arXiv:2603.03161v1 [math.AP] 3 Mar 2026

反应扩散椭圆问题的稳定解

´Xavier Cabré

Abstract. 我们研究反应扩散椭圆型偏微分方程的稳定解。我们从正则性问题入手，首先讨论经典拉普拉斯算子。我们与 Figalli、Ros-Oton 和 Serra 合作，证明了稳定解在最优维数 9 以内均为光滑解，从而解决了 Brezis 于 20 世纪 90 年代中期提出的一个未解决问题。我们将介绍这一结果，并讨论分数阶拉普拉斯算子——它自然地出现在边界反应问题中——、 p-拉普拉斯算子以及极小曲面的相关进展和未解决问题。

随后我们转向存在性问题，从内部反应的 Casten-Holland 和 Matano 定理开始。该定理指出，在凸域中满足零诺伊曼边界条件时，不存在非常数稳定解。我们将介绍与 C´onsul 和 Kurzke 的一项近期成果，该成果表明，对于边界反应，类似的结论并不成立。为此需要发展一种适用于实值函数的新金兹堡-朗道理论，并分析实直线上的半拉普拉斯算子；对于后者，我们将介绍新的结果和未解决问题。

1. 希尔伯特第十九问题的正则性

在许多物理和几何问题中，可观测到的状态都是某个泛函的极小值。当可能的状态由一个或多个实变量的函数 u描述时，该泛函是一个作用于这类函数的实值映射 $\mathcal{E}$。在经典力学中， $\mathcal{E}$ 称为作用量 ，其定义为拉格朗日量的积分。一个简单的例子是重力作用下粒子的运动：其位置由 $u = u(x)$ 表示，其中 $x = t \in \mathbb{R}$ 表示时间；作用量则是动能减去势能后的积分。在几何学中，两个基本例子是测地线——黎曼流形中长度泛函的临界点曲线——以及极小曲面，它们是在欧几里得空间中面积泛函的临界点超曲面。

希尔伯特第十九问题问的是：椭圆泛函的极小化子是否必然是解析的。对于形如以下形式的泛函

$$\mathcal{E}(u) = \int_\Omega L(\nabla u(x))\, dx,$$

其中 L： $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 一致凸函数，且 u： $\Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$。这一问题于 20 世纪 50 年代末由 Ennio De Giorgi 和 John Forbes

2020 数学主题分类。 35J61, 35J15, 35B45, 35B65。作者获得了由 MCIN/AEI/10.13039/501100011033 和欧洲区域发展基金（ERDF）资助的项目 PID2021-123903NB-I00 和 RED2022-134784-T 的资助，项目口号为“建设欧洲”，还获得了加泰罗尼亚项目 2021-SGR-00087 的资助，以及西班牙国家研究署通过 Severo Ochoa 和 Mar´ıa de Maeztu 卓越研发中心与单位计划（CEX2020-001084-M）提供的资助。

Nash, Jr. 独立完成的工作解决了。他们证明了一个 H¨older 连续性结果，从而肯定地回答了当 L 为解析的时 Hilbert 问题的答案。我们在下文 [14], 介绍的工作，针对以下形式的拉格朗日函数重新探讨了同一个问题

$$L(\nabla u, u) = \tfrac{1}{2}|\nabla u|^2 - F(u),$$

它们显式依赖于变量 u。

力学中的 最小作用量原理指出，可观测状态不仅是作用量的临界点，也是绝对极小值点。在凸的情形下——当 $L = L(\nabla u) = L(p)$ 是关于 $p \in \mathbb{R}^n$的凸函数时——泛函 $\mathcal{E}$ 本身也是凸的，因此任何临界点（如果存在）自动就是绝对极小值点。在这种情形下，最小作用量原理完全成立。

然而，在某些现实情形中，由于相应的泛函并非凸函数，该原理并不成立。我们可能观察到的状态仅仅是局部极小值——即在小扰动范围内的极小值——即便此时也存在绝对极小值点。特别是，这些状态属于稳定态，也就是说，泛函在这些点处的二次变分是半正定的。下面我们将给出两个具体的现实例子来说明这一事实。

2. Stable minimal surfaces

一个很有启发性的例子是悬链面：由肥皂膜形成的极小曲面，位于两个同轴平行圆环之间。Ito 和 Sato 在一篇精彩的论文《肥皂膜悬链面的原位观测——一个简单的教育性物理实验》 [36], 中，在实验室里制作了悬链面，并在两个圆形金属丝环之间的距离不断增大时对其进行录像。除了悬链面，面积泛函始终还存在另一个临界点：由圆环张成的两个平圆盘。当距离足够小时，存在两个悬链面；其中，颈部较粗的那个是面积的绝对极小值点（而圆盘的面积显然大得多）。随着圆环间距增大，存在一个距离 h_0 ，此时两种状态——颈部较粗的悬链面和一对圆盘——的面积相同。略超过这个距离后，圆盘成为绝对极小值点，而悬链面则仅作为局部极小值继续存在。尽管如此，在一段间距范围 $h > h_0$内，录像中的曲面仍然是悬链面，而非绝对极小化的圆盘。因此，这个悬链面是一个稳定极小曲面；这里的稳定性定义与上一节相同。

在整个过程中，较细颈的悬链面也始终存在，但它一直是不稳定极小曲面（这与以下一般图景一致：具有两个局部极小值的泛函还应当具有第三个不稳定临界点）。最终，在更大的临界距离 h_c处，局部极小值（粗颈悬链面）与不稳定临界点（细颈悬链面）合并，产生一个拐点。在 h_c之后，两个圆盘的构型成为唯一的临界点。在实验 [36], 中，在达到距离 h_c 之前的短暂瞬间，镜头捕捉到了不稳定悬链面。紧接着，细颈塌缩，肥皂膜转变为两个圆盘。

极小曲面的正则性理论一直是椭圆型和抛物型偏微分方程理论中许多重大进展的源泉。在20世纪60年代，意大利

学派证明了西蒙斯锥

$$x_1^2 + \ldots + x_m^2 \;=\; x_{m+1}^2 + \ldots + x_{2m}^2$$

在 $2m \geq 8$ 时，是面积绝对极小化者（对于其在任意 $\mathbb{R}^{2m}$ 球中的边界值），但在维数 2、4 和 6 中甚至不稳定。[1] 因此，当 $n \geq 7$ 时，维数为 n 的极小曲面的极小化者可能会出现锥形奇点。与此同时，众多学者作出了一系列杰出贡献（最终汇聚于 J. Simons 的工作），由此确立：当 $n \leq 6$ 时， n 维的（绝对）极小化极小曲面在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中总是光滑的。

将这一正则性结果推广到更广泛的稳定极小曲面这一类别，长期以来一直是一个未解决问题。20世纪70年代末，Fischer-Colbrie 和 Schoen [32] 以及 do Carmo 和 Peng [27] 分别独立确立了 $\mathbb{R}^3$ 中曲面的正则性。更近一些，在 2020 年代，Chodosh 和 Li [21], 将该结果推广到了 $\mathbb{R}^4$，Chodosh、Li、Minter 和 Stryker [22], 将其推广到了 $\mathbb{R}^5$, Mazet [39]则将其推广到了 $\mathbb{R}^6$。 $\mathbb{R}^7$ 的情形（即 $n = 6$）仍是一个未解决问题。

3. Regularity of stable solutions to interior reaction problems

论文 [14]探讨了类似的问题，即以下形式方程的稳定解的正则性： $-\Delta u = f(u)$，其中 Δ 是拉普拉斯算子。它们称为半线性椭圆方程或反应扩散椭圆方程，见于许多物理和生物学情境。在下文所述的燃烧问题中，会出现与悬链面类似的现象。为描述这一现象，我们先从基本设定开始。

本节结果更为详尽且自成一体的阐述可见 [7]。

考虑半线性椭圆方程

$$-\Delta u = f(u) \qquad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^n, \tag{3.1}$$

其中 Ω 是一个有界区域， $f \in C^1(\mathbb{R})$，且 $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$。注意，(3.1) 是以下泛函的欧拉-拉格朗日方程：

$$\mathcal{E}(u) := \int_\Omega \Big(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 - F(u) \Big)\, dx, \tag{3.2}$$

其中 F 是 f的一个原函数。 $\mathcal{E}$ 在 u 处的二次变分为

$$\frac{d^2}{d\varepsilon^2}\Big|_{\varepsilon=0} \mathcal{E}(u + \varepsilon\xi) = \int_\Omega \Big(|\nabla \xi|^2 - f'(u)\xi^2 \Big)\, dx.$$

如果在 u处的二次变分非负，也就是说，如果.....那么我们称 u 是 Ω 中方程 (3.1) 的稳定解。

$$\int_\Omega f'(u)\xi^2\, dx \leq \int_\Omega |\nabla \xi|^2\, dx \quad \text{ for all } \xi \in C^1(\overline{\Omega}) \text{ with } \xi_{|\partial\Omega} \equiv 0. \tag{3.3}$$

[1]这种不同的行为大致可以这样解释：球坐标下的面积雅可比行列式 $r^{2m-2}\, dr$ 会随着维数 $2m$ 的增加而在原点处变小。对于$2m = 2$，极小化解显然会避开原点：对于圆锥的边界值，它由两条平行线构成，而不是穿过原点的“十字”。

请注意， u 的稳定性是在与 u 在边界 $\partial\Omega$ 上相一致的函数 $u+\varepsilon\xi$ 这一类函数中定义的。稳定性等价于假设方程 (3.1) 在 u处的线性化算子在 Ω 中的第一狄利克雷特征值非负，即$-\Delta - f'(u)$。

如果存在一个局部极小值，使得 $\mathcal{E}$（也就是说，它是对具有相同边界值的小扰动而言的极小值），那么它也将是一个稳定解。

我们关注方程 (3.1) 的稳定解的正则性，这个问题自20世纪70年代以来一直受到研究。其研究动机源于下文所述的盖尔范德型问题 (3.5)，其中 $f(u) = e^u$ 是一个模型情形。另一个值得注意的典型非线性项是 $f(u) = (1+u)^p$，其中 $p > 1$。不过，我们将看到，所得结果涵盖了范围极广的非线性项。请注意，对于上述模型非线性项，更一般地说，当 f 满足下文的 (3.4) 时，在 Ω 上所有与任意给定函数 u具有相同边界值的函数中，能量泛函 (3.2) 无下界。[2] 因此，该泛函不存在绝对极小值。不过，我们接下来将看到，在某些重要情形下，它存在稳定解。

假设 $f\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ 是 C^1 且

$$f \text{ is nondecreasing, convex, and satisfies } f(0) > 0 \text{ and } \lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{t} = +\infty. \quad (3.4)$$

给定常数 $\lambda > 0$，考虑问题

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda f(u) & \text{in } \Omega \\ u > 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.5)$$

首先注意， $-\Delta u = \lambda f(u)$ 不存在平凡解（$u \equiv 0$ 不是解，因为 $\lambda f(0) > 0$）。与此同时，泛函 $\mathcal{E}$ 没有下界（见脚注 2），因此不存在绝对极小值。然而，对于每个 $\lambda \in (0, \lambda^\star)$，(3.5) 都有唯一的稳定 经典解 u_λ，其中 $\lambda^\star \in (0, +\infty)$ 是某个参数；例如参见 Dupaigne 的著作 [28]。另一方面，当 $\lambda > \lambda^\star$ 时不存在弱解（弱解有多种定义）。函数 u_λ 在 Ω 中关于 $\lambda < \lambda^\star$ 有界，因而是正则的；它们在 λ 中构成一个递增序列。当 $\lambda \uparrow \lambda^\star$ 时，它们收敛到 (3.5) 的一个 $L^1(\Omega)$ 分布意义下的稳定 解 $u^\star$，其中 $\lambda = \lambda^\star$。它称为该问题的极限解，根据非线性项 f 和区域 Ω 的不同，它可能是正则的，也可能是奇异的。

当 $f(u) = \lambda e^u$ （这就是所谓的盖尔范德问题）时，(3.4) 与容器中化学活性气体混合物的热自燃有关。该模型由 Frank-Kamenetskii 于20世纪30年代提出，但在巴伦布拉特撰写了盖尔范德于1963年编辑的文集 [33],第15章后，才在数学界广为人知。巴伦布拉特根据化学动力学中的阿伦尼乌斯定律，选择令 $F(u) = \lambda e^u$，其中 λ 为正数。注意，边界 $\partial\Omega$ 上的温度保持为 $u = 0$。如上所述，其解的结构与悬链面的情形相似。事实上，在参数范围$\lambda \in (0, \lambda^*)$内，稳定解 u_λ 并非绝对极小值，因为

[2]为看出这一点，对任意满足 $v \geq 0$ 且 $v \not\equiv 0$的$v \in C_c^1(\Omega)$，考虑 $\mathcal{E}(u+tv)$，并令 $t \to +\infty$。

$\mathcal{E}$ 在下方无界。相反，当 $\lambda > \lambda^*$时，不存在解——这与悬链面在两根导线之间的距离 h大于 h_c时不存在的情形相同。

To b为了更好地理解这个问题，我们来考虑非线性热方程

$$v_t - \Delta v = \lambda f(v), \tag{3.6}$$

其中 $v = v(x, t)$， t 表示时间。现在，方程 (3.1) 的稳定解 $u = u(x)$ 可以理解为方程 (3.6) 的一个稳态解，并且按照李雅普诺夫意义是稳定的——注意，简单计算可知，作用泛函 $\mathcal{E}(v(\cdot, t))$ 随时间 t单调不增。由于热源 $f(v(x, t))$ 或 $f(u(x))$，这个问题是非线性的：产热取决于实际温度，且这种依赖是非线性的。如 [34, 35], 所述，方程 (3.6) 描述了初始温度均匀的温度场 $v(\cdot, 0) \equiv 0$ 在空间中扩散，并因反应项 $\lambda f(v)$ 产生的放热而在容器中升高的过程——注意，在盖尔范德问题中，初始热源 $\lambda f(0) = \lambda e^0 = \lambda$ 已经为正。存在方程 (3.1) 稳定解的参数 λ 对应于点火失败（反应组分发生部分氧化，最终建立起一个等于该稳定解的稳态温度分布）。相反，$\lambda > \lambda^*$ （即不存在稳态解时）意味着燃烧过程成功自燃。

3.1. **内部正则性结果**。

在我们的设定中，如同第2节所处理的极小曲面中的西蒙斯锥，在大维数下存在一个显式的奇异稳定解（具有有限能量）。事实上，对于 $n \geq 3$,

$$u = \log \frac{1}{|x|^2} \quad \text{solves (3.1) weakly, with } f(u) = 2(n-2)e^u \text{ and } \Omega = B_1,$$

并在 ∂B_1上为零。利用哈代不等式，[3] 我们看到线性化算子$-\Delta - 2(n-2)e^u = -\Delta - 2(n-2)|x|^{-2}$ 在$2(n-2) \leq (n-2)^2/4$时是非负的，即当 $n \geq 10$时。因此，只要 $n \geq 10$，形如(3.1)的方程便存在奇异的 $W^{1,2}(B_1)$稳定解。由我们的结果将会看到，这种情况对 $n \leq 9$不会发生。

在20世纪70年代，克兰德尔和拉比诺维茨的开创性论文 [26] 确立了当 $n \leq 9$ 且 f 为指数函数 $f(u) = e^u$ 或带有 $p > 1$的幂函数$f(u) = (1+u)^p$ 时 $u^\star$ 的有界性。在九十年代中期，Brezis就更大一类非线性项(3.4)询问是否有类似结果（参见例如 [3]），这一问题催生了以下按时间顺序引用的若干工作。

Nedev [41] 证明了 $n \leq 3$的正则性。对于径向情形，Cabr´e 和 Capella [10] 证明，对于每个非线性项 f，只要 $n \leq 9$，单位球内方程 (3.1) 的每个稳定径向 $W^{1,2}(B_1)$ 解都有界。回到一般非径向情形，Cabr´e [8] 于 2010年为 $n \leq 4$ 证明了一个适用于所有非线性项的稳定正则解内部先验界。作者最近在 [9]给出了这一结果的另一种证明。这进一步得到了 $u^\star$的正则性

[3]例如，可参见 [16],中的命题 1.20，其证明非常简单。

直至凸域的边界，只要 $n \leq 4$。Villegas 在 [46]巧妙地去除了对区域凸性的假设。

最优维数 $n \leq 9$ 最终于 2020 年由 Cabr´e、Figalli、Ros- Oton 和 Serra [14], 在假设 $f \geq 0$ 的条件下，对内部正则性问题实现；而对边界正则性问题，则由 $f \geq 0$、$f' \geq 0$和$f'' \geq 0$ 实现。[4] 以下是 [14]的内部正则性结果。该结果在 $n \leq 9$时，为稳定解提供了内部 H¨older 先验界。此外，它还在任意维数下建立了内部 $W^{1,\,2}$估计（事实上还得到了更优的 $W^{1,\,2+\gamma}$界）。所有量都仅由解的 L^1 范数控制。关于非线性项，我们只需要 $f \geq 0$。这里以及全文中，“维数常数”指仅依赖于 n的常数。

定理 3.1 ([14], 定理 1.2)。 设 $u \in C^\infty(B_1)$ 是 $-\Delta u = f(u)$ 在 $B_1 \subset \mathbb{R}^n$中的一个稳定解，其中 $f \in C^1(\mathbb{R})$是某个非负函数。

于是，

$$\|\nabla u\|_{L^{2+\gamma}(B_{1/2})} \leq C\|u\|_{L^1(B_1)} \quad \textit{for every } n \geq 1$$

对于某些维数常数 $\gamma > 0$ 和 C。此外，

$$\|u\|_{C^\alpha(\overline{B}_{1/2})} \leq C\|u\|_{L^1(B_1)} \quad \textit{if } n \leq 9,$$

其中 $\alpha > 0$ 和 C 是维数常数。

该定理以光滑稳定解的先验界形式表述。由此通过逼近方法可以推出：当 f 为非负、非递减且凸时，方程（3.1）的 $W^{1,2}$ 稳定弱解具有内部正则性。当 f 满足（3.4）时，式（3.5）的极限解 $u^\star$ 也具有同样的性质。

对于 $n \geq 10$（且仍有 $f \geq 0$）， [14]证明了稳定解在区域内部属于某些 Morrey空间。这一结果几乎达到了最优，后来 Peng、Zhang 和 Zhou [43], 将其改进至最优。例如，对于 $n = 10$， [43] 证明了稳定解在内部属于 BMO；Figalli 和 Mayboroda 也独立得到了这一结果（私人通信）。

3.2. **边界结果**。

现在我们转而讨论边界正则性。众所周知，当区域 Ω 为凸区域，且我们考虑齐次狄利克雷边界条件时，定理 3.1 的内部估计和移动平面法可推出直到边界的 L^∞ 估计；参见 [8] 及 [14]的推论 1.4。由于这种方法不适用于非凸区域， [14] 着手研究更一般区域中的边界正则性，并证明了以下结果。

定理 3.2 ([14], 定理 1.5). 设Ω $\subset \mathbb{R}^n$ 是一个属于 C^3类的有界区域，且 $u \in C^0$(Ω) $\cap\, C^2$(Ω) 是以下方程的稳定解

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \textit{in } \Omega \\ \quad u = 0 & \textit{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

假设 f： $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 非负、非递减且凸。

[4]关于为何存在一个正则性的最大维数（此处为 9）的一种启发式解释，正如之前脚注 1 中所述。

那么，

$$\|\nabla u\|_{L^{2+\gamma}(\Omega)} \le C_\Omega \|u\|_{L^1(\Omega)} \quad \textit{for every } n \ge 1, \tag{3.7}$$

and

$$\|u\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})} \le C_\Omega \|u\|_{L^1(\Omega)} \quad \textit{for } n \le 9,$$

其中 $\gamma > 0$ 和 $\alpha > 0$ 是量纲常数，而 C_Ω 仅取决于 Ω。

Erneta [30, 31, 29] 改进了此前的结果，使其适用于 $C^{1,\,1}$ 维区域。

根据该定理的先验估计，可以推导出方程 (3.5) 的极限解 $u^\star$ 的相应正则性结果。

$W^{1,\,2}$ 正则性结果 (3.7) 解决了 [4, 未解决问题 1], ，这是 Brezis 和 V´azquez 提出的问题。此前，在对非线性项作出更强假设 (3.4) 的条件下，Nedev [41] 证明了 $n \le 5$ 的情形，Villegas [46]证明了 $n = 6$ 的情形。

3.3. **内部估计的三个要素**。

我们首先注意到，通过逼近，稳定性不等式 (3.3)

$$\int_\Omega f'(u)\xi^2\,dx \le \int_\Omega |\nabla\xi|^2\,dx,$$

不仅对在 $\partial\Omega$ 上消失的 $C^1(\Omega)$ 函数 ξ 成立，对 Ω 内所有在 $\partial\Omega$ 上消失的 Lipschitz 函数 ξ 也成立。因此，我们可以考虑形如 $\xi = \mathbf{c}\eta$ 的测试函数，其中 $\mathbf{c} \in W^{2,\infty}(\Omega)$，$\eta$ 是 Ω 内的 Lipschitz 函数，且 $\mathbf{c}\eta$ 在 $\partial\Omega$ 上消失。于是，由于

$$\int_\Omega |\nabla\xi|^2\,dx = \int_\Omega \big(|\nabla\mathbf{c}|^2\eta^2 + \mathbf{c}\nabla\mathbf{c}\nabla\eta^2 + \mathbf{c}^2|\nabla\eta|^2\big)\,dx,$$

对最后一个积分的第二项进行分部积分，我们得到

$$\int_\Omega \big(\Delta\mathbf{c} + f'(u)\mathbf{c}\big)\mathbf{c}\,\eta^2\,dx \le \int_\Omega \mathbf{c}^2|\nabla\eta|^2\,dx. \tag{3.8}$$

这里的关键在于，如果我们取一个在边界上消失的 η，那么就可以自由选择函数 $\mathbf{c}$ 在 $\partial\Omega$ 上的任意取值。还要注意，表达式 (3.8) 引入了作用于 $\mathbf{c}$ 的线性化算子 $\Delta + f'(u)$。稍后，函数 $\mathbf{c}$ 有两个至关重要的不同选取：下文的 (3.10) 和 (3.11)。

H¨older 正则性的证明基于结合三个估计。在内部情形中，第一个估计（其中出现限制条件 $n \le 9$ ）如下。这里不需要 $f \ge 0$ 。全文中我们将使用以下记号

$$r = |x| \qquad \text{and} \qquad u_r = \frac{x}{|x|}\cdot\nabla u.$$

命题 3.3 ([14], 引理 2.1)。 设 $u \in C^\infty(B_1)$ 是 $B_1 \subset \mathbb{R}^n$ 中 $-\Delta u = f(u)$ 的一个稳定解，其中 $f \in C^1(\mathbb{R})$是某个函数。

若 $3 \le n \le 9$，则

$$\int_{B_\rho} r^{2-n}u_r^2\,dx \le C\rho^{2-n}\int_{B_{3\rho/2}\setminus B_\rho} |\nabla u|^2\,dx \tag{3.9}$$

对所有 $\rho < 2/3$，其中 C 是维数常数。

该结果是利用 (3.8) 证明的，其中

$$\mathbf{c} = x \cdot \nabla u = r u_r \quad \text{and} \quad \eta = r^{(2-n)/2}\zeta, \tag{3.10}$$

其中 ζ 是一个截断函数。回顾一下， $r = |x|$。

注意，该命题要求 $n \geq 3$。然而，正如 [14]，中那样，在解中添加多余的独立变量，可以看出它也可用于在一维和二维情形下证明定理 3.1。

如果估计式 (3.9) 右端的被积函数是 u_r^2 ，而不是 $|\nabla u|^2$，那么根据“填洞技巧”， u 的 H¨older 正则性便可直接由此得到；参见 [14]。为克服这一困难，我们还需要另外两个要素。

第一个要素采用如下选取

$$\mathbf{c} = |\nabla u| \tag{3.11}$$

在 (3.8) 中，并导出某些 L^2 和 L^1 二阶导数估计。由此，我们将推导出以下命题中关于 ∇u 的 L^2 估计，该命题适用于所有维数。

命题 3.4 ([14], 命题 2.5). 设 $u \in C^\infty(B_1)$ 是$-\Delta u = f(u)$ 在 $B_1 \subset \mathbb{R}^n$ 中的一个稳定解，其中 $f \in C^1(\mathbb{R})$是某个非负函数。

那么，

$$\|\nabla u\|_{L^2(B_{1/2})} \leq C\|u\|_{L^1(B_1)} \tag{3.12}$$

其中 C 是某个维数常数。

命题 3.4 为证明 H¨older 正则性迈出了第二步。具体而言，从命题 3.3 的估计 (3.9) 出发，例如取 $\rho = 5/8$。接下来，用有限个适当小半径的球覆盖 (3.9) 右侧的环域，其中球的个数仅依赖于维数。然后，在每个球中对 (3.12) 作适当缩放，并令 u 替换为稳定解 $u - t$；该解满足$-\Delta v = f(v + t)$，其中 t 是一个稍后选取的常数。将所有球中 (3.12) 右侧相加，便可得出： $B_{1/2}$ 中 $r^{2-n}u_r^2$ 的积分可由环域 $B_1 \setminus B_{1/2}$ 上 $u - t$ 的 L^1 范数控制。

为了控制这最后一个量，我们将使用最后的第三个要素，即下文命题 3.5 中环域上的估计 (3.13)，该估计最初由 Cabr´e 在 [6] 中建立。论文 [14] 则改用了另一个相关结果，该结果并没有如此“干净”的表述。此外，那里是通过反证紧性证明得到的。相反，在 [6], 中，命题 3.5 是以定量方式证明的。

命题 3.5 ([6], 定理 1.4). 设 $u \in C^\infty(B_1)$ 在球$B_1 \subset \overline{\mathbb{R}}^n$中是超调和的。

于是，

$$\left\|u - \fint_{B_1 \setminus B_{1/2}} u\right\|_{L^1(B_1 \setminus B_{1/2})} \leq C\|u_r\|_{L^1(B_1 \setminus B_{1/2})} \tag{3.13}$$

and

$$\left\|u - \fint_{B_1} u\right\|_{L^1(B_1)} \leq C\|u_r\|_{L^1(B_1)} \tag{3.14}$$

其中某个维数常数为 C。

现在注意，按照上述方式依次使用这三个命题，可得到式 (3.9)，其中右侧的 ∇u 被 u_r 取代。然后，借助“填洞技巧”很容易得到 H¨older 正则性。

3.4. 关于径向 Poincar´e 不等式。 </style}有人可能会对 (3.13) 和 (3.14) 是否对所有函数 u 都成立提出疑问，而不仅仅是对超调和函数成立。对于 $n \geq 2$，这两个不等式都不成立。事实上，考虑以下一族光滑函数即可看出这一点

$$u^\varepsilon(x) := \varphi(|x|/\varepsilon)\, x_n/|x|,$$

其中 $\varepsilon \in (0,1)$，φ 光滑且非负，在 $(0, 1/4)$ 上为零，并在 $(1/2, \infty)$ 上恒等于 1。于是，u_r^ε 的支集包含于 $B_{\varepsilon/2} \setminus B_{\varepsilon/4}$，其 $L^1(B_1)$ 范数有一个不依赖于 $C\varepsilon^{n-1}$ 的上界。另一方面，为了从下方控制 $u^\varepsilon - \int_{B_1\setminus B_{1/2}} u$ 的 $L^1(B_1\setminus B_{1/2})$ 范数（或者类似地，控制 $u^\varepsilon - \int_{B_1} u$ 的范数），若 $\int_{B_1\setminus B_{1/2}} u \leq 0$（$\int_{B_1\setminus B_{1/2}} u \geq 0$ 的情形可类似处理），我们可以只在 $\{1/2 \leqslant |x| < 1, x_n > 0\}$ 上积分。在这个集合中，$|u^\varepsilon - \int_{B_1\setminus B_{1/2}} u| = u^\varepsilon - \int_{B_1\setminus B_{1/2}} u \geq u^\varepsilon = x_n/|x|$，因此 $L^1(B_1 \setminus B_{1/2})$ 范数大于一个与 ε 无关的正数。

相反，很容易验证（将在 [17]中完成），对于所有在 ∂B_1 上为零的函数，径向庞加莱不等式(3.13)和(3.14)都成立（在这种情况下，无需从函数 u 中减去一个常数，不等式也能成立）。

在即将发表的论文 [17], 中，Cabr´e和Saari将根据维数以及 p，确定上述径向庞加莱不等式是否在 L^p 而非 L^1中成立。

定理3.6 ([17])。给定 $p \in [1, \infty)$，当且仅当满足以下条件时，对于所有超调和函数，环域中的不等式(3.13) 成立，且其左端和右端的 L^1 均替换为 L^p

- 要么 $n \leq 3$ 且 $1 \leq p < \infty$,
- 要么 $n \geq 4$ 且 $1 \leq p < (n-1)/(n-3)$。

此外，在不等式不成立的指数范围内(即，$p \geq (n-1)/(n-3)$)，存在一列光滑超调和函数，它们构成该不等式成立性的反例，并且收敛到函数

$$u(x) = cr^a + G(\sigma),$$

其中，$x = r\sigma$，$\sigma \in S^{n-1}$、c 和 $a < 0$ 为适当的常数，而 G 是球面拉普拉斯算子的格林函数。

我们给出了该结果的两种不同证明。第一种证明相当初等：它将拉普拉斯算子分解为径向部分和球面部分，之后结合椭圆正则性，在球面上运用分部积分和对偶论证。第二种证明使用球谐函数的傅里叶分解。

3.5. **相关方程。未解决问题。**

3.5.1. 方程 $(-\Delta)^s u = f(u)$（其中 $0 < s < 1$）涉及分数阶拉普拉斯算子，接下来几节将结合边界反应问题对其进行讨论。对于该方程，稳定解正则性的最优维数范围，目前仅在 $f(u) = \lambda e^u$ 时得到确定。这一成果来自 Ros-Oton [44] 的一篇杰出论文。该论文得出的维数范围取决于 $s \in (0, 1)$，预计也适用于其他非线性项。不过，即使在径向情形下，这仍是一个未解决问题。最新进展见 Cabr´e 和 Sanz-Perela 在一般非径向情形下发表的论文 [18]；他们将[14] 中的技术推广到半拉普拉斯算子（$s = 1/2$），从而证明了对于所有非负凸非线性函数，在维数为 $n \le 4$ 时具有内部正则性——此处，当 $s = 1/2$时，预计 $n \le 8$ 是最优结果。

3.5.2. [14]的内部结果已由 Cabr´e、Miraglio 和 Sanch´on [15]推广到 p-拉普拉斯算子。当 $p > 2$ 时，这项工作达到了稳定解内部正则性的最优维数。对于 $1 < p < 2$，能否达到预期的最优维数仍是一个未解决问题。

3.5.3. Bruera 和 Cabr´e [5] 将 [14] 的部分技术推广到微机电系统（MEMS）问题的稳定解，从而在最优范围 $n \le 6$ 内获得了正则性结果。此处的方程为 $-\Delta u = \lambda f(u)$，针对满足 $[0, 1) \to \mathbb{R}$ 且在 $u = 1$ 处爆破、并且满足$\int_0^1 f = +\infty$的正非线性项 f。在这一新设定下，当 $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} < 1$ 时，称解为正则解。不过，该结果要求非线性项满足 Crandall-Rabinowitz 型假设；更确切地说，要求 $\liminf_{t\uparrow 1} (f f''/(f')^2)(t) > 1$——或者等价地，要求$f^{-a}$ 在 1 附近对某个 $a > 0$ 为凹函数。能否去掉这一 Crandall-Rabinowitz 条件，仍是一个未解决问题。

3.5.4. 随后，Peng、Zhang 和 Zhou 的一项有趣结果 [42]证明，对于 $n = 5$ 和拉普拉斯算子，无需假设 $f \ge 0$，即可得到内部 H¨older 正则性。然而，H¨older 控制由解的 $W^{1,2}$ 范数给出，而不是由 L^1 范数给出。这在维数 5 的情形下确立了 Cabr´e [8, 9] 针对 $n \le 4$的先前类比结果。在一般非径向情形下，尚不清楚在不满足假设$f \ge 0$的情况下，是否能对 $6 \le n \le 9$ 得到内部 L^∞ 估计。

3.5.5. 我们的边界正则性结果需要 $f \ge 0$、 $f' \ge 0$和 $f'' \ge 0$。证明 [14] 和 [6], 中的证明虽然完全不同，但都需要这三个条件。目前尚不清楚这些假设能否放宽。

4. Stable solutions to boundary reaction problems

现在我们转向边界值未被指定的反应问题。也就是说，极小化子和稳定解是在较大的空间 $H^1(\Omega)$ 中考虑，而不是在较小的空间 $H^1_0(\Omega)$ 中（例如，对于零狄利克雷边界值的情形）。因此，临界点满足诺伊曼边界条件（法向导数 $\partial_\nu u$ 取某一值），而非狄利克雷边界条件。

4.1. 零诺伊曼边界条件下的内部反应。以下是一项著名结果，发表于20世纪70年代末，由 Casten 和 Holland 证明，Matano 也独立证明了该结果。它确立了在 $\mathbb{R}^n$ 的凸域中，诺伊曼问题不存在非恒定稳定解。

定理 4.1 ([20, 38])。 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个有界、光滑的凸区域，且$f \in C^1(\mathbb{R})$。假设 $u \in C^2(\Omega)$ 是诺伊曼问题的一个解

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & in\ \Omega \\ \partial_\nu u = 0 & on\ \partial\Omega \end{cases}$$

并且 u 是稳定的，即

$$\int_\Omega f'(u)\,\xi^2\,dx \le \int_\Omega |\nabla \xi|^2\,dx \qquad for\ all\ \xi \in C^1(\overline{\Omega}).$$

那么， u 是常数。

这个结果的证明很简单。为了理解其表述，考察*Allen-Cahn*方程很有意思

$$\begin{cases} -\Delta u = \dfrac{1}{\varepsilon^2}(u - u^3) & \text{in } \Omega \\ \partial_\nu u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.1}$$

它是该泛函的一阶变分

$$\hat{E}_\varepsilon(u) = \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{1}{4\varepsilon^2}(1-u^2)^2 \right) dx. \tag{4.2}$$

这里的势能对应于双阱势。临界点将满足 $-1 \le u \le 1$。

一个著名的 Γ-收敛结果，[40, 37]，指出，缩放后的能量 $\hat{E}_\varepsilon$ 当 $\varepsilon \to 0$ 时，收敛到过渡集周长的一个倍数；在该过渡集中，特征函数 u 从 -1变为 1。更确切地说，极限能量为

$$\hat{E}(u) = \begin{cases} c\,\mathrm{Per}_\Omega(\{u = 1\}) & \text{if } u(x) = \pm 1 \text{ a.e. in } \Omega \\ +\infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

为了说明定理 4.1，注意，给定一个严格凸域（为简便起见，考虑平面上的情形 $\mathbb{R}^2$）以及任意一条直线段（它是 Ω 中的极限过渡层，解在此处从 -1 变为 1——我们取直线段，是因为它必须使周长泛函或长度泛函达到极小），连接 Ω 边界上的两点时，利用 Ω 的凸性，总能在边界上找到另外两个相近的点，并用一条更短的直线段将它们连接起来。这说明极限问题不存在局部极小值，因而暗示当 ϵ 很小时，Allen-Cahn 问题也可能如此。根据定理 4.1，这一事实确实成立。

相反，在非凸域中，例如在哑铃形区域中，可以在极限泛函的局部极小值附近构造(4.1)的非恒定稳定解，正如Kohn和Sternberg [37]所做的那样。注意，在许多哑铃形区域中，将存在唯一的直线段来连接

细颈中两个相对的点，且该直线段是长度泛函的严格局部极小值。

4.2. 边界反应问题。 现在我们转向边界反应的情形。这里，势能是在边界 $\partial\Omega$ 上而非 Ω 上计算的。我们仍考虑二维情形，因此 Ω 是 $\mathbb{R}^2$ 中一个光滑有界单连通区域。现在我们的泛函为

$$E_\varepsilon(u) = \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u|^2\,dx + \int_{\partial\Omega} \frac{1}{4\varepsilon}(1-u^2)^2\,d\ell, \tag{4.3}$$

而非 (4.2)。其一阶变分给出边界反应问题

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ \partial_\nu u = \dfrac{1}{\varepsilon}(u-u^3) & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.4}$$

其中 $\varepsilon > 0$。

对于这个问题，极限 $\varepsilon \to 0$ 与前述内部情形截然不同。沿着边界，过渡集（从 -1到 1）收敛到点，而相关的 Γ-极限只计算点的数量，这是离散的，因此不存在非平凡的局部极小值。因此，极限问题无法提供任何关于局部极小值是否存在的信息。这与内部反应情形形成对比：在哑铃形区域中，极限问题显然存在局部极小值；而在严格凸域中，显然不存在局部极小值。

在这方面，C´onsul [23] 证明，当定义域是 $\mathbb{R}^n$的球时，方程 (4.4) 不存在非恒定稳定解；即使将反应项 $(u-u^3)/\varepsilon$ 替换为任意非线性项 $f(u)$，结论仍然成立。另一方面，内部哑铃问题的对应结果由 C´onsul 和 Sol`a-Morales [25]于1999年证明。他们证明，当 Ω 为适当的哑铃形定义域时，方程 (4.4) 存在非恒定稳定解。

此后，边界反应问题是否存在与定理 4.1 对应的结果一直悬而未决。Sol`a-Morales 在20世纪90年代中期提出了这个问题。最近，Cabr´e、C´onsul 和 Kurzke [11], 证明，即使在一些简单的定义域中 $\mathbb{R}^2$，这种对应结论也不成立。其主要结果如下。

定理 4.2 ([11])。 设Ω 为$(-1,1)\times(-1,1)$所构成的 $\mathbb{R}^2$中的正方形，或为逼近该正方形的某个光滑严格凸区域。

于是，当 ε 充分小时，问题(4.4)存在一个非常数稳定解。此外，当 $\varepsilon \to 0$ 时，这类解在 $\partial\Omega$上收敛；对于正方形的情形，它们收敛到如下函数：该函数在中心点$(0,-1)$ 与$(0,1)$的左侧为 -1 ，在它们右侧Ω 的部分上为1 。

这一结果源于 C´onsul 和 Jorba [24] 对此类解所做的数值计算。这些解是通过分岔延拓法找到的。他们极为精细的有限元法使得能够从数值上检验，

在正方形的两个中心点附近发生转变的解，当 ε足够小时是稳定的。

我们对定理 4.2 的证明相当繁复，需要像 Bethuel-Brezis-Helein [2] 中那样发展一套金兹堡-朗道理论。这里涉及的函数现在取标量值（与 [2] 中取复数值的函数相对），并且取值于边界 $\partial\Omega$ 上的$S^0 = \{-1, 1\}$ 。

下面我们更详细地说明这一点。给定 $\partial\Omega$ $p \neq q$ 上的两点 p 和 q ，令$I_{p,\ q}$ 为 $\partial\Omega \setminus \{p, q\}$ 中从 p 出发逆时针到达q 所对应的连通分支。我们将 $\chi^{p,\ q}$ 定义为边界上的特征函数:

$$\chi^{p,q} = \begin{cases} -1 & \text{on } I_{p,q} \\ 1 & \text{on } \partial\Omega \setminus I_{p,q}. \end{cases}$$

注意，该函数 $\chi^{p,\ q}$ 使能量（4.3）中的边界项达到最小，因为在所有 $\partial\Omega$ 上，$(1-(\chi^{p,\ q})^2)^2 = 0$。因此，可以自然地猜想，总能量的极小化者应由 $\chi^{p,\ q}$在 Ω 上的调和延拓得到，即$u^{p,\ q}_0$ 满足

$$\begin{cases} \Delta u_0^{p,q} = 0 & \text{in } \Omega\,, \\ u_0^{p,q} = \chi^{p,q} & \text{on } \partial\Omega\,. \end{cases}$$

注意到，由于 $\chi^{p,q} \notin H^{1/2}(\partial\Omega)$，我们有 $u^{p,\ q}_0 \notin H^1(\Omega)$。因此，它不可能是能量的极小值。事实上， $u^{p,\ q}_0$ 的狄利克雷能量是无穷大的，但我们仍然可以通过适当的重整化，研究其对点 p, q 选取的依赖关系。更确切地说，与复值金兹堡-朗道理论中的做法一样，我们可以在 p 和 q 周围去掉小球，并研究当 $\rho \to 0$ 时，$\Omega_\rho = \Omega \setminus (B_\rho(p) \cup B_\rho(q))$ 上狄利克雷能量的变化。在 [11] 中，我们证明

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_\rho} |\nabla u_0^{p,q}|^2\, dx = \frac{4}{\pi}\log\frac{1}{\rho} + W_\Omega(p,q) + O(\rho), \tag{4.5}$$

其中， W_Ω 称为该问题的重整化能量，可以借助从 Ω 到半空间的共形映射，或 Ω 的格林函数来计算。事实上，我们有

$$\begin{aligned} W_\Omega(p,q) &= -\frac{2}{\pi}\log\frac{\partial^2 G^D}{\partial\nu_p\partial\nu_q}(p,q) \\ &= 2\left(R^N(p,q) + R^N(q,q) - 2G^N(p,q)\right) \\ &= \frac{4}{\pi}\log|p-q| + 2\left(R^N(p,p) + R^N(q,q) - 2R^N(p,q)\right), \end{aligned} \tag{4.6}$$

其中， $G^D(p,q)$ 是 Ω 的狄利克雷格林函数， $G^N(p,q)$ 是 Ω 的诺伊曼格林函数，而 $R^N(p,q)$ 是后者的正则部分。

定理 4.2 的证明还需要证明与 (4.5) 类似的下界和上界，但将 $\rho = \varepsilon$ 和 $u^{p,\ q}_0$ 替换为泛函 E_ε在边界值属于一个小的 闭 $L^2(\partial\Omega)$ 邻域内的函数中的极小化子 w_ε

of $\chi^{p,q}$。更准确地说，下界为

$$E_\varepsilon(w_\varepsilon) \geq \frac{4}{\pi}\log\frac{1}{\varepsilon} + W_\Omega(p,q) + 2C_f - o_\varepsilon(1), \tag{4.7}$$

而上界则相同，只需将 $-o_\varepsilon(1)$替换为 $+o_\varepsilon(1)$。

现在假设区域 Ω 的边界上有一对点 p 和 q，使得 $W_\Omega\colon \partial\Omega\times\partial\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ 在 (p, q) 处具有一个严格孤立的局部极小值。借助上述下界和上界，可以证明，当 ε 足够小时，能量 (4.3) 存在一个局部极小值；当 $\varepsilon \to 0$时，该局部极小值将收敛到特征函数 $\chi^{p,\,q}$。根据定理，这些局部极小值就是 (4.4) 中所声称的非恒定稳定解。

因此，剩下的（简单）任务是在 [11] 中证明：当 Ω 为正方形时，重整化能量 (4.6) 在一对相对且居中的点 $((0,\ -1),\ (0,\ 1))$ 处有一个严格的孤立局部极小值。

为了建立 (4.7)，同时也为了得到上界，人们在点 p 附近对问题 (4.4) 进行爆破，从而得到边界反应问题

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^2_+ := \{x\in\mathbb{R}, y>0\} \\ \partial_\nu u = f(u) & \text{on } \partial\mathbb{R}^2_+ \end{cases} \tag{4.8}$$

在上半平面中，其中 $f(u) = u - u^3$。然后利用 Cabr´e 与 Sol`a-Morales [19] 于 2005 年得到的关于问题 (4.8) 的稳定解与递增解的结果。在该文中，知道函数

$$\phi(x,y) = \frac{2}{\pi}\arctan\frac{x}{y+1}$$

当 $f(u) = \sin(\pi u)$ 时是 (4.8) 的一个解——这被称为晶体位错的 Peierls-Nabarro 问题。

还要注意，借助所谓的 Caffarelli-Silvestre 延拓技术，并取 $v = u(\cdot,0)$，问题 (4.8) 等价于方程

$$(-\Delta)^{1/2} v = f(v) \quad \text{in } \mathbb{R}$$

关于半拉普拉斯算子的方程，该算子我们将在下一节亦即最后一节中讨论。

5. Reaction equations for the fractional Laplacian on the whole real line. Periodic solutions

众所周知，在整个 $\mathbb{R}$ 上，半线性二阶常微分方程$-u'' = f(u)$的有界解，除相差一个乘法因子 ±1 和平移外，要么在 $\mathbb{R}$上递增，要么关于 0 对称且在 $(0,\ +\infty)$ 上递减，要么是周期函数。这一结论可由以下事实直接得出：u 必关于其任一临界点[5] 对称；只需分别考察 u' 在没有零点、只有一个零点或至少有两个零点的情形。

[5]这是常微分方程唯一性定理的一个推论：例如，如果 u' 在 $x = 0$处消失，那么$v(x) := u(-x)$ 满足同一个方程，并且在 $x = 0$ 处与 u 具有相同的初始位置和导数。

那么，自然会问：这一分类是否也适用于分数阶拉普拉斯算子？也就是说，对于每个 $0 < s < 1$，任意有界解 u 是否满足

$$(-\Delta)^s u = f(u) \quad \text{in } \mathbb{R} \tag{5.1}$$

属于上述三类中的一类。回顾一下，

$$(-\Delta)^s u(x) := c_s \, \mathrm{P.V.} \int_{\mathbb{R}} \frac{u(x) - u(y)}{|x-y|^{1+2s}} \, dy, \qquad c_s := \frac{s 4^s \Gamma(1/2+s)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(1-s)}.$$

由于缺乏关于（5.1）的类似唯一性结果，上述论证无法在非局部情形下进行。

这个问题至今仍未解决，源于 Sol`a-Morales 提出的问题；他当时针对的是 $s = 1/2$ 的情形，或等价地，问题（4.8）。目前仅已知该猜想对以下方程成立：

$$(-\Delta)^{1/2} u = -u + u^2 \quad \text{in } \mathbb{R} \tag{5.2}$$

在流体力学中描述 Benjamin-Ono 方程的行波解，以及描述

$$(-\Delta)^{1/2} u = \sin(\pi u) \quad \text{in } \mathbb{R} \tag{5.3}$$

晶体中位错的连续介质建模所涉及的 Peierls-Nabarro方程。这是两个非常特殊的方程，因为它们是“完全可积的”。更确切地说，Amick 和 Toland [1] 能够通过显式表达式找出（5.2）的所有有界解。这要求 $f(u)$ 恰好为 $-u + u^2$ 和 $s = 1/2$。[6] 后来，在 [45] Toland 还利用如下事实找出了 Peierls-Nabarro方程的所有有界解：任意解的导数都是两个 Benjamin-Ono 方程解之差。

方程 (5.2) 和 (5.3) 都存在无穷多个振幅各不相同的周期解。另一方面，方程 (5.2) 存在一个“基态”解；也就是说，它是一个偶解，且在 $(0, +\infty)$ 上递减。相反，方程 (5.3) 存在一个“层解”，也就是说，该解在整个 $\mathbb{R}$ 上递增。

对于不同于上述两种情况的非线性项，关于解的分类或证明其对称性和单调性的研究并不多。Cabr´e、Csato 和 Mas [12] 最近发表的一篇论文对此作了介绍。

在 [12] 中，我们探讨方程 (5.1) 的解是否必然关于其任意一个临界点呈偶对称。我们将讨论范围限定在方程 (5.1) 的周期解。本文首先建立分数阶拉普拉斯算子周期解的基本理论。特别是，[12] 中的一项重要结果指出，产生方程 (5.1) 周期解的能量泛函不同于狄利克雷外边界条件下通常使用的能量泛函。也就是说，周期解的泛函中点与点之间的相互作用（区域内部与外部）不同于狄利克雷相互作用。周期泛函见下文定理 5.1。

[6] 他们的方法是将方程识别为边界反应问题 (4.8)，并利用复分析方法求解该问题，适用于 $f(u) = -u + u^2$。

在下一个结果中，我们证明了某个非局部拉格朗日量的周期约束极小化子的偶对称性和单调性；该拉格朗日量的一阶变分为半线性方程 $(-\Delta)^s u = f(u)$。

定理 5.1 ([12], 定理 1.1)。设 $L > 0$、$0 < s < 1$、$F \in C^1(\mathbb{R})$、$\widetilde{F} \in C^1(\mathbb{R})$、$c \in \mathbb{R}$，并令 $f := F'$、$\widetilde{f} := \widetilde{F}'$。假设 $u \in L^\infty(\mathbb{R})$ 是 $2L$-周期的，且使该泛函取极小

$$E(v) := \frac{c_s}{4} \int_{-L}^{L} dx \int_{\mathbb{R}} dy \, \frac{|v(x) - v(y)|^2}{|x-y|^{1+2s}} - \int_{-L}^{L} F(v)$$

在所有满足该约束的 $2L$-周期函数 $v \in L^\infty(\mathbb{R})$ 中

$$\int_{-L}^{L} \widetilde{F}(v) = c.$$

则至多相差变量 $x \in \mathbb{R}$ 的一个平移，u 是关于 $\mathbb{R}$ 的偶函数，且在 $(0, L)$ 上单调不增。

定理 5.1 的结论是否也对 (5.1) 的所有周期解——而不仅仅对约束极小化子——成立，仍是一个未解决问题。

该定理的证明基于 $\mathbb{S}^1$ 上一个不太为人所知的、1976年的黎斯重排不等式，该不等式由 Baernstein 与 Taylor 以及 Friedberg 与 Luttinger 各自独立发现。

值得指出的是，某些半线性方程 $(-\Delta)^s u = f(u)$ 确实存在非恒定的周期约束极小化子。事实上，在一篇即将发表的论文中，我们将证明方程 $(-\Delta)^s u = -u + u^p$ 在 $\mathbb{R}$ 中存在此类解，其中$u > 0$ 且 $p > 1$ 是次临界的，只要周期 $2L$ 足够大。另一方面，可以证明，在没有任何约束的情况下，不存在非恒定的有界周期极小化子——甚至连局部极小值也不存在；这里的局部极小值是指在小的周期扰动范围内的极小化子。也就是说，这类解既然是周期的，就必定是约束极小化子。

最后，我们提及，在 [12]中，我们还证明了定理 5.1 对更一般的积分微分算子的对应结论。更具体地说，我们针对具有对称核 $K(|x-y|)$ 的积分微分算子，在三种不同的类别中，对 x 和 y 在 $\mathbb{R}$中的情形证明了该结论。也就是说，我们需要对 K 假设以下条件之一：$(0, +\infty) \longrightarrow (0, +\infty)$：

（i）或者 K 是凸的，（ii）或者函数 $\tau > 0 \mapsto K(\tau^{1/2})$ 是完全单调的，（iii）或者 K 在 $(0, L)$ 上非增且在 $[L, +\infty$ 上为零）。

回忆一下，函数 $J : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ 是完全单调的，当且仅当 J 无穷次可微并满足

$$(-1)^k \frac{d^k}{d\tau^k} J(\tau) \geq 0 \qquad \text{for all } k \geq 0 \text{ and all } \tau > 0.$$

我们还回顾一下，根据伯恩斯坦定理，一个函数完全单调，当且仅当它是某个非负测度的拉普拉斯变换。

核的类别（i）和（ii）比第三类更有意思，因为它们不涉及周期 $2L$，而在寻找周期解时，周期原则上是未知的。第一类包含分数阶拉普拉斯算子的核K（t）$= c_s t^{-1-2s}$，但不包含该核

$$K(t) = (t^2 + a^2)^{-(n+s)/2} \qquad \text{for some } a > 0 \text{ and } n \geq 2 \tag{5.4}$$

出现在非局部 Delaunay 圆柱的研究中。因此，第一类并不能得出非局部 Delaunay 圆柱具有对称性的结论。相反，我们的第二类既包含 (5.4)，也包含分数阶拉普拉斯算子的核。

文中 [12] 证明了这两类互不包含。不过，它们都属于非增核这一类，因此很容易猜想，对称性（如定理 5.1 所示）也成立。然而，在 [12] 中，我们证明了该定理对于非增核一般并不成立。目前仍未找到一个包含 (i) 和 (ii)、且能保证对称性成立的“自然”类别。

References

[1] C. J. Amick and J. F. Toland, 《*Benjamin-Ono* 方程的唯一性及相关解析性质——平面上的一个非线性 *Neumann* 问题》，*Acta Math., 167 (1991), pp. 107–126.*[2] F. Bethuel, H. Brezis, and F. Hélein, 《*Ginzburg-Landau* 涡旋》，非线性微分方程及其应用进展，*13*，*Birkh¨auser Boston Inc., 1994.*[3] H. Brezis, 《反函数定理是否会失效？》，载于《*Morse* 理论、极小极大理论及其在非线性微分方程中的应用》，*New Stud. Adv. Math.* 第 *1* 卷，*Int. Press*，马萨诸塞州萨默维尔，*2003*，*pp. 23–33.*[4] H. Brezis and J. L. Vázquez, 《若干非线性椭圆问题的爆破解》，*Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid, 10 (1997), pp. 443–469.*
[5] R. Bruera and X. Cabré, 《微机电系统问题稳定解的正则性可达最优维数 *6*》。参见 *arXiv:2507.*20916 [*math.AP*] *(2025).*[6] X. Cabré, 《仅通过径向导数控制函数的估计及其在椭圆方程稳定解中的应用》。即将在 *Amer. J. Math.* 发表（*2024* 年接收）。参见 *arXiv:2211.*13033 [*math.AP*].[7] ,*H¨older* 正则性.....半线性椭圆方程稳定解的正则性可达 $\mathbb{R}^9$：完整的定量证明。即将在 *Bull. Amer. Math. Soc.* 发表（*2025* 年接收）。参见 *arXiv:2205.11352*[*math.AP*].[8] ,《半线性椭圆问题极小化子的正则性可达维数 *4*》，*Comm. Pure Appl. Math., 63 (2010), pp. 1362–1380.*[9] ,《半线性椭圆方程稳定解有界性结果的新证明》，*Discrete Contin. Dyn. Syst., 39 (2019), pp. 7249–7264.*[10] X. Cabré and A. Capella, 《半线性椭圆方程径向极小化子与极限解的正则性》，*J. Funct. Anal., 238 (2006), pp. 709–733.*
[11] X. Cabré, N. Cónsul, and M. Kurzke, 《边界反应的极小化子：重整化能量、奇点位置及其应用》。即将出版。[12] X. Cabré, G. Csató, and A. Mas, 《积分微分方程的周期解：变分表述、对称性与正则性》。参见 *arXiv:2404.*06462 [*math.AP*]*(2024).*[13] X. Cabré, G. Csató, and A. Mas, 《通过变分方法构造周期非局部常平均曲率曲面的存在性与对称性》，*J. Reine Angew. Math., 804 (2023), pp. 11–40.*[14] X. Cabré, A. Figalli, X. Ros-Oton, and J. Serra, 《半线性椭圆方程的稳定解在维数不超过 *9* 时光滑》，*Acta Math., 224 (2020), pp. 187–252*。

[15] X. Cabré, P. Miraglio, and M. Sanchón, 《涉及 *p*-拉普拉斯算子的非线性方程稳定解的最优正则性》，*Adv. Calc. Var., 15 (2022), pp. 749–785.*[16] X. Cabré and G. Poggesi, 《若干椭圆问题的稳定解：极小锥、*Allen-Cahn*方程与爆破解》，*Lecture Notes in Math.* 第 *2220* 卷，*Springer, Cham, 2018.*[17] X. Cabré and O. Saari, 《仅涉及径向导数的庞加莱不等式》。即将出版。´, 《半拉普拉斯半线性方程稳定解的普适 *H*
[18] X. Cabré and T. Sanz-Perela*older* 估计可达维数 *4*》，*J. Differential Equations, 317 (2022), pp. 153–195.* ¨, 《半空间中边界反应的层解》，*Comm. Pure Appl. Math., 58 (2005), pp. 1678–1732.*[19] X. Cabré and J. Solà-Morales, 《具有诺伊曼边界条件的反应扩散方程的不稳定性结果》，*J. Differential Equations, 27 (1978), pp. 266–273.*
[20] R. G. Casten and C. J. Holland, 《[21] O. Chodosh and C. Li中的稳定极小超曲面》，*Acta Math., 233 (2024), pp. 1–31.* $\mathbb{R}^4$,[22] O. Chodosh, C. Li, P. Minter, 《 and D. Stryker中的稳定极小超曲面》。参见 *arXiv:2401.* $\mathbb{R}^5$*math.AP*01492 [.], 《具有非线性边界条件的扩散方程平衡解》，*Z. Angew. Math. Phys., 47 (1996), pp. 194–209.*
[23] N. Cónsul, 《凸区域上具有非线性边界反应的扩散方程模式的存在性》，*Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg., 15 (2005), pp. 3321–3328.*[24] N. Cónsul and A. Jorba, 《局部极小值的稳定性与稳定的非恒定平衡解》，*J. Differential Equations, 157 (1999), pp. 61–81.*[25] N. Cónsul and J. Solà-Morales, 《非线性椭圆特征值问题正解的一些延拓方法与变分方法》，*Arch. Ration. Mech. Anal., 58 (1975), pp. 207–218.*
[26] M. G. Crandall and P. H. Rabinowitz, 《[27] M. P. do Carmo and C. K. Peng 中的稳定完备极小曲面是平面》，*Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.), 1 (1979), pp. 903–906.* $\mathbb{R}^3$ ，《椭圆偏微分方程的稳定解》，第 *143* 卷，*Chapman & Hall/CRC Monogr. Surv. Pure Appl. Math., CRC Press, Boca Raton, 2011.*[28] L. Dupaigne, 《[29] I. U. Erneta、*1* 域中半线性椭圆问题稳定解的边界 *H* ¨*older* 连续性》。即将在 *J. Reine Angew. Math.* 发表。参见 *arXiv:2305.* c^1*math.AP*07062 [.]《变系数算子半线性椭圆方程的稳定解》，*Commun. Pure Appl. Anal., 22 (2023), pp. 530–571.*[30] ,《半线性椭圆问题稳定解的边界能量估计》，*J. Differential Equations, 378 (2024), pp. 204–233.*[31] ,, 《非负标量曲率三维流形中完备稳定极小曲面的结构》，*Comm. Pure Appl. Math., 33 (1980), pp. 199–211.*
[32] D. Fischer-Colbrie and R. Schoen, 《拟线性方程理论中的一些问题》，*Amer. Math. Soc. Transl. (2), 29 (1963), pp. 295–381.*[33] I. M. Gel'fand, 《两相多孔介质的 *Gelfand*型问题》，*Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci., 470 (2014), pp. 20130573, 17 pp.*[34] P. V. Gordon and V. Moroz,[35] P. V. Gordon, V. Moroz, 《湍流射流的 *Gelfand*型问题》，*J. Differential Equations, 269 (2020), pp. 5959–5996.*
and F. Nazarov, 《肥皂膜悬链面的原位观测——一项简单的教育性物理实验》，*Eur. J. Phys., 31 (2010), pp. 357–365.*[36] M. Ito and T. Sato, 《局部极小化者与奇异摄动》，*Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, 111 (1989), pp. 69–84*。

[38] H. Matano，半线性扩散方程解的渐近性态与稳定性，*Publ. Res. Inst. Math. Sci., 15 (1979), pp. 401–454.*[39] L. Mazet， $\mathbb{R}^6$中的稳定极小超曲面。参见 *arXiv:2405.*14676 [*math.AP*].[40] L. Modica，相变梯度理论与极小界面准则，*Arch. Rational Mech. Anal., 98 (1987), pp. 123–142.*[41] G. Nedev，半线性椭圆方程极限解的正则性，*C. R. Acad. Sci. Paris, 330 (2000), pp. 997–1002.*[42] F. Peng, Y. R.-Y. Zhang, and Y. Zhou，稳定半线性椭圆方程解的内部 *H ̈older* 正则性（维数不超过 *5*）。参见 *arXiv:2204.*06345 [*math.AP*].[43] „ $\mathbb{R}^n$ 中的半线性椭圆方程稳定解的最优正则性与 *Liouville* 性质， $n \geq 10$，*Anal. PDE, 17 (2024).*[44] X. Ros-Oton，维数不超过 *7* 的分数阶 *Gelfand* 问题的正则性，*J. Math. Anal. Appl., 419 (2014), pp. 10–19.*[45] J. F. Toland，*Peierls-Nabarro* 方程与 *Benjamin-Ono* 方程，*J. Funct. Anal., 145(1997), pp. 136–150.*[46] S. Villegas，维数为 *4* 时极限解的有界性，*Adv. Math., 235 (2013), pp. 126–133*。

X.C.[1,2,3] [1]ICREA, Pg. Lluis Companys 23, 08010 Barcelona, Spain & [2]Universitat Politècnica de Catalunya, Departament de Matemàtiques and IMTech, Diagonal647, 08028 Barcelona, Spain & [3]Centre de Recerca Matemàtica, Edifici C, CampusBellaterra, 08193 Bellaterra, Spain

电子邮箱地址： xavier.cabre@upc.edu