arXiv:2603.03153v1 [math.AP] 3 Mar 2026

平面欧拉方程剪切流的刚性

RICCARDO TIONE

摘要。本文证明，属于 $L^3_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2,\ \mathbb{R}^2)$ 的无压欧拉方程稳态 u 是剪切流。我们通过结合退化型蒙日-安培方程的结果与二维输运方程理论，得到这一结论。我们还证明，对于相关微分包含的刚性与柔性问题，在 L^{4+} 上一致有界的序列具有刚性，而在 L^{4-} 上一致有界的序列具有柔性，因此精确问题与近似问题的刚性指数之间存在差距。

关键词： 剪切流、微分包含、平面方程的刚性与柔性。2020年数学主题分类：35D30、35Q31、35Q49。

1. 引言

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 是一个开且连通的集合。本文考虑方程组的 $L^2(\Omega\ \mathbb{R}^2)$ 解：

$$\begin{cases} \operatorname{div}(u \otimes u) = 0, & \text{in } \Omega, \\ \operatorname{div}(u) = 0, & \text{in } \Omega. \end{cases} \tag{1.1}$$

该方程组 tem 由不可压欧拉方程最简单的非平凡解求解：

$$\partial_t u + \operatorname{div}(u \otimes u) + Dp = 0, \quad \operatorname{div} u = 0, \tag{1.2}$$

即剪切流，亦即形如 u 的解 $u(x) = g((x,a))a^{\perp}$，其中对某个固定向量 $a \in \mathbb{R}^2$ 以及一个充分正则的剖面函数 g：$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$。本文研究的问题是：在何种正则性下，求解（1.1）蕴含 u 是剪切流。若如此，我们称方程组（1.1）是刚性的。

近年来，关于不可压欧拉方程解的刚性与柔性（就其广义含义而言）这一主题在文献中受到了相当多的关注。与本文主题最为接近的研究路线以 [13, 25–27, 35, 37–39, 52, 53]为代表。在这些论文中，共同主题是研究：在区域上以及（1.2）的时间无关解上具备哪些性质时，可以得到该解的额外对称性，乃至更强的刚性性质。例如，上述论文中第一篇的主要结果之一 [37, 定理 1.1] 表明，若 $u = (u_1, u_2)$ 是平面欧拉方程的稳态，且在竖直条带上为 C^2，在该条带的边界上为 $u_2 = 0$，并且 $|u|$ 以一个正常数为下界，则 u 必为剪切流。关于稳态的其他结果，另见 [11, 15, 24, 28, 32]。

研究刚性与柔性的另一领域，是深入的凸积分研究[7, 18–20, 40]这些研究与 [14], 一同解决了Onsager猜想。关于这一主题，另请参阅 [5, 10, 21, 33, 34, 49]及其中的参考文献。尽管这些研究与本文主题相距较远，但我们在此使用的凸积分技术仍与 [10, 18], 十分接近，而刚性的（猜想）阈值 $p = 3$ 我们将在第1.1节提及；与Onsager猜想类似，该阈值关系到如何确保涉及解 u 的三线性项性质良好。

对（1.1）的分析与对（1.2）的分析颇为不同，实际上也简单得多。主要原因是，缺少时间导数和压力项，使（1.2）变成了纯粹的输运方程（1.1），其中 u 由其自身的流输运，至少在 u 光滑时是如此。这一事实也是我们所展示的刚性结果的

核心所在。与我们在此给出的结果相似，人们也可以探问时变无压版本的（1.2）会出现什么情况。T. Drivas 和 P. Isett [23] 告知作者，若考察$C^{\alpha}_{t,\,x}$无压版本（1.2）的解，当 α 足够小时，可以通过凸积分构造证明该方程组具有柔性；而当 $\alpha > \frac{1}{2}$ 时，解由其初始条件唯一确定。此外，若 $\alpha > \frac{2}{3}$，则 u 必定是剪切流。有趣的是，时变情形要求解至少属于 C^{α}，而研究问题（1.1）的适当尺度则是正则性低得多的 $L^{p}{}_{\mathrm{loc}}$ 空间。原因在于，为研究（1.2）的无压版本，需要对欧拉方程取散度，并处理方程

$$\operatorname{div}(\operatorname{div}(u\otimes u)) = 0,$$

这是蒙日-安培方程的一种非常弱的形式，其正确的框架是 C^{α} 尺度，参见例如 [8,9,45] 及其中的参考文献。为解释为何在本文所关注的情形下，$u \in L^{p}{}_{\mathrm{loc}}$ 足以使人期待刚性，我们现在转而详细说明本文的结果。

首先，请注意，方程组（1.1）需要在分布意义下理解为：

$$\int_{\Omega} (u, DXu)\, dx = 0, \quad \forall X \in C_c^{\infty}(\Omega, \mathbb{R}^{2\times 2}), \tag{1.3}$$

$$\int_{\Omega} (u, D\eta)\, dx = 0, \quad \forall \eta \in C_c^{\infty}(\Omega), \tag{1.4}$$

分别地。如果 $\Omega \neq \mathbb{R}^2$，我们加入一些边界条件，其中最自然的是：

$$\begin{cases} \operatorname{div}(u\otimes u) = 0,\ \operatorname{div}(u) = 0, \ \text{in } \Omega, \\ u\cdot n = 0, \ \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.5}$$

如果 n 表示（ Ω 的外侧单位外法向量 Ω。这意味着 u 仍然是 (1.3) 的解，而 (1.4) 则被替换为

$$\int_{\Omega} (u, D\eta)\, dx = 0, \quad \forall \eta \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^2). \tag{1.6}$$

我们的结果涉及精确解和近似解。

1.1. 精确解。 我们的主要刚性结果如下：

定理 A（精确解的刚性）。 设$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 是一个区域，使得$(\Omega)^c$ 有有限个连通分支，且 $\partial\Omega = \partial((\Omega)^c)$。那么：

(i) 若 $u \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega\ \mathbb{R}^2)$ 是满足 $\chi_\Omega u \in L^3_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ 的方程组 *(1.5)* 的解，则 $\chi_\Omega u$ 在 $\mathbb{R}^2$ 中满足 *(1.1)*；*(ii)* 若 $\Omega = \mathbb{R}^2$ 且 $u \in L^3_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$，则 u 是剪切流；*(iii)* 若 $\Omega = \mathbb{R}^2$ 且 $u \in L^p(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ 对某个 $p \in [2, \infty)$ 成立，则 $u \equiv 0$。

第一条陈述 (i) 指出，在满足 (1.5) 的边界条件时，我们可以将问题归结为研究全局情形，这将在 (ii) 中讨论。(iii) 告诉我们，若不采用 $u \in L^p$ loc，而是假设更强的条件 $u \in L^p(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$，那么 u 必须恒等于零，且对 $p \geq 2$ 的取值没有限制。(ii)–(iii) 的证明主要结合了 [42,51] 和 [2,4] 的思想。特别地，我们需要输运方程在 L^p 中向量场所具有的链式法则性质；我们将在附录 A 中运用 [2,4] 的方法证明这一点。在更困难的情形下，[36] 得到了类似结果。有趣的是，我们还得到：即使没有额外的边界条件，(1.5) 的非零解也具有刚性：

定理 B (非消失精确解的刚性)。 设 Ω 为一个区域。设 $u \in L^3_{\mathrm{loc}}(\Omega\ \mathbb{R}^2)$ 是方程组 (1.1) 的一个解，且满足 $u \neq 0$ 几乎处处成立。那么， u 是一个剪切流。若允许 u 在正测度集上为零，则存在一个非剪切流的例子，它满足 (1.1)。

关于精确解的柔性，即指数 $p = 3$ 在定理 A中的尖锐性，我们留下如下：

开放问题。若 $p<3$，则存在非零的 $L^p(B_1,\ \mathbb{R}^2)$ 解，满足 (1.5)，并位于 $\Omega = B_1$。

我们相信这个问题应当有肯定的答案，而证明这一点的一种可能方法是使用第 5 节中的凸积分方法。然而，我们未能完成这一构造，因此将其留作一个开放问题。

1.2. **近似解**。除了（1.1）-（1.5）之外，我们还考虑其近似解，即给定 $p\geq 2$，我们研究序列 $(u_j)_j$ 弱收敛于 $u\in L^p(B_1,\ \mathbb{R}^2)$ 并满足

$$\begin{cases} \operatorname{div}(u_j\otimes u_j)=\operatorname{div}(X_j), \\ \operatorname{div}(u_j)=0, \\ \sup_j \|X_j\|_{L^{\frac{p}{2}}}<+\infty,\ X_j\to 0 \text{ in } L^1(\Omega). \end{cases} \tag{1.7}$$

如果 $X_j=p_j$成立，我们可以将 u_j 解释为压力消失的定常不可压缩欧拉方程的解。研究问题（1.7）的经典工具是杨测度，我们将在小节 4.1中简要回顾，并请读者参阅 [47, 第 3] 节，以获取关于该主题的更完整介绍。暂时而言，为了使表述清晰而牺牲形式性，我们将简单假设序列

$$M_j=\begin{pmatrix} u_j \\ u_j\otimes u_j - X_j \end{pmatrix} \text{generates the Young Measure } \nu=(\nu_x)_x. \tag{1.8}$$

这类概率测度 $\nu_x\in\mathcal{P}(\mathbb{R}^{3\times 2})$ 的支撑包含于以下包含集：

$$\operatorname{spt}(\nu_x)\subset K\doteq\left\{\begin{pmatrix} y \\ y\otimes y\end{pmatrix}: y\in\mathbb{R}^2\right\}. \tag{1.9}$$

关于精确解的同一刚性问题，也可以针对近似解提出。这意味着Young测度ν的支撑还须满足额外性质。对于剪切流 $u(x)=g((x,a))a^{\perp}$，我们有

$$\begin{pmatrix} u(x) \\ u(x)\otimes u(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} g((x,a))a \\ g((x,a))^2a\otimes a\end{pmatrix},\ \text{i.e.}\ \begin{pmatrix} u(x) \\ u(x)\otimes u(x)\end{pmatrix}\in K_a=\left\{\begin{pmatrix} ta \\ t^2a\otimes a\end{pmatrix}: t\in\mathbb{R}\right\}\ \text{a.e..}$$

这正是我们对梯度Young测度所期望的刚性：

定理 *C*（$p>4$的近似刚性）。设 $p>4$ 和 $(u_j)_j$、$(X_j)_j$ 是方程 *(1.7)* 的解序列，且 $\sup_j\|u_j\|_{L^p(B_1,\mathbb{R}^2)}+\sup_j\|X_j\|_{L^{p/2}(B_1,\mathbb{R}^{2\times 2})}<+\infty$。假设在 *(1.8)* 中定义的 $(M_j)_j$ 生成*Young*测度 $\nu=(\nu_x)_{x\in B_1}$。那么，存在 $b(x)\in\mathbb{R}^2$，使得对几乎处处的 $x\in B_1$，$\operatorname{spt}(\nu_x)\subset K_{b(x)}$。

如果 $p>4$，则前述定理仍成立，而且这个结论是最优的：

定理 *D*（$p<4$的近似柔性）。存在偏微分方程 *(1.7)* 的解序列 $(u_j)_j$、$(X_j)_j$，满足 $\sup_j\|u_j\|_{L^p(B_1,\mathbb{R}^2)}+\sup_j\|X_j\|_{L^{p/2}(B_1,\mathbb{R}^{2\times 2})}<+\infty$，对所有 $p<4$ 均成立；并且序列 $(M_j)_j$ 生成一个（齐次）*Young*测度 ν，其支撑集为 $\operatorname{spt}\nu=K_{e_1}\cup K_{e_2}$，其中 e_1 和 e_2 构成 $\mathbb{R}^2$的标准基。

结合定理 A-D，我们得到一些有趣的结论。定理 D 通过构造一个阶梯层合体得以证明。这是一种凸积分技巧，由 D. Faraco 于 [30], 提出，此后已被用于许多研究 [3, 12, 16, 17, 31, 41]。该方法对于构造呈现集中现象的偏微分方程的病态解非常有用。它通常包含三个步骤：

˜(1) 将当前的偏微分方程组改写为形如 $Dv\in K\subset\mathbb{R}^{n\times m}$ 的微分包含；(2) 在包含集K 中寻找具有所需可积性的阶梯层合体，以获得一列近似解。这个过程通常会引入误差，因此在此步骤中无法得到精确解；˜(3) 寻找一个内逼近来 K 消除这类误差，并最终构造出具有所需（病态）性质的精确解。

有关本文所用术语的详细说明，请参见第 5 节。结合定理 A-D 可知， L^p loc 精确解对于 $p \geq 3$具有刚性，而近似解在该范围内未必成立$p \in [3,4)$。特别是，在这个范围内，步骤 (3) 会失败，因此这个问题提供了一个有趣的微分包含实例：近似柔性成立，但不存在内逼近。对此可以这样解释：用于证明定理 A 的方法无法处理属于负 Sobolev 空间的右端项，见 (1.7)（但这些方法适用于测度型右端项，见 [4]）。特别是，最近提出了一种非常通用的方法，可在步骤 (2) 已完成后解决步骤 (3)，见 [43], ；另见近期的推广 [6]。粗略地说， [43] 这一方法的思路是：只要能像步骤 (2) 那样找到足够多的层合体，将包含集缩减至 $\mathbb{R}^{n\times m}$，就总能实现 (3)。我们在此考虑的集合 K，见 (1.9)，就是一个无法缩减至 $\mathbb{R}^{3\times 2}$ 的集合，只要考察 L^p解（对于 $p \in [3,4)$）即可看出这一点。

1.3. **论文结构**。 我们首先在第 1.4 节解释本文所使用的记号。接着，在第 2 节，我们证明定理 A ；在第 3 节，我们证明定理 B。关于杨测度和近似解的结果，即定理 C 和 D，分别包含在第 4节和第 5 节中。在附录 A 中，我们给出一个 [2] 适用于 L^p 向量场的版本。

致谢。 作者感谢 T. Drivas 和 P. Isett 提出这个问题，并与他讨论相关文献、他们关于本文所研究方程的时变版本的结果以及他的手稿。他还感谢 A. Guerra 和 L. De Rosa 阅读本手稿的部分内容，并就此进行有益的讨论。

1.4. 记号。 对于 $E \subset \mathbb{R}^n$，我们用 E 表示其闭包，用 ∂E 表示其拓扑边界，并用 E^c 表示其在 $\mathbb{R}^n$中的补集。如果 E是开且连通的，我们称 E为一个区域 。对于两个集合 A， B，我们用 $\mathsf{d}(A, B)$ 表示它们之间的距离。以 Y为中心、半径为 r 的开球记作 $B_r(Y)$。如果 $Y = 0$，我们将简写为 B_r。

我们记$\mathcal{M}(\mathbb{R}^m)$为 $\mathbb{R}^m$ 上有限正测度的空间，记$\mathcal{P}(\mathbb{R}^m)$为概率测度空间。$\mathcal{L}^m$ 表示 $\mathbb{R}^m$ 上的勒贝格测度。对于每个 $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^m)$和 $f \in L^1(\mathbb{R}^m;\mu)$，我们定义

$$\langle \mu, f\rangle \doteq \int_{\mathbb{R}^m} f(y)d\mu(y).$$

我们用 e_i表示 $\mathbb{R}^2$的标准基中的第 i个向量， $e_1 = (1,0)$和 $e_2 = (0,1)$。对于矩阵$A \in \mathbb{R}^{n\times m}$， $\det(A)$、A^T 和 $|A|$ 分别表示矩阵 A的行列式（若 $n = m$）、转置和欧几里得范数。矩阵之间的（标准）标量积记作$\langle A, B\rangle$，而对于向量 a, b，我们使用(a, b)。余子式矩阵为

$$\operatorname{cof}(A) \doteq \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, \quad \text{if } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \text{so that } \operatorname{cof}(A)A = A\operatorname{cof}(A) = \det(A)\,\mathrm{id}\,. \tag{1.10}$$

$\mathrm{Sym}(n)$表示 n阶对称矩阵空间，而$\mathrm{Sym}^+(n)$是满足对所有 $v \in \mathbb{R}^n$均有$(Xv, v) \geq 0$ 的矩阵 $X \in \mathrm{Sym}(n)$的集合。我们用 J 表示一个旋转九十度的矩阵：

$$J \doteq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.11}$$

作为简写记号，我们设定 $v^\perp \doteq Jv$， $\forall v \in \mathbb{R}^2$。最后，对于矩阵 $X \in \mathbb{R}^{3\times 2}$，我们用 $\pi_1(X)$ 表示对 X 第一行的投影，用 $\pi_2(X)$ 表示对 X最后两行的投影。

2. Proof of Theorem A

本节分为三个小节2.1-2.2-2.3 ，我们在其中分别证明定理 A(i)-(ii)-(iii)。

2.1. **定理的证明 A(i)：化为全局情形。** 我们需要证明

$$\operatorname{div}(\chi_\Omega u \otimes u) = 0 \text{ in the sense of distributions in } \mathbb{R}^2. \tag{2.1}$$

为此，我们令 $v = \chi_\Omega u$。由 (1.6) 可知，这是一个无散度的 $L^3_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ 向量场。于是，我们得到

$$v = D^\perp \psi \text{ a.e. in } \mathbb{R}^2, \quad \text{for } \psi \in W^{1,3}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2). \tag{2.2}$$

注意，ψ 在 Ω 之外是局部常值的。由假设，$(\Omega)^c = \Omega_1 \cup \cdots \cup \Omega_N$，其中 Ω_i 是开且连通的，我们有 $\psi \equiv a_i$ 在 Ω_i 上。由于 ψ 是连续的，且 $\partial\Omega = \partial((\Omega)^c)$，我们得到 $\psi(\partial\Omega) \subset \{a_1, \ldots, a_N\}$。因此，令 $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ 与 $f \in \mathrm{Lip} \cap L^\infty(\mathbb{R})$，且对每个 i 有 $f(a_i) = 0$，我们推断：

$$X \doteq f(\psi)\varphi \in W^{1,3}_0(\Omega, \mathbb{R}^2).$$

一个直接的逼近论证表明 X 是（1.3）的有效检验函数。我们得到：

$$0 = \int_\Omega (u, DXu)\, dx = \int_\Omega (u, D(f(\psi)\varphi)u)\, dx = \int_\Omega f(\psi)(u, D\varphi u)\, dx + \int_\Omega f'(\psi)(u, [\varphi \otimes D\psi]u)\, dx.$$

由（2.2），我们得到

$$(u, [\varphi \otimes D\psi]u) = (u, \varphi)(u, D\psi) = 0 \text{ a.e. in } \Omega.$$

我们刚刚证明了，对于 $f \in \mathrm{Lip}(\mathbb{R})$，且对所有 i 有 $f(a_i) = 0$，

$$\int_\Omega f(\psi)(u, D\varphi u)\, dx = 0. \tag{2.3}$$

对任意 $\varepsilon > 0$,

$$g_\varepsilon(t) \doteq \frac{|t|}{\sqrt{t^2 + \varepsilon}}.$$

那么 g_ε 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的 Lipschitz 函数，且 $g_\varepsilon(0) = 0$。我们进一步观察到

$$|g_\varepsilon(t)| \le 1 \text{ for all } t \in \mathbb{R} \text{ and } g_\varepsilon(t) \to \chi_{\{s \neq 0\}}(t) \text{ a.e.}. \tag{2.4}$$

利用 $f_\varepsilon(t) \doteq \prod_i g_\varepsilon(t - a_i)$ 而非 $f(t)$，由式（2.3）、（2.4）以及控制收敛定理可得：

$$\int_{\{\psi \neq a_1, \ldots, a_N\}} (u, D\varphi u)\, dx = 0.$$

由于对任意 a，$u = 0$ 在集合 $\{\psi = a\}$ 上几乎处处成立，因此前一个等式蕴含所需性质（2.1）. □

备注 2.1. 我们不知道定理 A(i) 中相当温和的拓扑假设能否放宽。值得注意的是，类似的计算也出现在 [22, 第 2 节。4], 其中的假设与我们的类似。

2.2. **预备知识与定理 A(ii)的证明。** 如引言所述，该结论由 [42,51] 和 [2,4]的结果综合得出。特别地，我们需要以下版本的 [2]:

定理 2.2。 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 是一个开集。设 $\beta_i \in L^r_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 对 $i = 1, \ldots, N$ 成立，且 $u \in L^p{}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$对$r$, $p \in [1, +\infty]$成立。假设

$$\frac{1}{r} + \frac{2}{p} \le 1 \tag{2.5}$$

并且，在 Ω 上按分布的意义：

$$\operatorname{div}(u) = 0, \tag{2.6}$$

$$\operatorname{div}(\beta_i u) = 0, \quad \forall i. \tag{2.7}$$

Then，对所有带有 $|f(x)| \le C(1 + |x|)$ 的 $f \in C^0(\mathbb{R}^N)$，对某个 $C > 0$ 的所有 $x \in \mathbb{R}^N$，它 *holds*

$$\operatorname{div}(f(\beta_1, \ldots, \beta_N)u) = 0. \tag{2.8}$$

该定理的证明将在附录第 A 节给出。为方便读者，我们也回顾 [42,51] 的结果：

定理 2.3. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 为开集。设 $f \in W^{1,2}_{loc}(\Omega;\mathbb{R}^2)$ 是一个映射，且对于几乎处处的 $x \in \Omega$，有 $Df \in \{X \in Sym(2) : det(X) = 0\}$。那么，对于每个 $x \in \Omega$，存在 x 的一个邻域 U，或一条经过 x 且两端连接 Ω 的线段，在其上 f 为常数。特别地，若 $\Omega = \mathbb{R}^2$，则存在 $a \in \mathbb{R}^2$ 和 $g \in W^{1,2}_{loc}(\mathbb{R})$，使得 $f(x) = g((x,a))a$.

该陈述的第一部分见 [51, 命题 1。1], 而涉及情形$\Omega = \mathbb{R}^2$ 的部分可由 [42, 推论 2。31]推出。现在我们可以证明定理 A(ii) 中所述的刚性。

定理 A(ii)的证明。利用在（1.1） $\mathbb{R}^2$上成立的方程组，我们得到：

$$\operatorname{div}\left(\frac{u\otimes u}{1+|u|^2}\right) = 0 \text{ in the sense of distributions in } \mathbb{R}^2. \tag{2.9}$$

将定理 2.2 应用于 $\beta_i = u_i$，若 $u = (u_1, u_2)$，且 $f(z) \doteq (1+|z|^2)^{-1}$，即可得到此结论。现在，由（2.9）和庞加莱引理可得，

$$\frac{u\otimes u}{1+|u|^2} = \operatorname{cof}(D^2\varphi). \tag{2.10}$$

因此，我们有 $\varphi \in W^{2,\infty}_{loc}(\mathbb{R}^2)$，且 $\det(D^2\varphi) = 0$ 几乎处处成立。接着可利用定理 2.3 和 $f = D\varphi$ 推断，对于某些 $g \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ 和 $a \in \mathbb{R}^2$，有 $D\varphi(x,y) = g((x,a))a$。若 $a = 0$，则显然有 $u \equiv 0$，证明完毕。若 $a \neq 0$，由（2.10）可推得

$$\frac{u\otimes u}{1+|u|^2} = g'((x,a))a^\perp \otimes a^\perp.$$

两边乘以 a 两边，最终得到 $u(x) = \lambda(x)a^\perp$。由于 $\operatorname{div} u = 0$，因此 u 是一个剪切流。

□

2.3. **定理 A(iii)的证明：关于 L^p 向量场的无约束刚性。** 先从以下结论开始：

引理 2.4. 设 $A \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n, 对称^+(n))$ 且 散度 $A = 0$。那么，对于所有 $x \in \mathbb{R}^n$，函数

$$f(R) \doteq \frac{1}{R}\int_{B_R(x)} \operatorname{tr}(A)(y)dy \tag{2.11}$$

关于 R 单调递增。因此，若 $A \in L^p(\mathbb{R}^n, 对称^+(n))$，对 $p < \frac{n}{n-1}$ 成立，则 $A \equiv 0$。

证明。 不失一般性，我们可以假设 A 是光滑的，且 $x = 0$。为证明 f 是单调的，只需对（2.11）求导

$$f'(R) = \frac{1}{R}\left[-\frac{1}{R}\int_{B_R}\operatorname{tr}(A)dx + \int_{\partial B_R}\operatorname{tr}(A)dx\right]$$

并使用 $\operatorname{div} A = 0$ 重写：

$$\int_{B_R}\operatorname{tr}(A)dx = \int_{B_R}\operatorname{div}(Ax)dx = R\int_{\partial B_R}\left(A\frac{x}{|x|},\frac{x}{|x|}\right)dx \le R\int_{\partial B_R}\operatorname{tr}(A)dx,$$

因此对所有 $R > 0$， $f'(R) \ge 0$，结论成立。现在，如果 $A \in L^q(\mathbb{R}^n, Sym^+(n))$ 且 $q < \frac{n}{n-1}$，则根据 Hölder不等式，$\lim_{R\to\infty} f(R) = 0$，从而 $A \equiv 0$。□

我们最终可以完成定理 A 的证明。

定理 A(iii) 的证明。首先设 $p \ge 3$。于是我们可以利用定理 A(ii) 推出 u 是一个剪切流，因此 0，因为 $u \in L^p(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)$ $p < +\infty$。于是我们可以假设 $p < 3$，再应用引理 2.4，其中 $A \doteq u\otimes u \in L^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^2, 对称^+(2))$，即可完成证明。□

3. 定理 B的证明：非消失向量场的刚性

由于定理在本质上是局部的，我们可以假设 $\Omega = B_1$。与定理 A(ii) 的证明类似，应用定理 2.2 可得

$$\operatorname{div}\left(\frac{u\otimes u}{\varepsilon+|u|^2}\right)=0,\qquad \text{for all } \varepsilon>0.$$

令 $\varepsilon\to 0$，并利用 $u\neq 0$ 在 Ω 中几乎处处成立，可得

$$\operatorname{div}\left(\frac{u\otimes u}{|u|^2}\right)=0. \tag{3.1}$$

如定理 2.2 中所述，由于 B_1 是凸的，我们于是可以找到 $\varphi\in W^{2,\infty}$，使得

$$\operatorname{cof}(D^2\varphi)=\frac{u\otimes u}{|u|^2}.$$

用微分包含的语言来说，最后一个方程等价于

$$D^2\varphi\in\Gamma=\{X\in \operatorname{Sym}^+(2):\det(X)=0,|X|=1\}=\{x\otimes x: x\in\mathbb{S}^1\},\ \text{a.e. in } B_1.$$

集合 Γ 是一条椭圆曲线，也就是说，它是曲线 $\Gamma(t)\doteq e^{it}\otimes e^{it}$ 的像；该曲线在椭圆 意义下满足：存在 $C<0$ 使得

$$C\det(\Gamma(t)-\Gamma(s))\geq|\Gamma(t)-\Gamma(s)|^2,\quad \forall t,s\in\mathbb{R},$$

通过直接计算很容易验证。接着，我们可以运用 [44, 引理 2。1] 从而推知 $\frac{u\otimes u}{|u|^2}$ 为常数，这又意味着~~u~~是一个剪切流，正如定理 A(ii)的证明末尾所示。

尚需证明假设 $u\neq 0$ 几乎处处成立是最优的。事实上，只需考虑$\Omega=(0,1)\times\mathbb{R}$，即可轻易找到反例，说明定理B 第一部分的结论不成立；并且

$$u(x)=\begin{cases} e_1, & \text{if } y\leq 0,\\ e_1+e_2, & \text{if } y\geq x,\\ 0, & \text{if } 0\leq y\leq x.\end{cases} \tag{3.2}$$

□

4. Young测度与定理C的证明

为证明定理C-D，我们将首先恰当地引入梯度Young测度。请回忆，从现在起，集合 K 指的是式（1.9）中定义的集合。

4.1. **Young测度**。设 $p\geq 2$ 并考虑式（1.7），其中序列$(u_j)_j\subset L^p(B_1,\ \mathbb{R}^2)$一致有界：

$$\begin{cases}\operatorname{div}(u_j\otimes u_j)=\operatorname{div}(X_j),\\ \operatorname{div}(u_j)=0,\\ \sup_j\|X_j\|_{L^{\frac{p}{2}}}<+\infty,\ X_j\to 0 \text{ in } L^1(\Omega).\end{cases} \tag{4.1}$$

考虑该方程组的旋度形式更为方便；将其乘以 J 在平面内旋转九十度的旋转矩阵即可得到，见式（1.11）。事实上，考虑序列

$$A_j(x)\doteq\begin{pmatrix} Ju_j\\ Ju_j\otimes Ju_j+JX_jJ\end{pmatrix}, \tag{4.2}$$

其满足旋度 $A_j=0$。因此，对某个势函数 ψ_j，$A_j=D\psi_j$ 几乎处处成立：$B_1\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$。我们希望说明$(D\psi_j)_j$ 生成一个梯度Young测度。

定理 *4.1*（*Young*测度基本定理）。设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 为具有有限测度的*Lebesgue*可测集，并设 $p > 1$。考虑序列$(z_j)_j \subset L^p(E, \mathbb{R}^m)$在 L^p 中弱收敛于某个函数 z。则存在子序列$(z_{j_k})_k$ 生成*Young*测度 ν，其中 ν 是一个弱-$*$可测映射 $\nu : E \to M(\mathbb{R}^m)$，使得对$L^n$-几乎处处的 $x \in E$，有 $\nu_x \in P(\mathbb{R}^m)$。族 $\nu = (\nu_x)_{x\in E}$ 具有如下性质：对每一个 $f \in C(\mathbb{R}^m)$，使得

$$|f(y)| \leq C(1 + |y|^q), \ for\ q < p\ and\ for\ some\ C > 0,$$

有如下结论

$$f(z_j) \rightharpoonup \bar{f}, \ weakly\ in\ L^{\frac{p}{q}}(E), \qquad where\ \bar{f}(x) = \langle \nu_x, f\rangle.$$

特别地，取 $f(y) = y$, $\forall y \in \mathbb{R}^m$ 可得

$$z(x) = \langle \nu_x, f\rangle. \tag{4.3}$$

若序列 $z_j = D\psi_j$ 如上例所示，则称 ν 为一个梯度*Young*测度。

我们将由矩阵场 M_j （1.8）生成的Young测度与由矩阵场 A_j （4.2）生成的Young测度视为相同，因为它们无论如何也只相差一个线性变换。我们在下面汇总这些考虑，并对矩阵场 $(A_j)_j$ 的性质作一个有用的重述：

引理 *4.2*. 设 $p > 2$。给定在 $L^p(B_1, \mathbb{R}^2)$ 中等有界的 $(u_j)_j$，它们对某个序列 $(X_j)_j$ 满足 *(4.1)*，并令 A_j 为 *(4.2)* 中定义的矩阵场。那么，对于 ψ_j， $A_j = D\psi_j$ 满足：$B_1 \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ 具有零平均值；若$\psi_j = (f_j, F_j)$，则 $f_j : B_1 \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 且 $F_j : B_1 \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$，我们有

$$\|f_j\|_{W^{1,p}(B_1)} + \|F_j\|_{W^{1,\frac{p}{2}}(B_1,\mathbb{R}^2)} \leq C, \quad \forall j. \tag{4.4}$$

此外，对于任意由$(\nu_x)_x$ 生成的*Young*测度$(A_j)_j$， ν_x 其支撑包含于 K 对几乎处处的 x，其中 K 定义于(1.9)。反过来，给定一个序列 $\varphi_j : B_1 \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ 满足 $\varphi_j = (g_j, G_j)$ 并满足(4.4) 以及

$$\mathrm{d}(D\varphi_j, K) \to 0 \ in\ L^1(B_1),$$

存在 u_j, X_j 满足方程 *(4.1)*，且 $(u_j)_j$ 在 $L^p(B_1, \mathbb{R}^2)$ 中一致有界。此外，给定这样的 u_j, X_j，并按 *(4.2)* 定义 $(A_j)_j$，我们有 $D\varphi_j = A_j$，因此，若 $(D\varphi_j)_j$ （的一个子序列）生成*Young*测度 $\nu = (\nu_x)_{x\in B_1}$，则相应的 $(A_j)_j$ 子序列也生成 ν。

证明。第一部分较容易。特别地，(4.4) 显然成立。考虑由$(\nu_x)_x$生成的Young测度$(A_j)_j$。注意到，根据4.2的定义$(A_j)_j$,

$$\mathrm{d}(D\psi_j, K) \leq |X_j|,$$

我们有 $\mathrm{d}(D\psi_j, K) \to 0$ in L^1。因此，对于任意光滑的 $\eta \in C_c^\infty(B_1)$，我们可以根据Young测度的定义推知

$$0 = \lim_j \int_{B_1} \mathrm{d}(D\psi_j, K)(x)\eta(x)dx = \int_{B_1} \eta(x) \int_{\mathbb{R}^{3\times 2}} \mathrm{d}(X, K)d\nu_x dx.$$

由此我们发现，对于几乎处处的 $x \in B_1$，$\mathrm{d}(X, K) = 0$ 对于 ν_x-几乎处处的 X成立。现在让我们转到证明的第二部分。我们定义 $u_j \doteq -JDg_j$，使得 $\mathrm{div}(u_j) = 0$，且 $(u_j)_j$ 在 L^p 中一致有界。接下来令

$$X_j \doteq u_j \otimes u_j - \mathrm{cof}^T(DG_j). \tag{4.5}$$

注意，如果 $(A_j)_j$ 是与这些 u_j相关联的矩阵场， X_j 如式 (4.2) 所示，则：

$$A_j = D\varphi_j \text{ for all } j. \tag{4.6}$$

由（4.5），我们立即得到 $(X_j)_j$ 在 $L^{\frac{p}{2}}$ 中一致有界，且

$$\mathrm{div}(u_j \otimes u_j) = \mathrm{div}(X_j).$$

因此，我们只需证明 $X_j \to 0$ 属于 L^1。等价地，由于它在 $L^{\frac{p}{2}}$ 中一致有界且 $p>2$，我们只需证明其范数依测度收敛到零。为此，考虑 g： 定义为 $\mathbb{R}^{3\times 2} \to \mathbb{R}$

$$g(X) \doteq |a \otimes a - A|, \quad \text{for } X = \begin{pmatrix} a \\ A \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}, a \in \mathbb{R}^2, A \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

对于任意其他矩阵 $Y = \begin{pmatrix} b \\ B \end{pmatrix}$，我们有

$$|g(X) - g(Y)| \le (|a| + |b|)|a-b| + |A-B|. \tag{4.7}$$

令 $Z = \begin{pmatrix} b \\ b \otimes b \end{pmatrix} \in K$ 为一个满足 $\mathrm{d}(X,Z) = \mathrm{d}(X,K)$ 的矩阵。由（4.7），我们推得

$$g(X) \le (1 + 3|X|)\,\mathrm{d}(X,K).$$

我们在 $D\varphi_j$ 处计算这个不等式，并注意到 $|X_j| = g(D\varphi_j)$:

$$|X_j| = g(D\varphi_j) \le (1 + 3|D\varphi_j|)\,\mathrm{d}(D\varphi_j, K), \quad \text{a.e. in } B_1.$$

利用下文的引理 4.3，我们推得 $|X_j|$ 依测度收敛于 0，因此 $X_j \to 0$ 在$L^1(B_1, \mathbb{R}^{2\times 2})$中。 □

引理 4.3。 设 $(a_j)_j$ 和 $(b_j)_j$ 是满足条件 $\|a_j\|_{L^1(B_1)} \le C$ 的序列，其中对所有 j， $b_j \to 0$ 均依测度收敛。那么， $p_j \doteq a_j b_j$ 依测度收敛于零。

证明。 不妨设， 不失一般性地， a_j， $b_j \ge 0$。固定任意的 $t>0$ 和 $\varepsilon > 0$。于是，对于任意的 $s>0$ ：

$$\begin{aligned} |\{x : a_j b_j > t\}| &\le |\{x : a_j b_j > t\} \cap \{x : a_j \le s\}| + |\{x : a_j b_j > t\} \cap \{x : a_j \ge s\}| \\ &\le |\{x : a_j b_j > t\} \cap \{x : a_j \le s\}| + |\{x : a_j \ge s\}| \\ &\le |\{x : b_j > t/s\}| + C/s, \end{aligned}$$

最后一个不等式由切比雪夫不等式成立。现在选择 s 使得 $C/s \le \varepsilon/2$。固定$s>0$后，我们可以利用序列 $(b_j)_j$ 依测度收敛到 0，从而完成证明。□

4.2. 定理 C 的证明：近似刚性。设 $(u_j)_j$和 $(X_j)_j$ 是满足 (1.7) 的映射序列，其中 $\|u_j\|_{L^p} \le C$ 和 $p>4$。我们希望证明，由按 (4.2) 定义的矩阵场 $(A_j)_j$ 生成的梯度Young测度 $(\nu_x)_{x\in B_1}$ 满足：对于几乎处处的 x，存在 $b(x) \in \mathbb{R}^2$ 使得：

$$\mathrm{spt}(\nu_x) \subset K_{b(x)} = \left\{ \begin{pmatrix} tb(x) \\ t^2 b(x) \otimes b(x) \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}. \tag{4.8}$$

根据引理 4.2，我们已经知道，对于几乎处处的 x，有 $\mathrm{spt}(\nu_x) \subset K$，其中 K 是满足 (1.9) 的集合。令 $A_j = D\psi_j$，其中 $\psi_j = (f_j, F_j)$， f_j： $B_1 \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 以及 F_j： $B_1 \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 满足界 (4.4)。根据 Young测度的定义，取函数 $h(X) \doteq X$ 对所有 $X \in \mathbb{R}^{3\times 2}$，我们得到 f_j 和F_j 分别在 L^p 和 $L^{p/2}$ 中弱收敛到某些函数 f和 F。此外，若 $\psi = (f, F)$，则 $D\psi(x)$ 是 ν_x 对于几乎处处的 x 的重心，正如 (4.3) 所表达的那样。

由于 $\mathrm{spt}(\nu_x) \subset K$，我们也得到 $DF(x) \in \mathrm{Sym}^+(2)$ 对几乎处处的 x成立。此外，行列式是一个零拉格朗日量，见 [47, 定理 2。3], 因此，对任意 $\varphi \in C_c^\infty(B_1)$,

$$\lim_{j\to\infty} \int_{B_1} \varphi(x) \det(DF_j)(x)dx = \int_{B_1} \varphi(x) \det(DF)(x)dx.$$

这立即意味着，对于几乎处处的 x,

$$\det(DF(x)) = \int_{\mathbb{R}^{3\times 2}} \det(\pi_2(X))d\nu_x(X),$$

回忆第 π_i 1.4 节中的记号。由于 $\mathrm{spt}(\nu_x) \subset K$ 对几乎处处的 x成立，我们推得 $\det(DF(x)) = 0$ 对几乎处处的 x成立。换言之，对于几乎处处的 x，存在一个向量 $b(x)$使得

$$DF(x) = b(x) \otimes b(x).$$

令 μ'_x 和 μ_x 分别为 ν_x 经由 $\pi_1(X)$ 和 $\pi_2(X)$ 的推前，我们现在证明

$$\mathrm{spt}(\mu_x) \subset \{t^2 b(x) \otimes b(x) : t \in \mathbb{R}\}, \quad \text{for a.e. } x \in B_1. \tag{4.9}$$

这是一个纯代数事实：因为

$$\mathrm{spt}(\mu_x) \subset \{v \otimes v : v \in \mathbb{R}^2\}$$

其重心是矩阵 $b(x) \otimes b(x)$，因此只需考虑以下关系

$$b(x) \otimes b(x) = \int_{\mathbb{R}^{2\times 2}} X d\mu_x(X)$$

并将其与 $Jb(x) \otimes Jb(x)$ 作标量乘法。这立即推出（4.9）。到目前为止，我们已经证明，对于几乎处处的 x,

$$\mathrm{spt}(\nu_x) \subset \left\{ \begin{pmatrix} a \\ t^2 b(x) \otimes b(x) \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R} \right\} \cap K.$$

这两个集合交集中的点 Z 恰好是 $K_{b(x)}$ 的元素。事实上，我们需要满足 a, $b(x)$ $u \in \mathbb{R}^2$ 和 $t \in \mathbb{R}$，使得

$$Z = \begin{pmatrix} a \\ t^2 b(x) \otimes b(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ u \otimes u \end{pmatrix}.$$

若 $b(x) = 0$，则我们立即得到 $a = u = 0$。因此， $Z = 0$，它属于 $K_{b(x)} = \{0\}$。若 $b(x) \neq 0$，则我们可以将最后两行分别乘以标量 $Jb(x) \otimes Jb(x)$，从而得到 $(u, Jb(x))^2 = 0$，因此对于某个 $\lambda \in \mathbb{R}$，有 $u = \lambda b(x)$。此外， $\lambda = \pm t$。因此 Z 归结为

$$Z = \begin{pmatrix} \pm t b(x) \\ t^2 b(x) \otimes b(x) \end{pmatrix} \in K_{b(x)}.$$

换言之，对于几乎处处的 x，$\mathrm{spt}(\nu_x) \subset K_{b(x)}$，由此我们完成证明。

5. Staircase laminates and proof of Theorem D

本节将证明定理 D。具体而言，回顾这些集合

$$K = \left\{ X \in \mathbb{R}^{3\times 2} : X = \begin{pmatrix} x \\ x \otimes x \end{pmatrix} \right\} \text{ and } K_a = \left\{ X \in \mathbb{R}^{3\times 2} : X = \begin{pmatrix} ta \\ t^2 a \otimes a \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\},$$

我们将构造一个序列 $\psi_n = (g_n, G_n)$，其中 $g_n \in \mathrm{Lip}(B_1, \mathbb{R})$ 且 $G_n \in \mathrm{Lip}(B_1, \mathbb{R}^2)$， $B_1 \subset \mathbb{R}^2$，并具有以下性质：

(1) $\|g_n\|_{W^{1,p}(B_1)} + \|G_n\|_{W^{1,p/2}(B_1,\mathbb{R}^2)} \leq C(p)$, for all $p < 4$;

(2) $\lim_n \int_{B_1} \mathrm{d}(D\psi_n, K) dx = 0$;

此外，由$(D\psi_n)_n$ 生成的Young测度$(\nu_x)_{x\in B_1}$ 是齐次的，即它不依赖于 x （因此我们将仅用 $\nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^{3\times 2})$来表示它），并且具有以下性质

$$\mathrm{spt}(\nu) \subset K_{e_1} \cup K_{e_2} \text{ and } \int_{\mathbb{R}^{3\times 2}} \mathrm{d}(X, K_{e_i}) d\nu > 0, \ \forall i = 1, 2. \tag{5.1}$$

注意，这表明定理D 可由引理4.2的第二部分推出。正如引言中所述，本节采用阶梯层合的凸积分方法。我们先回顾这一方法，并将所需层合体的构造推迟到最后一个小节。

5.1. 有限阶层状测度与阶梯层合。基本思路如下：令 A，$B\in\mathbb{R}^{n\times m}$ 秩一相连，即 $A-B=a\otimes b$，并令 φ 为一个函数，它在$[0,\lambda]$ 上等于$(1-\lambda)t$，在 $[\lambda,1]$ 上等于 $-\lambda t$，并将其延拓为1-周期函数。于是映射

$$u_\varepsilon(x)=(\lambda A+(1-\lambda)B)x+\varepsilon\varphi((x,b)/\varepsilon)a$$

生成作为 $\varepsilon\to 0$ 的 Young测度

$$\nu=\lambda\delta_A+(1-\lambda)\delta_B.$$

如果例如 B 是另一个秩一方向上线段的重心，则这一推理可以迭代。下面的定义阐释了这种分裂思想，而命题 5.2 给出了经过此类迭代后族u_ε 的类似形式。

定义 5.1。设 $\nu,\mu\in\mathcal{P}(\mathbb{R}^{n\times m})$。设 $\nu=\sum_{i=1}^N\lambda_i\delta_{A_i}$。如果存在某个 $i\in\{1,\dots,N\}$，使得存在 B, $C\in\mathbb{R}^{n\times m}$, $\lambda\in[0,1]$，则称 μ 可由 ν通过初等分裂得到，且

$$\operatorname{rank}(B-C)=1,\quad A_i=sB+(1-s)C,$$

对于某个 $s\in(0,1)$，并且

$$\mu=\nu+\lambda\lambda_i(-\delta_{A_i}+s\delta_B+(1-s)\delta_C).$$

如果存在有限个测度 $\nu_1,\dots,\nu_N\in\mathcal{P}(\mathbb{R}^{n\times m})$，使得测度 $\nu=\sum_{i=1}^r\lambda_i\delta_{A_i}\in\mathcal{P}(\mathbb{R}^{n\times m})$ 被称为有限阶层合，则

$$\nu_1=\delta_X,\nu_N=\nu$$

and ν_{j+1} 可由 ν_j 经初等分裂得到，对每一个 $j\in\{1,\dots,N-1\}$。

下一个命题可见于 [48, 引理 3.2]。

命题 5.2. 设 $\nu=\sum_{i=1}^r\lambda_i\delta_{A_i}\in P(\mathbb{R}^{n\times m})$，$\lambda_i\neq 0$，$\forall i$ 为有限阶层合，并设 A 为 ν 的重心。若 Ω 是有界开集，$b\in\mathbb{R}^m$ 且 $u(x)\doteq Ax+b$，则对每一个 $\varepsilon>0$ 存在分片仿射映射 $u_\varepsilon\in\operatorname{Lip}(\Omega\ \mathbb{R}^n)$，具有如下性质：

(i) $\|u-u_\varepsilon\|_\infty\le\varepsilon$; *(ii)* $u_\varepsilon(x)=Ax+b$ 在 $\partial\Omega$ 上; *(iii)* $|\{x\in\Omega:\mathrm{d}(Du_\varepsilon(x)\ A_i)\le\varepsilon\}|=\lambda_i|\Omega|$, $\forall i$。

不难证明，族 u_ε （命题 5.2 ）生成齐次杨测度$\nu=\sum_{i=1}^r\lambda_i\delta_{A_i}$。为了构造序列 $(\psi_n)_n$，使其具有性质 (1)-(2)-(5.1)，因此只需构造一列有限阶层状测度$(\nu_n)_n$，并使其具有以下性质：

$$\sup_n\int_{\mathbb{R}^{3\times 2}}|\pi_1(X)|^{2p}+|\pi_2(X)|^p d\nu_n<+\infty,\quad\forall p<2,\tag{5.2}$$

其中我们使用了记号 π_i （第 1.4 节所引入），

$$\int_{\mathbb{R}^{3\times 2}}\mathrm{d}(X,K_{e_1}\cup K_{e_2})d\nu_n\to 0,\tag{5.3}$$

and

$$\int_{\mathbb{R}^{3\times 2}}\mathrm{d}(X,K_{e_i})d\nu_n\ge c>0,\quad\forall n\in\mathbb{N},\quad i=1,2.\tag{5.4}$$

完成上述步骤后，借助命题$(\psi_n)_n$ 并结合对角线论证，即可得到该序列5.2。每个$(\nu_n)_n$ 均按照 Faraco 的阶梯构造法构造，即 ν_{n+1}由 ν_n 经以下方式得到：在的支撑内插入一个狄拉克 δ ν_n，并用一个有限阶层合μ_n 取代它（即阶梯的一步）。的构造是引理 5.3的内容；之后我们验证 ν_n 满足性质（5.2）-（5.3）-（5.4）。

5.2. **定理 D 证明的收尾：阶梯层合体的构造。** 我们从构造 μ_n开始。

引理 5.3。 给定一个递增序列 $(a_n)_n \subset \mathbb{R}^+$，令

$$Z_n = \begin{pmatrix} 0 \\ a_n \,\mathrm{id} \end{pmatrix}.$$

那么，离散测度

$$\mu_n = \alpha_n \delta_{X_n^1} + \beta_n \delta_{X_n^2} + \gamma_n \delta_{Y_n^1} + \delta_n \delta_{Y_n^2} + \lambda_n \delta_{Z_{n+1}}$$

with

$$X_n^1 = \begin{pmatrix} \sqrt{a_n} e_1 \\ a_n e_1 \otimes e_1 \end{pmatrix}, \quad X_n^2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{a_n} e_1 \\ a_n e_1 \otimes e_1 \end{pmatrix}, \quad Y_n^1 = \begin{pmatrix} \sqrt{a_{n+1}} e_2 \\ a_{n+1} e_2 \otimes e_2 \end{pmatrix}, \quad Y_n^2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{a_{n+1}} e_2 \\ a_{n+1} e_2 \otimes e_2 \end{pmatrix}$$

and

$$\alpha_n = \beta_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a_n}{a_{n+1}}\right), \quad \gamma_n = \delta_n = \frac{a_n}{a_{n+1}} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a_n}{a_{n+1}}\right), \quad \lambda_n = \left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)^2$$

是一个重心为 Z_n 的有限阶层合。

证明。 我们从 δ_{Z_n} 开始，并沿方向将其分解

$$\begin{pmatrix} 0 \\ e_2 \otimes e_2 \end{pmatrix}$$

得到

$$\mu_n^1 = \alpha_n^1 \delta_{X_n} + \alpha_n^2 \delta_{E_n}, \text{ where } X_n = \begin{pmatrix} 0 \\ a_n e_1 \otimes e_1 \end{pmatrix} \text{ and } E_n = \begin{pmatrix} 0 \\ a_n e_1 \otimes e_1 + a_{n+1} e_2 \otimes e_2 \end{pmatrix}.$$

由此得到的权重为

$$\alpha_n^1 = 1 - \frac{a_n}{a_{n+1}} \text{ and } \alpha_n^2 = \frac{a_n}{a_{n+1}}.$$

一方面，我们沿秩一方向 R 将δ_{X_n} 分解为以下各项之和

$$\frac{1}{2}\left(\delta_{X_n^1} + \delta_{X_n^2}\right), \text{ where } R = \begin{pmatrix} e_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

另一方面，我们沿秩一方向 R' 分解δ_{E_n} ，得到如下形式的简单层状测度

$$\beta_n^1 \delta_{Y_n} + \beta_n^2 \delta_{Z_{n+1}}, \text{ where } R' = \begin{pmatrix} 0 \\ e_1 \otimes e_1 \end{pmatrix} \text{ and } Y_n = \begin{pmatrix} 0 \\ a_{n+1} e_2 \otimes e_2 \end{pmatrix}.$$

直接计算可得

$$\beta_n^1 = 1 - \frac{a_n}{a_{n+1}} \text{ and } \beta_n^2 = \frac{a_n}{a_{n+1}}.$$

到目前为止，我们已在四点层合板中分解了 δ_{Z_n}

$$\frac{1}{2}\alpha_n^1 \delta_{X_n^1} + \frac{1}{2}\alpha_n^1 \delta_{X_n^2} + \alpha_n^2 \beta_n^1 \delta_{Y_n} + \alpha_n^2 \beta_n^2 \delta_{Z_{n+1}}.$$

最后，我们只需将 δ_{Y_n} 分解为以下各项之和

$$\frac{1}{2}(\delta_{Y_n^1} + \delta_{Y_n^2}), \text{ following the rank-one direction } \begin{pmatrix} e_2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

由此完成构造。 □

定义了这些步骤（μ_n）$_n$后，我们就可以定义阶梯层合体：令 ν_n 归纳定义为 $\nu_1 \doteq \mu_1$，对于 $n \geq 1$,

$$\nu_{n+1} \doteq \nu_n - p_n \delta_{Z_{n+1}} + p_n \mu_{n+1}, \quad \text{where } p_n = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \left(\frac{a_1}{a_{n+1}}\right)^2, p_0 \doteq 1.$$

我们选 择 $a_n \doteq 2^n$。 ν_{n+1} 定义的一个关键特点是，我们可以计算出 f

$$\int_{\mathbb{R}^{3\times 2}} f(X) d\nu_n(X)$$

利用裂项求和，对于任意 $f \in C^0(\mathbb{R}^{3\times 2})$:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^{3\times 2}} f(X) d\nu_{n+1} - \int_{\mathbb{R}^{3\times 2}} f(X) d\nu_1 &= \sum_{i=1}^{n} \left(\int_{\mathbb{R}^{3\times 2}} f(X) d\nu_{i+1} - \int_{\mathbb{R}^{3\times 2}} f(X) d\nu_i \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(p_i \int_{\mathbb{R}^{3\times 2}} f(X) d\mu_{i+1} - p_i f(Z_{i+1}) \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} p_i \left(\alpha_{i+1} f(X_{i+1}^1) + \beta_{i+1} f(X_{i+1}^2) + \gamma_{i+1} f(Y_{i+1}^1) + \delta_{i+1} f(Y_{i+1}^2) \right) \\
&\quad + p_{n+1} f(Z_{n+2}) - p_1 f(Z_2).
\end{aligned}$$

因此，利用 $\nu_1 = \mu_1$,

$$\int_{\mathbb{R}^{3\times 2}} f(X) d\nu_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} p_{i-1} \left(\alpha_i f(X_i^1) + \beta_i f(X_i^2) + \gamma_i f(Y_i^1) + \delta_i f(Y_i^2) \right) + p_{n+1} f(Z_{n+2}). \tag{5.5}$$

利用这个公式，重写（5.2）-（5.3）-（5.4）相当简单。我们先从（1）开始。注意到，在 ν_n 的支撑上，各个量

$$|\pi_1(X)|^{2p} + |\pi_2(X)|^p \text{ and } |\pi_2(X)|^p$$

与常数相比，这些常数与 n 无关。因此，只需验证

$$\sup_n \int_{\mathbb{R}^{3\times 2}} |\pi_2(X)|^p d\nu_n \leq C(p), \text{ for all } p < 2. \tag{5.6}$$

令 $f(X) = |\pi_2(X)|^p$。我们还注意到，对所有 $i \in \mathbb{N}$, $f(X_i^1) = f(X_i^2) = a_i^p$以及 $f(Y_i^1) = f(Y_i^2) = a_{i+1}^p$。因此，利用 (5.5)，得到

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^{3\times 2}} |\pi_2(X)|^p d\nu_{n+1} &= \sum_{i=1}^{n+1} \left(\frac{a_1}{a_i}\right)^2 \left(\left(1 - \frac{a_i}{a_{i+1}}\right) a_i^p + a_i \left(1 - \frac{a_i}{a_{i+1}}\right) a_{i+1}^{p-1} \right) + 2^{p/2} \frac{a_1^2}{a_{n+2}^2} a_{n+2}^p \\
&\lesssim \sum_{i=1}^{n+1} 2^{(p-2)i} + 2^{(p-2)(n+1)}.
\end{aligned} \tag{5.7}$$

符号 $a \lesssim b$ 表示存在一个常数 $C > 0$ (与 n 无关)，使得 $a \leq Cb$。现在证明 (2)。令 $f(X) = \mathrm{d}(X, K_{e_1} \cup K_{e_2})$。我们有 $f(X_n^1) = f(X_n^2) = f(Y_n^1) = f(Y_n^2) = 0$。因此,

$$\int_{\mathbb{R}^{3\times 2}} \mathrm{d}(X, K_{e_1} \cup K_{e_2}) d\nu_{n+1} = p_{n+1} \mathrm{d}(Z_{n+2}, K_{e_1} \cup K_{e_2}) \leq p_{n+1} |Z_{n+2}| = \frac{a_1^2}{a_{n+2}} \sqrt{2} \lesssim 2^{-n}. \tag{5.8}$$

最后，我们证明（5.4）。这里只考虑 $f(X) = \mathrm{d}(X, K_{e_1})$ 这一情形，另一种情形的证明完全类似。我们有 $f(X_n^1) = f(X_n^2) = 0$ 对所有 n 均成立。此外，由于对任意 $s \in \mathbb{R}$ 和任意 n，我们都有

$$\left| Y_n^1 - \begin{pmatrix} se_1 \\ s^2 e_1 \otimes e_1 \end{pmatrix} \right|^2 = \left| Y_n^1 \right|^2 + \left| \begin{pmatrix} se_1 \\ s^2 e_1 \otimes e_1 \end{pmatrix} \right|^2 \geq \left| Y_n^1 \right|^2 = a_{n+1} + a_{n+1}^2 \geq a_{n+1}^2,$$

我们得到 $\mathrm{d}(Y_n^1, K_{e_1}) \geq a_{n+1}$，$\forall n \in \mathbb{N}$。因此，再次利用（5.5）：

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^{3\times 2}} \mathrm{d}(X, K_{e_1}) d\nu_{n+1} &= \sum_{i=1}^{n+1} p_{i-1} \left(\gamma_i \,\mathrm{d}(Y_i^1, K_{e_1}) + \delta_i \,\mathrm{d}(Y_i^2, K_{e_1})\right) + p_{n+1} \,\mathrm{d}(Z_{n+2}, K_{e_1}) \\ &\geq \frac{1}{8} \sum_{i=1}^{n+1} p_{i-1} a_{i+1} = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{a_1^2}{a_i^2} a_{i+1} = \sum_{i=1}^{n+1} 2^{-i} \geq 2^{-1}.\end{aligned} \tag{5.9}$$

现在（5.7）-（5.8）-（5. 9）表明（ν_n）$_n$ 满足（5.2）-（5.3）-（5.4），因此证明定理 D。 □

Appendix A. Chain rule in L^p spaces

本节我们给出定理2.2的证明。为简化叙述，我们将作一些不失一般性的额外假设：

- 我们假设 $r < +\infty$，由（2.5）可知 $p > 2$。情形 $r = +\infty$ 和 $p = 2$ 最近已在 [36]中证明；
- 由于结果是局部的，我们可以假设对于所有 i，$\Omega = B_1$, $u \in L^p(B_1, \mathbb{R}^2)$ 且 $\beta_i \in L^r(B_1)$；
- 我们可以使用（2.6）来推断存在 , $^p(B_1)$ 使得

$$u = D^\perp \psi \text{ a.e. in } B_1. \tag{A.1}$$

其策略和绝大多数细节都与 [2, 4, 36], 相同，本节不声称具有任何原创性。如 [2], 中所述，我们证明以下结果，由此定理2.2 可直接推出：

命题 A.1。 设 $\beta \in L^r$（B_1）和 $u \in L^p$（B_1，$\mathbb{R}^2$），对于 r，$p \in [1, +\infty]$。假设（2.5）-（A.1）成立。那么：

$$\operatorname{div}(\beta u) = 0 \tag{A.2}$$

当且仅当，对于几乎处处的 $t \in \mathbb{R}$，β 在 ψ^{-1}（*{t}*）的每个连通分支上均为常数。

为证明这一点，我们需要回顾连续 Sobole夫函数的几乎处处水平集的以下刻画。注意，ψ 满足（A.1）的连续性由（2.5）及我们的假设 $r < +\infty$给出。以下内容取自 [50]。

定理 A.2. 设Ω 为一个开集，且 $\varphi \in W^{1,p}{}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 为连续函数。那么，对几乎处处的 $t \in \mathbb{R}$,φ^{-1}(*{t}*) 具有局部有限的 H^1 测度，并且 φ^{-1}(*{t}*) 的每个连通分支要么是一个点、若尔当曲线，要么与一个区间同胚。

我们将需要一个稍强的结果。

推论 A.3. 设 $U \subset \mathbb{R}^2$ 为有界 *Lipschitz* 区域，且 $\psi \in W^{1,p}(U)$ 对 $p > 2$成立。那么：

(1) 对几乎处处的 $t \in \mathbb{R}$, ψ^{-1}(*{t}*) 具有有限的 H^1 测度；*(2)* 对几乎处处的 $t \in \mathbb{R}$，ψ^{-1}(*{t}*) 的每个连通分支 C 要么是一个点，要么存在 *Lipschitz* 弧长参数化 γ，使得以下条件之一成立

- $\gamma\colon (a, b) \to C \subset U$，在$(a, b)$上是单射，并且可延拓为 a, b，满足 $\gamma(a)$ $\gamma(b) \in \partial U$，或者
- $\gamma\colon [a, b] \to C \subset U$, $\gamma(a) = \gamma(b)$ 并且在 $[a, b)$上是单射；

(3) 对于那些 t，并对每一条这样的曲线，令 D 为 ψ 的可微点，令 S 为 D 中使得 $D\psi = 0$成立的点集，$H^1(\psi^{-1}(\{t\}) \cap (S^c \cap D)^c) = 0$ 且 $\gamma(s) \in D \cap S^c$ 对几乎处处的 s；*(4)* 此外，在 γ的重参数化意义下，

$$\gamma'(s) = \frac{D^\perp \psi}{|D^\perp \psi|}(\gamma(s)) \quad \textit{for a.e. } s \in [a, b]. \tag{A.3}$$

(5) 对几乎处处的 t，令 $\mathcal{C}_t$ 为 ψ^{-1}(*{t}*) 中由曲线构成的连通分支的集合，令 $\mathcal{C}_t^*$ 为由点构成的连通分支的集合。于是，令 $B_t \doteq \cup_{C \in \mathcal{C}_t^*} C$，我们有 $H^1(B_t) = 0$。

进而，推论 A.3 由下一个推论得出，该推论适用于定义在整个平面上的紧支集函数。要从下一个结果推出推论 A.3 ，只需将 ψ 延拓为函数$\psi \in W^{1,\,p}(\mathbb{R}^2)$ 且该函数具有紧支集。于是，推论 A.3 的结论显然成立。

推论 A.4. 设 $\psi \in W^{1,p}(\mathbb{R}^2)$ 满足 $p > 2$ 且具有紧支集。那么：

(1) 对几乎处处的 $t \in \mathbb{R}$， $\psi^{-1}(\{t\})$ 具有有限的 H^1 测度；*(2)* 对几乎处处的 t， $\psi^{-1}(\{t\})$ 的每个连通分支 C 要么是一个点，要么是可由利普希茨参数化 $\gamma:[a,b]\to C$ 表示的若尔当曲线，其中 $|\gamma'(s)|=1$ 对几乎处处的 $s\in[a,b]$， $\gamma(a)=\gamma(b)$，且 γ 在 $[a,b$ 上为单射；*(3)* 对这些 t 以及每条这样的曲线，令 D 为 ψ 的可微点， S 为 D 中满足 $D\psi=0$ 的点集，则 $H^1(\psi^{-1}(\{t\})\cap(S^c\cap D)^c)=0$ ，且 $\gamma(s)\in D\cap S^c$ 对几乎处处的 s 成立；*(4)* 此外，对 γ 进行重参数化后，

$$\gamma'(s)=\frac{D^\perp\psi}{|D^\perp\psi|}(\gamma(s)) \quad \textit{for a.e. } s\in[a,b]. \tag{A.4}$$

(5) 对几乎处处的 t，设 $\mathcal{C}_t$ 为 $\psi^{-1}(\{t\})$ 中作为曲线的连通分支所成的集合，并设 $\mathcal{C}_t^*$ 为其中作为点的那些所成的集合。然后，令 $B_t\doteq\cup_{C\in\mathcal{C}_t^*}C$，我们有 $H^1(B_t)=0$。

推论 *A.4* 的证明。 证明分为若干步骤。在下文将定义的所有取值集合 t 中，我们始终默认排除 $t=0$。

步骤 *1*，好值的选取 t： 设 T_1 为使定理A.2 的结论成立的取值集合。对几乎处处的 $t\in T_1$， $\psi^{-1}(\{t\})$ 由定理 $\mathcal{H}^1$ 具有局部有限测度，这来自定理 A.2。由于 ψ 具有紧支撑，该测度实际上是有限的。我们令 T_2 为取值集合 t ，其构造如下。我们有$|\mathbb{R}^2\setminus D|=0$ 因为 $p>2$。然后我们可以使用余面积公式，参见 [46, 定理 1.1], ，从而写出：

$$\int_{\mathbb{R}^2} g|D\psi|dx=\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\psi^{-1}(\{t\})} g d\mathcal{H}^1\right)dt, \text{ for any } g\in L^1(\mathbb{R}^2) \text{ with } |g||D\psi|\in L^1(\mathbb{R}^2). \tag{A.5}$$

取 $g=\chi_{(S^c\cap D)^c}$，我们很容易得到，对于几乎处处的 $t\in\mathbb{R}$,

$$\mathcal{H}^1(\psi^{-1}(\{t\})\cap(S^c\cap D)^c)=0. \tag{A.6}$$

将 T_2 这组取值称为 t。最后，我们需要定义一个集合 T_3。为此，我们先用检验函数 $\Phi=\varphi(\psi)\eta$ 对方程 $\operatorname{div}(D^\perp\psi)=0$ 进行测试，其中任取 $\varphi\in C_c^\infty(\mathbb{R})$， $\eta\in C_c^1(\mathbb{R}^2)$。由于 $\psi\in W^{1,\,p}(\mathbb{R}^2)$，$\varphi(\psi)\eta\in W^{1,\,p}_0(\mathbb{R}^2)$ 是一个合法的检验函数，利用余面积公式可得，

$$\begin{aligned}
0&=\int_{\mathbb{R}^2}\left(D^\perp\psi(x),D(\varphi(\psi)\eta)\right)dx=\int_{\mathbb{R}^2}\varphi(\psi(x))\left(D^\perp\psi(x),D\eta(x)\right)dx\\
&=\int_{\mathbb{R}^2\cap S^c}\varphi(\psi(x))\left(\frac{D^\perp\psi(x)}{|D^\perp\psi(x)|},D\eta(x)\right)|D^\perp\psi(x)|dx\\
&=\int_{\mathbb{R}}\varphi(t)\left(\int_{\psi^{-1}(\{t\})\cap S^c}\left(\frac{D^\perp\psi(x)}{|D^\perp\psi(x)|},D\eta(x)\right)d\mathcal{H}^1(x)\right)dt\\
&=\int_{\mathbb{R}}\varphi(t)\left(\int_{\psi^{-1}(\{t\})}\left(\frac{D^\perp\psi(x)}{|D^\perp\psi(x)|},D\eta(x)\right)d\mathcal{H}^1(x)\right)dt.
\end{aligned} \tag{A.7}$$

在推导最后一个不等式时，我们用到了（A.6）。因此，存在一组取值 G_η $t\in T_2$ ，使得$\mathcal{H}^1(\mathbb{R}\setminus G_\eta)=0$ ，并且

$$\int_{\psi^{-1}(\{t\})}\left(\frac{D^\perp\psi(x)}{|D^\perp\psi(x)|},D\eta(x)\right)d\mathcal{H}^1(x)=0. \tag{A.8}$$

为了消除 G_η 对 η 的依赖，我们可以取充分大的 R ，使得 $\operatorname{spt}(\psi)\subset B_{R/2}$ ，并考虑可分空间 $X=C^1_R(\mathbb{R}^2)$，其元素为支撑包含于 B_R 的 $C^1(\mathbb{R}^2)$ 函数；该空间赋予由范数 $\eta\,(\,G_\eta)\;R\,(\psi,\subset B_{R/2}\,)$ 诱导的

拓扑。取 $\eta_i \in X$ 的一个可数稠密集，以及相应的值集 G_{η_i}，其中 t 满足 (A.8)，令 $T_3 \doteq \bigcap_{i\in\mathbb{N}} G_{\eta_i}$。那么，$T_3$ 是 $\mathbb{R}$ 中的一个全测度集，使得对所有 $t \in T_3$ 及 $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$，(A.8) 均成立。随后我们可以令 $T = T_1 \cap T_2 \cap T_3$，它在 $\mathbb{R}$ 中仍是全测度集。这就是我们从现在起要考虑的 t 的良值集。注意，与 T_2 的交集是多余的，因为 $T_3 \subset T_2$，但为清晰起见，我们仍将其加入。关于这些值 $t \in T$，我们还需要最后一个性质：对所有 $t \in T$ 以及所有连通分支 $C \subset \psi^{-1}(\{t\})$，

$$\int_C \left(\frac{D^\perp \psi(x)}{|D^\perp \psi(x)|}, Dg(x) \right) d\mathcal{H}^1(x) = 0, \quad \forall g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2). \tag{A.9}$$

为证明这一点，我们利用如下事实：任意连通分支 C 都是一列递减开集的闭包的交集 U_n，其中 $\partial U_n \cap \psi^{-1}(\{t\}) = \emptyset$，如 [1, 第 2 节 8], 所述；另见 [2, 引理 38]。于是有 $\mathrm{d}(\partial U_n, \psi^{-1}(\{t\})) = 2\varepsilon_n > 0$，其中 $\varepsilon_n \to 0$。因此，对标准磨光核，令 ρ_ε，

$$\chi_n(x) \doteq (\chi_{U_n} \star \rho_{\frac{\varepsilon_n}{2}})(x).$$

注意，由于 $\mathrm{d}(\partial U_n, \psi^{-1}(\{t\})) = 2\varepsilon_n > 0$，$D\chi_n(x) = 0$ 在 $\psi^{-1}(\{t\})$ 上成立；并且 $\chi_n(x) \to \chi_C(x)$ 在所有点 x 处均成立。接着，对于任意 $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$，我们在 (A.8) 中取检验函数 $\eta = \chi_n g$，得到

$$0 = \int_{\psi^{-1}(\{t\})} \left(\frac{D^\perp \psi(x)}{|D^\perp \psi(x)|}, D(\chi_n g) \right) d\mathcal{H}^1 = \int_{\psi^{-1}(\{t\})} \chi_n(x) \left(\frac{D^\perp \psi(x)}{|D^\perp \psi(x)|}, Dg \right) d\mathcal{H}^1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

因此，令 $n \to \infty$，则（A.9）成立。至此，我们终于可以检验当前推论的陈述是否成立。

Step 2, proof of (1): By the definition of T_1, (1) is fulfilled.

步骤 3，（2）的证明：为了说明每个非点连通分支都可以通过单射利普希茨参数化来参数化，我们可以引用[1] [1, 引理 2。17]目前，我们不能排除这些曲线可能不是闭曲线。也就是说，由 [1, 引理 2。17], 可知，每个 C 非点连通分支都可以由利普希茨单射参数化 γ 参数化：$[a,b] \to C$ 该参数化要么在整个 $[a,b]$ 上都是单射的（即它不是闭曲线），要么它参数化一条若尔当曲线，也就是说，$\gamma(a) = \gamma(b)$，但 γ 在 $[a,b$上是单射的。我们分别将这两类曲线称为类型（A）和（B）。证明（4）时，我们需要排除 $t \in T$的类型（A）曲线。除这一细节外，（2）已得证，前提是我们选择按弧长参数化的 γ；不失一般性，我们可以这样做。

步骤 4，证明 (3)：关于 (3)，任取 $t \in T$。于是，(A.6) 给出了该陈述的第一部分。为证明第二部分，任取 $t \in T$，使得 $\psi^{-1}(\{t\})$ 有一个非单点连通分支，并取这样一个连通分支 C，其参数化为 $\gamma(s)$。令

$$S' = \{s \in [a,b] : \psi \text{ is not differentiable at } \gamma(s) \text{ or it is but } D\psi(\gamma(s)) = 0\}.$$

我们有

$$\mathcal{H}^1(\gamma(S')) \leq \mathcal{H}^1(\psi^{-1}(\{t\}) \cap (S^c \cap D)^c) \overset{(A.6)}{=} 0. \tag{A.10}$$

由于 γ 在 $[a,b)$ 上是单射，且 $|\gamma'(s)| = 1$ 对几乎处处的 $s \in [a,b]$成立，面积公式 [29, 定理 3.9] 给出：对所有可测的 $F \subset [a,b]$,

$$\mathcal{L}^1(F) = \int_F |\gamma'|(s) ds = \mathcal{H}^1(\gamma(F)).$$

因此，由（A.10）可得 $\mathcal{L}^1(S') = 0$。因此，（3）成立。

[1]要应用 [1, 引理 2.17]，我们需要排除水平集 $\psi^{-1}(\{t\})$中的三叉树；这可由以下事实得到：$t \in T_1$，因为三叉树既不是若尔当曲线，也不与区间同胚。关于三叉树的定义，参见 [1, 第 2 节。3]。

步骤5，证明（4）以及不存在类型为（A）的曲线：由（3）和等式 $\psi(\gamma(s)) = t,\ \forall s \in [a,b]$, 我们可以使用链式法则进行计算：

$$(D\psi(\gamma(s)), \gamma'(s)) = 0, \quad \text{for a.e. } s \in [a,b].$$

由于 $D\psi(\gamma(s)) \neq 0$ 在几乎处处的 s处成立，我们得知存在一个可测函数 $\sigma_C\colon [a,b] \to \{-1,1\}$ 使得

$$\gamma'(s) = \sigma_C(s) \frac{D^\perp \psi(\gamma(s))}{|D^\perp \psi(\gamma(s))|}. \tag{A.11}$$

从（A.9）和（A.11）出发，我们可以利用面积公式写出：

$$0 \overset{(A.9)}{=} \int_C \left(\frac{D^\perp \psi(x)}{|D^\perp \psi(x)|}, Dg \right) d\mathcal{H}^1(x) = \int_a^b \left(\frac{D^\perp \psi(\gamma(s))}{|D^\perp \psi(\gamma(s))|}, Dg(\gamma(s)) \right) ds \overset{(A.11)}{=} \int_a^b \sigma_C(s)(\gamma'(s), Dg(\gamma(s)))ds.$$

由于 $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ 是任意的，[36, 命题 2。17] 表明 $\sigma_C(s)$ 是常数，并且通过重新参数化 γ 我们可以假设 $\sigma_C \equiv 1$。证明这一点后，我们仍可利用前一个等式得到

$$g(\gamma(b)) - g(\gamma(a)) = 0,$$

这只能 仅当 $\gamma(b) = \gamma(a)$ 时才有可能。因此， γ 是一条类型为 (B) 的曲线，这一步便得证。

步骤6，证明 (5)：我们定义 $G_t \doteq \psi^{-1}(\{t\}) \setminus B_t$。对于 $t \in T$， G_t 是曲线的可数并（因为$\mathcal{H}^1(\psi^{-1}(t)) < +\infty$），因此它是一个博雷尔集。因此， B_t也是如此。我们固定 $\delta > 0$。首先选取一个包含 A_δ B_t 且满足

$$\mathcal{H}^1(\psi^{-1}(\{t\}) \cap (A_\delta \setminus B_t)) \leq \delta. \tag{A.12}$$

每个集合 $\{x_0\}$ （其中 $x_0 \in B_t$ ）都是 $\psi^{-1}(\{t\})$ 的一个连通分支。因此，与步骤1中一样，我们找到一个开集的递减序列 $U_n(x_0)$，使得 $\cap_n U_n(x_0) = \{x_0\}$，此外对所有$n$，都有 $\partial U_n(x_0) \cap \psi^{-1}(\{t\}) = \emptyset$。特别地，$\operatorname{diam}(U_n(x_0)) \to 0$。因此，如果 $n(x_0)$ 足够大，我们可以考虑

$$A \doteq \bigcup_{x_0 \in B_t} U_{n(x_0)}(x_0),$$

并实现

$$B_t \subset A \subset A_\delta, \quad \operatorname{diam}(U_{n(x_0)}) \leq \delta \text{ and } \partial U_{n(x_0)}(x_0) \cap \psi^{-1}(\{t\}) = \emptyset, \quad \forall x_0.$$

此外，我们可以选取一个可数集族 $W_m = U_{n(x_m)}(x_m)$，使得 $A = \cup_m W_m$。最后，令 $V_m \doteq W_m \setminus (W_1 \cup \cdots \cup W_{m-1})$。可以验证， V_m 仍然具有这样的性质：$\partial V_m \cap \psi^{-1}(\{t\}) = \emptyset$。进而，这使我们可以说

$$\operatorname{div}(\tau \mathcal{H}^1 \llcorner (\psi^{-1}(\{t\}) \cap V_m)) = 0 \text{ in } \mathbb{R}^2, \text{ if } \tau \doteq \frac{D^\perp \psi}{|D^\perp \psi|}. \tag{A.13}$$

事实上， $\partial V_m \cap \psi^{-1}(\{t\}) = \emptyset$ 意味着 $V_m \cap \psi^{-1}(\{t\})$ 和 $\psi^{-1}(\{t\}) \setminus V_m$ 的闭包互不相交。于是，任取一个在前者闭包的某个邻域上恒为 1、在后者闭包的某个邻域上恒为 0 的光滑紧支撑函数 σ， 对于任意 $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$，我们可以计算：

$$\int_{\psi^{-1}(\{t\}) \cap V_m} (D\eta, \tau) d\mathcal{H}^1 = \int_{\psi^{-1}(\{t\}) \cap V_m} (D(\sigma\eta), \tau) d\mathcal{H}^1 = \int_{\psi^{-1}(\{t\})} (D(\sigma\eta), \tau) d\mathcal{H}^1 = 0,$$

最后一个等式成立，因为 $t \in T_3$。因此，由（A.13）可知，存在一个 $BV(\mathbb{R}^2)$ 函数$u_{m,\,\delta}$ 使得

$$Du_{m,\delta} = \tau^\perp \mathcal{H}^1 \llcorner (\psi^{-1}(\{t\}) \cap V_m).$$

注意，减去一个常数后，我们可以假设对所有 m，都有 $\mathrm{spt}(u_{m,\delta}) \subset \mathrm{co}(V_m)$，其中 $\mathrm{co}(V_m)$ 是 V_m 的凸包的闭包。因此，由 Hölder 不等式和索博列夫不等式可得

$$\int_{\mathbb{R}^2} |u_{m,\delta}| dx \leq \mathcal{L}^2(\mathrm{spt}(u_{m,\delta}))^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |u_{m,\delta}|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq C\mathcal{L}^2(\mathrm{co}(V_m))^{\frac{1}{2}} \|Du_{m,\delta}\|(\mathbb{R}^2) \leq C\delta \mathcal{H}^1(\psi^{-1}(\{t\}) \cap V_m), \tag{A.14}$$

其中我们用到了 $\mathrm{diam}(V_m) \leq \delta$。令 $u_\delta \doteq \sum_m u_{m,\delta}$，并注意到

$$Du_\delta = \tau^\perp \mathcal{H}^1 \llcorner (\psi^{-1}(t) \cap A) \text{ in } \mathbb{R}^2.$$

由（A.14），我们得到 $\|u_\delta\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \leq C\delta$。因此，对于任意 $\Phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$，有

$$(\tau^\perp \mathcal{H}^1 \llcorner B_t)(\Phi) = \int_{B_t} (\tau^\perp, \Phi) d\mathcal{H}^1 = -\int_{(\psi^{-1}(t)\cap A)\setminus B_t} (\tau^\perp, \Phi) d\mathcal{H}^1 - \int_{\mathbb{R}^2} u_\delta \,\mathrm{div}(\Phi) dx.$$

因此，借助 $\|u_\delta\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \leq C\delta$ 以及（A.12），我们得到：

$$\begin{aligned} |(\tau^\perp \mathcal{H}^1 \llcorner B_t)(\Phi)| &\leq C(\Phi) \left(\mathcal{H}^1((\psi^{-1}(t) \cap A) \setminus B_t) + \|u_\delta\|_{L^1} \right) \\ &\leq C(\Phi) \left(\mathcal{H}^1((\psi^{-1}(t) \cap A_\delta) \setminus B_t) + \|u_\delta\|_{L^1} \right) \leq C(\Phi)\delta \end{aligned}$$

于是我们得到 $(\tau^\perp \mathcal{H}^1 \llcorner B_t)(\Phi) = 0$ 对所有 $\Phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ 都成立，因此 $\tau^\perp \mathcal{H}^1 \llcorner B_t = 0$。这意味着 $\mathcal{H}^1(B_t) = 0$，如所需。□

现在我们终于可以证明命题A.1。

命题 *A.1* 的证明。假设偏微分方程（A.2）成立。这意味着

$$0 = \int_{B_1} \beta(x)(D^\perp \psi(x), D\Phi(x)) dx, \quad \text{for all } \Phi \in C_c^\infty(B_1). \tag{A.15}$$

我们断言存在一组值 $t \in T' \subset \mathbb{R}$，满足 $\mathcal{L}^1(\mathbb{R} \setminus T') = 0$，使得对于任意连通分支 $C \subset \psi^{-1}(\{t\})$，

$$0 = \int_C \beta(x) \left(\frac{D^\perp \psi}{|D^\perp \psi|}(x), D\eta(x) \right) d\mathcal{H}^1, \quad \text{for all } \eta \in C_c^\infty(B_1). \tag{A.16}$$

这一性质的证明正是我们用到假设（2.5）的地方。不过，由于计算与推论 A.4 证明的步骤 1 最后一部分完全类似，我们只作简要说明。对于任意 $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$、 $\eta \in C_c^\infty(B_1)$，我们考虑检验函数 $\Phi_\varepsilon = \varphi(\psi_\varepsilon)\eta$，其中 $(\psi_\varepsilon)_\varepsilon$ 是一族光滑函数，在 $W^{1,p}(B_1)$ 中收敛到 ψ。将 Φ_ε 代入方程 $\mathrm{div}(\beta D^\perp \psi) = 0$ 的弱形式，可得

$$0 = \int_{\mathbb{R}^2} \beta \left(D^\perp \psi, D(\varphi(\psi_\varepsilon)\eta) \right) dx = \int_{\mathbb{R}^2} \beta\varphi(\psi_\varepsilon) \left(D^\perp \psi, D\eta \right) dx + \int_{\mathbb{R}^2} \beta\varphi'(\psi_\varepsilon)\eta \left(D^\perp \psi, D\psi_\varepsilon \right) dx. \tag{A.17}$$

由于 $p > 2$，我们立即得到第一个附加项收敛于

$$\int_{\mathbb{R}^2} \beta(x)\varphi(\psi(x)) \left(D^\perp \psi(x), D\eta(x) \right) dx. \tag{A.18}$$

我们需要证明第二项趋于零。为此，注意到（2.5）意味着 $\beta|D\psi|^2 \in L^1$，因此，对于某个常数 $C > 0$，

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^2} \beta\varphi'(\psi_\varepsilon)\eta \left(D^\perp \psi \,,\, D\psi_\varepsilon \right) dx \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}^2} \beta\varphi'(\psi_\varepsilon)\eta \left(D^\perp \psi, D\psi_\varepsilon - D\psi \right) dx \right| \\ &\leq C \int_{B_1} |\beta||D\psi||D\psi_\varepsilon - D\psi| dx \\ &\leq C \left(\int_{B_1} |\beta||D\psi|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{B_1} |\beta||D\psi - D\psi_\varepsilon|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\leq C\left(\int_{B_1}|\beta||D\psi|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{B_1}|\beta|^r\right)^{\frac{1}{2r}}\left(\int_{B_1}|D\psi-D\psi_\varepsilon|^{2r'}dx\right)^{\frac{1}{2r'}},$$

其中 $r'=\frac{r}{r-1}$是 r的共轭指数。由于我们的假设（2.5）， $2r'\leq p$，因此（A.17）中的最后一个积分趋于 0。结合（A.18）可知，（A.17）表明

$$\int_{\mathbb{R}^2}\beta(x)\varphi(\psi(x))\left(D^\perp\psi(x),D\eta(x)\right)dx=0,\qquad \text{for any } \varphi\in C_c^\infty(\mathbb{R}),\,\eta\in C_c^\infty(B_1).$$

现在，我们可以直接套用推论 A.4 第 1 步中的计算，得到所需结论（A.16）。完成这一步后，我们可以排除 C 为单点这一平凡情形，因此可以使用推论 C （2）-（3）-（4）给出的参数化，并利用面积公式将其改写为

$$\int_C\beta(x)\left(\frac{D^\perp\psi}{|D^\perp\psi|}(x),D\eta\right)d\mathcal{H}^1=\int_a^b\beta(\gamma(s))(\gamma'(s),D\eta(\gamma(s)))ds. \tag{A.19}$$

（A.16）表明（A.19）的左端为 0，而 [36, 命题 2。17]推出 β（γ（s）） 为常数，正如所需。

现在假设 β 在 ψ的几乎处处水平集的每个连通分支上都是常数。任取 $\eta\in C_c^\infty$（B_1）。那么，若 C 不是单点且 $\beta\equiv\beta_C$ 在 C上，（A.19）仍然推出

$$\int_C\beta(x)\left(\frac{D^\perp\psi}{|D^\perp\psi|}(x),D\eta\right)d\mathcal{H}^1=\int_a^b\beta(\gamma(s))(\gamma'(s),D\eta(\gamma(s)))ds=\beta_C(\eta(\gamma(b))-\eta(\gamma(a)))=0,$$

最后一个等式成立，这是由推论 A.3（2）可知的。进而，利用推论 A.3（5）中的记号和结论，我们可以考虑至多可数条曲线 $C_i\in\mathcal{C}_t$ ，并回忆$\mathcal{H}^1$（B_t） $=0$，写作

$$\int_{\psi^{-1}(\{t\})}\beta(x)\left(\frac{D^\perp\psi}{|D^\perp\psi|}(x),D\eta\right)d\mathcal{H}^1=\sum_i\int_{C_i}\beta(x)\left(\frac{D^\perp\psi}{|D^\perp\psi|}(x),D\eta\right)d\mathcal{H}^1=0. \tag{A.20}$$

因此，回想 S 推论 A.3(3)，并再次使用余面积公式 (A.5)：

$$\begin{aligned}\int_{B_1}\beta(x)(D^\perp\psi(x),D\eta)dx&=\int_{B_1\cap S^c}\beta(x)\left(\frac{D^\perp\psi}{|D^\perp\psi|}(x),D\eta\right)|D^\perp\psi|dx\\&=\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\psi^{-1}(\{t\})\cap S^c}\beta(x)\left(\frac{D^\perp\psi}{|D^\perp\psi|}(x),D\eta\right)d\mathcal{H}^1\right)dt\\&=\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\psi^{-1}(\{t\})}\beta(x)\left(\frac{D^\perp\psi}{|D^\perp\psi|}(x),D\eta\right)d\mathcal{H}^1\right)dt\overset{(A.20)}{=}0,\end{aligned}$$

其中，从第二行到第三行时，我们使用了推论 A.3(3)。至此，证明完成。 □

参考文献

[1] G. Alberti、S. Bianchini 与 G. Crippa，水平集的结构与 *Lipschitz* 映射的 *Sard* 型性质（2013），863–902。[2] ，二维连续性方程的唯一性结果，《欧洲数学会杂志》**16** （2014），第2期，201–234。[3] K. Astala、D. Faraco 与 L. Székelyhidi，凸积分与 $\mathcal{L}^p$ 椭圆方程理论，《比萨高等师范学院学报·科学类》**7** （2008年1月），1–50。[4] S. Bianchini 与 N. A. Gusev，二维稳态近似不可压缩向量场：链式法则与重整化，理性力学与分析档案**222** （2016），第2期，451–505。[5] E. Bruè、M. Colombo 与 A. Kumar，具有可积涡度的二维欧拉流的灵活性（2024年8月），见于2408.07934。[6] I. Buchowiec、P. Kamthorntaksina、K. Mazowiecka、A. Schikorra 与 A. Vincent，关于受限集合中阶梯层合的一个注记（2026年2月），见于2602.16407。

[7] T. Buckmaster、C. De Lellis、P. Isett 与 L. Székelyhidi Jr.， $1/5$-Hölder欧拉流的反常耗散，《数学年刊》第二辑 **182** 2015 1, 127 172 3374958（），第–期。MR W. Cao、J. Hirsch 与 D. Inauen，，二维[8] $C^{1\,1/3-}$ 蒙日-安培方程的极弱解，《变分法与偏微分方程》64（2025年5月），第5期。[9] W. Cao 与 L. Székelyhidi Jr.，二维蒙日-安培方程的极弱解，《中国科学：数学》62（2019年4月），第6期，1041–1056。[10] A. Choffrut 与 L. Székelyhidi Jr.，定常不可压缩欧拉方程的弱解，《SIAM数学分析杂志》46（2014年1月），第6期，4060–4074。[11] A. Choffrut 与 V. Šverák，二维不可压欧拉方程稳态解集合的局部结构，《几何与泛函分析》22（2012年1月），第1期，136–201。[12] M. Colombo 与 R. Tione， p-Laplace方程的非经典解，《欧洲数学会杂志》（2024年4月）。[13] P. Constantin、T. D. Drivas 与 D. Ginsberg，定常流体运动中的柔性与刚性，《数学物理通讯》385（2021年3月），第1期，521–563。[14] P. Constantin、W. E 与 E. S. Titi，关于欧拉方程解的能量守恒的Onsager猜想，《数学物理通讯》165（1994），第1期，207–209。[15] P. Constantin、J. La 与 V. Vicol，关于Gavrilov一篇论文的评注：Grad-Shafranov方程、具有紧支速度的三维不可压欧拉方程的定常解及其应用，《几何与泛函分析》29（2019年11月），第6期，1773–1793。[16] S. Conti、D. Faraco、F. Maggi 与 S. Müller， 2×2 对称矩阵上的秩一凸函数与秩三直线上的层合，《变分法与偏微分方程》24（2005年10月），第4期，479–493。[17] S. Conti、D. Faraco 与 F. Maggi，构造 L^1 估计反例的新方法：Korn不等式、几何刚性，以及分别凸函数梯度的正则性，理性力学与分析档案175（2004年12月），第2期，287–300。[18] C. De Lellis 与 L. Székelyhidi Jr.，作为微分包含的欧拉方程，《数学年刊》第二辑170（2009），第3期，1417–1436。MR2600877[19] ，耗散连续欧拉流，《数学新进展》193（2012年10月），第2期，377–407。[20] ， **16** 2014 7, 1467 1505 3254331[21]

耗散欧拉流与Onsager猜想，《欧洲数学会杂志》（），第–期。MR L. De Rosa 与 R. Tione，不可压欧拉方程Hölder解的精确能量正则性与典型性结果，《偏微分方程分析》15（2022年4月），第2期，405–428。[22] G. Del Nin 与 B. Wu，在粗糙平面集合上消失的无散向量场的逼近（2024年9月），见于2409.09880。[23] T. D. Drivas 与 P. Isett，私人通信。[24] T. D. Drivas 与 T. M. Elgindi，不可压欧拉方程在有限时间与无限时间内的奇点形成，《EMS数学科学综述》10（2023年11月），第1期，1–100。[25] T. D. ~~Drivas~~ 与 M. Nualart，定常层流的几何刻画（2024年10月），见于2410.18946。[26] T. M. Elgindi、Y. Huang、A. R. Said 与 C. Xie，定常欧拉流的分类定理（2024年8月），见于2408.14662。[27] A. Enciso、A. J. Fernández 与 D. Ruiz，平面上具有紧支集的光滑非径向定常欧拉流（2024年6月），见于2406.04414。[28] A. Enciso、J. Peñafiel-Tomás 与 D. Peralta-Salas，经由保拓扑凸积分方案得到的三维定常欧拉流（2025年1月），见于2501.13632。[29] L. C. Evans 与 R. F. Gariepy，《测度论与函数的精细性质》，Chapman & Hall/CRC，2015。[30] D. Faraco，关于各向同性方程解的正则性的Milton猜想，《亨利·庞加莱研究所年刊（C）：非线性分析》20（2003年10月），第5期，889–909。[31] D. Faraco、C. Mora-Corral 与 M. Oliva，借助层合得到梯度低秩的Sobolev同胚，《变分法进展》11（2016年3月）。[32] A. V. Gavrilov，具有紧支集的定常欧拉流，《几何与泛函分析》29 1, 190 2019 197（2月），第–期。[33] V. Giri、H. Kwon 与 M. Novack，基于 L^3的强Onsager定理，即将发表于：《数学年刊》（2023年5月），见于2305.18509。[34] V. Giri 与 R.-O. Radu，二维中的Onsager猜想：一种Newton-Nash迭代，《数学新进展》238（2024年10月），第2期，691–768。[35] C. Gui、C. Xie 与 H. Xu，关于二维欧拉方程定常解的一种分类（2024年5月），见于2405.15327。[36] N. A. Gusev 与 M. V. Korobkov，Nelson猜想与链式法则性质（2024年11月），见于2411.09338。[37] F. Hamel 与 N. Nadirashvili，理想流体的剪切流与无界区域中的椭圆方程，《纯粹与应用数学通讯》70（2016年9月），第3期，590–608。

[38] ———, 欧拉方程平面情形的刘维尔定理, 《理性力学与分析档案》233（2019年2月）, 第2期, 599–642。[39] , 二维环域中欧拉方程的圆形流及相关自由边界问题, 《欧洲数学会杂志》25（2021年12月）, 第1期, 323–368。[40] P. Isett, 《Onsager猜想的证明》, 《数学年刊》188（2018）, 第3期, 871–963。[41] C. Johansson, 《标量欧拉-拉格朗日方程的野解》, 《美国数学会汇刊》（2024年5月）。[42] B. Kirchheim, 《微结构的刚性与几何》, 教授资格论文（2003）。[43] B. Kleiner、S. Müller、L. Székelyhidi Jr. 和 X. Xie, 《欧几里得乘积结构的刚性：低索伯列夫指数下的失效》, 《纯粹与应用分析通讯》（2024）。[44] X. Lamy、A. Lorent 和 G. Peng, 《二维微分包含的定量刚性》, 《国际数学研究通知》（2023年5月）, 1–19, 见 2208.08526。[45] J. Lewicka 和 M. R. Pakzad, 《二维蒙日-安培方程的凸积分》, 《偏微分方程分析》10（2017年4月）, 第3期, 695–727。[46] J. Maly、D. Swanson 和 W. Ziemer, 《索伯列夫映射的余面积公式》, 《美国数学会汇刊》355（200201）。[47] S. Müller, 《微结构与相变的变分模型》, 1999。[48] S. Müller 和 V. Šverák, 《利普希茨映射的凸积分与正则性反例》, 《数学年刊》, 第二辑 **157** 2003 3, 715 742 1983780 （）, 第–期。MR M. Novack 和 V. Vicol, 《间歇性昂萨格定理》, [49]《数学新进展》233 1, 223 2023 323（2月）, 第–期。[50] D. Ntalampekos, 《平面域中的单调索伯列夫函数：水平集与光滑逼近》, 《理性力学与分析档案》238（2020年8月）, 第3期, 1199–1230。[51] M. R. Pakzad, 《关于等距浸入的索伯列夫空间》, 《微分几何杂志》66（2004年1月）, 第1期。[52] D. Ruiz, 《紧支撑稳态二维欧拉方程解的对称性结论》, 《理性力学与分析档案》247（2023年4月）, 第3期。[53] Y. Wang 和 W. Zhan, 《关于二维不可压欧拉方程的刚性》（2023年7月）, 见 2307.00197。