《欧洲物理
快报》草稿

动态涌现关联

Satya N. Majumdar[1] 和 Grégory Schehr[2]

[1] *LPTMS*，法国国家科学研究中心，巴黎南大学，巴黎-萨克莱大学，*91405* 奥赛，法国 索邦大学，理论与高能物理实验室，法国国家科学研究中心混合研究单位*7589*，朱西厄广场*4*号，*5252* 巴黎邮政专递*05*区，法国

arXiv:2603.03162v1 [cond-mat.stat-mech] 3 Mar 2026

摘要 –在本文中，我们讨论了动态涌现关联（DEC）的情形：当经典与量子非相互作用系统受到共同波动随机环境作用时，会产生这种关联。这类系统的关键特性在于，不同粒子之间的强关联源于动力学，而非内禀相互作用。在许多情况下，即使经过长时间演化，这些强关联在稳态中仍然存在。一般而言，要对这类强关联态中的可观测量进行显式计算非常困难。值得注意的是，DEC的若干模型中的稳态具有有趣的解析结构，因而尽管存在强关联，仍可计算物理可观测量。近期对受限胶体粒子的实验表明，稳态中的这些DEC实际上可以被测量。DEC是强关联非平衡统计物理中一个迅速兴起的领域，同时涵盖理论与实验、经典与量子等方面。

动态涌现关联（DEC）近年来
a已成为一种非常有趣的现象，其中不同的
f系统自由度原本彼此
n不相互作用，却会随着时间推移而产生相关性，这是由于
t它们共享一个共同环境，而该环境
f会独立于粒子随机涨落——
cles [1–14]。我们称这些相关性为涌现的，因为
t如果这个环境不随
t时间变化，或者即使它以确定性方式演化，这些相关性也不会出现。因此，
“环境动力学中的“随机”成分
m对于这些相关性的涌现至关重要。
不同独立……之间这种涌现的相关性
d这些组成部分最早是在
v截然不同的背景下由惠更斯通过实验观察到的。他不仅是一位
g杰出的数学家，也是一位技艺精湛的钟表匠，活跃于
E
欧洲的 17^{th} 世纪 [15]。他做了一个简单的实验：将两个互不相关的摆悬挂在一根横跨两把椅子的木梁上。轻轻拨动其中一个摆。当它开始摆动时，另一个摆暂时保持静止，但随后两个摆开始同步摆动，表明存在相关性。不过，惠更斯实验中的涌现相关性的物理机制，与我们在此讨论的 DEC 截然不同。在惠更斯的实验中，当一个摆（粒子）受到外部扰动时，另一个摆会因非局域响应而运动

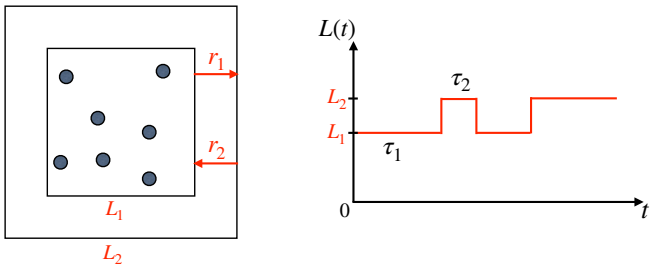


图1：左图示意了一个二维盒子中的布朗粒子理想气体，盒子的线性尺寸为L（t），并以噪声驱动的二态（电报式）方式在 L_1 和 L_2 之间切换，如右图所示。相邻两次切换的时间间隔分别交替取自指数分布 $p_1(\tau) = r_1 e^{-r_1\tau}$ 和 $p_2(\tau) = r_2 e^{-r_2\tau}$。这里，$r_1$ 和 r_2 分别表示盒子尺寸从 L_1 切换到 L_2 以及反向切换的泊松速率。

通过连接各个摆（粒子）的木梁传递。这与我们的情况有两个根本区别：（i）我们无法获知各个粒子的位置，而且驱动作用于整个系统，由所有粒子共同承受；（ii）任意一对粒子之间都没有物理连接，与惠更斯的

装置中的刚性木梁不同。此外，在惠更斯的装置中，一个粒子只受到一次撞击，而在我们的情况中，环境波动引起的扰动会随时间持续发生。然而，非常重要的一点是，在我们的装置中，粒子不会影响环境的动力学——相反，环境有自身由外部驱动的随机运动；正如我们将看到的，这足以在粒子之间诱发相关性。

作为DEC的一个简单设定，考虑由 N 无相互作用布朗粒子组成的理想气体，这些粒子被限制在线性尺寸为 $L(t)$的 d维盒子中。盒子的尺寸 $L(t)$可以随时间 t以受控方式变化。例如，在 $1d$中，可以在盒子相对的两侧放置两个活塞，并通过推动或拉动活塞来改变$L(t)$。我们考虑一个非常简单的方案。我们从盒子尺寸为 $L_1 > 0$的系统开始，并等待一个服从指数分布的随机时间 τ_1，该时间从 $p_1(\tau) = r_1 e^{-r_1\tau}$中抽取；在此期间，粒子在盒壁处的反射边界条件下进行独立扩散。在这一指数分布随机时间之后，我们瞬时将盒子尺寸改变为 $L_2 > L_1$。然后我们再次等待另一个服从指数分布的随机时间 τ_2，这次从 $p_2(\tau) = r_2 e^{-r_2\tau}$中抽取；在此期间，粒子再次在尺寸为 L_2的盒子中、在壁面处的反射边界条件下独立扩散。此后，我们瞬时将盒子尺寸推回 L_1，并重复该过程。在这里，盒子代表环境，其线性尺寸 $L(t)$随时间经历含噪声的二分电报式演化（见图1）。这些粒子之间没有直接相互作用，仅由这个涨落的盒子驱动。作为一个小细节，人们可能会问：当盒子尺寸从 L_2 减小到L_1时，位于 L_1 和 L_2之间的粒子会发生什么。可以用不同方式对此建模。例如，一个简单的选择是让这些粒子黏附在被推动的壁面上。其他选择也是可能的，但这些细节对底层物理的定性理解没有任何影响。

在这一由涨落盒子尺寸驱动的理想气体的简单设定下，我们的主要目标是研究这种涨落环境是否会随着时间的增加，在无相互作用的粒子之间诱导出相关性。具体而言，该系统在长时间后是否会达到稳态，而这些涌现的相关性是否会一直持续到稳态？更确切地说，

人们希望计算粒子在时刻 t 的位置联合概率密度函数（JPDF） $P(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_N; t)$，即粒子的位置 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_N$。如果该联合概率密度函数能够分解为各个边缘分布的乘积，那么气体仍然是理想气体，表明粒子之间不存在相关性。然而，事实并非如此，正如我们将看到的。此外，我们还将看到，当 $t \to \infty$时，联合概率密度函数变为与时间无关，这表明系统处于非平衡稳态（NESS），且每对粒子之间都会产生强关联。由于箱体的动力学破坏了详细平衡条件，该稳态属于非平衡态，

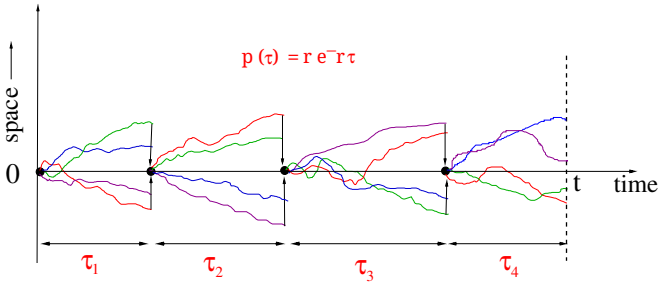


图2： N 个独立一维布朗运动的示意轨迹，它们以速率 r同时从原点出发并同时重置到原点。这对应于图1在 $1d$ 情形下的极限情形$L_1 \to 0$、 $L_2 \to \infty$、 $r_1 \to \infty$ 和 $r_2 = r$ 。这里 τ_i表示相继重置之间的间隔，它们相互独立分布，各自取自$p(\tau) = r\, e^{-r\tau}$.

从而在构型空间中产生非零概率流。

尽管该模型很简单，但事实证明它很难解析求解。相反，研究一个仍能抓住主要物理现象、同时又可解析求解的特定极限更为容易。其思路是考虑极限 $L_2 \to \infty$、$L_1 \to 0$、$r_1 \to \infty$且 $r_2 = r$ 固定。这一极限情形只有一个自由参数 r。在该极限下，粒子的动力学简化如下。所有粒子都从原点出发（因为 $L_1 = 0$），并立即开始独立扩散（因为 $r_1 \to \infty$），且在自由空间中进行（因为 $L_2 \to \infty$）。在经历一段从 $p(\tau) = r\, e^{-r\tau}$ 中抽取的随机时间的自由扩散之后（因为 $r_2 = r$），盒子尺寸被瞬时压缩到原点并立即释放（因为 $r_1 \to \infty$）。这恰好对应于 N 个布朗运动：它们从原点出发独立扩散，并以速率 r同时重置到原点。这是单粒子重置的多粒子推广；单粒子重置在过去十年中已被相当广泛地研究，并有许多应用 [16, 17]。这种具有同时重置的多粒子推广最近在文献 [1]，中得到研究，其中联合概率密度函数$P(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_N; t)$在所有时刻都被显式计算出来，并首次确立了DEC的存在。这里，我们简要回顾这一结果，并为简单起见，重点讨论 $d = 1$。

使用简写符号 $\vec{x} \equiv \{x_1, x_2, \cdots, x_N\}$，粒子位置的联合概率密度函数 $P_r(\vec{x}; t)$ 可利用动力学的更新性质 [1] 进行计算。

$$P_r(\vec{x}; t) = e^{-r\,t} \prod_{i=1}^{N} G_0(x_i, t) + r \int_0^t d\tau\, e^{-r\tau} \prod_{i=1}^{N} G_0(x_i, \tau)\,, \tag{1}$$

其中， $G_0(x, \tau) = e^{-\frac{x^2}{4D\tau}}/\sqrt{4\pi D\tau}$是裸（无重置）单粒子传播子。这个结果可以非常直观地理解。对于该过程截至时间t的一条给定轨迹，可能没有发生重置事件，也可能至少发生过一次。在

前一种情况下，粒子自由且相互独立地演化，各自的传播子为 $G_0(x,t)$。此时，时间间隔 $[0,t]$ 内没有发生重置的概率显然为 $e^{-r\,t}$，因为重置事件遵循速率为 r的泊松过程。这便给出了式 (1) 右侧的第一项。当轨迹中发生过一次或多次重置时，首先需要确定在 t之前最近一次重置发生的时刻$t-\tau$。随后，系统在区间 $[t-\tau,t]$内进行时长为 τ的自由扩散，如式 (1) 中的乘积 $\prod_{i=1}^{N} G_0(x_i,\tau)$ 所示。最近一次重置发生在 $t-\tau$的概率显然为 $r\,d\tau$。之后在 τ 期间不发生重置的概率为 $e^{-r\tau}$。将这三个独立事件的概率相乘，并对 $\tau\in[0,t]$ 积分，便得到式 (1) 右侧的第二项。容易验证，$\int d\vec{x}\,P_r(\vec{x};t)=1$，这保证了任意时刻 t 的归一化。我们注意到，$P_r(\vec{x};t)$ 也可以解释为一个布朗粒子在 N维空间中以速率 r随机重置到原点时的位置分布；文献 [18] 曾从径向坐标 $R=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_N^2}$的角度研究过这一问题。然而，我们在此旨在研究不同粒子坐标 x_i 和 x_j （其中 $i\neq j$）之间的相关性，以及其他相关的可观测量，例如直线上相邻两个粒子之间的间距。就N维向量的分量而言，这些可观测量并没有自然的物理意义，因此我们更倾向于将 x_i理解为直线上 N 个粒子的位置，而不是 N维空间中单个向量的分量。

观察方程 (1) 可知，$P_r(\vec{x};t)$显然不能因式分解，这表明粒子的位置在任意时刻 $t>0$ 都会变得相关。为了测量这些相关性，自然会首先考虑标准的连通关联函数 $\langle x_i(t)x_j(t)\rangle-\langle x_i(t)\rangle\langle x_j(t)\rangle$。然而，由于 (1) 中的联合概率密度函数 $P_r(\vec{x};t)$ 具有 $x_i\to -x_i$对称性，因此这个标准关联函数在所有时刻 t都恒等于零。因此，要检测非零相关性，我们需要考察高阶关联函数。最简单的非零高阶连通关联函数是 $x_i^2(t)$ 与 $x_j^2(t)$ 之间的协方差，其中 $i\neq j$ [1,2]

$$\mathcal{C}_2(t)=\mathrm{Cov}(x_i^2(t),x_j^2(t))=\langle x_i^2(t)x_j^2(t)\rangle-\langle x_i^2(t)\rangle\langle x_j^2(t)\rangle\,. \tag{2}$$

根据式 (1) 中的联合概率密度函数，可以清楚地看出，只要满足 $i\neq j$，$\mathcal{C}_2(t)$ 就不依赖于粒子指标 i 和 j。有时，研究无量纲协方差函数 $\mathrm{Cov}(x_i^2(t)\ x_j^2(t))/\mathrm{Var}(x_i^2(t))$ 也很有用，其表达式为

$$A(t)=\frac{\langle x_i^2(t)x_j^2(t)\rangle-\langle x_i^2(t)\rangle\langle x_j^2(t)\rangle}{\langle x_i^4(t)\rangle-\langle x_i^2(t)\rangle^2}\,. \tag{3}$$

容易证明，$A(t)$ 位于区间 $[0,1]$ 内。当$A(t)\to 0$时，系统完全不相关；而极限 $A(t)\to 1$ 则对应于相关性最强的情形，此时 $x_i(t)=x_j(t)$ [10]。尽管 $A(t)$ 是通过计算得到的在稳态极限 $t\to\infty$ 下，Ref. [1], 中的结果是精确计算得到的；但实际上，在所有时刻也都可以精确计算 t ——参见 Refs. [9,10]。事实上，$A(t)$ 可以表示为无量纲时间 $z=r\,t$ 的函数，形式如下

$$A(t)=a(z=r\,t)=\frac{1-2z\,e^{-z}-e^{-2z}}{5-(4+6z)\,e^{-z}-e^{-2z}}\,. \tag{4}$$

起初，$a(z)\approx z/6$，当 $z\to 0$时，随后随着 $z=r\,t$ 增大而单调增长，最终饱和至一个非零值 $a(z\to\infty)=1/5$。这一可观测量 $A(t)$量化了 DEC，并清楚地表明，粒子之间的相关性是动态涌现的，会随时间增长并一直持续到稳态，在稳态时相关性达到最强。由于这些相关性与粒子指标 $(i,\ j)$ 无关，因此它代表一种全对全相关（如同统计物理中的平均场模型）。此外，这是一种吸引相关，这是自然的，因为同时重置倾向于使粒子聚集到原点。我们还注意到，由于不存在有限的相关长度，该系统是一个强相关系统。对于这类强相关系统，即使明确知道位置的联合概率密度函数，计算物理可观测量（稍后将更精确地定义）的统计性质通常也很困难。一个经典例子是随机高斯矩阵特征值的统计性质，其中每一对特征值都会相互排斥 [19, 20]。计算特征值密度、最大特征值的分布或特征值间距分布等可观测量，曾耗费多年时间 [19, 20]。而在我们的系统中，尽管它同样是强相关系统，由于稳态下联合概率密度函数具有一种特殊的数学结构 [1]，这些可观测量实际上更容易计算，正如下文将要看到的。

既然已经确定相关性会因涨落环境而随时间增长，接下来我们将关注长时间极限 $t\to\infty$ 下的稳态，此时式（1）中的联合概率密度函数变为 [1]

$$P_r^{\mathrm{st}}(\vec{x})=r\int_0^\infty d\tau\,e^{-r\tau}\prod_{i=1}^{N}G_0(x_i,\tau)\,. \tag{5}$$

给定这一定态联合概率密度函数，人们希望计算若干可观测量。它表示由 N 个强关联粒子组成的一维气体，我们的下一个目标是从这一定态测度出发，计算与该气体相关的若干宏观和微观可观测量。由于该气体在空间上并不均匀，首先要探究的自然宏观可观测量是气体的平均密度分布，其定义为 $\rho_N(x)=(1/N)\sum_{i=1}^{N}\langle\delta(x-x_i)\rangle$，它统计在 x处单位长度内粒子的平均占比，并满足归一化条件 $\int\rho_N(x)\,dx=1$。由式(5)中的联合概率密度函数，平均密度很容易计算。结果表明它与 N 无关，并由 [1]给出

$$\rho_N(x)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{D}}\,e^{-|x|\sqrt{\frac{r}{D}}}\,. \tag{6}$$

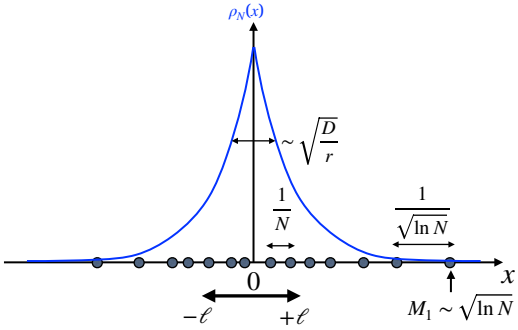


图 3：蓝线表示式（6）中的平均密度分布。

因此，密度分布是非高斯的，并在$x = 0$ 处有一个尖点（见图3）。 $x = 0$ 处的峰值表明气体在原点附近更为稠密（这是由气体以速率 r同时重置到原点所产生的）。密度在长度尺度 $\xi = \sqrt{D/r}$ 上指数衰减，该尺度刻画了单个粒子在两次连续重置之间行进的典型距离。随着远离原点，气体变得越来越稀疏。在了解宏观密度分布之后，我们现在从更微观的层面探究该气体。为此，宜先将粒子位置 $\{x_i\} \to \{M_i\}$ 按 $M_1 > M_2 > \cdots > M_N$排序。例如，M_1 对应于气体中最右端粒子的位置——见图3——而 M_k 表示从右侧数起的第 k个最右端粒子的位置。另一个微观观测量是第 k个粒子与第$(k+1)$个粒子之间的间距 $d_k = M_k - M_{k+1}$。第三个自然的可观测量是全计数统计（FCS），它表示原点附近区间 $[-\ell, +\ell]$ 内粒子数 N_ℓ 的分布，如 ig. 3 所示。

现在，我们利用式（5）中定态联合概率密度函数的一种特殊数学结构，讨论如何在稳态下计算这些可观测量。从该式可知，若固定 τ，则有一组独立高斯变量，其联合概率密度函数为 $\prod_{i=1}^{N} G_0(x_i, \tau)$。在固定 τ 时利用这一独立同分布结构（即理想气体），便可轻松计算上述可观测量。计算出固定 τ 时这些可观测量的统计量后，只需再对随机变量 τ 的分布取平均；在此情况下，该分布是一个简单的指数分布 $p(\tau) = r\, e^{-r\tau}$。因此，联合概率密度函数具有以下一般数学形式

$$P_{\rm CIID}(\vec{x}) = \int du\, h(u) \prod_{i=1}^{N} p(x_i|u)\,, \qquad (7)$$

其中 u 是条件随机变量，其分布由概率密度函数 $h(u)$给出，而 $p(x_i|u)$表示在给定 u时 x_i的条件概率密度函数。我们将此结构(7)称为条件独立同分布（CIID） [1,2]。在重置气体的语境中，条件变-量 u就是时间 τ，表示距上次重置的时间，且 $h(u) \to p(\tau) = r\, e^{-r\tau}$。稍后我们将看到，类似的CIID结构会出现在若干未必与重置相关的问题中。事实上，在许多情形中可能存在隐藏的条件独立同分布结构，此时的挑战便是识别条件变量u及其分布 $h(u)$。

利用重置气体的这一 CIID结构，文献 [1,2] 对上述微观观测量进行了解析计算。这里不提供具体细节，仅总结其主要特征。由于气体远离原点后变得越来越稀疏，在大 N 极限下， $M_1 \gg 1$。事实上，研究表明，当 N 很大时， $M_1 \sim \sqrt{\ln N}$。在 $k = O(N)$ 时，间距 $d_k = M_k - M_{k+1}$ 通常按 $1/N$ 标度变化（我们将原点附近这一区域称为“体区”）；而在 $k = O(1)$的“边缘”附近，典型间距按 $1/\sqrt{\ln N}$ 标度变化——见图 3。令人惊讶的是，在大 N 极限下，第 k 大值的标度分布趋于普适，即与指标 k 无关，并由一个简单的标度函数 [1,2] 给出。同样，标度间隔也具有非平凡分布（其尾部呈拉伸指数形式），且该分布同样具有普适性，即与 k 无关。FCS 也呈现出高度非平凡的非单调形状 [1,2]。FCS 可视为如下形式的线性统计量：$\mathcal{L}_N = \sum_{i=1}^{N} f(x_i)$，其中 $f(x) = \mathcal{I}_{[-\ell,+\ell]}(x)$ 是指示函数。对于一般的 $f(x)$，近期针对具有 CIID结构的稳态 [21]，推导出了关于 $\mathcal{L}_N$ 相对涨落的信息论界。

以上结果是针对重置的非相互作用布朗气体推导得出的。然而，式 (1) 中的更新结构，以及由此得到的式 (5) 中非平衡稳态的 CIID 结构，都具有很强的普适性，适用于每个粒子具有任意随机动力学的重置非相互作用气体，不一定是布朗气体。CIID 结构唯一需要输入的是气体的自由传播子 $G_0(x,\ \tau)$。事实上，针对重置气体的多种动力学形式，例如初始速度随机的弹道粒子和 L´évy 飞行 [2]，这些可观测量都已得到计算。原则上，这种方法还可用于粒子在重置之间经历的其他类型动力学，例如跑动与翻滚动力学。这仍是未来研究中一个值得探讨的开放问题。

另一种有趣的推广考虑了同时重置，但两次连续重置之间的时间间隔并非纯粹的指数形式，而是具有任意的 $p(\tau)$。这称为非泊松重置，因为无法将其视为具有某个速率 r 的连续过程。尽管如此，方程（1）中的更新结构可以轻松推广到非泊松情形，而且一般来说，我们仍会发现具有 CIID 结构 [9] 的非平衡稳态（NESS）。这里需要指出的是，如果重置事件以周期 T 进行频闪式发生，即如果 $p(\tau) = \delta(\tau - T)$，那么系统将达到时间周期稳态

（TPSS），而非真正的非平衡稳态（NESS）。在这种 TPSS 中，可以很容易看出，在任意给定时刻，联合概率密度函数（JPDF）完全因子化，这表明粒子之间不存在相关性。因此，波动环境中的“随机性”是产生 DEC 的必要条件。最后，这种对 N 个粒子进行同时重置的模型最近被推广到具有记忆的重置情形 [10]。在这一模型中，既不存在非平衡稳态（NESS），也不存在时间周期稳态（TPSS）。尽管如此，随时间变化的联合概率密度函数（JPDF）在任意时刻仍具有 CIID 结构t [10]。

具有切换刚度的谐振囚禁气体。 到目前为止，我们讨论了盒中问题（见图1）中理想布朗气体在 $L_1 \to 0$、$L_2 \to \infty$、 $r_1 \to \infty$ 和 $r_2 = r$时的极限情形。事实证明，对于一般的 L_1， L_2、 r_1 和 r_2 ，求解该问题非常困难。然而，该模型的一个密切相关的变体可以精确求解 [3]。在这一版本中，考虑 N 个无相互作用的布朗粒子在谐振势$V(x) = \frac{1}{2}\mu(t)\, x^2$ 中扩散，其刚度 $\mu(t)$以速率 r_1 （从 μ_1 到 μ_2）和 r_2 （从 μ_2 到 μ_1）在两个值 μ_1 与 μ_2 （且 $\mu_1 > \mu_2$）之间作二分切换。这里，粒子被囚禁的典型长度尺度为$1/\sqrt{\mu(t)}$，它起着与盒中问题中长度 $L(t)$ 类似的作用。此外，我们很快就会看到，该模型更容易通过胶体粒子的激光囚禁在实验上实现 [13]。求解该问题的第一个障碍是，它并不具有对极限盒子问题成立的式(1)中那种简单的更新结构。因此，稳态下的联合概率密度函数是否具有CIID结构并不显然。相反，可以通过直接求解相应的福克-普朗克方程 [3]来得到联合概率密度函数。略去细节，我们发现联合概率密度函数再次具有如式(7)所示的CIID结构，其中

$$p(x_i|u) = \frac{e^{-\frac{x_i^2}{2V(u)}}}{\sqrt{2\pi V(u)}} \quad , \quad V(u) = D\left(\frac{u}{\mu_2} + \frac{1-u}{\mu_1}\right) \ , \quad (8)$$

以及 $h(u) = A\, u^{R_1-1}(1-u)^{R_2-1}\left[\frac{1-u}{\mu_1} + \frac{u}{\mu_2}\right]$，$u \in [0,1]$。这里， $R_1 = r_1/(2\mu_1)$、 $R_2 = r_2/(2\mu_2)$ 和振幅 A对 $\int_0^1 h(u)du = 1$进行归一化。随机变量 $u \in [0,1]$ 可解释为粒子处于阶段2的有效时间占比，而 $V(u)$ 是单个奥恩斯坦-乌伦贝克（OU）粒子在切换陷阱中的平均方差。我们提出两点观察：（i）起初并不容易识别式（7）的 CIID结构中的条件变量 u ；（ii）计算 u的概率密度函数（PDF） $h(u)$也并非易事。关于这一结果的另一种、更为直观的推导，请参阅文献 [3]。揭示这一 CIID结构后，计算可观测量就相当直接了当， [3], 与前一个模型中的情况一样。

实验实现。 这种处于切换谐振势阱中的无相互作用布朗粒子系统，最近已在液体（水）中的受限胶体粒子实验中实现 [13]。在该装置中，这些粒子并不像上述模型中那样集中在同一个势阱内，而是分别置于个独立的谐振势阱中，每个势阱包含一个粒子，并具有两个相互独立的和 [13]坐标。不同势阱的刚度在两个数值和之间同步调制。

在实验中，最多可以使用四个势阱。与粒子彼此无相互作用的模型不同，在实验系统中，粒子嵌入水中，因此粒子之间始终存在长程流体动力学相互作用。开展这一实验的目的不仅是验证理论预测（这已经通过数值模拟完成），更是研究基于无相互作用粒子的理论预测在存在长程流体动力学相互作用时，在多大程度上仍然成立。更确切地说，式（2）中的非平衡稳态关联函数 $\mathcal{C}_2(t \to \infty)$可能由两个不同来源产生：（i）DEC，即由于势阱同步切换而动态产生的相关性；（ii）由粒子所处流体介导的长程流体动力学相互作用。令我们惊讶的是，尽管流体动力学相互作用确实存在（其他可观测量的独立测量也证实了这一点 [13]），但在非平衡稳态中测得的稳态关联函数，即 $\mathcal{C}_2(t \to \infty)$（经过适当归一化），与无相互作用理论的结果极为吻合（详情见参考文献 [13]）。由此得出结论：尽管流体动力学相互作用可能会影响某些可观测量，但关联函数 $\mathcal{C}_2(t \to \infty)$完全由DEC主导，DEC的影响压倒了流体动力学相互作用。在另一项实验[12], 中也得出了类似结论，在该实验中，粒子通过光镊同时进行机械复位。

调节非平衡稳态中相关性的强度。 在上文讨论的两个模型中，我们已经看到，同时重置（在极限盒子问题中）以及谐振势的同步切换，都会在长时间极限下产生非平衡稳态，其中粒子之间存在全对全吸引关联。一个自然的问题是：放宽重置的“同时”这一硬性约束，或谐振势阱完全同步这一硬性约束，能否调节非平衡稳态中这些相关性的强度？放宽这些硬性约束的一个简单方法，是研究参考文献 [14] 最近引入的所谓“批量重置”。为简单起见，考虑第一个问题： N 个相互独立的布朗运动以速率 r 同时重置到原点。我们可以不让所有 N 个粒子同时重置，而是研究以速率 r 将从 N个粒子中随机选出的 m 个粒子一起重置、其余 $N-m$ 个粒子则继续布朗运动轨迹时会发生什么。参数 m 能够在无相关情形（$m = 1$）与强相关的同时重置情形（$m = N$）之间进行插值。在这种情况下，对于 $1 < m < N$，定态联合概率密度函数并不具有

任何明显的 CIID 结构。尽管如此，两点相关函数 $C_2(t \to \infty)$ 可以精确求得，并揭示出强烈且可调的相关性 [14]。然而，计算其他可观测量仍是一个尚待解决的难题，例如极值统计、粒子间的间距分布，或任意 $1 < m < N$ 的全计数统计。值得研究的是，这些可调相关性是否能在上文提到的受限胶体实验中测量到 [13]。

超越二值驱动的经典方案中的 *DEC*。到目前为止，谐势阱的刚度一直在两个值 μ_1 和 μ_2之间作二值变化，相邻两次切换之间的时间间隔服从指数分布。自然会问：为什么采用二值噪声（只有两个取值），而不采用某种连续随机驱动 $\mu(t)$？事实证明，后者很难求解，至今仍是一个悬而未决的问题。不过，这个模型还有另一种版本，可以针对连续驱动力求解。我们不再改变势阱的刚度$\mu(t)$，而是用外部随机力驱动势阱中心。更具体地说，我们考虑 N 个相互独立的奥恩斯坦–乌伦贝克过程，它们处于刚度为 μ 、势阱中心位于 $z(t)$ 的谐振势中，而该中心会随机波动。因此，粒子的位置 $x_i(t)$ 按照过阻尼朗之万方程 [4]演化

$$\frac{dx_i}{dt} = -\mu(x_i - z(t)) + \sqrt{2D}\,\eta_i(t)\,, \tag{9}$$

其中， $\eta_i(t)$ 是均值为零的相互独立高斯白噪声，关联函数为 $\langle \eta_i(t)\eta_j(t')\rangle = \delta_{ij}\,\delta(t-t')$。这里， $z(t)$ 表示随机驱动，即波动的环境。例如， $z(t)$ 可以是白噪声，也可以是二值噪声。该模型的定态联合概率密度函数可以精确求得，并呈现 CIID结构 [4]

$$P^{\rm st}(\vec{x}) = \int du\, h(u) \prod_{i=1}^{N} \sqrt{\frac{\mu}{4\pi D}}\, e^{-\mu\frac{(x_i-u)^2}{4D}}\,, \tag{10}$$

其中，条件变量 u通过 $du/dt = -\mu u + \mu\, z(t)$演化，而 $h(u)$表示其稳态分布。随后可以利用这种 CIID结构计算前文提到的标准可观测量，从而得到另一个有趣的、强相关却可解的系统 [4]。寻找其他具有共享驱动力且随时间连续变化的独立粒子可解模型，将会很有趣。

另一个有趣的角度是考虑同时具有空间和时间自由度的涨落驱动力。例如，考虑一维中存在势能 $h(x,\ t)$ 时的 N 个相互独立的过阻尼粒子，它们遵循含噪梯度下降动力学 [22, 23]，$dx_i/dt = -\Gamma\partial_{x_i} h(x_i,\ t) + \sqrt{2D}\,\eta_i(t)$ 进行演化，其中 $\eta_i(t)$ 是与前文相同的相互独立的高斯白噪声，而 $h(x,\ t)$ 表示粒子运动所在势能景观的涨落高度场。这种高度场动力学的一个自然选择是例如，Kardar-Parisi-Zhang（KPZ）方程$\partial_t h(x,\ t) = \nu\partial_x^2 h + \lambda(\partial_x h)^2 + \zeta(x,\ t)$，其中 $\zeta(x,\ t)$ 是均值为零的白噪声，其关联函数为 $\langle \zeta(x,\ t)\zeta(x',\ t')\rangle = 2\delta(x-x')\delta(t-t')$。参考文献 [22,23] 对该模型进行了数值研究，并在一些极限情形下进行了解析研究。研究发现，在稳态下，粒子在空间中呈现出强烈聚集，这表明它们确实会因受到同一涨落场驱动而产生强关联。当高度场的涨落相对于粒子的运动时间尺度较慢时，可以通过映射到著名的无序系统Sinai模型，解析地计算关联函数 [23]。然而，当两个时间尺度处于同一量级时，即使在一维情况下，目前也没有关于稳态中粒子间关联函数的已知解析结果，这仍是一个富有挑战性的开放问题。**受驱动量子粒子的*DEC*。**到目前为止，我们主要讨论了受共同外部随机驱动的经典独立粒子，并且在大多数情况下发现稳态呈现CIID结构，有时这种结构是显式的，有时则是隐式的。自然会产生这样的问题：对于经历幺正量子演化而非经典动力学的粒子，是否存在等效的DEC？量子演化是否存在DEC？这自然引出了量子重置的概念，而这一概念近来颇为流行 [24–34]。量子重置背后的思想非常简单：它由一种动力学构成，其中包含确定性的量子部分和经典随机部分 [24, 25]。考虑一个处于状态 $\Psi(t)$ 的量子系统，其演化遵循以下动力学。在一个很短的时间 dt 内，状态演化为 $\Psi(t+dt)$ [24]

$$\Psi(t+dt) = \begin{cases} \left(1 - \frac{i}{\hbar}\hat{H}\,dt\right)\Psi(t)\,, & \text{with prob. } 1 - r\,dt \\ \Psi(0)\,, & \text{with prob. } r\,dt\,. \end{cases} \tag{11}$$

这里， r 表示重置率。当独立的量子自由度同时经历量子重置时，它们之间是否会出现 DEC，是一个有趣的问题，也是前文讨论的经典 DEC 的对应问题。事实上，独立量子自由度之间相关性的涌现问题最早由文献 [27] 探讨：作者研究了横场中的两个非相互作用伊辛自旋，并让它们在经历演化至某个随机时刻的幺正演化后，同时进行量子重置。研究表明，系统在长时间后达到稳态，且存在非零相关性 [27]。

超越两个自由度，同时进行量子重置的一个可求解示例是 N处于一维谐振势中的非相互作用玻色子。系统初始制备为基态，此时谐振势的中心位于 $+a$，随后在中心位于 $-a$的势场中进行幺正演化。演化持续到一个随机时刻，该时刻从分布$p(\tau) = r\,e^{-r\tau}$中抽取。经过这段随机时间后，系统重置回势场

中心位于 $+a$时系统的基态。这在经典系统中起到类似于同时重置的作用。随后，整个循环反复进行。我们要探究由 $|\Psi(\vec{x},\ t)|^2$编码的量子概率密度是否会演化至稳态，即是否会变得与时间无关（当 $t\to\infty$时）。其中，$\Psi(\vec{x},\ t)$是时刻 t的多体波函数。事实上，参考文献 [6] 表明，稳态量子概率密度也具有CIID结构。因此，经典情形中提到的所有可观测量在这一量子情形下也都可以精确计算 [6]。还可以考虑量子演化的其他方案：不改变势阱中心，而是切换势阱频率 [7]。在这种情况下，同样可以发现稳态量子联合概率密度 $|\Psi(\vec{x},\ t\to\infty)|^2$ 具有CIID结构，从而能够像其他情形一样计算若干可观测量。

另一个值得探索的方向是：重置并非像前文讨论的那样由外部触发，而是由系统自身触发。例如，考虑从原点出发的 N 个相互独立的布朗运动，初始时刻为 $t=0$。当其中一个粒子首次到达位置 $L>0$ 时，所有 N 粒子同时重置回原点。对于 $N=1$，系统不会达到稳态 [35] ；但最近的研究表明，对于任意$N>2$，当粒子之间存在强关联时，系统会在长时间后达到稳态，由此展示了具有事件驱动随机驱动的 DEC 示例 [11]。研究还表明，尽管存在强 [11]相关性，$N>2$ 的稳态仍具有 CIID 结构，从而能够对若干可观测量进行精确计算。一个相关问题是，研究这种事件驱动的同时重置是否能加快对固定目标的搜索，例如位于 $-x_0<0$ [36]的目标。近期的文献 [36]对此进行了探讨，揭示了平均首次通过时间丰富而复杂的行为。最后，最近的研究在小冲击灾变模型中，通过扩散近似发现了 DEC 及其相关的 CIID 结构 [37]。

结论。我们回顾了近期关于经典和量子非相互作用系统在共同波动随机环境作用下产生的动态涌现相关性（DEC）的研究进展。这些系统具有两个关键性质：（i）强烈的全对全相关源自动力学，而非内禀相互作用；（ii）其稳态具有 CIID 结构，从而可以精确计算物理可观测量。我们还讨论了近期针对受限胶体粒子的实验，这些实验测量了稳态中的 DEC。这是非平衡统计物理学中一个迅速发展的研究领域，仍有许多开放且具有挑战性的问题。

致谢。 我们衷心感谢 DEC 的合作者：M. Barma、M. Biroli、A. Biswas、D. Boyer、S. Cilib- erto、G. de Mauro、M. Kulkarni、H. Larralde、M. Mesquita、A. Nagar、A. Pal、A. Petrosyan、S. Sabhapandit。我们感谢法国国家研究署 ANR Grant No. ANR-23-CE30- 0020-01 EDIPS 项目的支持。

参考文献

[1] M. Biroli、H. Larralde、S. N. Majumdar、G. Schehr，《物理评论快报》130 (20)，207101 (2023)。[2] M. Biroli *et al.*，《物理评论 E》109 (1)，014101 (2024)。[3] M. Biroli *et al.*，《物理评论 E》109，L032106 (2024)。[4] S. Sabhapandit、S. N. Majumdar，《物理学杂志 A：数学与理论》57，335003 (2024)。[5] N. Mesquita、S. N. Majumdar、S. Sabhapandit，《统计力学杂志》103207 (2025)。[6] M. Kulkarni、S. N. Majumdar、S. Sabhapandit，《物理学杂志 A：数学与理论》58，105003 (2025)。[7] N. Mesquita *et al.*，《物理学杂志：会议系列》3152，012011 (2025)。[8] M. Biroli、S. N. Majumdar、G. Schehr，《物理评论 E》112，014101 2025( )。[9] G. de Mauro、M. Biroli、S. N. Majumdar、G. Schehr，《物理评论 E》113，014120 (2026)。[10] D. Boyer、S. N. Majumdar，arXiv:2510.21972。[11] M. Biroli、S. N. Majumdar、G. Schehr，《欧洲物理快报》153，31002 (2026)。[12] R. Vatash、Y. Roichman，《物理评论研究》7，L032020 (2025)。[13] M. Biroli *et al.*，arXiv:2508.07199 (2025)。[14] G. de Mauro、S. N. Majumdar、G. Schehr，arXiv:2601.20077。[15] J. G. Yoder，*Christiaan Huygens book on the pendulum clock (1673)*，，2005 爱思唯尔科学 ( )。[16] M. R. Evans、S. N. Majumdar，《物理评论快报》106，160601 2011( )。[17] M. R. Evans、S. N. Majumdar、G. Schehr，《物理学杂志 A：数学与理论》53，193001 (2020)。[18] M. R. Evans、S. N. Majumdar，《物理学杂志 A：数学与理论》47，285001 (2014)。[19] M. L. Mehta，*Random matrices* (第142卷)。爱思唯尔 (2004)。[20] P. J. Forrester，*Log-gases and random matrices* (LMS-34)。普林斯顿大学出版社 (2010)。[21] K. S. Olsen，arXiv: arXiv:2603.01852。[22] A. Nagar、M. Barma、S. N. Majumdar，《物理评论快报》94，240601 (2005)。[23] A. Nagar、S. N. Majumdar、M. Barma，《物理评论 E》74，021124 2006( )。[24] B. Mukherjee、K. Sengupta、S. N. Majumdar，《物理评论 B》98，104309 (2018)。[25] D. C. Rose *et al.*，《物理评论 E》98，022129 (2018)。[26] G. Perfetto *et al.*，《物理评论 B》104，L180302 (2021)。[27] M. Magoni *et al.*，《物理评论 A》106，052210 (2022)。[28] M. Navascus，《物理评论 X》8，031008 (2018)。[29] M. Kulkarni、S. N Majumdar，《物理评论 A》108，062210 (2023)。[30] R. Yin、E. Barkai，《物理评论快报》130，050802 (2023)。[31] D. A. Puente *et al.*，《量子》8，1299 (2024)。[32] R. Yin、Q. Wang、S. Tornow、E. Barkai，《美国国家科学院院刊》122，e2402912121 (2025)。[33] R. J afari *et al.*，arXiv:2602.09348。[34] E. C. King *et al.*，arXiv:2601.20560。[35] B. De Bruyne、J. Randon-Furling、S. Redner，《物理评论快报》125，050602 (2020)。[36] A. Biswas、S. N. Majumdar、A. Pal，《物理评论快报》135，227101 2025( )。[37] T. Galla，arXiv:2602.21635。