arXiv:2603.03200v1 [math.DS] 3 Mar 2026

符号动力系统中的跟踪与 Lipschitz 阴影：有限与无限字母表

DANIEL GONC¸ALVES 和 SOFIA MENEGHEL SILVA

Abstract. 我们指出了两种无限字母表框架下单边移位空间的跟踪性质与 Lipschitz 阴影性质之间的基本二分：经典的乘积拓扑模型 $X \subseteq A^{\mathbb{N}}$，以及通过附加有限词得到的紧致 Ott–Tomforde–Willis（OTW）模型。在乘积拓扑情形下，对于自然的一类前缀超度量，跟踪与 Lipschitz 阴影两者等价。然而，由于 $A^{\mathbb{N}}$ 在 A 为可数无限时并不紧，Lipschitz 阴影在乘积拓扑模型中是否在相容度量任意一致等价变化下保持稳定，仍不明确。相比之下，对于 OTW 移位空间，该拓扑具有一族由有限词枚举索引的典范相容超度量，且这些度量彼此一致等价。借助 Deaconu–Renault 观点以及关于零维紧空间上局部同胚的已知影子结果，我们证明 OTW 全移位对于每个 OTW 度量都具有跟踪性质。尽管如此，即使在这一固定的一致等价类中，Lipschitz 阴影也可能取决于所选的 OTW 度量：我们在全移位上构造了两个一致等价的 OTW 超度量，其中一个具有 Lipschitz 阴影性质，而另一个则不具有。因此，OTW 紧化提供了一个紧致的无限字母表情形，使得 Lipschitz 阴影对度量的依赖性能够得到明确判定，这与目前对乘积拓扑模型的认知形成鲜明对比。

1. Introduction

有限字母表上的符号动力系统是动力系统中的核心课题，与光滑动力系统、编码和算子代数有着深刻联系；例如参见 [17, 16]。然而，在可数无限字母表上，若干互不等价的框架并存。一种经典方法研究可数马尔可夫移位（通常非紧）及其热力学形式，其中精细的回归性质起着决定性作用 [22, 2, 1]。从另一视角看，亦可考虑一般的单侧子位移 $X \subseteq A^{\mathbb{N}}$，并采用积拓扑（以及标准前缀超度量）。在这一设定中，紧性不复存在，定量的度量概念可能对相容度量的选取变得敏感。

相比之下，Ott–Tomforde–Willis（OTW）通过添加有限词并采用广义柱集的基 [18]，为任意离散字母表上的单边移位空间引入了一种紧的、全不连通的模型。这种 OTW 紧化特别适用于研究与群胚和 C^*代数的联系，也推动了关于无限字母表位移的拓扑与动力学研究不断发展。此外，近期结果表明，可数马尔可夫移位的等距共轭可实现为相关 OTW 子移位之间的共轭，见 [4]。在 OTW 框架中，有限字母表情形下常见的若干动力学与结构现象需要格外谨慎地处理。例如，高阶

2020 *Mathematics Subject Classification.* 37B65, 37B25, 37B10.*Key words and phrases.* 跟踪、Lipschitz 阴影、OTW 子移位、移位空间。第一作者部分得到巴西Capes-Print、Conselho Nacional de Desenvolvimento Cient´ıfico e Tecnol´ogico（CNPq）——巴西，以及Funda.c˜ao de Amparo `a Pesquisa e Inova.c˜ao do Estado de Santa Catarina（FAPESC）的资助。第二作者得到Funda.c˜aode Amparo ` aPesquisae Inova.c˜ao doEstado de Santa Catarina（FAPESC）的资助。

表示未必像有限字母表情形那样归并：单侧 OTW 位移中就存在（$M+1$）步移位空间，它们不同胚于任何 M步移位空间 [8]。态射的表现也更加微妙：关于 OTW 移位空间之间的滑动块码以及 Curtis–Hedlund–Lyndon 定理的变体，已有研究 [12, 23], ；而一般离散字母表上的位移态射在可逆性和像集方面的其他问题，则见 [5]。从另一个角度看，某些类别的 OTW 移位空间自然地表现为超图的边位移空间，从而将符号动力系统与图代数和超图 C^*代数联系起来 [9, 10],；这一视角也推动了诸如 Li–Yorke 混沌以及紧致 OTW/超图模型中混沌集存在性等动力学结果的研究 [13, 14, 19]。近年来，局部同胚的熵理论得到发展，并应用于无限字母表位移 [11], ；此外，针对任意字母表上的单侧子位移，也提出了新的算子代数不变量 [3, 4]。除 OTW 模型外，还有其他相关的紧致模型，例如模糊移位空间 [24]。

这一领域反复探讨的一个主题，是确定哪些有限字母表动力性质在无限字母表模型中仍然有意义且保持稳定。本文聚焦于跟踪这一经典概念，它刻画了近似轨道（伪轨道）的可靠性；同时也关注其定量变体 Lipschitz 阴影。在乘积拓扑模型 $X \subseteq A^{\mathbb{N}}$ 配备标准前缀超度量 $d_{\mathrm{prod}}(x,\ y) = 2^{-N(x,y)}$的情形下，我们证明跟踪与 Lipschitz 阴影等价（事实上，对自然的前缀超度量类也同样成立）。这利用了对单侧可数字母表子位移的跟踪的有限阶刻画，见 [6], ，以及一个显式的 Lipschitz 影踪估计。在有限字母表情形下，还可以与 Sakai 的结果进行比较：对于紧致空间上的正向扩张映射，跟踪等价于存在一种相容度量，使得映射具有 Lipschitz 阴影 [21, 定理 1]。然而，当 A 是可数无限时，空间 $A^{\mathbb{N}}$ 不是紧的，而诱导乘积拓扑的相容度量不一定一致等价。这自然引出了以下尚未解决的问题：若 d与 d_{prod}一致等价，且 $(X,\ \sigma,\ d)$ 具有跟踪性质，那么 $(X,\ \sigma,\ d)$ 是否必具有 Lipschitz 阴影？我们尚不知道答案。

我们的主要观点是：OTW 紧化提供了一个紧的无限字母表框架，使相应的“一致不变性”问题得以解决。OTW 将有限词的每一枚举关联到一个相容的超度量；不同的枚举给出一致等价的度量，因此（拓扑）跟踪性质在更换 OTW 度量时是稳健的。借助 Deaconu–Renault（局部同胚）观点以及 Deaconu–Renault 系统已有的影子结果，我们证明 OTW 全移位对每一个 OTW 度量都具有跟踪性质。相比之下，Lipschitz 阴影在 OTW 世界中确实依赖度量：我们在全位移上构造了两个一致等价的 OTW 超度量，使得 Lipschitz 阴影在一种情形下成立，而在另一种情形下不成立。因此，不同于积拓扑与有限字母表设定，OTW 模型在全位移这一层面上便已呈现出跟踪与 Lipschitz 阴影之间的鲜明分离。

本文结构安排如下。第 2 节回顾伪轨道、跟踪和 Lipschitz 阴影，并证明全文所用的两个基本不变性原理：跟踪在一致等价下保持不变（命题 2.5），而 Lipschitz 阴影在双利普希茨度量变换下保持不变（命题 2.7）。第 3 节研究乘积拓扑模型：我们证明，对于标准乘积度量（以及前缀超度量），跟踪与 Lipschitz 阴影等价；并指出在非紧情形下，跟踪在一致等价的度量变更下是否稳定仍是一个开放问题。接着，在第 4.1 节中，我们引入 OTW 全移位以及由有限词枚举所定义的 OTW 度量（定义 4.2），证明这些度量是超度量（命题 4.3）且诱导出 OTW 拓扑，并指出由不同枚举所对应的 OTW 度量

一致等价（引理 5.1）。第 5 节中，我们证明 OTW 全移位具有跟踪性质（命题 5.2），并由一致不变性得出该性质对每个 OTW 度量都成立。最后，在第 6 节中，我们分析 OTW 框架下的 Lipschitz 阴影：我们构造一个“坏的”OTW 度量（借助引理 6.1），使得 Lipschitz 阴影不成立（定理 6.2）；还构造一个由前缀–移位相容枚举产生的“好的”OTW 度量（定义 6.3），使得 Lipschitz 阴影成立（命题 6.5）。这两个 OTW 度量一致等价，从而揭示了 OTW 框架下 Lipschitz 阴影在一致等价下不具不变性的内在机制。

2. Shadowing、 Lipschitz shadowing、 and uniform equivalence

Deaconu–Renault 系统由 Deaconu [7] 和 Renault [20]分别独立提出。本节定义 Deaconu–Renault 系统，以及此类系统的跟踪和 Lipschitz 阴影概念。随后我们证明，跟踪在一致等价的度量下是不变的，而 Lipschitz 阴影在双 Lipschitz 等价的度量下是不变的。

定义 2.1（Deaconu–Renault 系统）：*Deaconu–Renault* 系统是一个二元组（X，σ），由一个局部紧豪斯多夫空间 X 和一个局部同胚 $\sigma : Dom(\sigma) \longrightarrow Im(\sigma)$ 构成，该局部同胚从开集 $Dom(\sigma) \subseteq X$ 映射到开集 $Im(\sigma) \subseteq X$。

归纳定义 $Dom(\sigma^n) := \sigma^{-1}(Dom(\sigma^{n-1}))$，因此每个 $\sigma^n : Dom(\sigma^n) \longrightarrow Im(\sigma^n)$ 都是一个局部同胚，并且 $\sigma^m \circ \sigma^n = \sigma^{m+n}$ 在 $Dom(\sigma^{m+n})$ 上。

定义 2.2（伪轨道与跟踪）. 设 (X, σ) 为一个 Deaconu–Renault 系统，其中 X 为度量空间。

(a) 对 $\delta > 0$，序列 $(x^n)_{n\geq 0}$ 是 (X, σ) 中的 δ-伪轨道，如果
$$d\big(\sigma(x^n), x^{n+1}\big) < \delta \quad \text{for all } n \geq 0,$$
其中隐含：当写出 $\sigma(x^n)$ 时，即指 $x^n \in Dom(\sigma)$。

(b) 给定 $\varepsilon > 0$，我们称 $x \in X$ ε-跟踪 X 中的序列 $(x^n)_{n\geq 0}$，如果
$$d\big(\sigma^i(x), x^i\big) < \varepsilon \quad \text{for all } i \geq 0.$$
注意，这意味着对所有 i 都有 $x \in Dom(\sigma^i)$。

(c) 我们称 Deaconu–Renault 系统 (X, σ) 具有跟踪性质，如果对每个$\varepsilon > 0$，存在一个 $\delta > 0$，使得每个 δ–伪轨道都被点$x \in X$ ε–跟踪。

定义 2.3（Lipschitz 阴影）。设 (X, σ) 为一个 Deaconu–Renault 系统，其中 X 为度量空间。我们称 (X, σ) 具有*Lipschitz* 阴影性质，如果存在常数$L > 0$ 和 $\delta_0 > 0$，使得对每个 $\delta \in (0, \delta_0]$，每个 δ-伪轨道都被 X 中的某一点 $L\delta$-影踪。

定义 2.4（一致等价）。设 d_1 与 d_2 为 X 上的两个度量。我们称 d_1与 d_2 一致等价，如果恒等映射
$$\mathrm{id}_1 : (X, d_1) \to (X, d_2) \quad \text{and} \quad \mathrm{id}_2 : (X, d_2) \to (X, d_1)$$
是一致连续的。

命题 2.5（跟踪在一致等价下不变）。设 (X, σ) 为一个 *Deaconu–Renault* 系统，其中 X 为度量空间。又设 d_1、d_2 为 X 上一致等价的度量。则 (X, σ)（其中 X 具有度量 d_1）具有跟踪性质，当且仅当 (X, σ)（其中 X 具有度量 d_2）具有跟踪性质。

证明。这由 [15, 命题 2.12] 得证。 □

Lipschitz 阴影这一性质在双 Lipschitz 等价下保持不变。这一点想必早已众所周知，但为完整起见，我们仍给出证明。

定义 2.6 (双 Lipschitz 等价)。 设 (X, d_1) 和 (X, d_2) 是定义在同一底集 X 上的度量空间。若存在常数 $\alpha, \beta > 0$，使得 d_1 和 d_2 满足以下条件，则称它们双 Lipschitz 等价

$$\alpha\, d_2(x,y) \;\le\; d_1(x,y) \;\le\; \beta\, d_2(x,y) \qquad \text{for all } x, y \in X.$$

命题 2.7 (Lipschitz 阴影在双 Lipschitz 变换下保持不变)。 设 (X, σ) 是一个 *Deaconu–Renault* 系统，其中 X 是一个度量空间，并设 d_1、d_2 是定义在 X 上的双 *Lipschitz* 等价度量。那么，(X, σ) 关于度量 d_1 具有 *Lipschitz* 阴影性质，当且仅当 (X, σ) 关于度量 d_2 具有 *Lipschitz* 阴影性质。

证明。 首先假设 (X, σ) 关于度量 d_1 具有 Lipschitz 阴影性质。那么存在常数 $L > 0$ 和 $\delta_0 > 0$，使得对每个 $\delta \in (0, \delta_0]$，每个关于 d_1 的 δ-伪轨道 $(x^n)_{n\ge 0}$ 都可由某个点 $x \in X$ 以 $L\delta$ 进行影踪（关于 d_1），即

$$d_1\big(\sigma^n(x), x^n\big) \;\le\; L\delta \qquad \text{for all } n \ge 0.$$

令 $\alpha, \beta > 0$ 满足 $\alpha d_2 \le d_1 \le \beta d_2$。
固定 $\delta \in \big(0, \delta_0/\beta\big]$，并令 $(x^n)_{n\ge 0}$ 为关于 d_2 的 δ-伪轨道。那么对所有 $n \ge 0$,

$$d_1\big(\sigma(x^n), x^{n+1}\big) \;\le\; \beta\, d_2\big(\sigma(x^n), x^{n+1}\big) \;<\; \beta\delta \;\le\; \delta_0,$$

因此 $(x^n)_{n\ge 0}$ 是关于 d_1 的 $(\beta\delta)$-伪轨道。因此存在 $x \in X$ 使得

$$d_1\big(\sigma^n(x), x^n\big) \;\le\; L(\beta\delta) \qquad \text{for all } n \ge 0.$$

利用 $\alpha d_2 \le d_1$，我们得到

$$d_2\big(\sigma^n(x), x^n\big) \;\le\; \frac{1}{\alpha}\, d_1\big(\sigma^n(x), x^n\big) \;\le\; \frac{L\beta}{\alpha}\,\delta \qquad \text{for all } n \ge 0.$$

因此 (X, σ) 关于 d_2 具有 Lipschitz 阴影，常数为 $L' = \frac{L\beta}{\alpha}$ 和 $\delta_0' = \delta_0/\beta$。

反向蕴含（从关于 d_2 到关于 d_1）是对称的。 □

3. Standard product topology: shadowing and Lipschitz shadowing coincide

本节讨论赋予积拓扑的单边移位 (X, σ)，其中 $X \subseteq A^{\mathbb{N}}$。我们引入一大类自然的相容度量（前缀超度量），它们满足一个明确的一致条件，该条件蕴含有限阶移位具有 Lipschitz 阴影。我们还提出一个开放问题：在非紧的可数字母表情形下，Lipschitz 阴影在多大程度上能在一致等价的度量变更下保持稳定。

3.1. 标准乘积超度量与有限阶。 设 A 为离散可数字母表，设 $X \subseteq A^{\mathbb{N}}$ 为单边移位空间，其左移位为 $\sigma\colon X \to X$。我们考虑标准乘积超度量

$$d_{\mathrm{prod}}(x,y) = 2^{-N(x,y)}, \qquad N(x,y) = \min\{n \ge 0 : x_n \ne y_n\}, \tag{1}$$

约定 $2^{-\infty} = 0$。

我们首先指出，对于可数字母表上的单侧子位移，跟踪等价于有限记忆条件（有限阶），这拓展了经典的有限字母表情形。

定理 3.1。 单边移位空间 $X \subseteq A^{\mathbb{N}}$ 具有跟踪性质（相对于d_{prod}），当且仅当 X 是有限阶移位，也就是说，存在 $p \geq 1$，使得属于X 由长度为 p的允许块决定。

证明。参见 [6,定理 3.7]。 □

3.2. **蕴含 Lipschitz 阴影的一致判据**。现在我们提出一个方便的充分条件，用于判定积拓扑下的 Lipschitz 阴影。该条件专为有限阶移位空间以及满足以下性质的度量而设计：每个点的小球都包含一个以该点为中心、长度一致较长的柱集。

对于 $n \geq 0$，令

$$U_n := \{(x, y) \in X \times X : \ x_0 x_1 \cdots x_{n-1} = y_0 y_1 \cdots y_{n-1}\}, \quad (U_0 = X \times X).$$

给定 d 上的相容度量 X，定义

$$\alpha_n := \sup\{d(x, y) : (x, y) \in U_n\}, \qquad \eta_n := \sup\{\eta > 0 : \ d(x, y) < \eta \Rightarrow (x, y) \in U_n\}.$$

命题 3.2。假设 X 是一个有限阶移位 p。令 d 为 X 上诱导积拓扑的度量。若存在 $C \geq 1$ 使得

$$\alpha_n \leq C\, \eta_{n+p} \qquad \textit{for all } n \geq 0, \tag{2}$$

then (X, σ, d) 具有 *Lipschitz* 阴影性质，且 *Lipschitz* 常数为 $L = C$.

证明。 固定 $0 < \delta \leq \eta_p$，并令 $\{x^m\}_{m \geq 0} \subseteq X$ 为一个 δ-伪轨道： $d(\sigma(x^m),\ x^{m+1}) < \delta$ 对所有$m \geq 0$成立。取 $k \geq 0$ 使得 $\eta_{k+p+1} \leq \delta < \eta_{k+p}$。由于 $\delta < \eta_{k+p}$，对每个 $m \geq 0$，我们有 $(\sigma(x^m),\ x^{m+1}) \in U_{k+p}$，即

$$x^m_{t+1} = x^{m+1}_t \qquad \text{for } t = 0, 1, \ldots, k + p - 1 \text{ and all } m \geq 0.$$

定义 $z \in A^{\mathbb{N}}$ 如下： $z_m := x^m_0$。反复应用重叠关系可得，对每个 $m \geq 0$ 以及每个$t = 0,\ 1, \ldots, k$，恒等式 $(\sigma^m(z))_t = x^m_t$成立，因此 $(\sigma^m(z),\ x^m) \in U_k$对所有 m成立。

由于 $k + p \geq p$，同样的重叠关系表明， z的每个长度为 p 的块都作为某个 $x^m \in X$ 的长度为 p 的块出现。由于 X 的阶为 p，这意味着 $z \in X$。

最后，对于每个 $m \geq 0$，

$$d(\sigma^m(z), x^m) \leq \alpha_k \leq C\, \eta_{k+p} \leq C\, \delta,$$

利用（2）和 $\delta < \eta_{k+p}$。因此， z $C\delta$ 跟踪该伪轨道，所以 $(X,\ \sigma,\ d)$ 具有 Lipschitz 阴影性质，且 $L = C$。□

3.3. **前缀超度量**。 下面我们证明，条件（2）对一大类自然的相容度量成立。

定义 3.3 （前缀超度量）。 若存在严格递减序列 $\mathbf{r} = (r_n)_{n \geq 0} \subset (0,\ \infty)$，满足 $r_n \downarrow 0$，使得对于 $x \neq y$，度量 d 在 $X \subseteq A^{\mathbb{N}}$ 上是前缀超度量，

$$d(x, y) = r_{N(x,y)}, \qquad N(x, y) := \min\{n \geq 0 : \ x_n \neq y_n\},$$

且 $d(x,\ x) = 0$。

引理 3.4。 如果 d 是前缀超度量，那么条件（2）成立，且 $C = 1$ （对每个 $p \geq 1$）。

证明。令 d由（r_n）确定。若（$x,\ y$） $\in U_n$且 $x \neq y$，则 N（$x,\ y$） $\geq n$，因此d（$x,\ y$） $= r_{N(x,y)} \leq r_n$，故 $\alpha_n \leq r_n$。此外，对于 $n \geq 1$，条件 d（$x,\ y$） $< r_{n-1}$迫使N（$x,\ y$） $\geq n$，因此（$x,\ y$） $\in U_n$，故 $\eta_n \geq r_{n-1}$。因此，对于任意 $p \geq 1$，

$$\alpha_n \leq r_n \leq r_{n+p-1} \leq \eta_{n+p},$$

因为 (r_n) 是递减的。这就是取 $C = 1$时的 (2)。 □

推论 3.5. 设 $X \subseteq A^{\mathbb{N}}$ 是一个单边移位空间（其 A 可数），并设 d 是 X 上任意一个前缀超度量（按定义 *3.3* 的意义，包括 d_{prod}）。那么 (X, σ, d) 具有跟踪性质，当且仅当它具有 *Lipschitz* 阴影性质。此外，若跟踪性质成立，则 *Lipschitz* 阴影性质也成立，且 *Lipschitz* 常数为 $L = 1$。

证明。 由于 d 是前缀超度量，它诱导出积拓扑，并且 d 与 d_{prod} 一致等价。

如果 (X, σ, d) 具有 Lipschitz 阴影性质，那么根据定义，它就具有跟踪性质。反过来，假设 (X, σ, d) 具有跟踪性质。由跟踪的一致不变性（命题 2.5），$(X, \sigma, d_{\mathrm{prod}})$ 也具有跟踪性质。因此，定理 3.1 蕴含 X 是一个有限阶移位 p。现在，引理 3.4 表明 d 满足条件 (2)，其中 $C = 1$，因此命题 3.2 得出 (X, σ, d) 具有 Lipschitz 阴影性质，且 Lipschitz 常数为 $L = 1$。□

注记 3.6。 在有限字母表情形下， X 是紧的，且 σ 对于 d_{prod}是正扩张的。Sakai 证明，对于正向扩张映射，跟踪性质等价于存在一个相容度量，使得该度量具有 Lipschitz 阴影性质 [21, 定理 1]。

开放问题。 设 A 为可数无限集， $X \subseteq A^{\mathbb{N}}$ 赋予积拓扑。假设 d 是定义在 X 上且与 d_{prod} 一致等价 的度量。若 (X, σ, d) 具有跟踪性质，它是否也必然具有 Lipschitz 阴影性质？等价地说，在非紧积拓扑情形下，Lipschitz 阴影性质在相容度量的一致等价变换下是否保持不变？我们认为情况并非如此，但未能找到反例。

4. OTW full shift and the OTW metrics

在本节中，我们简要回顾 OTW 全移位及其度量的构造，并证明这些度量实际上都是超度量。全文中，设 $\mathcal{A}$ 为可数无限离散字母表。

4.1. **OTW 全移位**。

定义 4.1 （有限词与无限词；OTW 全移位）。 设

$$\Sigma_{\mathcal{A}}^{\mathrm{fin}} := \{\tilde{0}\} \cup \bigcup_{k \geq 1} \mathcal{A}^k, \qquad \mathcal{A}^{\mathbb{N}} = \{x_1 x_2 \cdots : x_i \in \mathcal{A}\}.$$

OTW 全移位 是不交并

$$\Sigma_{\mathcal{A}} := \mathcal{A}^{\mathbb{N}} \sqcup \Sigma_{\mathcal{A}}^{\mathrm{fin}}.$$

我们用 $|x| \in \{0, 1, 2, \ldots, \infty\}$ 表示长度（其中 $|x| = \infty$ 在 $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ 上，且 $|\tilde{0}| = 0$）。

对于 $u \in \Sigma_{\mathcal{A}}^{\mathrm{fin}}$和 $x \in \Sigma_{\mathcal{A}}$，若 u 是 x的初始片段，则称 $u \preceq x$。OTW 定义了广义柱集 $Z(u, F)$，并证明它们构成 $\Sigma_{\mathcal{A}}$ [18, §2.2]上的一个紧的、豪斯多夫的、全不连通拓扑的基。

4.2. **OTW 度量**。**前缀关系**。

对于 $u \in \Sigma_{\mathcal{A}}^{\mathrm{fin}}$和 $x \in \Sigma_{\mathcal{A}}$，若满足以下条件之一，我们记作 $u \preceq x$ （“u 是 x的前缀”）：要么 $u = \tilde{0}$；要么 $u = u_1 \cdots u_k$，且 $k \geq 1$和 $|x| \geq k$，并且 x 的前 k 个符号与 u一致，即 $x_1 \cdots x_k = u_1 \cdots u_k$。

定义 4.2 （附带于一个枚举的 OTW 度量）。 固定 $\mathcal{P} = \{p_1, p_2, \ldots\}$的一个枚举。定义 $d_{\mathcal{P}}$: $\Sigma_{\mathcal{A}} \times \Sigma_{\mathcal{A}} \to [0, 1]$ 为

$$d_{\mathcal{P}}(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ 2^{-i}, & i = \min\{j \geq 1 : \ (p_j \preceq x) \ \oplus \ (p_j \preceq y)\}, \end{cases}$$

其中 $\oplus$ 表示异或。

命题 4.3. 对每个枚举 $\mathcal{P}$，函数 $d_{\mathcal{P}}$ 是 $\Sigma_{\mathcal{A}}$上的超度量 。

证明。 固定 $\Sigma_{\mathcal{A}}^{\mathrm{fin}}$的一个枚举 $\mathcal{P} = \{p_1, p_2, \dots\}$。对于 $x \in \Sigma_{\mathcal{A}}$，定义其前缀指示函数

$$\chi_x : \Sigma_{\mathcal{A}}^{\mathrm{fin}} \to \{0,1\}, \qquad \chi_x(u) = \begin{cases} 1, & u \preceq x, \\ 0, & u \not\preceq x. \end{cases}$$

因此，当且仅当$\chi_x = \chi_y$时， $d_{\mathcal{P}}(x,y) = 0$；否则

$$d_{\mathcal{P}}(x,y) = 2^{-k(x,y)}, \quad \text{where} \quad k(x,y) := \min\{j \geq 1 : \chi_x(p_j) \neq \chi_y(p_j)\}.$$

设 $x, y, z \in \Sigma_{\mathcal{A}}$。若其中两个相等，则超度量不等式显然成立，因此不妨设x, y, z任意，并考虑下标 $k(x,y)$ $k(x,z)$ $k(z,y)$ $\in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ （其中 $k = \infty$表示相等）。令

$$r := \min\{k(x,z), k(z,y)\}.$$

根据 r的定义，我们有

$$\chi_x(p_j) = \chi_z(p_j) \quad \text{and} \quad \chi_z(p_j) = \chi_y(p_j) \qquad \text{for all } j < r.$$

因此，对所有 $j < r$，都有 $\chi_x(p_j) = \chi_y(p_j)$，这意味着

$$k(x,y) \;\geq\; r.$$

因此，

$$d_{\mathcal{P}}(x,y) = 2^{-k(x,y)} \;\leq\; 2^{-r} = \max\{2^{-k(x,z)}, 2^{-k(z,y)}\} = \max\{d_{\mathcal{P}}(x,z), d_{\mathcal{P}}(z,y)\},$$

这正是超度量不等式。 □

注记 4.4。 对于任意枚举 $\mathcal{P}$，度量 $d_{\mathcal{P}}$ 在 $\Sigma_{\mathcal{A}}$ 上诱导出 OTW 拓扑（参见[18, §2.2–§2.3]）。

4.3. **OTW 移位与 Deaconu–Renault 观点**。 移位映射 $\sigma : \Sigma_{\mathcal{A}} \to \Sigma_{\mathcal{A}}$ 在 [18, 定义 2.22]中定义如下:

$$\sigma(x_1x_2x_3\cdots) = x_2x_3\cdots, \quad \sigma(x_1\cdots x_k) = x_2\cdots x_k \ (k \geq 2), \quad \sigma(x) = \tilde{0} \ (|x| \leq 1).$$

˜OTW 证明， σ 在除 0 以外的每一点都连续，并且 σ 在 $\Sigma_{\mathcal{A}} \setminus \{0\}$ [18, 命题 2.23]中限制为局部同胚。因而，经过标准的定义域限制，即限制到长度大于或等于 1 的元素，$(\Sigma_{\mathcal{A}}, \sigma)$ 符合 Deaconu–Renault 框架 [15, 定义 2.1]。这种 Deaconu–Renault 系统框架更适用于 C*-代数应用，例如在 [3, 4]中便采用了该框架。

5. Shadowing for the OTW full shift

5.1. **所有 OTW 度量都一致等价**。

引理 5.1. 如果 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{Q}$ 是 $\Sigma_{\mathcal{A}}^{\mathrm{fin}}$的两个枚举，那么 $d_{\mathcal{P}}$ 和 $d_{\mathcal{Q}}$ 一致等价。

证明。 根据 OTW，两种度量在 $\Sigma_{\mathcal{A}}$上诱导相同的紧豪斯多夫拓扑。因此，$\mathrm{id} : (\Sigma_{\mathcal{A}}, d_{\mathcal{P}}) \to (\Sigma_{\mathcal{A}}, d_{\mathcal{Q}})$ 连续。由于 $(\Sigma_{\mathcal{A}}, d_{\mathcal{P}})$ 是紧的，海涅–坎托尔定理表明 id 一致连续。反之，$\mathrm{id} : (\Sigma_{\mathcal{A}}, d_{\mathcal{Q}}) \to (\Sigma_{\mathcal{A}}, d_{\mathcal{P}})$ 也一致连续。□

5.2. **OTW 全移位的跟踪**。

命题 5.2。 设 $\mathcal{A}$ 为可数无限。对于任意 *OTW* 度量 $d_{\mathcal{P}}$，系统 $(\Sigma_{\mathcal{A}}, \sigma, d_{\mathcal{P}})$ 具有跟踪性质。

证明。 在整个证明过程中，我们将伪轨道和跟踪理解为局部同胚 $\sigma\colon \Sigma_{\mathcal{A}} \setminus \{\tilde{0}\} \to \Sigma_{\mathcal{A}}$ 的 Deaconu–Renault 意义，因此所有出现的迭代 $\sigma^n(x)$ 均假定有定义。按照这一约定，[15] 的跟踪结果可直接应用。

在 [15, 命题 5.1], 中，作者证明了与具有无限多个花瓣的玫瑰图（一个顶点、可数多个环）相关联的 Deaconu–Renault 系统具有跟踪性质；该系统赋有由边序枚举构造的自然超度量（见 [15,例 3.9]）。相应的边界路径空间与 OTW 全移位 $\Sigma_{\mathcal{A}}$ 存在典范对应（有限路径对应有限词，无限路径对应无限序列），而 [15]中的度量与某个特定枚举 $\mathcal{P}_0$所对应的 OTW 度量 $d_{\mathcal{P}_0}$ 一致。

因此，$(\Sigma_{\mathcal{A}}, \sigma, d_{\mathcal{P}_0})$ 具有跟踪性质。现在令 $\mathcal{P}$ 为任意一个枚举。根据引理 5.1，$d_{\mathcal{P}}$ 和 $d_{\mathcal{P}_0}$ 一致等价。根据命题 2.5，跟踪性质可从 $d_{\mathcal{P}_0}$ 传递到 $d_{\mathcal{P}}$。□

6. Lipschitz shadowing for OTW-shift spaces

现在我们构造一个枚举 $\mathcal{Q}$，使其诱导的 OTW 度量导致 Lipschitz 阴影性质失效，尽管根据命题 5.2，跟踪性质成立。我们还将构造一个满足 Lipschitz 阴影性质的枚举。

6.1. **非 Lipschitz 阴影枚举**。 我们先定义所需枚举应满足的性质。

引理 6.1。 存在一个 $\mathbb{N}$ 中的递增序列 $i_1 < i_2 < \cdots$，以及一个 $\Sigma_{\mathcal{A}}^{\mathrm{fin}}$ 的枚举 $\mathcal{Q} = \{q_k\}_{k\geq 1}$，满足以下性质：对于每个 $n \geq 1$，都存在两两不同的字母 $a_1^{(n)}$、$a_2^{(n)}$、$a_3^{(n)}$、$b^{(n)} \in \mathcal{A}$，使得

(i) $q_{i_n - n} = a_1^{(n)} a_2^{(n)} a_3^{(n)}$ *; (ii)* $q_1, \ldots, q_{i_n}$ 中的词都不以 $a_2^{(n)}$ 开头；*(iii)* 在 $q_1, \ldots, q_{i_n}$ 中的任何 词里都不出现字母 $b^{(n)}$。

证明。 固定一个列举

$$\Sigma_{\mathcal{A}}^{\mathrm{fin}} = \{w_1, w_2, w_3, \ldots\}.$$

我们归纳地构造一个递增序列 $(i_n)_{n\geq 1}$ 以及一个枚举的各项取值$\mathcal{Q} = \{q_k\}_{k\geq 1}$。

步骤 $n = 1$ **(初始步骤)**。 选取两两不同的字母

$$a_1^{(1)},\ a_2^{(1)},\ a_3^{(1)},\ b^{(1)} \in \mathcal{A}.$$

选取一个整数 $i_1 \geq 2$（使得 $i_1 - 1 > 0 = i_0$），并定义

$$q_{i_1 - 1} := a_1^{(1)} a_2^{(1)} a_3^{(1)}.$$

对于每个其他索引 $k \in (0, i_1] \setminus \{i_1 - 1\}$（即 $1 \leq k \leq i_1$ 和 $k \neq i_1 - 1$），通过在尚未使用的词 w_j 中，按 j 递增的顺序选取最先满足以下条件的词，来定义 q_k：

- w_j 不以 $a_{(1)\ 2}$ 开头，并且
- $b\ _{(1)}$ 不会出现在 w_j 中，

直到所有此类下标都被填满。

这是可行的，因为满足这两个限制条件的词有无限多个，而我们只需要填补有限个空位。根据构造，引理的 (i)–(iii) 项对 $n = 1$ 成立。

Indu归纳假设。假设对于某个 $n \geq 2$，我们已经选定了指标 s

$$i_1 < i_2 < \cdots < i_{n-1},$$

并定义了词 q_1、.....、$q_{i_{n-1}}$（彼此不同），使得对于每个 $r = 1$、.....、$n-1$，都存在两两不同的字母 $a_1^{(r)}$、$a_2^{(r)}$、$a_3^{(r)}$、$b^{(r)} \in \mathcal{A}$，使条件 (i)–(iii) 在阶段 r（即截至截断位置 i_r）成立。

归纳步骤（构造阶段 n）。令

$$S_{n-1} := \{\text{letters that occur in some } q_k,\ 1 \leq k \leq i_{n-1}\}.$$

由于目前定义的词只有有限多个， S_{n-1} 是有限的。选取两两不同的字母

$$a_1^{(n)},\ a_2^{(n)},\ a_3^{(n)},\ b^{(n)} \in \mathcal{A} \setminus S_{n-1}.$$

现在选取一个整数 i_n，使其足够大，以至于

$$i_n - n > i_{n-1}.$$

定义特殊槽位

$$q_{\,i_n - n} := a_1^{(n)} a_2^{(n)} a_3^{(n)}.$$

这个词是新的，因为字母 $a_1^{(n)}$， $a_2^{(n)}$， $a_3^{(n)}$ 是在 S_{n-1}之外选取的。

对于每一个其他索引

$$k \in (i_{n-1}, i_n] \setminus \{i_n - n\},$$

在尚未使用的词w_j 中，按 j的递增顺序选取最先满足下列条件的那些词，从而定义 q_k：

- w_j 不以 $a_{(n)\ 2}$ 开头，并且
- $b\ _{(n)}$ 在w_j中没有出现，

直到所有此类下标都被填入。

这是可行的，因为在 $\Sigma_{\mathcal{A}}^{\text{fin}}$中满足这两个限制条件的词有无穷多个（例如满足 $c \in \mathcal{A} \setminus \{a_2^{(n)}, b^{(n)}\}$ 的单字母词（c））， 而迄今为止只用过有限个词，因此仍有无穷多个符合条件的词尚未使用。

通过这一构造，在阶段 n，性质（ii）和（iii）成立：

（ii） $q_1, \ldots, q_{i_n}$ 中的词都不以 $a_2^{(n)}$ 开头，因为 $a_2^{(n)} \notin S_{n-1}$，且所有新指派的词都经过挑选，不以 $a_2^{(n)}$ 开头；（iii）字母 $b^{(n)}$ 不会出现在 $q_1, \ldots, q_{i_n}$中的任何词里，因为 $b^{(n)} \notin S_{n-1}$，且所有新指派的词都经过挑选，以避免 $b^{(n)}$。

归纳构造至此完成。

为何 $\mathcal{Q}$ 枚举 $\Sigma_{\mathcal{A}}^{\text{fin}}$。首先注意，根据构造，所有 q_k 都互不相同，并且每个 q_k 都是某个 w_j，因此 $\{q_k\} \subseteq \Sigma_{\mathcal{A}}^{\text{fin}}$。接下来只需证明每个 w_j 都会出现。

对每个 n，令 $B_n := \{a_2^{(n)}, b^{(n)}\}$。由于在每一阶段字母都是新选取的，集合$B_n$ 两两不交。设 $w \in \Sigma_{\mathcal{A}}^{\text{fin}}$，并设 $\mathcal{L}(w) \subseteq \mathcal{A}$ 为出现在 w 中的字母的有限集。因为 B_n 不交且 $\mathcal{L}(w)$ 有限，所以仅有有限多个 n 满足$\mathcal{L}(w) \cap B_n \neq \varnothing$。因此存在 $N(w)$，使得对每个 $n \geq N(w)$：

- w 不以 $a_{(n)}$ 2 开头，并且
- b $_{(n)}$ 没有出现在 w中。

因此， w 符合条件，可以在每个阶段用作填充词 $n \geq N(w)$。

现在固定 $j \geq 1$ 并考虑w_j。令

$$N_j := N(w_j).$$

对于每个阶段 $n \geq N_j$，词w_j 都符合条件。此外，我们的选择 $i_n - n > i_{n-1}$ 意味着$i_n - i_{n-1} > n$，因此阶段 n 的填充位置数量为

$$\#\Big((i_{n-1}, i_n] \setminus \{i_n - n\}\Big) = i_n - i_{n-1} - 1 \ \geq \ n.$$

因此，从阶段 N_j 开始可用的填充位置总数是无限的。由于在每个阶段，我们都用固定列表 $\{w_1, w_2, \dots\}$中符合条件且尚未使用的最早的词来填充填充位置，因此一旦所有符合条件的词 w_1，...， w_{j-1} 都已使用，词w_j 就会成为最早的符合条件且尚未使用的词，并且必须在之后的某个填充位置被选中。因此，w_j 最终会被选中。

由于 j 是任意的，每个 w_j 在 q_k中恰好出现一次。因此， $\mathcal{Q}$ 是 $\Sigma_{\mathcal{A}}^{\mathrm{fin}}$的一个枚举，引理得证。□

6.2. **Lipschitz 跟踪性质的失效**。

定理 6.2. 设 $\mathcal{Q}$ 如引理 *6.1* 中所述，并设 $d_{\mathcal{Q}}$ 为相应的 *OTW* 度量。那么$(\Sigma_{\mathcal{A}}$、 σ、 $d_{\mathcal{Q}})$ 不具有 Lipschitz 阴影性质。

证明。 我们证明 Lipschitz 跟踪性质不成立：对于任意 $L > 0$ 和任意 $\delta_0 > 0$，都存在 $\delta \in (0,\ \delta_0]$ 以及 $\Sigma_{\mathcal{A}}$ 中的一个 δ-伪轨道，它不被 $\Sigma_{\mathcal{A}}$中的任何点 $L\delta$-影踪。

固定 $L > 0$ 和 $\delta_0 > 0$。选取满足 $2^n > L$的 $n \geq 1$ 。由引理 6.1，选取相应的索引 i_n 和字母

$$a_1 := a_1^{(n)}, \qquad a_2 := a_2^{(n)}, \qquad a_3 := a_3^{(n)}, \qquad b := b^{(n)}.$$

如有必要，进一步增大 n ，我们可以假设

$$2^{-i_n} < \delta_0.$$

Set

$$\delta := 2^{-i_n}, \qquad w := a_1 a_2 a_3 = q_{i_n - n}.$$

步骤 1：构造一个 δ-伪轨道。定义 $\{x^m\}_{m \geq 0} \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{N}} \subseteq \Sigma_{\mathcal{A}}$ 为

$$x^{2k} := a_1 a_2 a_3\, bbb \cdots, \qquad x^{2k+1} := b\, a_1 a_2 a_3\, bbb \cdots \quad (k \geq 0).$$

我们声称， $\{x^m\}$ 是一个 δ-伪轨道。

当 $m = 2k+1$ 为奇数时，

$$\sigma(x^{2k+1}) = a_1 a_2 a_3\, bbb \cdots = x^{2k+2},$$

so

$$d_{\mathcal{Q}}(\sigma(x^{2k+1}), x^{2k+2}) = 0 < \delta.$$

当 $m = 2k$ 为偶数时，

$$\sigma(x^{2k}) = a_2 a_3\, bbb \cdots, \qquad x^{2k+1} = b\, a_1 a_2 a_3\, bbb \cdots.$$

$\sigma(x^{2k})$ 的任意非空前缀都以 a_2 开头，而 x^{2k+1} 的任意非空前缀都以 b 开头。根据引理 6.1(ii)， q_1、.....、q_{i_n} 中的词都不以 a_2 开头。根据引理 6.1(iii)，字母 b不会出现在 q_1、.....、 q_{i_n}中的任何词里，因此特别地，这些词都不以 b 开头。因此，对于每个 $r \leq i_n$，词 q_r 是 $\sigma(x^{2k})$ 的前缀，当且仅当它是 x^{2k+1} 的前缀

（事实上，除非 $q_r = \tilde{0}$，否则两者都为假；此时两者都为真。）因此，第一个区分指标是 $> i_n$，从而

$$d_{\mathcal{Q}}(\sigma(x^{2k}), x^{2k+1}) < 2^{-i_n} = \delta.$$

因此，$\{x^m\}_{m\geq 0}$ 是一个 δ-伪轨道。

步骤 2：没有任何点能够 $L\delta$-跟踪它。反设存在$x \in \Sigma_{\mathcal{A}}$ 使得

$$d_{\mathcal{Q}}(\sigma^m(x), x^m) \leq L\delta \qquad \text{for all } m \geq 0.$$

由于 $2^n > L$，我们有

$$L\delta < 2^n\delta = 2^{-(i_n - n)}.$$

因此，对每个 $m \geq 0$，

$$d_{\mathcal{Q}}(\sigma^m(x), x^m) < 2^{-(i_n-n)}.$$

根据 OTW 度量的定义，并且由于 $q_{i_n-n} = w$，这意味着

$$w \preceq \sigma^m(x) \iff w \preceq x^m \qquad \text{for every } m \geq 0.$$

特别地，对于每个 $k \geq 0$，点 x^{2k} 以 w 开头，因此

$$w \preceq \sigma^{2k}(x) \qquad \text{for all } k \geq 0.$$

取 $k = 0$ 和 $k = 1$，我们得到

$$w \preceq x \qquad \text{and} \qquad w \preceq \sigma^2(x).$$

记 $w = a_1a_2a_3$，第一个条件表明 x 的前三个字母是

$$x_1x_2x_3 = a_1a_2a_3,$$

而第二个条件表明 $\sigma^2(x)$ 的前三个字母也是 $a_1a_2a_3$，即

$$x_3x_4x_5 = a_1a_2a_3.$$

比较这两个块的首字母可得

$$x_3 = a_3 \quad \text{and} \quad x_3 = a_1,$$

因此 $a_1 = a_3$，这与 a_1 和 a_3 不同这一事实矛盾。

因此，$\Sigma_{\mathcal{A}}$ 中的任何点都不能对伪轨道 $\{x^m\}$进行 $L\delta$-跟踪。由于 $L > 0$ 和 $\delta_0 > 0$是任意的，$(\Sigma_{\mathcal{A}}, \sigma, d_{\mathcal{Q}})$ 不具有 Lipschitz 阴影性质。□

6.3. 诱导 Lipschitz 阴影的枚举。设 $\mathcal{P} = \{p_1, p_2, \dots\}$ 是 $\Sigma_{\mathcal{A}}^{\text{fin}}$的一个枚举。给定 $i \in \mathbb{N}$，记作

$$a \npreceq \{p_1, \dots, p_i\} \quad \text{if} \quad a \text{ does not occur in any of the words } p_1, \dots, p_i.$$

定义 6.3（前缀–移位相容枚举）。如果枚举 $\mathcal{P} = \{p_1, p_2, \dots\}$ 属于$\Sigma_{\mathcal{A}}^{\text{fin}}$，满足 $p_1 = \tilde{0}$ 及以下条件，则称其为前缀–移位相容的：

(1)（前缀封闭）若 $p_k = uv$ 满足 $u \in \Sigma_{\mathcal{A}}^{\text{fin}}$和 $v \in \Sigma_{\mathcal{A}}^{\text{fin}} \setminus \{\tilde{0}\}$，则存在某个 $m < k$使得 $u = p_m$。

(2)（移位封闭）若 $|p_k| \geq 2$，则存在某个 $m < k$使得 $\sigma(p_k) = p_m$。

注 6.4。存在前缀–移位相容枚举。事实上，固定一个枚举$\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \dots\}$，并对每个 $N \geq 1$，令

$$B_N := \{u \in \Sigma_{\mathcal{A}}^{\text{fin}} : \ |u| \leq N \text{且 } u \text{的每个字母都属于 } \{a_1, \dots, a_N\}\}.$$

那么每个 B_N 都是有限的，$B_N \subseteq B_{N+1}$，并且$\bigcup_{N\geq 1} B_N = \Sigma_{\mathcal{A}}^{\text{fin}}$。

按块列举 $\Sigma_{\mathcal{A}}^{\text{fin}}$，先列出 B_1，再列出 $B_2 \setminus B_1$ 中的新词，然后列出 $B_3 \setminus B_2$ 中的词，依此类推。在每个有限块 $B_N \setminus B_{N-1}$ 内，任意选择一种满足以下有限依赖关系的顺序：

• 真前缀（列出 u 的每个真前缀，再列出 u），以及
• 左移位（如果 $|u| \geq 2$，则在 $\sigma(u)$ 位于同一块中时，将列表 $\sigma(u)$ 排在 u 之前 ck).
这是可行的，因为依赖关系是无环的（词长严格递减）。现在，设 u 是出现在某个块 $B_N \setminus B_{N-1}$中的任意一个词。u 的每个真前缀以及在$|u| \geq 2$时，词 $\sigma(u)$ 都属于 B_N（它们使用相同的字母，且长度更短），因此它们要么列在更早的块中，要么列在同一块的更前面。因此，所得的枚举是前缀–移位相容的。特别地，它是移位相容的。

命题 6.5（前缀–移位相容 OTW 度量下的 Lipschitz 阴影）。设 $\mathcal{A}$ 为可数无限集，且 $\Sigma_{\mathcal{A}}$ 为 *OTW* 全移位。固定 $\Sigma_{\mathcal{A}}^{\mathrm{fin}}$的一个前缀–移位相容枚举$\mathcal{P} = \{p_1, p_2, \dots\}$（见注 *6.4*），并记 $d_0 := d_{\mathcal{P}}$。则 （$\Sigma_{\mathcal{A}}$、σ、d_0）具有 *Lipschitz* 阴影性质。事实上，*Lipschitz* 常数可以取为 $L = 2$。

证明。令 $\delta_0 := 1/4$ 并固定 $0 < \delta \leq \delta_0$。选择 $j \geq 2$ 使得

$$2^{-j} \leq \delta < 2^{-(j-1)}. \tag{3}$$

Set

$$N := j - 1, \qquad F := \{p_1, \dots, p_N\}.$$

令 $\{x^n\}_{n\geq 0}$ 为一个 δ伪轨道，即

$$d_0(\sigma(x^n), x^{n+1}) < \delta \qquad (n \geq 0).$$

由于 d_0 取值于 $\{0\} \cup \{2^{-k} : \ k \in \mathbb{N}\}$，(3)推出

$$d_0(\sigma(x^n), x^{n+1}) < 2^{-N} \qquad (n \geq 0).$$

因此，根据 d_0的定义，我们有前缀一致

$$\forall\, u \in F,\ \forall\, n \geq 0, \qquad u \preceq \sigma(x^n) \iff u \preceq x^{n+1}. \tag{4}$$

对于每个 $n \geq 0$，定义

$$S_n := \{u \in F : \ u \preceq x^n\}.$$

由于该枚举是前缀–移位相容的，有限集 F 具有以下闭包性质：

• 若 $u \in F$ 且 v 是 u的真前缀，则 $v \in F$；
• 若 $u \in F$ 且 $|u| \geq 2$，则 $\sigma(u) \in F$。

步骤 1：根据单字母信息定义一个候选影随点。选取一个字母 $z \in \mathcal{A}$ 使得

$$z \notin \{p_1, \dots, p_N\},$$

也就是说，z不会出现在词 $p_1, \dots, p_N$中的任何一个词里。（这是可行的，因为在 $p_1, \dots, p_N$中只出现有限多个字母。）

递归地定义 $x = x_1x_2x_3 \cdots \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}} \subset \Sigma_{\mathcal{A}}$：对每个 $n \geq 0$,

$$x_{n+1} := \begin{cases} a, \text{若存在一个（必然唯一的）单字母词 } (a) \in F \text{ 满足 } (a) \in S_n, \\ z \qquad\qquad\qquad\

基础情形 $|u| = 0$。于是 $u = \tilde{0}$，且对每个 $y \in \Sigma_{\mathcal{A}}$ 都有 $\tilde{0} \preceq y$，因此 (5) 显然成立。基础情形 $|u| = 1$。令 $u = (a) \in F$。那么

$$u \preceq \sigma^n(x) \iff x_{n+1} = a.$$

根据 x_{n+1} 的定义，这等价于 $(a) \in S_n$。因此，对于所有满足 $|u| = 1$ 的 $u \in F$，(5) 均成立。

归纳步骤。假设对于 F 中长度至多为 $\ell - 1$ 的所有词，(5) 均成立，其中 $\ell \geq 2$，并令 $u \in F$ 满足 $|u| = \ell$。记

$$u = c\,v, \qquad c \in \mathcal{A}, \quad v = \sigma(u) \in \Sigma_{\mathcal{A}}^{\text{fin}}.$$

由于该枚举是前缀–移位相容的，我们有 $(c) \in F$（前缀闭包）以及 $v \in F$（移位闭包）。

现在，对于每个 $n \geq 0$,

$$\begin{aligned} u \preceq \sigma^n(x) &\iff \big((c) \preceq \sigma^n(x)\big) \text{ and } \big(v \preceq \sigma^{n+1}(x)\big) \\ &\iff \big((c) \in S_n\big) \text{ and } \big(v \in S_{n+1}\big), \end{aligned}$$

其中，第二个等价关系用到了基础情形（针对 (c)）和归纳假设（针对 v）。另一方面，由于 $u = c\,v$,

$$u \preceq x^n \iff \big((c) \preceq x^n\big) \text{ and } \big(v \preceq \sigma(x^n)\big).$$

因为 所以 $(c) \in F$，第一个条件等价于 $(c) \in S_n$。由于 $v \in F$，(4) 给出 es

$$v \preceq \sigma(x^n) \iff v \preceq x^{n+1} \iff v \in S_{n+1}.$$

因此

$$u \preceq x^n \iff \big((c) \in S_n\big) \text{ and } \big(v \in S_{n+1}\big),$$

这与针对 $u \preceq \sigma^n(x)$ 得到的判据相符。因此 (5) 对 u 成立，归纳法完成。

步骤 3：估计跟踪误差。固定 $n \geq 0$。根据 (5)，对于每个 $i \leq N$，我们有 e

$$p_i \preceq \sigma^n(x) \iff p_i \preceq x^n.$$

因此，$\sigma^n(x)$ 与 x^n 的前缀检验首次出现差异的索引是 $> N$，因此

$$d_0(\sigma^n(x), x^n) < 2^{-N} = 2^{-(j-1)} \leq 2\delta.$$

Since这对每个 $n \geq 0$ 都成立，点 x 2δ-跟踪给定的 δ-伪轨道。

因此 $(\Sigma_{\mathcal{A}}, \sigma, d_0)$ 具有 Lipschitz 阴影性质，其 Lipschitz 常数为 $L = 2$。 □

References

[1] R. Bissacot 和 R. j. Dos Santos Freire。关于不可约可数马尔可夫移位上极大化测度的存在性：一种动力学证明。 *Ergodic Theory Dyn. Syst.*，34(4):1103–1115，2014。[2] R. Bissacot 和 E. Garibaldi。可数马尔可夫移位的弱 KAM 方法与遍历最优问题。 *Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.)*，41(3):321–338，2010。[3] G. Boava、G. G. de Castro、D. Gon˙calves 和 D. W. van Wyk。任意字母表上的单侧子位移代数。 *Rev. Mat. Iberoam.*，40(3):1045–1088，2024。[4] G. Boava、G. G. de Castro、D. Gon˙calves 和 D. W. van Wyk。任意字母表上的单侧子位移 C*-代数。 *Discrete Contin. Dyn. Syst.*，45(9):3275–3295，2025。[5] J. Campos、N. Romero 和 R. Vivas。离散字母表上位移态射的像集与可逆性。 *Rev. Unión Mat. Argent.*，63(1):169–184，2022。[6] U. B. Darji、D. Gon

Adv. calves *Math.* 385 ˛ 107760, 34, 2021

和 M. Sobottka。跟踪、有限阶移位与超度量空间。，：论文编号。[7] V. Deaconu。与端同态相关联的群胚。 *Trans. Amer. Math. Soc.*，347(5):1779–1786，1995。

[8] D. Gon
$M+1$ M *Bull.* calves 和
Sci. Math. 139 2 178 183, 2015
D. Royer。非共轭于 -步移位空间的 ()-步移位空间。，( ): –。[9] D. Gon¸calves 和 D. Royer。无限字母表上的超图与移位空间。 *Bull. Sci. Math.*，141(1):25– 45，2017。[10] D. Gon
* *Int.* calves 和
Math. Res. Not. 2019 7 2177 2203, 2019
D. Royer。通过超图构造的无限字母表边位移空间及其 C-代数。，( ): –。[11] D. Gon¸calves、D. Royer 和 F. Augusto Tasca。局部同胚的熵及其在无限字母表移位空间中的应用。 *Int. Math. Res. Not.*，2024(6):4842–4892，2024。[12] D. Gon¸calves、M. Sobottka 和 C. Starling。无限字母表移位空间之间的滑动块码。*Math. Nachr.*，289(17-18):2178–2191，2016。[13] D. Gon¸calves 和 B. B. Uggioni。超图移位空间与混沌。 *Bull. Sci. Math.*，158:102807，2019。23 页。[14] D. Gon¸calves 和 B. B. Uggioni。超图移位空间上的李-约克混沌。 *Discrete Contin. Dyn. Syst.*，40 4 2347 2365，2020 ( ): –。[15] D. Gon¸calves 和 B. B. Uggioni。局部同胚的跟踪及其在无限图边位移空间中的应用。 *J. Dyn. Differ. Equations*，37(2):1933–1963，2025。[16] B. P. Kitchens。 *Symbolic dynamics. One-sided, two-sided and countable state Markov shifts*。Universitext。柏林：Springer，1998。[17] D. Lind 和 B. Marcus。 *An introduction to symbolic dynamics and coding*。Camb. Math. Libr. 剑桥：剑桥大学出版社，第二版（更新版），2021。[18] W. Ott、M. Tomforde 和 P. N. Willis。
One-Sided Shift Spaces over Infinite Alphabets 5 *New*，《纽约
York J. Math. Monogr. 2014
数学杂志》卷，纽约州奥尔巴尼，。[19] B. E. Raines 和 T. Underwood。可数字母表移位空间中的混沌集。
Proc. Amer. Math.，：–。
Soc. 144 217 224, 2016
[20] J. Renault。Cuntz 型代数。 *Operator theoretical methods*，第 371–386 页，2000。[21] K. Sakai。正向扩张映射的各种跟踪性质。 *Topology Appl.*，131(1):15–31，2003。[22] O. M. Sarig。可数马尔可夫移位的热力学形式。 *Ergodic Theory Dyn. Syst.*，19(6):1565– 1593，1999。[23] M. Sobottka 和 D. Gon¸calves。关于滑动块码定义及 Curtis-Hedlund-Lyndon 定理的一则注记。 *J. Cell. Autom.*，12(3-4):209–215，2017。[24] T. Zavistanovicz Almeida 和 M. Sobottka。模糊移位空间。 *Bull. Sci. Math.*，173:36，2021。编号/No 103069。D

epartamento de Matemática, Universidade Federal de Santa Catarina, 88040-970 Florianópolis SC, Brazil
Email address: daemig@gmail.com

Departamento de Matemática, Universidade Federal de Santa Catarina,
88040-970 FlorianópolisSC, Brazil*Email address*: fifia.meneghel@gmail.com