函数为

$$\zeta_i(\lambda_1):=\chi_{\mathbb{K}_i}(\lambda_1),\qquad i=1,2,3.$$

我们首先记下两个初等估计，例如参见 [12]。

引理 3.3. 对于上述范围以及任意 $\gamma>1$,

$$(\lambda_1-R)^2\zeta_1\ \le\ \mathcal{O}(1)\Big(\frac{\lambda_1^\gamma}{\gamma-1}-\frac{\gamma R^{\gamma-1}\lambda_1}{\gamma-1}+R^\gamma\Big)\zeta_1,$$

且对于 $k=2,3$,

$$(1+\lambda_1^\gamma)\,\zeta_k\ \le\ \mathcal{O}(1)\Big(\frac{\lambda_1^\gamma}{\gamma-1}-\frac{\gamma R^{\gamma-1}\lambda_1}{\gamma-1}+R^\gamma\Big)\zeta_k.$$

我们根据上述划分对 (3.32) 右端的第三项进行拆分：

$$\Big|\int_{\mathcal{F}_t}\gamma R^{\gamma-2}(R-\langle\lambda_1,\nu\rangle)\mathcal{H}\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\Big|\le\mathcal{O}(1)\sum_{i=1}^{3}\underbrace{\int_{\mathcal{F}_t}\big|\langle(R-\lambda_1)\,\zeta_i,\nu\rangle\big|\big|\mathcal{H}\big|\mathrm{d}x}_{\mathcal{I}_i'}.\tag{3.34}$$

根据引理 3.3，我们估计 $\mathcal{I}_1'$ 和 $\mathcal{I}_2'$:

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_1'&\le\int_{\mathcal{F}_t}\langle(R-\lambda_1)^2\zeta_1,\nu\rangle+\mathcal{H}^2\mathrm{d}x\\&\le\mathcal{O}(1)\int_{\mathcal{F}_t}\langle\Big(\frac{\lambda_1^\gamma}{\gamma-1}-\frac{\gamma R^{\gamma-1}\lambda_1}{\gamma-1}+R^\gamma\Big),\nu\rangle\zeta_1\mathrm{d}x+\mathcal{O}(1)\|\mathcal{H}\|^2_{L^\infty(\mathcal{F}_t)}\\&\le\mathcal{O}(1)E_{rel}(t)+\mathcal{O}(1)\|\mathcal{H}\|^2_{L^\infty(\mathcal{F}_t)},\end{aligned}\tag{3.35}$$

and

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_2'&\le\int_{\mathcal{F}_t}\langle(R-\lambda_1)^2\zeta_2,\nu\rangle+\mathcal{H}^2\mathrm{d}x\le\mathcal{O}(1)\int_{\mathcal{F}_t}\langle1^2\zeta_2,\nu\rangle+\mathcal{H}^2\mathrm{d}x\\&\le\mathcal{O}(1)\int_{\mathcal{F}_t}\langle\Big(\frac{\lambda_1^\gamma}{\gamma-1}-\frac{\gamma R^{\gamma-1}\lambda_1}{\gamma-1}+R^\gamma\Big),\nu\rangle\zeta_2\mathrm{d}x+\mathcal{O}(1)\|\mathcal{H}\|^2_{L^\infty(\mathcal{F}_t)}\\&\le\mathcal{O}(1)E_{rel}(t)+\mathcal{O}(1)\|\mathcal{H}\|^2_{L^\infty(\mathcal{F}_t)}.\end{aligned}\tag{3.36}$$

项 $\mathcal{I}_3'$ 需要更细致的处理。事实上，根据引理 3.3，对于 $\gamma\in[1,2]$,

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_3'&\le\mathcal{O}(1)\int_{\mathcal{F}_t}\langle|\lambda_1|\zeta_3,\nu\rangle\big|\mathcal{H}\big|\mathrm{d}x\le\mathcal{O}(1)\|\langle|\lambda_1|\zeta_3,\nu\rangle\|_{L^\gamma(\mathcal{F}_t)}\|\mathcal{H}\|_{L^\infty(\mathcal{F}_t)}\\&\le\mathcal{O}(1)\Big(\int_{\mathcal{F}_t}\langle\lambda_1^\gamma\zeta_3,\nu\rangle\mathrm{d}x\Big)^{\frac{2}{\gamma}}+\mathcal{O}(1)\|\mathcal{H}\|^2_{L^\infty(\mathcal{F}_t)}\\&\le\mathcal{O}(1)E_{rel}^{\frac{2}{\gamma}}+\mathcal{O}(1)\|\mathcal{H}\|^2_{L^\infty(\mathcal{F}_t)};\end{aligned}\tag{3.37}$$

对于 $\gamma\in(2,+\infty)$,

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_3'&\le\mathcal{O}(1)\int_{\mathcal{F}_t}\langle|\lambda_1|\zeta_3,\nu\rangle\big|\mathcal{H}\big|\mathrm{d}x\le\mathcal{O}(1)\int_{\mathcal{F}_t}\langle|\lambda_1|^{\frac{\gamma}{2}}\zeta_3,\nu\rangle\big|\mathcal{H}\big|\mathrm{d}x\\&\le\mathcal{O}(1)\int_{\mathcal{F}_t}\langle|\lambda_1|^\gamma\zeta_3,\nu\rangle\mathrm{d}x+\mathcal{O}(1)\|\mathcal{H}\|^2_{L^\infty(\mathcal{F}_t)}\\&\le\mathcal{O}(1)E_{rel}(t)+\mathcal{O}(1)\|\mathcal{H}\|^2_{L^\infty(\mathcal{F}_t)}.\end{aligned}\tag{3.38}$$

根据 $\mathcal{H}$ 的具体公式和引理 3.2,

$$\|\mathcal{H}\|^2_{L^\infty(\mathcal{F}_t)}\le\mathcal{O}(1)\|\partial_t\tilde{Z}_i(t,x)\|^2_{W^{1,\infty}(\mathcal{F}_t)}\le\mathcal{O}(1)(\big|V-\tilde{V}\big|^2(t)+\big|\omega-\tilde{\omega}\big|^2(t)),\tag{3.39}$$

结合 $E_{rel}(t)$的定义以及以下事实

$$\begin{aligned}&\int_{\mathcal{B}_t}\rho_B|u_B-\tilde{u}_B|^2\mathrm{d}x\\&\geq\inf_{\mathcal{B}_t}\rho_B\int_{\mathcal{B}_t}\left(|V(t)-\tilde{V}(t)|^2+|(\omega(t)-\tilde{\omega}(t))\times(x-X_1(t))|^2\right)\mathrm{d}x\\&\geq c\left(|V(t)-\tilde{V}(t)|^2+|\omega(t)-\tilde{\omega}(t)|^2\right),\end{aligned}\tag{3.40}$$

对于某些正常数 c，可得

$$\|\mathcal{H}\|^2_{L^\infty(\mathcal{F}_t)}\leq\mathcal{O}(1)E_{rel}(t).\tag{3.41}$$

将 (3.35)–(3.41) 与 (3.34) 结合，可得

$$\Big|\int_{\mathcal{F}_t}\gamma R^{\gamma-2}(R-\langle\lambda_1,\nu\rangle)\mathcal{H}\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\Big|\leq\mathcal{O}(1)E_{rel}(t).\tag{3.42}$$

接下来，我们估计 (3.32) 右端的最后一项。首先，

$$\begin{aligned}\Big|\int_{\mathcal{F}_t}\frac{\mathcal{G}-\mathcal{H}U}{R}\cdot\langle\lambda_1U-\sqrt{\lambda_1}\lambda',\nu\rangle\mathrm{d}x\Big|&=\Big|\int_{\mathcal{F}_t}\frac{\mathcal{G}-\mathcal{H}U}{R}\cdot\langle(\lambda_1U-\sqrt{\lambda_1}\lambda')(\sum_{i=1}^3\zeta_i),\nu\rangle\mathrm{d}x\Big|\\&\leq\sum_{i=1}^3\underbrace{\int_{\mathcal{F}_t}\Big|\frac{\mathcal{G}-\mathcal{H}U}{R}\Big|\langle\big|\lambda_1U-\sqrt{\lambda_1}\lambda'\big|\zeta_i,\nu\rangle\mathrm{d}x}_{\mathcal{I}_i''}.\end{aligned}\tag{3.43}$$

由 Hölder 不等式和 Jensen 不等式，

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_1''+\mathcal{I}_2''&\leq\mathcal{O}(1)\|\frac{\mathcal{G}-\mathcal{H}U}{R}\|_{L^2(\mathcal{F}_t)}\left(\int_{\mathcal{F}_t}\langle\big|\sqrt{\lambda_1}U-\lambda'\big|^2,\nu\rangle\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\\&\leq\mathcal{O}(1)\|\frac{\mathcal{G}-\mathcal{H}U}{R}\|_{L^\infty(\mathcal{F}_t)}E_{rel}^{\frac{1}{2}}(t),\end{aligned}\tag{3.44}$$

and

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_3''&\leq\mathcal{O}(1)\|\frac{\mathcal{G}-\mathcal{H}U}{R}\|_{L^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}(\mathcal{F}_t)}\|\langle\big|\sqrt{\lambda_1}(\sqrt{\lambda_1}U-\lambda')\big|\zeta_3,\nu\rangle\|_{L^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}(\mathcal{F}_t)}\\&\leq\mathcal{O}(1)\|\frac{\mathcal{G}-\mathcal{H}U}{R}\|_{L^\infty(\mathcal{F}_t)}\|\langle\lambda_1^\gamma\zeta_3,\nu\rangle^{\frac{1}{2\gamma}}\langle\big|\sqrt{\lambda_1}U-\lambda'\big|^2,\nu\rangle^{\frac{1}{2}}\|_{L^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}(\mathcal{F}_t)}\\&\leq\mathcal{O}(1)\|\frac{\mathcal{G}-\mathcal{H}U}{R}\|_{L^\infty(\mathcal{F}_t)}\left(\int_{\mathcal{F}_t}\langle\lambda_1^\gamma\zeta_3,\nu\rangle\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2\gamma}}\left(\int_{\mathcal{F}_t}\langle\big|\sqrt{\lambda_1}U-\lambda'\big|^2,\nu\rangle\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\\&\leq\mathcal{O}(1)\|\frac{\mathcal{G}-\mathcal{H}U}{R}\|_{L^\infty(\mathcal{F}_t)}E_{rel}^{\frac{\gamma+1}{2\gamma}}(t)\end{aligned}\tag{3.45}$$

因此，将 (3.44) 和 (3.45) 代入 (3.43)，可得

$$\begin{aligned}\Big|\int_{\mathcal{F}_t}\frac{\mathcal{G}-\mathcal{H}U}{R}\cdot\langle\lambda_1U-\sqrt{\lambda_1}\lambda',\nu\rangle\mathrm{d}x\Big|&\leq\mathcal{O}(1)\|\frac{\mathcal{G}-\mathcal{H}U}{R}\|_{L^\infty(\mathcal{F}_t)}\left(E_{rel}^{\frac{\gamma+1}{2\gamma}}(t)+E_{rel}^{\frac{1}{2}}(t)\right)\\&\leq\mathcal{O}(1)\|\frac{\mathcal{G}-\mathcal{H}U}{R}\|^2_{L^\infty(\mathcal{F}_t)}+\mathcal{O}(1)E_{rel}(t),\end{aligned}\tag{3.46}$$

最后一步中使用了柯西-施瓦茨不等式和 $E_{\mathrm{rel}}\in L^\infty(0,\ T)$。

根据 (3.17) 中 $\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{G}$ 的具体公式，注意到密度 R具有正的下界，并应用引理 3.2，可得

$$\begin{aligned}\|\frac{\mathcal{G}-\mathcal{H}U}{R}\|_{L^\infty(\mathcal{F}_t)}^2 &\le \mathcal{O}(1)\left(|V-\tilde{V}|^2+|\omega-\tilde{\omega}|^2+\|V-\tilde{V}\|_{L^2(0,t)}^2+\|\omega-\tilde{\omega}\|_{L^2(0,t)}^2\right)\\ &\le \mathcal{O}(1)\left(E_{rel}(t)+\int_0^t E_{rel}(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\end{aligned} \tag{3.47}$$

结合（3.46），可得

$$\left|\int_{\mathcal{F}_t}\frac{\mathcal{G}-\mathcal{H}U}{R}\cdot\langle\lambda_1 U-\sqrt{\lambda_1}\lambda',\nu\rangle\mathrm{d}x\right|\le\mathcal{O}(1)\left(E_{rel}(t)+\int_0^t E_{rel}(\tau)\mathrm{d}\tau\right). \tag{3.48}$$

最后，将（3.48）、（3.42）和（3.33）代入（3.32），得到

$$\begin{aligned}E_{rel}(t)+\mathcal{D}(t)&\le\mathcal{O}(1)\int_0^t E_{rel}(s)+\mathcal{D}(s)\mathrm{d}s+\mathcal{O}(1)\int_0^t\int_0^s E_{rel}(\tau)+\mathcal{D}(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\\ &\le\mathcal{O}(1)\,(1+t)\int_0^t\left(E_{rel}(s)+\mathcal{D}(s)\right)\mathrm{d}s.\end{aligned} \tag{3.49}$$

因此，应用 pply格朗沃尔不等式，并结合 $E_{rel}(0)+\mathcal{D}(0)=0$，我们得出

$$E_{rel}(t)=\mathcal{D}(t)=0,\quad t\in(0,T), \tag{3.50}$$

˜结合 (3.50) 和引理 3.2，可得映射 $Z(t,.)$ 为恒等映射，即

$$\tilde{Z}_i(t,x)=x. \tag{3.51}$$

结合 (3.9) 和 (3.10)，对于 $t\in(0,T)$，可得

$$\begin{aligned}&\mathcal{B}_{2,t}=\mathcal{B}_t,\\ &(\rho_{F2},u_{F2})\big|_{\mathcal{F}_t}=(R,U)\big|_{\mathcal{F}_t},\\ &(\rho_{B2},u_{B2})\big|_{\mathcal{B}_t}=(\tilde{\rho}_B,\tilde{u}_B)\big|_{\mathcal{B}_t}.\end{aligned} \tag{3.52}$$

由 (3.52) 和 (3.50) 可得 $u_{B1}=u_{B2}$，再利用刚体质量方程（第三行），我们推得 (1.4))

$$\rho_{B1}=\rho_{B2}. \tag{3.53}$$

结合 (3.50)、(3.52) 和 (3.53)，可得

$$\begin{aligned}&\mathcal{B}_{1,t}=\mathcal{B}_{2,t},t\in(0,T),\\ &\nu=\chi_{\mathcal{F}_{1,t}}\delta_{(\rho_{F2},\sqrt{\rho_{F2}}u_{F2})}+\chi_{\mathcal{B}_{2,t}}\delta_{(\rho_{B2},\sqrt{\rho_{B2}}u_{B2})},\\ &\mathcal{D}(t)=0,\quad t\in(0,T).\end{aligned} \tag{3.54}$$

定理 1.2 的证明至此完成。

致谢

QIANFENG LI 得到了2023年中德（CSC-DAAD）博士后奖学金项目（编号：57678375）的部分资助。EMIL WIEDEMANN 感谢德国研究联合会优先计划2410 CoScaRa 的支持，项目编号为525716336。

作者感谢 Šárka Nečasová 就流固耦合问题进行的宝贵讨论。

声明

利益冲突 通讯作者代表全体作者声明，不存在利益冲突。

数据可用性 本文未使用任何数据集。

附录 A. 固体动量方程的改写

引理 A.1 (雷诺输运定理). 设 $\mathcal{B}_t \subset \mathbb{R}^3$ 是一个随时间光滑变化的控制体积，其边界 $\partial\mathcal{B}_t$ 以速度场 $v_B(x,t)$运动。设 $\phi(x,t)$ 是定义在 $\mathcal{B}_t$上的充分光滑的标量（或向量）场。那么对于任意 t,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathcal{B}_t}\phi(x,t)\,\mathrm{d}x=\int_{\mathcal{B}_t}\partial_t\phi(x,t)\,\mathrm{d}x+\int_{\partial\mathcal{B}_t}\phi(x,t)\,v_B(x,t)\cdot n(x,t)\,\mathrm{d}S, \tag{A.1}$$

其中 $n(x,t)$ 是 $\partial\mathcal{B}_t$上的外向单位法向量。等价地，利用散度定理，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathcal{B}_t}\phi\,\mathrm{d}x=\int_{\mathcal{B}_t}\Big(\partial_t\phi+\operatorname{div}(\phi\,v_B)\Big)\,\mathrm{d}x. \tag{A.2}$$

定理A.1. /从牛顿–欧拉方程到含曲面狄拉克δ分布的分布意义下的动量方程/

对于无黏可压缩流体-刚体系统，假设对所有 $t>0$，牛顿–欧拉平衡方程成立：

$$M\,V'(t)=\int_{\partial\mathcal{B}_t}p_F n\,\mathrm{d}S, \tag{A.3}$$

$$\frac{d}{dt}\big(\mathcal{J}(t)\,\omega(t)\big)=\int_{\partial\mathcal{B}_t}r\times p_F n\,\mathrm{d}S, \tag{A.4}$$

此处及下文中，$r=x-X(t)$ 和 $X(t)$ 表示质心。则刚性相满足以下分布意义下的动量方程，该方程在 $\mathbb{R}^3\times(0,T)$ 上成立：

$$\partial_t\big(\chi_{\mathcal{B}_t}\rho_B\,v\big)+\nabla\cdot\big(\chi_{\mathcal{B}_t}\rho_B\,v\otimes v\big)=\big(p_F n\big)\,\delta_{\partial\mathcal{B}_t} \tag{A.5}$$

对于 $C_c^\infty((0,T);\,\mathcal{R}(\Omega))$ 中的测试函数，其中

$$\mathcal{R}(\Omega):=\{\xi:\Omega\to\mathbb{R}^3\big|\xi=\alpha+\eta\times(\cdot-X),\alpha,\eta,X\in\mathbb{R}^3\}, \tag{A.6}$$

$\chi_{\mathcal{B}_t}$ 是 $\mathcal{B}_t$的示性函数，而 $\delta_{\partial\mathcal{B}_t}$ 是由 $\int_{\mathbb{R}^3}\phi\,\delta_{\partial\mathcal{B}_t}\,\mathrm{d}x=\int_{\partial\mathcal{B}_t}\phi\mathrm{d}S$刻画的曲面狄拉克$\delta$分布。

证明。 我们通过验证时空弱形式，证明 (A.5) 在分布意义下成立。设 $w\in C_c^\infty([0,T];\,\mathcal{R}(\Omega))$ 是任意一个满足 $w(\cdot<style id="8">,T)\;=0$ 的测试函数。我们需要证明

$$-\int_0^T\!\!\int_{\mathbb{R}^3}\chi_{\mathcal{B}_t}\rho_B\,v\cdot\partial_t w\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t-\int_0^T\!\!\int_{\mathbb{R}^3}\chi_{\mathcal{B}_t}\rho_B\,v\otimes v:\nabla w\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t=\int_0^T\!\!\int_{\partial\mathcal{B}_t}p_F n\cdot w\,\mathrm{d}S\,\mathrm{d}t. \tag{A.7}$$

由于 $\chi_{\mathcal{B}_t}$ 将积分局部化到 $\mathcal{B}_t$，左侧等于

$$-\int_0^T\!\!\int_{\mathcal{B}_t}\rho_B\,v\cdot\partial_t w\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t-\int_0^T\!\!\int_{\mathcal{B}_t}\rho_B\,v\otimes v:\nabla w\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t. \tag{A.8}$$

步骤 1：运动学输运恒等式。在边界速度为v的移动区域 $\mathcal{B}_t$ 上，由雷诺输运定理和乘积法则可得，对任意光滑的 w,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathcal{B}_t}\rho_B\,v\cdot w\,\mathrm{d}x=\int_{\mathcal{B}_t}\rho_B\,v\cdot\partial_t w\,\mathrm{d}x+\int_{\mathcal{B}_t}\rho_B\,v\otimes v:\nabla w\,\mathrm{d}x+\int_{\mathcal{B}_t}\rho_B\,a\cdot w\,\mathrm{d}x, \tag{A.9}$$

其中 $a := \partial_t v + (v\cdot\nabla)v$ 为欧拉加速度。恒等式 (A.9) 纯粹是运动学关系（它使用刚体中的质量守恒：$\partial_t \rho_B + \operatorname{div}(\rho_B v) = 0$）。

步骤 2：将加速度与测试函数配对。对于任意 $w \in C_c^\infty([0,T];\ \mathcal{R}(\Omega))$，存在 $\alpha(t)$ $\eta(t)$ 使得

$$w(x,t) = \alpha(t) + \eta(t)\times r, \quad r = x - X(t). \tag{A.10}$$

于是有以下配对恒等式：

$$\int_{\mathcal{B}_t} \rho_B\, a\cdot w \,\mathrm{d}x = M\,V'\cdot\alpha + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\mathcal{J}\omega\big)\cdot\eta. \tag{A.11}$$

事实上，利用刚体运动学 $a = V' + \omega'\times r + \omega\times(\omega\times r)$，第一项根据 (A.10) 积分为$MV'\cdot\alpha$；其余各项则根据标量三重积恒等式及恒等式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\mathcal{J}\omega\big) = \int_{\mathcal{B}_t} \rho_B\,\big(r\times a\big)\,\mathrm{d}x, \tag{A.12}$$

(A.11) 中的第二项。对角动量 $\int_{\mathcal{B}_t}\rho_B(r\times v)\,\mathrm{d}x = \mathcal{J}\omega$ 应用雷诺输运定理求导，并利用 $\int_{\mathcal{B}_t}\rho_B(V\times v)\,\mathrm{d}x = 0$，即可得到等式 (A.12)。

步骤 3：代入(A.11)至(A.9)并对时间积分。合并 (A.9) 和 (A.11) 并重新整理，得到

$$-\int_{\mathcal{B}_t}\rho_B\, v\cdot\partial_t w\,\mathrm{d}x - \int_{\mathcal{B}_t}\rho_B\, v\otimes v : \nabla w\,\mathrm{d}x = M\,V'\cdot\alpha + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\mathcal{J}\omega\big)\cdot\eta - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathcal{B}_t}\rho_B\, v\cdot w\,\mathrm{d}x. \tag{A.13}$$

对 (A.13) 在 $(0,\ T)$ 上积分，并利用 $w(\cdot,\ 0) = w(\cdot,\ T) = 0$，得到

$$-\int_0^T\!\!\int_{\mathcal{B}_t}\rho_B\, v\cdot\partial_t w\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t - \int_0^T\!\!\int_{\mathcal{B}_t}\rho_B\, v\otimes v : \nabla w\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int_0^T\Big(M\,V'\cdot\alpha + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\mathcal{J}\omega\big)\cdot\eta\Big)\,\mathrm{d}t. \tag{A.14}$$

步骤 4：应用牛顿–欧拉关系并确定界面功。由牛顿–欧拉关系 (A.3)–(A.4)，

$$M\,V'\cdot\alpha + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\mathcal{J}\omega\big)\cdot\eta = \int_{\partial\mathcal{B}_t} p_F n\cdot\big(\alpha+\eta\times r\big)\,\mathrm{d}S = \int_{\partial\mathcal{B}_t} p_F n\cdot w\,\mathrm{d}S.$$

因此，

$$\int_0^T\Big(M\,V'\cdot\alpha + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\mathcal{J}\omega\big)\cdot\eta\Big)\,\mathrm{d}t = \int_0^T\!\!\int_{\partial\mathcal{B}_t} p_F n\cdot w\,\mathrm{d}S\,\mathrm{d}t.$$

将此式代入 (A.14)，得到 (A.7)。因此，根据曲面狄拉克δ分布的定义，分布恒等式 (A.5) 成立：

$$\int_0^T\!\!\int_{\mathbb{R}^3}\big(p_F n\,\delta_{\partial\mathcal{B}_t}\big)\cdot w\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int_0^T\!\!\int_{\partial\mathcal{B}_t} p_F n\cdot w\,\mathrm{d}S\,\mathrm{d}t.$$

证明完毕。 □

Appendix B. Proof of Lemma 2.5

引理 *2.5* 的证明。收敛性 (2.23) 可直接由 [14, 引理 5.4]得到。剩下需要验证 (2.25)。

对每个 $t\in[0,T]$，定义

$$a_t^\varepsilon := \mathbb{O}_t^\top\big(X^\varepsilon(t) - X(t)\big)\in\mathbb{R}^3, \qquad S_t^\varepsilon := \mathbb{O}_t^\top\mathbb{O}_t^\varepsilon \in SO(3).$$

由于 $\mathcal{B}_t = X(t) + \mathbb{O}_t\mathcal{B}_0$ 且 $\mathcal{B}_t^\varepsilon = X^\varepsilon(t) + \mathbb{O}_t^\varepsilon\mathcal{B}_0$，我们得到

$$\mathbb{O}_t^\top(\mathcal{B}_t - X(t)) = \mathcal{B}_0, \qquad \mathbb{O}_t^\top(\mathcal{B}_t^\varepsilon - X(t)) = a_t^\varepsilon + S_t^\varepsilon\mathcal{B}_0.$$

利用勒贝格测度在旋转下的不变性，可得

$$\mathcal{L}^3(\mathcal{B}_t^\varepsilon \Delta \mathcal{B}_t) = \mathcal{L}^3\big(\mathcal{B}_0 \Delta (a_t^\varepsilon + S_t^\varepsilon \mathcal{B}_0)\big) \qquad \text{for all } t \in [0,T]. \tag{B.1}$$

我们引入泛函

$$\mathcal{E}(a,S) := \mathcal{L}^3\big(\mathcal{B}_0 \Delta (a + S\mathcal{B}_0)\big), \qquad (a,S) \in \mathbb{R}^3 \times SO(3).$$

于是 $\mathcal{E}$ 是连续的，并且

$$\mathcal{E}(a,S) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a = 0 \text{ and } S \in G. \tag{B.2}$$

事实上， $\mathcal{E}(a,\ S) = 0$ 表示 $\mathcal{B}_0 = a + S\mathcal{B}_0$ （几乎处处），这意味着 $a = 0$，因为 $\mathcal{B}_0$ 有界；于是 $S\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}_0$，即 $S \in G$。

固定 $r > 0$。由于 $SO(3)$是紧集，且 G 是 $SO(3)$的闭子群，故 G 是紧集。考虑紧集

$$K_r := \big\{(a,S) \in \mathbb{R}^3 \times SO(3) : |a| \le M,\ |a| + \operatorname{dist}(S,G) \ge r\big\},$$

其中选取 $M > 0$ 使得若 $|a| \ge M$，则 $\mathcal{B}_0 \cap (a + S\mathcal{B}_0) = \emptyset$ （因此 $\mathcal{E}(a,\ S) = 2\mathcal{L}^3(\mathcal{B}_0)$）。由 $\mathcal{E}$ 的连续性及（B.2）， $\mathcal{E} > 0$ 在 K_r上成立，因此

$$\kappa(r) := \min_{(a,S)\in K_r} \mathcal{E}(a,S) > 0.$$

因此，

$$|a| + \operatorname{dist}(S,G) \ge r \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{E}(a,S) \ge \kappa(r). \tag{B.3}$$

反设存在 $\varepsilon_k \to 0$ 和 $r > 0$ 使得

$$\sup_{t\in[0,T]} \Big(|a_t^{\varepsilon_k}| + \operatorname{dist}(S_t^{\varepsilon_k}, G)\Big) \ge 2r \quad \text{for all } k.$$

于是选择 $t_k \in [0,T]$ 使得 $|a_{t_k}^{\varepsilon_k}| + \operatorname{dist}(S_{t_k}^{\varepsilon_k}, G) \ge r$。由 (B.3) 和 (B.1)，

$$\mathcal{L}^3(\mathcal{B}_{t_k}^{\varepsilon_k} \Delta \mathcal{B}_{t_k}) = \mathcal{E}(a_{t_k}^{\varepsilon_k}, S_{t_k}^{\varepsilon_k}) \ge \kappa(r),$$

这与 (2.23) 矛盾。因此，

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{t\in[0,T]} \Big(|a_t^\varepsilon| + \operatorname{dist}(S_t^\varepsilon, G)\Big) = 0. \tag{B.4}$$

固定 $t \in [0,T]$。选择 $Q \in G$ 使得 $\|S_t^\varepsilon - Q\| = \operatorname{dist}(S_t^\varepsilon, G)$（其存在性由 G的紧致性可知）。于是对任意 $x \in \partial\mathcal{B}_0$，

$$y^\varepsilon(t,x) = X(t) + \mathbb{O}_t\big(a_t^\varepsilon + S_t^\varepsilon x\big), \qquad y(t,Qx) = X(t) + \mathbb{O}_t(Qx).$$

因此，利用 $\mathbb{O}_t$ 是等距变换且 $\partial\mathcal{B}_0$ 有界，

$$|y^\varepsilon(t,x) - y(t,Qx)| \le |a_t^\varepsilon| + \|S_t^\varepsilon - Q\|\,|x| \le |a_t^\varepsilon| + C_0 \operatorname{dist}(S_t^\varepsilon, G).$$

先取 $\sup_{x\in\partial\mathcal{B}_0}$，再取 $\inf_{Q\in G}$，然后取 $\sup^{t\in[0,T]}$，并利用 (B.4)，即可得到 (2.25) 中的第一个估计。

对于法向量，令 $n_0(x)$ 为 $\partial\mathcal{B}_0$ 的外向单位法向量。由于 $\partial\mathcal{B}_0$ 是正则的，且 $Q \in SO(3)$ 是一个等距变换，因此 $n_0(Qx) = Q\,n_0(x)$。此外，

$$n(y^\varepsilon(t,x)) = \mathbb{O}_t^\varepsilon n_0(x) = \mathbb{O}_t S_t^\varepsilon n_0(x), \qquad n(y(t,Qx)) = \mathbb{O}_t n_0(Qx) = \mathbb{O}_t Q n_0(x).$$

因此

$$|n(y^\varepsilon(t,x)) - n(y(t,Qx))| \le \|S_t^\varepsilon - Q\| = \operatorname{dist}(S_t^\varepsilon, G).$$

依次取 $\sup_{x\in\partial\mathcal{B}_0}$、$\inf_{Q\in G}$，再取 $\sup^{t\in[0,T]}$，并利用 (B.4)，我们得到 (2.25) 中的第二个估计。证明完毕。□

参考文献

[1] J. P. Bourguignon 和 H. Brezis. 关于欧拉方程的注记. 《泛函分析杂志》, 15:341–363, 1974. [2] H. Brenner 和 R. G. Cox. 任意形状粒子在低雷诺数下平移运动时所受的阻力. 《流体力学杂志》, 17:561–595, 1963. [3] M. Caggio, O. Kreml, Š Nečasová, A. Roy, 和 T. Tang. 不可压无黏流体-刚体相互作用的测度值解与弱强唯一性. 《数学流体力学杂志》 , 23(3):50, 2021. [4] M. D. A. Cooley 和 M. E. O'Neill. 球体趋近平面壁或静止球体时在黏性流体中产生的缓慢运动. 《Mathematika》, 16(1):37–49, 1969. [5] B. Desjardins 和 M. J. Esteban. 黏性流体中刚体运动的弱解存在性. 《数学分析档案》, 146(1):59–71, 1999. [6] B. Desjardins 和 M. J. Esteban. 流体-刚性结构相互作用的弱解：可压缩模型与不可压缩模型. 《偏微分方程通讯》, 25(7-8):1399–1413, 2000. [7] R. J. DiPerna 和 P.-L. Lions. 常微分方程、输运理论与Sobolev空间. 《数学发明》, 98(3):511–547, 1989. [8] I. A. Djebour. 具有纳维滑移边界条件的可压缩流体-固体相互作用系统强解的存在性. 《演化方程与控制理论》, 13(4):1162–1198, 2024. [9] E. Feireisl. 黏性可压缩流体中刚体的运动. 《数学分析档案》, 167(4):281–308, 2003. [10] E. Feireisl. 黏性不可压缩流体中刚体的运动. 《演化方程杂志》, 3 441, 2003 3 419( ): – .[11] E. Feireisl, P. Gwiazda, A. Świerczewska-Gwiazda, 和 E. Wiedemann. 可压缩Navier-Stokes系统的耗散测度值解. 《变分法与偏微分方程》, 55(6): 第 141 号文章 , 2016. [12] E. Feireisl, B. J. Jin, 和 A. Novotný. 可压缩纳维 – 斯托克斯方程的相对熵、适当弱解与弱强唯一性. 《数学流体力学杂志》, 14(4):717–730, 2012. [13] G. P. Galdi. 黏性液体中刚体的运动：应用数学分析. 载于《数学流体动力学手册》第I卷，第653–791页. 北荷兰出版社，阿姆斯特丹，2002. [14] D. Gérard-Varet 和 M. Hillairet. 具有滑移的黏性流体-固体系统碰撞前弱解的存在性. 《纯粹与应用数学通讯》, 67(12):2022–2076, 2014. [15] D. Gérard-Varet, M. Hillairet, 和 C. Wang. 边界条件对三维Navier-Stokes流中接触问题的影响. 《纯粹与应用数学杂志》 (9), 103(1):1–38, 2015. [16] O. Glass 和 F. Sueur. 不可压理想流体中的固体运动作为测地流. 《美国数学会会刊》, 140(6):2155–2168, 2012. [17] O. Glass 和 F. Sueur. 二维流体-固体系统弱解的唯一性结果. 《数学分析档案》, 218(2):907–944, 2015. [18] M. D. Gunzburger, H.-C. Lee, 和 G. A. Seregin. 三维中运动刚体周围黏性不可压缩流的弱解整体存在性. 《数学流体力学杂志》, 2(3):219–266, 2000. [19] P. Gwiazda, A. Świerczewska-Gwiazda, 和 E. Wiedemann. 某些可压缩流体模型测度值解的弱强唯一性. 《非线性》, 28(11):3873, 2015. [20] M. Hillairet. 二维不可压黏性流中固体之间不会发生碰撞. 《偏微分方程通讯》, 32(7-9):1345–1371, 2007. [21] M. Hillairet 和 T. Takahashi. 三维流固耦合问题中的碰撞. 《工业与应用数学学会数学分析杂志》, 40(6):2451–2477, 2009. [22] K.-H. Hoffmann 和 V. N. Starovoitov. 黏性流体中的固体运动. 二维情形. 《数学科学与应用进展》, 9(2):633–648, 1999. [23] J. G. Houot, J. A. San Martín, 和 M. Tucsnak. 理想流体中刚体运动方程解的存在性. 《泛函分析杂志》, 259(11):2856–2885, 2010. [24] O. Kreml, Š. Nečasová, 和 T. Piasecki. 可压缩流体-刚体相互作用的弱强唯一性. 《微分方程杂志》, 268(8):4756–4785, 2020. [25] Š. Nečasová, M. Ramaswamy, A. Roy, 和 A. Schlömerkemper. 具有Navier滑移边界条件的可压缩流体中刚体的运动. 《微分方程杂志》, 338:256–320, 2022. [26] J. Neustupa 和 P. Penel. 球体撞击壁面时Navier边界条件下Navier-Stokes方程的弱可解性. 载于《数学流体力学进展》， 第385–407页. 施普林格，柏林，2010. [27] J. A. San Martín, V. N. Starovoitov, 和 M. Tucsnak. 不可压黏性流体中多个刚体二维运动的整体弱解. 《数学分析档案》, 161(2):113–147, 2002. [28] E. Wiedemann. 流体动力学中的弱强唯一性 . 载于《流体力学中的偏微分方程》, 《伦敦数学会讲义系列》第452卷，第289–326页. 剑桥大学出版社，剑桥，2018.

数学系，埃尔朗根-纽伦堡弗里德里希-亚历山大大学，Cauer-大街 11 号，91058，德国

电子邮件地址：qfli1995@gmail.com

数学系，埃尔朗根-纽伦堡弗里德里希-亚历山大大学，Cauer-大街 11 号，91058，德国

电子邮件地址：emil.wiedemann@fau.de