arXiv:2603.03215v1 [math.MG] 3 Mar 2026

热带测度、各向异性等周不等式与蜂窝

AMNON ROSENMANN

Abstract. 我们在 $\mathbb{R}^n$ 上引入一种基于热带度量的热带球面测度，它是球面豪斯多夫测度的一种类似物。这种测度在平移下不变，但与勒贝格测度不同，它在旋转或反射下并不保持不变。它在 n维可测子集（但不在 k维的 $k < n$可测子集）上与勒贝格测度一致；对于可求长曲线，它则还原为热带长度。在二维情形下，我们证明了一个尖锐的热带等周不等式，且等号当且仅当集合为热带圆盘，并由此推出热带蜂窝定理。我们还引入了闵可夫斯基体积的一种热带类比，并证明热带球是相应的沃尔夫形状。这给出了热带等周问题的一种各向异性形式，进而得到 $\mathbb{R}^n$上的热带蜂窝定理。最后，我们描述热带对偶范数和对偶球，比较热带球面测度与闵可夫斯基表面测度，并证明它们在平面上以及在 $\mathbb{R}^n$ 中面平行于热带球或其对偶球的面的多胞体上相等。

Contents

1. 引言 2 2. 热带射影环面 4 3. 热带度量 5 4. 热带单位球 6 5. 热带球面测度 8 5.1. 曲线的热带长度 10 5.2. 热带测度的其他定义 10 6. 热带球的表面积体积比 11 7. 平面中的热带等周不等式 13 8. 平面中的热带蜂窝定理 15 9. $\mathbb{R}^n$ 16中的等周不等式 9.1. 经典等周不等式 17 9.2. 各向异性等周不等式 17 9.3. 作为表面张力的热带范数与热带对偶范数 18 9.4. 作为 Wulff 形状的热带球 20

2020 数学学科分类。 14T99, 15A80, 28A75, 49Q05, 52A38, 52A40.关键词和短语。 热带测度，热带球，热带等周不等式，各向异性等周问题，热带蜂窝。

10. $\mathbb{R}^n$中的热带蜂窝定理 10.1. $\mathbb{R}^3$的铺 24
砌参考文献 25
26

1. Introduction

等周不等式是几何测度论中的基础问题之一，人们在各种环境空间以及各种测度和度量下对其进行了研究。本文探讨热带几何中的等周不等式，在这一情形下，它是一个各向异性等周问题。为此，我们引入基于 Cohen、Gaubert 和 Quadrat [5]所提出的热带度量的热带测度。这些测度适用于 $\mathbb{R}^n$ 的可整流子集，并不限于多胞体或分段线性空间。作为热带等周不等式的推论，我们在 $\mathbb{R}^n$中得到一个热带蜂窝定理。

几何测度论（GMT） [11, 37, 25, 29]于20世纪下半叶兴起，旨在分析几何变分问题，例如最小表面积。它将微分几何的光滑框架扩展至能够处理奇点和不规则性，从而研究可求长集、流和变折。

一个较新的领域是热带几何。它可被视为通过 Maslov 的对数极限“去量子化”（见 [20]），将复结构退化为分段线性结构与多面体结构。热带几何研究扩展实数半域上的多项式与簇，其中以 $+\infty$ （或 $-\infty$）以及最小值（或最大值）的幂等运算代替加法，并以加法运算代替乘法。其结果是一种线性的、组合的，并且在某种意义上更简单的代数几何版本。其应用包括代数几何、优化问题、离散事件动力系统、神经网络和弦论等。关于热带几何的主要文献，我们推荐 Maclagan 与 Sturmfels 的著作 [24]；其他精选文献见
[18], [2], [27], [32], [15],[19]。

一个自然的问题是，能否将 GMT 型问题迁移到热带设定中。这就引出了如下问题：如何在热带或幂等的语境中定义测度或体积这一基本概念？让我们来看看为此所选取的一些方法。

Maslov [26] （另见 [8], [1], ）定义了一种幂等测度 μ ，它是一种极端测度，其含义是 $\mu(A\cup B) = \max(\mu(A)\ \mu(B))$（或 $\min(\mu(A)\ \mu(B))$）），并由此引出勒贝格积分的自然类比。这些概念促使 Maslov 引入优化理论，将其视为概率论和随机理论的类比，并将其应用于最优控制和 Hamilton–Jacobi 方程等领域。

Depersin、Gaubert 和 Joswig 引入了一种多胞体的热带体积概念，该多胞体由一个 $n\times n$ 矩阵A, $n \geq 2$ 的各行给出。其定义为

最大赋值问题（ A 的热带永久式）与次优赋值之间的差距。当 A 的各行（或各列）包含在某个热带超平面 [33] 中时，体积为零，也就是说，最大值至少取得两次。在维数 $n = 2$ 下，它等于热带距离。作者还针对他们的体积概念证明了一个等径不等式定理。

Loho 与 Schymura [23] 提出了热带多面体（有限生成的热带凸集）体积的另一种定义。他们的热带重心体积采用格点计数与 Ehrhart 多项式的热带类比，其中他们的格定义在对数尺度上。

我们还提及另一项工作，即 Lee、Li、Lin 和 Monod [21], 的工作，它在动态最优传输中使用热带度量，发展了概率空间之间 Wasserstein-p 距离的热带类比。当 $p = 1$ 时，他们得到了热带射影环面上测地线的高效计算。

我们此处的目标则不同：我们在热带情形中引入经典测度的类比，但这些测度定义在 $\mathbb{R}^n$ 的一般可整流子集上，而不仅仅定义在多胞体上。这些测度基于 Cohen、Gaubert 和 Quadrat 在 [5] 中引入的热带度量（另见 [6]），即 Hilbert射影度量的加性版本。

我们引入的主要热带 k维测度记为 σ_{tr}^k，定义在与 $\mathbb{R}^n$等同的热带射影环面 $\mathbb{R}^{n+1}/\mathbb{R}\mathbf{1}$上。它是 k维Hausdorff球面测度的热带类比，其中 $\sigma_{\mathrm{tr}}^k(S)$通过对 $S \subset \mathbb{R}^n$ 用维数为n的热带球作覆盖并取极限来计算。该测度在 $\mathbb{R}^n$的 n维（勒贝格可测）子集上与勒贝格测度一致，但在 $\mathbb{R}^n$的 k维子集上与之不同（对于 $k < n$）。这是因为 σ_{tr}^k与热带度量一样，在 $\mathbb{R}^n$的Lebesgue等距变换下并非不变：它在平移下不变，但在旋转或反射下并不不变。在可求长曲线 γ上， $\sigma_{\mathrm{tr}}^1(\gamma)$与通过热带线段求长法给出的标准定义一致。

我们引入的另一种测度是Minkowski测度和Minkowski-Steiner表面积的热带类比。对于平面的子集，以及在 $\mathbb{R}^n$ 中当曲面由平行于热带球或其对偶的面的面组成时，相对于热带Hausdorff球面测度与热带闵可夫斯基测度的表面积是相同的。我们给出平面上热带等周不等式的直接证明。在 $\mathbb{R}^n$ 中，该不等式由各向异性等周不等式理论得出（参见例如 [25], [7]）。

各向异性等周不等式是对经典等周不等式的推广。在后者（标准情形）中，对于固定的表面积，球所包围的体积最大。在各向异性情形下，我们处理的是一种取决于方向的“表面张力”或范数，因此包围一定体积所需的“代价”会随方向变化，从而产生凸多胞体（沃尔夫形状）等最优形状，而不是球。应用

例如，通过表面能最小化来确定晶体或液滴在独立相内、固定体积下的平衡形状。

组织结构。 第 2、3 和 4 节介绍热带度量和热带球的背景。第 2 节简要回顾热带代数，并介绍热带射影环面的构造。第 3 节回顾热带度量的定义，接着介绍可求长曲线的热带长度以及热带测地线的定义。随后，我们在第 4 节回顾热带球的一些特征（另见 [35]），例如它们能形成 $\mathbb{R}^n$的蜂窝状镶嵌。

第 5 节定义热带球面测度，并说明它在 $\mathbb{R}^n$的 n维子集上等于勒贝格测度。我们还讨论定义热带测度的其他一些方法。随后，我们在第 6 节证明，就热带球面测度而言，热带球的表面积与体积之比和标准球相同。

第 7 节证明平面上的热带测度等周不等式，接着在第 8 节证明平面上的热带蜂窝定理。第 9 节讨论 $\mathbb{R}^n$中的各向异性等周不等式。前两个小节简要介绍 $\mathbb{R}^n$中的等周不等式和各向异性等周不等式。接下来，我们介绍热带对偶单位球，它是相对于热带表面张力的沃尔夫形状。然后，我们证明热带球是相对于热带闵可夫斯基测度的沃尔夫形状，并且热带（球面）测度与热带闵可夫斯基测度在 ∂S 的面积上相等，只要 S 位于平面上，或者 S是一个面与热带球或其对偶的面平行的多胞体；但一般而言，这两种测度并不相等。最后，第 10 节介绍 $\mathbb{R}^n$中的热带蜂窝定理。

2. The tropical projective torus

热带代数是“幂等数学”的一部分，幂等数学主要由 Maslov 及其合作者发展而来（简要介绍见 [22] ）。(最小) 热带半域 （或最小加代数）（$\mathbb{T}, \oplus, \odot$）由集合 $\mathbb{T} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ 构成，其上的热带加法运算 $\oplus$ 和热带乘法运算$\odot$定义如下：

$$a \oplus b := \min(a, b), \qquad a \odot b := a + b. \tag{2.1}$$

加法的单位元是 ∞ ，乘法的单位元是 0。于是， n维半模 $\mathbb{T}^n$ 在 $\mathbb{T}$ 上按照上述运算定义。$\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ 上的最大加代数 （参见 Butkoviˇc 的专著 [4]）以类似方式定义，其中加法运算替换为取最大值运算，而 $-\infty$ 是加法的单位元。

由于我们在此仅关注有界对象，我们在 $\mathbb{T}^\times = \mathbb{T} \setminus \{\infty\} = \mathbb{R}$ 以及 n维热带射影环面 $\mathbb{R}^{n+1}/\mathbb{R}\mathbf{1}$上工作，其中$\mathbf{1} = (1, \ldots, 1)$，也就是说，对所有 $a \in \mathbb{R}$，$(x_1, \ldots, x_{n+1}) \sim (x_1 + a, \ldots, x_{n+1} + a)$。

对 $\mathbb{R}^{n+1}/\mathbb{R}\mathbf{1}$的每一个元素，若以齐次坐标写成$(x_1 : \ldots : x_{n+1})$，我们可以选取元素$(x_1 - x_{n+1} : \ldots : x_n - x_{n+1} : 0)$作为代表元，然后将其双射映射到 $\mathbb{R}^n$中的元素$(x_1 - x_{n+1}, \ldots, x_n - x_{n+1})$。在下文中，当我们使用坐标$(x_1, \ldots, x_n)$时，是指$(x_1 : \ldots : x_n : 0) \in \mathbb{R}^{n+1}/\mathbb{R}\mathbf{1}$ 作为 $\mathbb{R}^n$中元素的这一表示。为方便起见，我们还采用 $\mathbb{R}^n$的如下坐标系。设（min）热带标准单位向量为 $\tilde{\mathbf{e}}_1 = (1, 0, \ldots, 0) \ldots, \tilde{\mathbf{e}}_n = (0, \ldots, 0, 1)$以及 $\tilde{\mathbf{e}}_{n+1} = -\mathbf{1} = (-1, \ldots, -1)$。这些向量在 [35]中被定义为热带正交。然后，我们相对于这些单位向量的 $n+1$个方向上的坐标轴，定义 $\mathbb{R}^n$ 的（min）热带坐标系。于是 $\mathbb{R}^n$ 被分解为 $n+1$ 个卦限 $\mathbb{R}^n_j$，对 $j = 1, \ldots, n+1$，其中 $\mathbb{R}^n_j$是由 n 个向量$\tilde{\mathbf{e}}1, \ldots, \tilde{\mathbf{e}}j, \ldots, \tilde{\mathbf{e}}_{n+1}$所确定的正锥。

3. Tropical metric

Cohen、Gaubert 和 Quadrat 在 [5] 中引入的热带度量定义如下。

$\mathbb{R}^{n+1}/\mathbb{R}\mathbf{1}$ 中热带距离是指$\mathbf{x} = (x_1 : \ldots : x_{n+1})$ 与$\mathbf{y} = (y_1 : \ldots : y_{n+1})$之间的距离：

$$d_{\mathrm{tr}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \max_{1 \le i,j \le n+1} \{x_i - y_i - x_j + y_j\}. \tag{3.1}$$

如上所述，将 $(x_1 : \ldots : x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}/\mathbb{R}\mathbf{1}$ 映射到 $(x_1 - x_{n+1}, \ldots, x_n - x_{n+1}) \in \mathbb{R}^n$时，$\mathbb{R}^n$ 中$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ 与$\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$之间的热带距离为

$$\begin{aligned} d_{\mathrm{tr}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &:= \max\{\max_{1 \le i \le n}\{|x_i - y_i|\}, \max_{1 \le i,j \le n}\{x_i - y_i - x_j + y_j\}\} \\ &= \max\{\max_{1 \le i \le n}\{x_i - y_i\}, 0\} - \min\{\min_{1 \le i \le n}\{x_i - y_i\}, 0\}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

热带范数为$\mathbf{x} = (x_1 : \ldots : x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}/\mathbb{R}\mathbf{1}$：

$$\| \mathbf{x} \|_{\mathrm{tr}} := \max_{1 \le i,j \le n+1} \{x_i - x_j\}. \tag{3.3}$$

$\mathbb{R}^n$ 中$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$的热带范数为

$$\| \mathbf{x} \|_{\mathrm{tr}} := \max\{\max_{1 \le i \le n}\{x_i\}, 0\} - \min\{\min_{1 \le i \le n}\{x_i\}, 0\}. \tag{3.4}$$

$\mathbb{R}^n$ 中$\mathbf{x}$与$\mathbf{y}$ 两点之间的热带线段（见 [24], 第 230 页）是一条分段线性曲线。每一段线段的方向都是由 0 和 1 构成的向量，$\mathbf{x}$ 与$\mathbf{y}$ 之间的热带距离等于这些线段的热带长度之和。在 [35] 中，我们将此类分段线性曲线的热带长度定义推广到了更一般的曲线，定义如下。

定义 3.1. 设 $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ 是一条有限的参数定义可求长曲线（也就是说，映射 γ 连续、利普希茨且几乎处处

可微）。设

$$l_{\mathrm{tr},\varepsilon}(\gamma) := \inf_{\mathcal{T}_\alpha=(t_{\alpha,i})_{i=0}^{n_\alpha}} \left\{ \sum_{i=1}^{n_\alpha} d_{\mathrm{tr}}(\gamma(t_{\alpha,i-1}), \gamma(t_{\alpha,i})) \right\}, \tag{3.5}$$

其中，下确界取遍所有满足 $a = t_{\alpha,\,0} < t_{\alpha,\,1} < \cdots < t_{\alpha,\,n_\alpha} = b$ 的 $[a,b]$ 的分割 $\mathcal{T}_\alpha = (t_{\alpha,\,i})_{i=0}^{n_\alpha}$，且对所有 i，均有 $d_{\mathrm{tr}}(\gamma(t_{\alpha,\,i-1})\ \gamma(t_{\alpha,\,i})) \le \varepsilon$。那么，$\gamma$ 的热带长度为

$$l_{\mathrm{tr}}(\gamma) := \lim_{\varepsilon\to 0^+} l_{\mathrm{tr},\varepsilon}(\gamma). \tag{3.6}$$

等价地，γ 的热带长度就是全变差:

$$l_{\mathrm{tr}}(\gamma) := \sup_{\mathcal{T}_\alpha=(t_{\alpha,i})_{i=0}^{n_\alpha}} \left\{ \sum_{i=1}^{n_\alpha} d_{\mathrm{tr}}(\gamma(t_{\alpha,i-1}), \gamma(t_{\alpha,i})) \right\}, \tag{3.7}$$

其中，上确界取遍所有满足 $a = t_{\alpha,\,0} < t_{\alpha,\,1} < \cdots < t_{\alpha,\,n_\alpha} = b$ 的 $[a,b]$ 的分割 $\mathcal{T}_\alpha = (t_{\alpha,\,i})_{i=0}^{n_\alpha}$。

那么，热带测地线的标准定义如下（见 [35]）。

定义 3.2。点 $\mathbf{x}$ 与$\mathbf{y}$ 之间的曲线 γ 若满足 $l_{\mathrm{tr}}(\gamma) = d_{\mathrm{tr}}(\mathbf{x},\ \mathbf{y})$，则称为热带测地线。若集合 $S \subset \mathbb{R}^n$ 包含任意两点 $\mathbf{x},\ \mathbf{y} \in S$之间的所有热带测地线，则称其为热带测地。

4. The tropical unit ball

n 维热带（闭）球，半径为 R，中心为 $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$，定义如下

$$B_{\mathrm{tr},R}^n(\mathbf{p}) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : d_{\mathrm{tr}}(\mathbf{p},\mathbf{x}) \le R\}. \tag{4.1}$$

我们将以原点为中心、半径为 R 的热带球记作$B_{\mathrm{tr},R}^n$；此外，当半径为 1 时，记作 B_{tr}^n。热带球是一个凸多胞体。以原点为中心时，它是中心对称的，但不是正多胞体：它沿$\mathbf{1}$和 $-\mathbf{1}$方向拉伸，并沿超平面 $x_1 + \cdots + x_n = 0$ 的正交方向收缩（见图 1）。

n 维热带单位球 B_{tr}^n 是不相交的（除公共面外） $n+1$ 个热带单位超立方体 I_j^n，$j = 1,\ldots,n+1$的并集。后者定义如下（见 [35]）。以原点为底面基点、类型为j（其中 $j = 1,\ldots,n+1$）的 n 维（min）热带单位超立方体记作 I_j^n，它是由 n 个热带正交的热带单位向量 $\tilde{\mathbf{e}}_1,\ldots,\tilde{\mathbf{e}}_j,\ldots,\tilde{\mathbf{e}}_{n+1}$定义的区域带 $\widehat{\ }$。当底面基点位于点 $\mathbf{p}$ 时（即将 I_j^n 平移 $\mathbf{p}$），则记作 $I_j^n(\mathbf{p})$。图 2 展示了平面中分解为热带超立方体的情形。

B_{tr}^n 的另一种描述是：它是由区间 $[0,\tilde{\mathbf{e}}_i]$、$i = 1$、.....、$n+1$ 作闵可夫斯基和得到的区域带（见 [35]）。

热带球有一个普通球所不具备的良好性质，即对每个 $n \ge 1$，它们构成 $\mathbb{R}^n$ 的蜂窝状镶嵌（平面的铺砌见图3）。

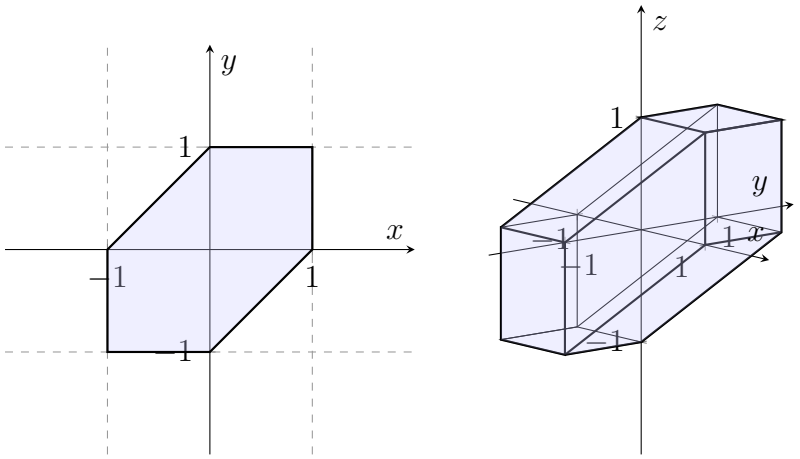

FIGURE 1. 平面中的热带单位球（左侧为六边形）和空间中的热带单位球（右侧为具有四边形面的十二面体）

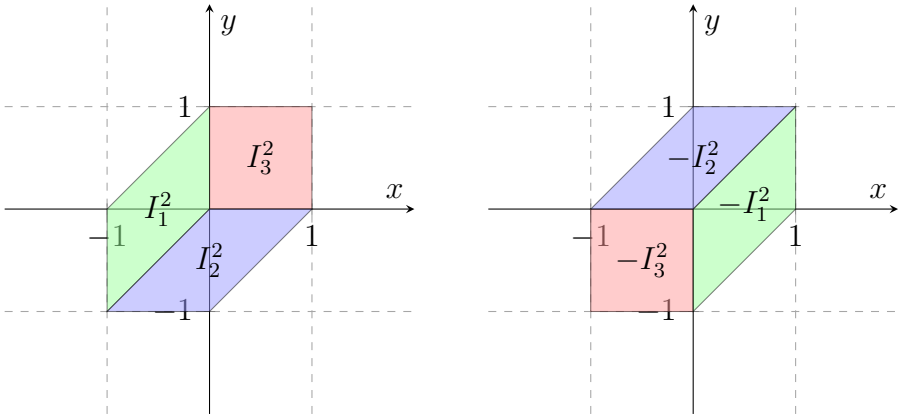

FIGURE 2. 将二维热带单位球分解为热带单位超立方体：极小加分解（左侧）和极大加分解（右侧）

定理 4.1（见 [35]）。 以 $\mathbb{Z}^n$的子格为中心的 n维热带单位球 $B_{\mathrm{tr}}^n(\mathbf{c})$ 的集合

$$\Lambda : \{\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{Z}^n : \sum_{i=1}^{n} c_i \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ n+1) \tag{4.2}$$

构成一个由 $\mathbb{R}^n$组成的蜂窝。

关于热带球的特征和结构的更多细节，参见 [35] .

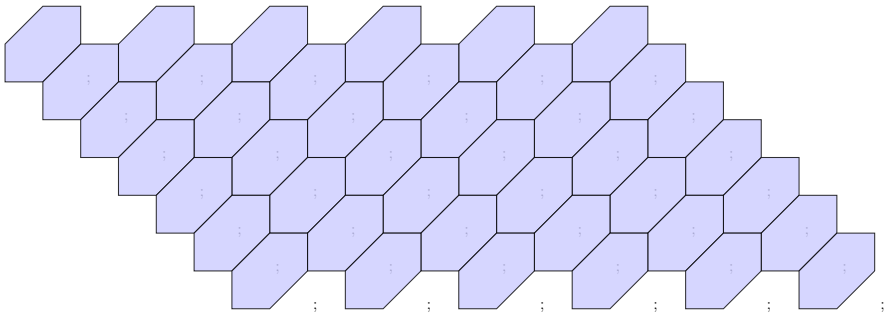

FIGURE 3. 热带圆盘的平面镶嵌

5. TROPICAL SPHERICAL MEASURE

我们在 $\mathbb{R}^n$ 上定义一种热带球面测度（下文简称热带测度） σ_{tr}。它是一种与热带度量相容的平移不变度量外测度。对于 $\mathbb{R}^n$ 中的 n 维勒贝格可测子集，热带测度与勒贝格测度一致；但一般而言，对于 $\mathbb{R}^n$ 中维数为 $k < n$ 的子集，两者并不相同。与豪斯多夫测度（[11], [34], [10],[29]）的定义类似，这种热带测度也是通过 Carath´eodory 构造定义的。

定义5.1。给定一个集合 S 在 $\mathbb{R}^n$中，令

$$\sigma^k_{\mathrm{tr},\varepsilon}(S) := (k+1)\inf_{\mathcal{C}_\alpha}\left\{\sum_{i=1}^{n_\alpha}\delta^k_{\alpha,i} : \delta_{\alpha,i}\le\varepsilon, \bigcup_{i=1}^{n_\alpha} B^n_{\mathrm{tr},\delta_{\alpha,i}}(\mathbf{p}_{\alpha,\mathbf{i}}) \supseteq S\right\}, \tag{5.1}$$

其中下确界取遍由若干集合构成的 S 的所有可数覆盖

$$\mathcal{C}_\alpha = (B^n_{\mathrm{tr},\delta_{\alpha,i}}(\mathbf{p}_{\alpha,\mathbf{i}}))_{i=1}^{n_\alpha}, \quad n_\alpha \le \infty,$$

由 n维热带球$B^n_{\mathrm{tr},\delta_{\alpha,i}}(\mathbf{p}_{\alpha,\mathbf{i}})$组成，其中心位于$\mathbf{p}_{\alpha,\mathbf{i}} \in S$ （闵可夫斯基覆盖），半径为$\delta_{\alpha,i} \le \varepsilon$。接着，我们将 S的 k维热带测度 定义为

$$\sigma^k_{\mathrm{tr}}(S) := \lim_{\varepsilon\to 0^+}\sigma^k_{\mathrm{tr},\varepsilon}(S). \tag{5.2}$$

我们还定义

$$\sigma^k_{\mathrm{tr},=\varepsilon}(S) := (k+1)\varepsilon^k \inf_{\mathcal{C}_\alpha}\{\mathrm{card}(\mathcal{B}_\alpha)\}, \tag{5.3}$$

其中，下确界是对所有（闵可夫斯基）覆盖取的： $\mathcal{C}_\alpha$ 用可数多个n维热带球覆盖 S，这些热带球的中心位于 S 上，半径恰为 ε。

注5.2。 (1) 式 (5.1) 和 (5.3) 中的项 $k+1$ 源于我们的选择：将 k维热带单位超立方体的测度设为 1，因此 k维热带单位球的测度为 $k+1$。

(2) 热带测度的定义与球面豪斯多夫测度的定义相似。不过请注意，当环境空间为 $\mathbb{R}^n$时，我们将覆盖限制为使用 n 维热带闭球。这是因为热带球在欧几里得度量下是“扭曲”的，一般而言，即使集合 S 包含于 $\mathbb{R}^n$中的一个 k维仿射子空间内，我们也不能用 $k < n$ 维热带球来测量 k维集合 $S \subset \mathbb{R}^n$ 。(3) 另一点是，覆盖用热带球的中心位于被覆盖集合 S上，这意味着覆盖是由闵可夫斯基和的并集构成的。由于热带球的凸性和对称性，我们可以将自己限制在此类覆盖上。(4) 假设 S 是一个位于 $\mathbb{R}^n$中的 k维集合， $n \geq k$。那么，对于 $m > n$， $\sigma^k_{\mathrm{tr}}(S)$在 S 到 $\mathbb{R}^m$的自然嵌入下保持不变，因为一个半径为 δ 的 m维热带球与 $\mathbb{R}^n$ 的交集是一个半径相同 δ的n维热带球。

例 5.3. 当 S 是 n维的长方体，位于 $\mathbb{R}^n$ 中，其边平行于热带坐标轴，热带长度为 $a_1, \ldots, a_n$ 时， S 的热带测度等于其欧几里得体积，即 $\sigma^n_{\mathrm{tr}}(S) = a_1 \cdots a_n$。

接下来，我们证明这种与勒贝格测度相等的关系一般成立。

Th定理 5.4. 设 S 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个勒贝格可测的 n 维子集。那么

$$\sigma^n_{\mathrm{tr}}(S) = \mathcal{L}^n(S), \tag{5.4}$$

其中 $\sigma^n_{\mathrm{tr}}(S)$ $\mathcal{L}^n(S)$ 分别是 S 的 n 维热带测度和勒贝格测度。特别地，半径为 R 的热带球的（热带）体积为

$$\sigma^n_{\mathrm{tr}}(B^n_{\mathrm{tr},R}) = (n+1)R^n. \tag{5.5}$$

证明。为方便记号，下文将半径为 δ 、中心为 p 的热带球记作 $B^n_{\mathrm{tr},\delta}$ ，而不写作 $B^n_{\mathrm{tr},\delta}$(p)。根据 (5.2)， S 的热带测度 $\sigma^n_{\mathrm{tr}}(S)$ 是通过用热带球 $B^n_{\mathrm{tr},\delta}$ 覆盖 S 来定义的。每个这样的热带球 $B^n_{\mathrm{tr},\delta}$ 由 $n+1$ 个热带超立方体 $I^n_{j,\delta}$ 组成，其热带边长为 δ。每个 $I^n_{j,\delta}$ 由 n 个热带正交向量 δ˜eⱼ 定义，且其标准体积为 δ^n（$I^n_{j,\delta}$ 要么是标准立方体，要么是由沿欧几里得坐标轴方向的 $n-1$ 个向量和沿 $-\mathbf{1}$ 方向的一个向量定义的平行多面体；该向量在剩余欧几里得坐标轴上的正交投影大小为 δ），因此 $\mathcal{L}^n(B^n_{\mathrm{tr},\delta}) = (n+1)\delta^n$。这也是 $B^n_{\mathrm{tr},\delta}$ 对 (5.1) 中 S 的热带测度所作的贡献；由于这些热带球覆盖了 S ，我们有 $\mathcal{L}^n(S) \leq \sigma^n_{\mathrm{tr}}(S)$。然而，根据定理 4.1，对于每个 $\varepsilon > 0$，都存在 $\delta > 0$，使得 S 可以由半径至多为 δ 的热带球覆盖，且$\sigma^n_{\mathrm{tr},\delta}(S) < \mathcal{L}^n(S) + \varepsilon$。由此可得 $\sigma^n_{\mathrm{tr}}(S) \leq \mathcal{L}^n(S)$，结合这两个不等式可得 $\sigma^n_{\mathrm{tr}}(S) = \mathcal{L}^n(S)$。□

5.1. **曲线的热带长度**。 与欧几里得情形一样，曲线的豪斯多夫测度等于其长度；在热带情形中也是如此。

P命题 5.5. 设 $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ 是一条可求长曲线。则 $\sigma^1_{\mathrm{tr}}(\gamma)=l_{\mathrm{tr}}(\gamma)$.

证明。 γ 的热带长度 $l_{\mathrm{tr}}(\gamma)$由定义 3.1 给出。它通过求长法，利用一系列分段线性逼近，从下方趋近于一个极限。 γ 的热带测度 $\sigma^1_{\mathrm{tr}}(\gamma)$由定义5.1给出。应用热带测度时，我们用球 $B^n_{\mathrm{tr},\delta}(\mathrm{p})$, $\delta<\varepsilon$覆盖 γ ，其中 $\mathrm{p}\in\gamma$。由于 γ 是可求长曲线，我们可以选择足够小的 ε ，使得 γ 与$\partial B^n_{\mathrm{tr},\delta}$ 的交点（除非位于 γ的端点）恰好是两点 $\mathrm{q_1}$ 和 $\mathrm{q_2}$。于是，从 p 到 $\mathrm{q_i}$, $i=1,2$ 的两条线段的热带长度均为 δ。令点 p、$\mathrm{q_1},\mathrm{p_2}$属于 γ的一个分割，由此得到 γ 的一个分段线性逼近，其总长度至多等于通过热带球覆盖所得到的总长度，因为覆盖球之间可能存在重叠。因此，当 $\varepsilon\to0$ 时，我们得到 $l_{\mathrm{tr}}(\gamma)\le\sigma^1_{\mathrm{tr}}(\gamma)$。

另一方面，对于 γ 的任意由热带球构成的覆盖，且球的半径有界 ε ，我们可以取这些球与 γ 的交点作为分点。当 ε 足够小时，在求(5.1)中的下确界时，这些球重叠部分的总长度 ε' 也很小（这是可能的，因为 γ 是可求长的）。因此，当 $\varepsilon\to0$ 时，有 $\varepsilon'\to0$ ，并且由(3.7)可得 $\sigma^1_{\mathrm{tr}}(\gamma)\le l_{\mathrm{tr}}(\gamma)$。

由这两个不等式，我们有 $\sigma^1_{\mathrm{tr}}(\gamma)=l_{\mathrm{tr}}(\gamma)$。 □

5.2. **热带测度的其他定义**。 我们在此给出热带情形下测度的三种其他定义：热带豪斯多夫测度$\mathcal{H}_{\mathrm{tr}}$、热带立方测度 κ_{tr} 以及热带三角测度 τ_{tr}。

5.2.1. 热带豪斯多夫测度。 热带豪斯多夫测度是经典豪斯多夫测度的类似物。

定义 5.6. 给定一个非空集合 $S\in\mathbb{R}^n$，其热带直径 $\mathrm{diam}_{\mathrm{tr}}(S)$ 为

$$\mathrm{diam}_{\mathrm{tr}}(S):=\sup_{\mathbf{x},\mathbf{y}\in S}d_{\mathrm{tr}}(\mathbf{x},\mathbf{y}). \tag{5.6}$$

定义 5.7. 给定集合 S 属于 $\mathbb{R}^n$，令

$$\mathcal{H}^k_{\mathrm{tr},\varepsilon}(S):=(k+1)\inf_{\mathcal{C}_\alpha}\left\{\sum_{i=1}^{n_\alpha}\left(\frac{\delta_{\alpha,i}}{2}\right)^k:\delta_{\alpha,i}\le\varepsilon,\bigcup_{i=1}^{n_\alpha}S_{\delta_{\alpha,i}}\supseteq S\right\}, \tag{5.7}$$

其中，下确界取遍由 $\mathcal{C}_\alpha=(S_{\delta_{\alpha,i}})_{i=1}^{n_\alpha}$、$n_\alpha\le\infty$ 构成的所有覆盖，这些覆盖由 k 维子集 $S_{\delta_{\alpha,i}}$ 组成，且 $\mathrm{diam}_{\mathrm{tr}}(S_{\delta_{\alpha,i}})=\delta_{\alpha,i}\le\varepsilon$。然后，我们将 k维热带豪斯多夫测度 定义为 S

$$\mathcal{H}^k_{\mathrm{tr}}(S):=\lim_{\varepsilon\to0^+}\mathcal{H}^k_{\mathrm{tr},\varepsilon}(S). \tag{5.8}$$

5.2.2. 热带立方测度。

定义 5.8。 给定 $\mathbb{R}^n$ 中的一个集合 S，令

$$\kappa^k_{\mathrm{tr},\varepsilon}(S) := \inf_{\mathcal{C}_\alpha}\left\{\sum_{i=1}^{n_\alpha}\delta^k_{\alpha,i} : \delta_{\alpha,i}\le\varepsilon, \bigcup_{i=1}^{n_\alpha} I^n_{\alpha,i}(\mathbf{p}_{\alpha,\mathbf{i}}) \supseteq \mathbf{S}\right\}, \tag{5.9}$$

其中下确界取遍所有可数（有限或无限基数 n_α）覆盖 $\mathcal{C}_\alpha$，即用 n维热带超立方体$I^n_{\alpha,\,i}$（$\mathbf{p}_{\alpha,\,\mathbf{i}}$）对 S所作的覆盖，其热带边长为$\delta_{\alpha,\,i}\le\varepsilon$ 且底面点为$\mathbf{p}_{\alpha,\,\mathbf{i}}\in S$。然后我们将 S 的 k维热带立方测度定义为

$$\kappa^k_{\mathrm{tr}}(S) := \lim_{\varepsilon\to 0^+}\kappa^k_{\mathrm{tr},\varepsilon}(S). \tag{5.10}$$

注5.9. 在用热带超立方体进行覆盖的情形中，立方体的底面点$\mathbf{p}_{\alpha,\,\mathbf{i}}$ 必须位于 S 上（闵可夫斯基覆盖），因为热带度量是方向相关的。

5.2.3. 热带三角测度。 边长为 R 、位于$\mathbb{R}^n$中的正超立方体，其 2^n 个顶点的集合为 {（a_1，.....，a_n）： $a_i\in\{0,R\}$}，被分解为 $n!$个单形$\Delta^n_{\mathrm{tr},\,\sigma,\,R}$， $\sigma\in S_n$，其中

$$\Delta^n_{\mathrm{tr},\sigma,R} = \{(x_1,\dots,x_n) : 0\le x_{\sigma(1)}\le x_{\sigma(2)}\le\cdots\le x_{\sigma(n)}\le R\}, \tag{5.11}$$

是一个维数为 n 、热带边长为 R的正则热带单纯形。我们将这些单纯形视为以原点为基点，这意味着它们可以平移，但不能旋转。

定义 5.10. 给定一个集合 S 在 $\mathbb{R}^n$中，令

$$\tau^k_{\mathrm{tr},\varepsilon}(S) := \frac{1}{k!}\inf_{\mathcal{C}_\alpha}\left\{\sum_{i=1}^{n_\alpha}\delta^k_{\alpha,i} : \delta_{\alpha,i}\le\varepsilon, \bigcup_{i=1}^{n_\alpha}\Delta^n_{\mathrm{tr},\delta_{\alpha,i}}(\mathbf{p}_{\alpha,\mathbf{i}}) \supseteq S\right\}, \tag{5.12}$$

其中，下确界取遍由以下对象组成的集合对 S 的所有（闵可夫斯基）覆盖

$$\mathcal{C}_\alpha = (\Delta^n_{\mathrm{tr},\delta_{\alpha,i}}(\mathbf{p}_{\alpha,\mathbf{i}}))_{i=1}^{n_\alpha},\quad n_\alpha\le\infty,$$

由边长为δ_α、基点为$\mathbf{p}$的 n维热带单纯形$\Delta^n_{\mathrm{tr},\,\delta_{\alpha,\,i}}$ 组成。于是，我们将 S 的 k维热带三角测度定义为

$$\tau^k_{\mathrm{tr}}(S) := \lim_{\varepsilon\to 0^+}\tau^k_{\mathrm{tr},\varepsilon}(S). \tag{5.13}$$

6. Surface area to volume ratio of tropical balls

计算出热带球的热带体积（定理 5.4）后，我们在此计算其热带表面积。

定理 6.1。 半径为 R 的$n-1$（$n-1$）维热带球面的热带表面积为

$$\mathcal{A}_{\mathrm{tr}}(S^{n-1}_{\mathrm{tr},R}) = \sigma^{n-1}_{\mathrm{tr}}(S^{n-1}_{\mathrm{tr},R}) = n(n+1)R^{n-1}. \tag{6.1}$$

证明。 半径为 R 的（$n-1$）维热带球面是 n维热带球B^n_{tr}的边界，后者在超平面 $x_j = \pm R$ 上有 $2n$ 个面，在超平面 $x_j = x_i + R$ 上有$n-1$个面（见 [35]）。为方便起见，我们可以假设这些面经过原点。我们先从位于 $x_j = 0$ 上的面 F（平移后）开始。每个这样的面都是边长为 R的标准（$n-1$）维超立方体，因此其欧几里得测度为 R^{n-1}。对于其热带测度，我们用中心位于 F上的热带球覆盖它。半径为 ε 的热带球$B^n_{\mathrm{tr},\,\varepsilon}$与超平面 $x_j = 0$ 的截面是一个半径为 ε的（$n-1$）维热带球，其欧几里得测度和热带测度均为 $n\varepsilon^{n-1}$。由此可知， F 的热带测度与其欧几里得测度相同，即为 R^{n-1}。

经过平移后，第二类的面 F 具有形式 $-R \le x_i \le 0$，$x_j = x_i$ 与 $x_i \le x_k \le x_i + R$，其中 $k \ne i$， j。 F 的欧几里得测度为$\sqrt{2}R^{n-1}$。我们可以用半径为 ε、中心位于 $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n) \in (\varepsilon\mathbb{Z})^n$， $\sum_{k\ne j} c_k \equiv 0$（模 $n\varepsilon$），$c_j = c_i$ 的热带球覆盖 F ，使得两个相邻球的交集仅在它们的面上。这可由定理 4.1 实现：该定理给出 F 在$(n-1)$维超平面 $X_1 \cdots X_j \cdots X_n$上的正交投影的一个覆盖，以及该覆盖沿方向 $\pm\mathbf{e}_j$ 到超平面 $x_i = x_j$的投影，且 n维热带球$B^n_{\mathrm{tr}, \varepsilon}$的中心位于 $x_i = x_j$上。设 S 为超平面 $x_i = x_j$截$B^n_{\mathrm{tr}, \varepsilon}$ 所得的截面。我们有 $\sigma^{n-1}_{\mathrm{tr}\,\varepsilon}$， $(S) = n\varepsilon^{n-1}$，并要计算 S的欧几里得测度。 S 与构成$B^n_{\mathrm{tr}, \varepsilon}$ 的每一个 $n+1$ 热带超立方体之交集的测度为 $\mathcal{L}^{n-1}(S \cap I^n_k, \varepsilon) = \sqrt{2}\varepsilon^{n-1}$。然而，$S \cap I^n_i, \varepsilon = S \cap I^n_j, \varepsilon$ 是I^n_i, ε 与I^n_j, ε的公共面。因此，总体上我们有 $\mathcal{L}^{n-1}(S) = \sqrt{2}n\varepsilon^{n-1}$。于是得到比值$\sigma^{n-1}_{\mathrm{tr}\,\varepsilon}$， $(S) : \mathcal{L}^{n-1}(S) = 1 : \sqrt{2}$。由于通过取 $\varepsilon \to 0^+$， F 几乎可以被仅在其面上相交的热带球覆盖，从而得到 $\sigma^{n-1}_{\mathrm{tr}}(F) = \frac{\sqrt{2}R^{n-1}}{\sqrt{2}} = R^{n-1}$。

由于 $S^{n-1}{}_{\mathrm{tr}\,R}$ 有 $n(n+1)$ 个面，且每个面的面积为 R^{n-1}，因此我们有 $\mathcal{A}_{\mathrm{tr}}(S^{n-1}{}_{\mathrm{tr}\,R}) = \sigma^{n-1}_{\mathrm{tr}}(S^{n-1}{}_{\mathrm{tr}\,R}) = n(n+1)R^{n-1}$。□

推论 *6.2.* </style>半径为 R 的n 维热带球的热带表面积与热带体积之比为

$$\mathcal{A}_{\mathrm{tr}}(S^{n-1}_{\mathrm{tr},R}) : \mathcal{V}_{\mathrm{tr}}(B^n_{\mathrm{tr},R}) = n(n+1)R^{n-1} : (n+1)R^n = n : R. \tag{6.2}$$

这与欧几里得空间中球所得的比值相同：

$$\mathcal{A}(S^{n-1}_R) : \mathcal{V}(B^n_R) = \frac{n\pi^{n/2}R^{n-1}}{\Gamma(1+n/2)} : \frac{\pi^{n/2}R^n}{\Gamma(1+n/2)} = n : R. \tag{6.3}$$

注 6.3。 上述关于热带测度下表面积与体积之比的结论，也可由热带球是沃尔夫形状这一事实（见第 9.4 小节）、公式（9.4）以及命题 9.12 得出。

7. Tropical isoperimetric inequality in the plane

T平面上的著名等周不等式（例如参见 [31]）如下。

定理 7.1 （ $\mathbb{R}^2$中的等周不等式）。 设 γ 为平面中的一条简单闭曲线，即一个连续单射映射 $\gamma : S^1 \to \mathbb{R}^2$。设 l 为 γ 的长度， $\mathcal{A}$ 为围成区域的面积。则

$$l^2 \geq 4\pi\mathcal{A}, \tag{7.1}$$

当且仅当 γ 为圆时，等号成立。

这里我们证明，在热带情形下类似的不等式成立，其中（7.1）中的常数 4π 被常数 $4 \cdot 3 = 12$ 取代。

引理 7.2. 欧几里得凸热带多边形（二维热带测地紧集） $D \subset \mathbb{R}^2$ 的热带周长为 l_{tr} 、面积为 $\mathcal{A}_{\mathrm{tr}}$ ，满足:

$$l_{\mathrm{tr}}^2 \geq 12\mathcal{A}_{\mathrm{tr}}, \tag{7.2}$$

当且仅当 D 为热带球（热带圆盘）时，等号成立。

证明。 在 [35] 中，已证明平面上紧的热带测地二维集合有18种不同的组合类型。它们的形式是由3至6条边构成的多边形。图4展示了这类具有6条边的一般集合，其中长度 a, b, c 和 d 均按热带度量计量。这里我们将全部18种类型都视为具有6条边，因为图4中的多边形有些边的长度为0。可以看出，这18种多边形类型各自的热带周长为

$$\begin{aligned} l_{\mathrm{tr}} &= (a+b) + c + (a+b-d) + (b+c) \\ &= 2a + 3b + 2c - d, \end{aligned} \tag{7.3}$$

且其（热带）面积为

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\mathrm{tr}} &= (a+b)(b+c) - \frac{b^2}{2} - \frac{d^2}{2} \\ &= \frac{b^2}{2} - \frac{d^2}{2} + ab + ac + bc. \end{aligned} \tag{7.4}$$

Then

$$\begin{aligned} l_{\mathrm{tr}}^2 &= (2a + 3b + 2c - d)^2 \\ &= 4a^2 + 9b^2 + 4c^2 + d^2 + 12ab + 8ac - 4ad + 12bc - 6bd - 4cd \end{aligned} \tag{7.5}$$

and

$$\begin{aligned} l_{\mathrm{tr}}^2 - 12\mathcal{A}_{\mathrm{tr}} &= 4a^2 + 3b^2 + 4c^2 + 7d^2 - 4ac - 4ad + 12bc - 6bd - 4cd \\ &= 3(b-d)^2 + 2(a-c)^2 + 2(c-d)^2 + 2(d-a)^2. \end{aligned} \tag{7.6}$$

由此可得 $l_{\mathrm{tr}}^2 - 12\mathcal{A}_{\mathrm{tr}} \geq 0$，当且仅当 $a = b = c = d$ 时取等号；而这只有在 D 具有 6 条热带长度相等的边时才能实现，也就是说， D 是一个热带球。□

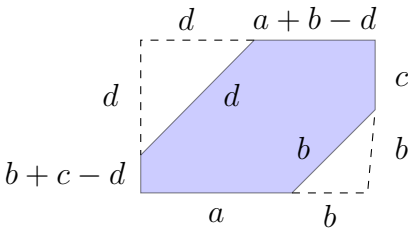

FIGURE 4. 欧几里得凸热带多边形

现在，我们来讨论一般情形。我们将讨论范围限制为平面上的区域 D ，其边界 ∂D 是一条长度有限的简单闭曲线（若长度无限，则等周不等式显然成立）。

定理 7.3 （ $\mathbb{R}^2$中的热带等周不等式。 设 D 是平面上由一条简单闭曲线围成的单连通区域。设 $l_{\mathrm{tr}} = l_{\mathrm{tr}}(\partial D)$ 为 D 的热带周长， $\mathcal{A}_{\mathrm{tr}} = \mathcal{A}_{\mathrm{tr}}(D)$ 为 D 的（热带）面积。那么，下列热带等周不等式成立：

$$l_{\mathrm{tr}}^2 \geq 12\mathcal{A}_{\mathrm{tr}}, \tag{7.7}$$

当且仅当 D 是一个热带球时，等号成立。

证明。 我们在 D 内接一个热带测地多边形 P，其形式为 $(a_1 \leq x \leq b_1) \wedge (a_2 \leq y \leq b_2) \wedge (a_3 \leq y - x \leq b_3)$ ，其边落在 D 的支撑直线上（见图5）。我们将 P 视为有6条边，即 s_0，……， s_5，尽管其中一些边可能退化为一个点。令 ∂P 为 P 的边界，并取正向定向。设 P 的每条有向边 s_i 由线性映射 $s_i : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ 给出，并令$\mathbf{q_i}$ 定义为

$$\mathbf{q_i} = s_i(t_i),$$

其中

$$t_i = \inf\{t \in [0,1] : s_i(t) \in \partial P \cap \partial D\}$$

（见图5）。点$\mathbf{q_i}$ 将 ∂P 和 ∂D都划分为若干部分。对于每个$i = 0, \ldots, 5$，令 ∂P_i为 ∂P上从$\mathbf{q_i}$到$\mathbf{q_{i+1}}$ (模6)的部分，它是一条热带测地线，可以是一个点，也可以是（最小或最大）热带线段。因此，其热带长度 $l_{\mathrm{tr}}(\partial P_i)$小于或等于 ∂D 上对应子曲线 ∂D_i （位于$\mathbf{q_i}$ 和$\mathbf{q_{i+1}}$ (模6)之间）的热带长度 $l_{\mathrm{tr}}(\partial D_i)$。这意味着

$$l_{\mathrm{tr}} = \sum_{i=0}^{5} l_{\mathrm{tr}}(\partial D_i) \geq \sum_{i=0}^{5} l_{\mathrm{tr}}(\partial P_i) = l_{\mathrm{tr}}(\partial P). \tag{7.8}$$

另一方面，由于 P 内接于 D，我们有

$$\mathcal{A}_{\mathrm{tr}} \leq \mathcal{A}_{\mathrm{tr}}(P). \tag{7.9}$$

由 (7.8) 和 (7.9),

$$\frac{l_{\mathrm{tr}}^2}{\mathcal{A}_{\mathrm{tr}}} \geq \frac{(l_{\mathrm{tr}}(\partial P)^2}{\mathcal{A}_{\mathrm{tr}}(P)}, \tag{7.10}$$

由 (7.10) 和引理 7.2，我们有

$$l_{\mathrm{tr}}^2 \geq \frac{(l_{\mathrm{tr}}(\partial P)^2}{\mathcal{A}_{\mathrm{tr}}(P)}\,\mathcal{A}_{\mathrm{tr}} \geq \frac{(l_{\mathrm{tr}}(S_{\mathrm{tr}}^1))^2}{\mathcal{A}_{\mathrm{tr}}(B_{\mathrm{tr}}^2)}\,\mathcal{A}_{\mathrm{tr}} = 12\mathcal{A}_{\mathrm{tr}}, \tag{7.11}$$

等号成立当且仅当 D 是一个热带球。 □

注记 7.4. 平面上的热带等周不等式也可由定理 9.10 和命题 9.13 推出。

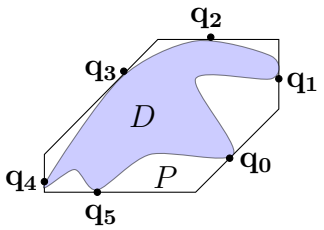

FIGURE 5. 平面中内接于热带测地集（六边形） P的单连通区域 D

8. TROPICAL HONEYCOMB THEOREM IN THE PLANE

经典蜂窝猜想指出，将平面划分为无限多个面积相同且有限的区域，并使周长最小，最高效的方式是将其划分为正六边形。Thomas Hales [16]证明了这一古老问题。58 年前，L´aszl´o Fejes [12]证明了凸多边形这一受限情形。

定理 8.1 （$\mathbb{R}^2$中的蜂窝定理）。设 G 是由光滑曲线构成的局部有限图，将平面划分为无限多个有界单连通分支，且每个分支的面积均为单位面积。设 $C = \mathbb{R}^2 \setminus G$，并设 $B_R^2 \subset \mathbb{R}^2$ 是以原点为圆心、半径为 R 的圆盘。则

$$\limsup_{R\to\infty} \frac{l(G \cap B_R^2)}{\mathcal{A}(B_R^2)} \geq \sqrt[4]{12} \approx 1.861, \tag{8.1}$$

等号在铺砌为正六边形时成立。

在此不等式中， $\mathcal{A}(B_R^2)$是圆盘的面积， $l(G\cap B_R^2)$是 G 中距原点至多为 R 的部分的总长度。

这里给出该定理的热带版本。

定理 8.2 (平面中的热带蜂窝定理 $\mathbb{R}^2$)。 令 G 为 $\mathbb{R}^2$ 中的一族光滑曲线，它们构成一个局部有限图，并将平面划分为无穷多个有界单连通分支，每个分支的（热带）面积均为单位面积。令 $C=\mathbb{R}^2\backslash G$。则

$$\limsup_{R\to\infty}\frac{l_{\mathrm{tr}}(G\cap B^2_{\mathrm{tr},R})}{\mathcal{A}_{\mathrm{tr}}(B^2_{\mathrm{tr},R})}\geq\sqrt{3}\approx 1.732, \tag{8.2}$$

等号在铺砌为热带正六边形（热带圆盘）时成立。

证明。 由定理 7.3， $\mathbb{R}^2$中的热带等周不等式可知，热带圆盘（热带正六边形）在所有由简单闭曲线围成且面积相同的区域中，周长最小。对于单位面积，其最小周长为 $\sqrt{\binom{12}{1}}=2\sqrt{3}$。此外，由定理 4.1，这些六边形可以铺砌平面。由于铺砌中的每条边都属于两个热带六边形，并且当 $R\to\infty$ 时，位于热带圆盘边界上的六边形的总周长$B^2_{\mathrm{tr},\ R}$ 在比值中可以忽略（其阶为 $O(R)$，而圆盘的面积阶为 $O(R^2)$），因此，(8.2)中的极限为 $\sqrt{3}$。□

注 8.3。 (1) 注意，在热带情形下，平面中蜂窝定理的下界 $\sqrt{3}$ 小于欧几里得情形下的下界，即为 $\sqrt[4]{12}$。对于 l^1-范数（使用 l^∞-圆盘进行铺砌）以及 l^∞-范数（使用 l^1-圆盘进行铺砌），极限均为 2。(2) 在定理 8.2 中，用标准球 B_R^2 替换热带球 $B^2_{\mathrm{tr},R}$ 不会改变结果。

9. Isoperimetric inequalities in $\mathbb{R}^n$

本节讨论不同热带情形下的各向异性等周不等式。为简便起见并避免特殊情形，我们在此将范围限定于称为可容许的集合，这意味着定义和定理通常不会以最一般的形式给出，也不一定针对开集，正如通常的做法一样。

定义 9.1。 我们称集合 $S\in\mathbb{R}^n$ 是 k-可容许的，如果它的维数为 k、是紧集，并且具有有限周长的 $(k-1)$-可求长边界。

此外，当一个集合是（各向异性的）等周问题的极小化者时，除平移、伸缩以及一个零测集之外，它与该极小化者相同；例如，它可能具有一个测度为零的“环带”。

9.1. 经典等周不等式。 我们用 k维勒贝格测度表示集合 $S \subset \mathbb{R}^n$ 为 $\mathcal{L}^k(S)$，并用其 k 维豪斯多夫测度表示为 $\mathcal{H}^k(S)$。因此， $\mathcal{L}^n(B^n)$ 是一个（标准） n 维单位球的体积，而 $\mathcal{L}^n(B^k_\varepsilon)$ 是一个半径为 ε 的 k维球的体积。回顾一下，博雷尔子集 $S \subset \mathbb{R}^n$ 是 k-可求 rectifiable 的，如果它的豪斯多夫维数为 k ，并且存在可数多个 C^1 （或利普希茨连续）映射 $f_i : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ ，满足$\mathcal{H}^k(S \setminus \bigcup_{i=0}^{\infty} f_i(\mathbb{R}^k)) = 0$。 $\mathbb{R}^n$ 中的经典等周不等式如下（参见例如 [11, 第 3.2 节。43], [31], [25,定理 14。1]）。

定理 9.2 （ $\mathbb{R}^n$中的经典等周不等式）。 设 $S \subset \mathbb{R}^n$ 是一个 n-可容许集。则

$$(\mathcal{H}^{n-1}(\partial S))^n \geq n^n \mathcal{L}^n(B^n)(\mathcal{L}^n(S))^{n-1}, \tag{9.1}$$

当且仅当 S 是一个球时，等号成立。

9.2. 各向异性等周不等式。 各向异性等周不等式是经典等周不等式的推广，其中表面积按依赖方向的加权积分计算（见[38],[25],[30],[13]）。例如，晶体的表面能就具有各向异性特征：表面张力并不均匀，晶体生长偏好某些方向，从而实现能量最小化。因此，在类似类型的数学问题中，通常也会采用这类能量概念。

各向异性表面能（或 -表面积） $\Phi(S)$是一个 n-可容许集的（见 [25]）

$$\Phi(S) := \int_{\partial S} \phi(\mathbf{v}_S(\mathbf{x}))\, d\mathcal{H}^{n-1}(\mathbf{x}), \tag{9.2}$$

其中， $\mathbf{v}_S$ 是 S 的外单位法向量，而 ϕ : $\mathbb{R}^n \to [0, \infty]$是凸的、在 S^{n-1}上为正的一次齐次函数，称为表面张力 （或ϕ-范数）。若 ϕ（$\mathbf{v}_S$）为常数（各向同性情形），则 $\Phi(S)$是（按比例缩放的）欧几里得周长，等周问题的极小化者是欧几里得球。若 ϕ（$\mathbf{v}_S$）不是常数（各向异性情形），则极小化者——沃尔夫形状 W_ϕ——是一个由下式给出的紧凸集（见 [25], [30]）：

$$W_\phi = \bigcap_{\mathbf{v} \in S^{n-1}} \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle \leq \phi(\mathbf{v}\}, \tag{9.3}$$

并且我们有（见 [25]）

$$\Phi(W_\phi) = n\mathcal{L}^n(W_\phi). \tag{9.4}$$

例如，范数 $p \in [1, \infty]$ 的沃尔夫形状是 l^q 单位球，其中l， q 是赫尔德共轭：
$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$。

不难看出， ϕ-范数的沃尔夫形状是关于对偶范数 ϕ^*的单位球：

$$W_\phi = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \phi^*(\mathbf{x}) \leq 1\}, \tag{9.5}$$

其中

$$\phi^*(\mathbf{x}) = \sup_{\mathbf{v}}\{\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}\rangle : \phi(\mathbf{v}) \le 1\}. \tag{9.6}$$

由（9.5）可知，给定一个包含原点某个邻域的紧凸集 $S \subset \mathbb{R}^n$，它是函数 $\phi: \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ 的沃尔夫形状，该函数定义如下：

$$\phi(\mathbf{x}) = \sup\{\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}\rangle : \mathbf{v} \in S\}. \tag{9.7}$$

也就是说，ϕ（$\mathbf{x}$）是支撑函数在$\mathbf{x}$处的值，定义于 S 上。

定理 9.3（$\mathbb{R}^n$中的各向异性等周不等式）。设 $S \subset \mathbb{R}^n$ 是一个 n-容许集。设 $\phi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是一个正的、凸的、强制的、一次齐次函数，并设 W_ϕ 是相对于 ϕ-范数的沃尔夫形状。那么

$$(\Phi(S))^n \ge n^n \mathcal{L}^n(W_\phi)(\mathcal{L}^n(S))^{n-1}, \tag{9.8}$$

当且仅当 $S = W_\phi$ 时，等号成立。

9.3. **将热带范数视为表面张力，以及热带对偶范数**。由于热带测度依赖于方向，因此相对于该测度的等周不等式属于各向异性等周问题。

我们首先来看表面张力为热带范数时的沃尔夫形状。我们用$\mathbf{e_0}$ 表示零向量 $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$，并用 conv($S$) 表示集合 S的（标准）凸包。

命题 9.4. 关于热带表面张力 $\phi_{\mathrm{tr}}(\mathbf{x}) = \| \mathbf{x} \|_{\mathrm{tr}}$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中的沃尔夫形状 $W^n{}_{\mathrm{tr}} = W^n_{\|\cdot\|_{\mathrm{tr}}}$ 为

$$W^n_{\mathrm{tr}} = \mathrm{conv}\{\mathbf{e_i} - \mathbf{e_j} : 0 \le i, j \le n,\ i \ne j\} \subset \mathbb{R}^n. \tag{9.9}$$

证明。设 $S = \{\mathbf{e_i} - \mathbf{ej}:\ 0 \le i, j \le n,\ i \ne j\}$。这些是热带球各面的法向量。$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 的热带范数为

$$\| \mathbf{x} \|_{\mathrm{tr}} = \max_{\mathbf{v}\in S}\{\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}\rangle\}. \tag{9.10}$$

因此，热带表面张力是晶体型的，关于对偶范数的单位球 B^{n*}_{tr}是多胞体

$$B^{n*}_{\mathrm{tr}} = \mathrm{conv}(S), \tag{9.11}$$

并且由 (9.5)，$W^n_{\mathrm{tr}} = B^{n*}_{\mathrm{tr}} = \mathrm{conv}(S)$。 □

例 9.5。关于热带范数的 $\mathbb{R}^2$ 沃尔夫形状 W^2_{tr}，即热带对偶球，是热带球B^2_{tr} 绕 90° 旋转得到的形状（见图 6）。在更高维数中，热带球与其对偶球的相似性较低：例如，热带球有 $2^{n+1} - 2$ 个顶点，而热带对偶球有 n（$n + 1$）个顶点，这正是B^2_{tr}的面数；同样地，k与 $n - 1 - k$的面数也存在这种关系。

从热带单位球的顶点集合（见 [35]）以及（9.6）可以明显看出，$x=(x_1,\ldots\ldots,x_n)$的**热带对偶范数** 为

$$\| \mathbf{x} \|_{\mathrm{tr}}^{*} = \phi_{\mathrm{tr}}^{*}(\mathbf{x}) = \max_{I\subseteq\{1,\ldots,n\}} \{|\sum_{i\in I} x_i|\}, \tag{9.12}$$

也就是说，取$\mathbf{x}$ 的正分量之和与$\mathbf{x}$的负分量之和的绝对值中的较大者。等价地，可以按以下方式计算。设 $\tilde{x}_i = \langle \mathbf{x}\ \tilde{\mathbf{e}}_i \rangle$，其中 $i=1,\ldots,n+1$，且与前面一样，$\tilde{\mathbf{e}}_{n+1} = -\mathbf{1}$。那么

$$\| \mathbf{x} \|_{\mathrm{tr}}^{*} = \sum_{i=1}^{n+1} \max\{0,\tilde{x}_i\} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n+1} |\tilde{x}_i|. \tag{9.13}$$

注意

$$\| \mathbf{x} \|_{\mathrm{tr}}^{*} \geq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} |x_i| = \frac{1}{2}\| \mathbf{x} \|_1 \geq \frac{1}{2}\| \mathbf{x} \|, \tag{9.14}$$

这意味着热带对偶范数具有强制性。另一方面,

$$\| \mathbf{x} \|_{\mathrm{tr}}^{*} \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| = \| \mathbf{x} \|_1 \leq \sqrt{n}\| \mathbf{x} \| . \tag{9.15}$$

该热带对偶单位球于是为

$$B_{\mathrm{tr}}^{n*} = \{(x_1,\ldots,x_n) : \max_{I\subseteq\{1,\ldots,n\}} \{|\sum_{i\in I} x_i|\} \leq 1\}. \tag{9.16}$$

该热带对偶距离介于 $\mathbf{x}$与$\mathbf{y}$ 为

$$d_{\mathrm{tr}}^{*}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \| \mathbf{x}-\mathbf{y} \|_{\mathrm{tr}}^{*} = \max_{I\subseteq\{1,\ldots,n\}} \{|\sum_{i\in I} x_i - y_i|\}. \tag{9.17}$$

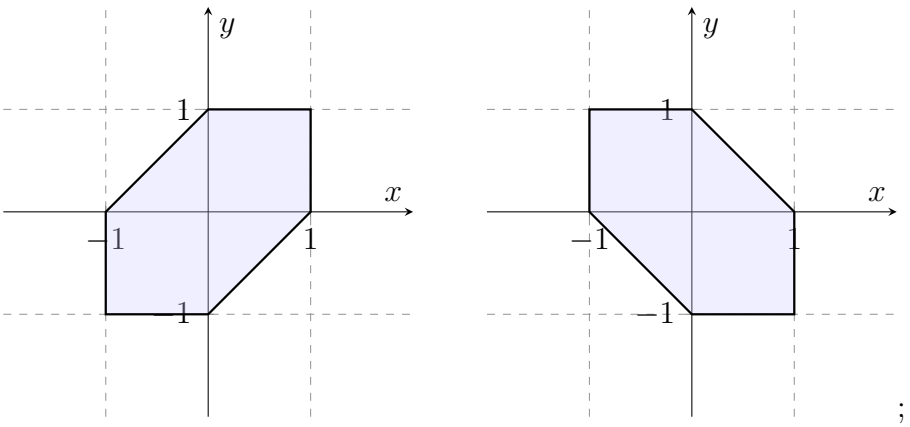

FIGURE 6. 平面上的热带单位球（左）及其对偶形状，即关于热带范数的沃尔夫形状（右）

9.4. 作为沃尔夫形状的热带球。 现在我们来考察沃尔夫形状为热带单位球的情形。根据 B_{tr}^n 的形状以及上文的讨论，我们有

$$B_{\mathrm{tr}}^n = \mathrm{conv}(S^*), \tag{9.18}$$

其中

$$S^* = \{\mathbf{v}^* \in (\{0,1\}^n \cup \{0,-1\}^n) \setminus \{\mathbf{0}\}\} \subset \mathbb{R}^n. \tag{9.19}$$

向量$\mathbf{v}^*$ 的方向与 B_{tr}^n 的顶点方向一致，而这些向量是对偶热带球 B_{tr}^{n*}各面的法向量。热带对偶表面张力为

$$\phi_{\mathrm{tr}}^*(\mathbf{x}) = \| \mathbf{x} \|_{\mathrm{tr}}^* = \max_{\mathbf{v}^* \in S^*} \{\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}^* \rangle\}, \tag{9.20}$$

S^* 在$\mathbf{x}$处的支撑函数，也就是 B_{tr}^n 在$\mathbf{x}$处的支撑函数。

表面范数 ϕ_{tr}^* 定义了一种表面测度，该测度还可扩展为 $\mathbb{R}^n$ 上的另一种测度，它基于热带球，是闵可夫斯基含量的热带类比；此处该测度仅限于 k-可容许集。

定义 9.6. 设 $S \subset \mathbb{R}^n$ 为一个 k-可容许集，$k \leq n$。我们将 S 的 k维热带闵可夫斯基测度定义为

$$\mathcal{M}_{\mathrm{tr}}^k(S) := \frac{1}{n-k+1} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\mathcal{L}^n(S + B_{\mathrm{tr},\varepsilon}^n)}{\varepsilon^{n-k}}. \tag{9.21}$$

注释 9.7. (1) (9.21) 中的 $n-k+1$ 指的是维数为 $n-k$的热带单位球的热带体积。

(2) 当 $k = n$ 时，我们有 $\mathcal{M}_{\mathrm{tr}}^n(S) = \sigma_{\mathrm{tr}}^n(S) = \mathcal{L}_{\mathrm{tr}}^n(S)$。(3) 对于一般集合，$\mathcal{M}_{\mathrm{tr}}^k(S)$不是一个测度，经典闵可夫斯基含量也是如此。

特别地，对于 $S \subset \mathbb{R}^n$ 的一个 n-可容许集合，其表面积为

$$\mathcal{M}_{\mathrm{tr}}^{n-1}(\partial S) := \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\sigma_{\mathrm{tr}}^n(\partial S + B_{\mathrm{tr},\varepsilon}^n)}{\varepsilon} = \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\mathcal{L}^n(\partial S + B_{\mathrm{tr},\varepsilon}^n)}{\varepsilon}. \tag{9.22}$$

表面积的一个等价的导数形式定义如下。

定义 9.8. 设 $S \subset \mathbb{R}^n$ 是一个 n-可容许集合。我们将 S 的热带闵可夫斯基-斯坦纳表面积定义为

$$\lambda_{\mathrm{tr}}^{n-1}(\partial S) := \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\mathcal{L}^n(S + B_{\mathrm{tr},\varepsilon}^n) - \mathcal{L}^n(S)}{\varepsilon}. \tag{9.23}$$

众所周知，对于可求长曲面，这一类导数表达式定义了各向异性曲面能量$\Phi(S)$，因为$h_{B_{\mathrm{tr},\,\varepsilon}^n}(\mathbf{x})$，即 S 在$\mathbf{x} \in \partial S$ 处沿$S + B_{\mathrm{tr},\,\varepsilon}^n$的热带 ε增厚，恰好等于$\varepsilon \cdot \phi_{\mathrm{tr}}^*(\mathbf{v})$，即正交投影的（标准）范数

到单位外法向量$\mathbf{v} = \mathbf{v}_S(\mathbf{x})$上的半径为 ε 的热带球的投影。于是我们有

$$h_{B^n_{\mathrm{tr},\varepsilon}}(\mathbf{x}) = \varepsilon \cdot \| \mathbf{v} \|^*_{\mathrm{tr}} = \varepsilon \cdot \phi^*_{\mathrm{tr}}(\mathbf{v}) = \varepsilon \cdot \max_{I \subseteq \{1,\dots,n\}} \{|\sum_{i \in I} v_i|\}. \tag{9.24}$$

热带闵可夫斯基测度在 $\mathbb{R}^n$ 的 n 维子集上等于勒贝格测度，而 $\mathcal{M}^{n-1}_{\mathrm{tr}}(\partial S)$ 是热带球的支撑函数所对应的各向异性表面能；正是这一事实使得我们能够运用布伦-闵可夫斯基不等式证明热带球是沃尔夫形状。著名的布伦-闵可夫斯基不等式（[3], [28]。另见 [14], [11, 第 3.2 节。41], [36]）如下所示。

定理 9.9（布伦-闵可夫斯基不等式）。设 A、$B \in \mathbb{R}^n$ 是 n 维的非空可测集。那么

$$(\mathcal{L}^n(A+B))^{1/n} \geq (\mathcal{L}^n(A))^{1/n} + (\mathcal{L}^n(B))^{1/n}. \tag{9.25}$$

为清楚起见，我们陈述关于热带球相对于热带闵可夫斯基测度是沃尔夫形状的定理。使用布伦-闵可夫斯基不等式所作的证明，与欧几里得球的经典证明类似。

定理 9.10（热带等周不等式）。设 $S \subset \mathbb{R}^n$ 是一个 n-可容许集。那么

$$(\mathcal{M}^{n-1}_{\mathrm{tr}}(\partial S))^n \geq n^n(n+1)(\mathcal{M}^n_{\mathrm{tr}}(S))^{n-1}, \tag{9.26}$$

当且仅当 S 是一个热带球时等号成立。

接下来，我们比较多胞体 S表面上的热带测度$\sigma^{n-1}_{\mathrm{tr}}(\partial S)$与热带闵可夫斯基测度 $\mathcal{M}^{n-1}_{\mathrm{tr}}(\partial S)$。不妨假设多胞体 S 的一个面F 经过原点，且位于超平面$\mathbf{v}^\perp$上，其中$\mathbf{v}$ 是一个单位向量。根据定义，

$$\sigma^{n-1}_{\mathrm{tr}}(\mathbf{v}^\perp \cap B^n_{\mathrm{tr}}) = n. \tag{9.27}$$

将 $\sigma^{n-1}_{\mathrm{tr}}(\partial S)$表示为表面能后，可得

$$\sigma^{n-1}_{\mathrm{tr}}(\partial S) = \int_{\partial S} \frac{n}{\mathcal{L}^{n-1}(\mathbf{v}^\perp \cap B^n_{\mathrm{tr}})}\, d\mathcal{H}^{n-1}. \tag{9.28}$$

令 $h_{B^n_{\mathrm{tr}}}(\mathbf{v})$表示 B^n_{tr} 在$\mathbf{v}$处的支撑函数，即表面张力 $\phi^*_{\mathrm{tr}}(\mathbf{v})$。那么

$$\mathcal{M}^{n-1}_{\mathrm{tr}}(\mathbf{v}^\perp \cap B^n_{\mathrm{tr}}) = \int_{\mathbf{v}^\perp \cap B^n_{\mathrm{tr}}} h_{B^n_{\mathrm{tr}}}(\mathbf{v})\, d\mathcal{H}^{n-1} = \mathcal{L}^{n-1}(\mathbf{v}^\perp \cap B^n_{\mathrm{tr}}) \cdot h_{B^n_{\mathrm{tr}}}(\mathbf{v}). \tag{9.29}$$

推广到 n-容许集合，可得以下结论。

引理 9.11. 设 $S \in \mathbb{R}^n$ 是一个 n-容许集合。若对于几乎所有$\mathbf{x} \in \partial S$,

$$\mathcal{L}^{n-1}(\mathbf{v}_S(\mathbf{x})^\perp \cap B^n_{\mathrm{tr}}) \cdot h_{B^n_{\mathrm{tr}}}(\mathbf{v}_S(\mathbf{x})) = n, \tag{9.30}$$

那么 $\mathcal{M}^{n-1}_{\mathrm{tr}}(\partial S) = \sigma^{n-1}_{\mathrm{tr}}(\partial S)$。

定理 9.12. 设 $S \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ 是一个 n 维多胞体，其每个面都平行于热带球 B^n_{tr} 的一个面或热带对偶球的一个面。那么 $\mathcal{M}^{n-1}_{\mathrm{tr}}(\partial S) = \sigma^{n-1}_{\mathrm{tr}}(\partial S)$。

证明。设 $F \subset \partial S$ 是 S 的一个面，并且不失一般性地假设 F 经过原点，因此 F 位于超平面 $\mathbf{v}^{\perp}$ 上，其中 $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ 是一个单位向量。若 F 平行于 B^n_{tr} 的某个面，则对于某个 $1 \leq i \leq n$，要么 $\mathbf{v} = \pm \mathbf{e_i}$，要么对于某个 $1 \leq i \neq j \leq n$，$\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e_i} - \mathbf{e_j})$。若 F 平行于对偶球的某个面，则 $\mathbf{v}$ 的方向与 B^n_{tr} 的一个顶点一致，因此对于某个$1 \leq k \leq n$ 和 $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$，$\mathbf{v} = \pm \frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{j=1}^{k} \mathbf{e_{i_j}}$。所以，我们可以不失一般性地假设，要么 $\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{i=1}^{k} \mathbf{e_i}$，要么 $\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e_1} - \mathbf{e_2})$。

如上所述，B^n_{tr} 是区域带

$$B^n_{\mathrm{tr}} = \{\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n+1} a_i \tilde{\mathbf{e}}_\mathbf{i} : 0 \leq a_i \leq 1\}. \tag{9.31}$$

也就是说，当 $\mathbf{x} \in B^n_{\mathrm{tr}}$ 时

$$\mathbf{x} = (a_1 - a_{n+1}, \ldots, a_n - a_{n+1}), \tag{9.32}$$

其中 $a_i \in [0,1]$，对于 $i = 1, \ldots\ldots, n+1$。

令 $\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{i=1}^{k} \mathbf{e_i}$ 且 $\mathbf{x} \in \mathbf{v}^{\perp} \cap B^n_{\mathrm{tr}}$。由于 $\langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle = 0$，因此 $a_{n+1} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} a_i$且

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{k} a_i (\mathbf{e_i} - \frac{1}{k}\mathbf{1}) + \sum_{j=k+1}^{n} a_j \mathbf{e_j}. \tag{9.33}$$

由此可知，$\mathbf{v}^{\perp} \cap B^n_{\mathrm{tr}}$ 是由以下向量生成的区域带

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{e_i} - \frac{1}{k}\mathbf{1}, \text{ for } i = 1, \ldots, k, \text{ and } \mathbf{y_j} = \mathbf{e_j}, \text{ for } j = k+1, \ldots, n. \tag{9.34}$$

由于 v 是一个单位向量，且与（$n-1$）维中心截面$\mathbf{v}^{\perp} \cap B^n_{\mathrm{tr}}$正交，因此我们可以将它加入$\mathbf{v}^{\perp} \cap B^n_{\mathrm{tr}}$ 的生成向量中，而不改变体积，从而得到以下公式。

$$\mathcal{L}^{n-1}(\mathbf{v}^{\perp} \cap B^n_{\mathrm{tr}}) = \sum_{i=1}^{n} |\det(\mathbf{v}, \mathbf{y}_1, \ldots, \widehat{\mathbf{y}}_i, \ldots, \mathbf{y}_n)| = \frac{n}{\sqrt{k}}, \tag{9.35}$$

因为可以验证，每个 n 行列式的值都是 $\pm \frac{1}{\sqrt{k}}$。

$$h_{B^n_{\mathrm{tr}}}(\mathbf{v}) = \max_{I \subseteq \{1,\ldots,n\}} \{|\sum_{i \in I} v_i|\} = k \cdot \frac{1}{\sqrt{k}} = \sqrt{k}. \tag{9.36}$$

由此可得

$$\mathcal{L}^{n-1}(\mathbf{v}^{\perp} \cap B^n_{\mathrm{tr}}) \cdot h_{B^n_{\mathrm{tr}}}(\mathbf{v}) = \frac{n}{\sqrt{k}} \cdot \sqrt{k} = n. \tag{9.37}$$

另一种情况是$\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e_1} - \mathbf{e_2})$。与前面一样，当$\mathbf{x} \in B^n_{\mathrm{tr}}$时，它可以表示为式（9.32），而条件 $\langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle = 0$ 可转化为 $a_1 = a_2$。因此，

$$\mathbf{x} = a_1(\tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{\mathbf{e}}_2) + \sum_{i=3}^{n+1} a_i \tilde{\mathbf{e}}_i : 0 \le a_i \le 1\}. \tag{9.38}$$

因此，$\mathbf{v}^\perp \cap B^n_{\mathrm{tr}}$ 是由这些向量生成的区域带

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{e_1} + \mathbf{e_2},\ \mathbf{y}_i = \mathbf{e_{i+1}},\ \text{for } i = 2, \dots, n-1,\ \text{and } \mathbf{y}_n = -\mathbf{1}. \tag{9.39}$$

和之前一样，我们计算 B^n_{tr} 的中心截面体积，得到

$$\mathcal{L}^{n-1}(\mathbf{v}^\perp \cap B^n_{\mathrm{tr}}) = \sum_{i=1}^{n} |\det(\mathbf{v}, \mathbf{y}_1, \dots, \widehat{\mathbf{y}}_i, \dots, \mathbf{y}_n)| = \sqrt{2}n, \tag{9.40}$$

因为每个 n 行列式的值都是 $\pm\sqrt{2}$。

$$h_{B^n_{\mathrm{tr}}}(\mathbf{v}) = \max_{I \subseteq \{1,\dots,n\}} \{|\sum_{i \in I} v_i|\} = v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{9.41}$$

我们得到

$$\mathcal{L}^{n-1}(\mathbf{v}^\perp \cap B^n_{\mathrm{tr}}) \cdot h_{B^n_{\mathrm{tr}}}(\mathbf{v}) = \sqrt{2}n \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = n. \tag{9.42}$$

由于对于 S 的所有面，$\mathcal{L}^{n-1}(\mathbf{v}^\perp \cap B^n_{\mathrm{tr}}) \cdot h_{B^n_{\mathrm{tr}}}(\mathbf{v}) = n$，因此由引理 9.11，$\mathcal{M}^{n-1}_{\mathrm{tr}}(\partial S) = \sigma^{n-1}_{\mathrm{tr}}(\partial S)$。□

我们已经看到，当 S 是一个面平行于某个热带球的面的多胞体时，$\mathcal{M}^{n-1}_{\mathrm{tr}}(\partial S) = \sigma^{n-1}_{\mathrm{tr}}(\partial S)$成立。这意味着，只要我们将讨论范围限制在面平行于某个热带球的面的多胞体上，定理 9.10 中所述的热带等周不等式对热带测度 σ_{tr}也成立。显然，当维数为 $n = 1$时，两个测度相等。对于$n \ge 2$，我们需要检验条件 (9.30)，即 $\mathcal{L}^{n-1}_{\mathrm{tr}}(\mathbf{v}^\perp \cap B^n_{\mathrm{tr}}) \cdot h_{B^n_{\mathrm{tr}}}(\mathbf{v}) = n$是否成立。通过初等三角论证，可以轻易证明它对 $n = 2$ 成立（$2\cos(\alpha) \cdot \cos(\alpha) = 2$ 或 $\sqrt{2}\cos(\alpha) \cdot \sqrt{2}\cos(\alpha) = 2$）。通过用多边形逼近，我们得到如下结果。

命题 9.13。设 $S \subset \mathbb{R}^2$ 为2-可容许的。则其热带周长满足 $\mathcal{M}^1_{\mathrm{tr}}(\partial S) = \sigma^1_{\mathrm{tr}}(\partial S)$。

维数 n = 3. 设 $\mathbf{v} = (a, b, c)$，$c \neq 0$ 是一个单位向量。我们通过 $(x, y, z) = (s, t, -\frac{a}{c}s - \frac{b}{c}t) = r(s, t)$ 对平面 $ax + by + cz = 0$进行参数化。雅可比矩阵为

$$J = \| \partial_s r \times \partial_t r \| = \left\| \left(\tfrac{a}{c}, \tfrac{b}{c}, 1\right) \right\| = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{\sqrt{c^2}} = \frac{1}{|c|}.$$

设 D 为坐标 (s,t) 下的中心截面 $\mathbf{v}^\perp \cap B^3_{\mathrm{tr}}$。它由不等式 $|s| \le 1$, $|t| \le 1$, $|as+bt| \le |c|$, $|s-t| \le 1$, $|(a+c)s+bt| \le |c|$ 和 $|as+(b+c)t| \le |c|$ 定义。因此，该截面的面积为

$$\mathcal{L}^2(\mathbf{v}^\perp \cap B^3_{\mathrm{tr}}) = \mathcal{L}^2_{(s,t)}(D) \cdot J.$$

下面的例子表明，在三维空间中，对于某些集合 S，两种表面积概念相同；但对于另一些集合 $\mathcal{M}^2_{\mathrm{tr}}(\partial S) > \sigma^2_{\mathrm{tr}}(\partial S)$，则不同，具体取决于法向量的方向。

例9.14。(1) 设 F 是一个多胞体的面，由平面 $x+y-2z=0$ 支撑，且 $\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,\ 1,\ -2)$ 是单位法向量。那么

$$(x,\ y,\ z) = (s,\ t,\ \tfrac{s+t}{2}),\quad J = \sqrt{\tfrac{3}{2}},\quad D = ([-1,1]\times[-1,1]) \cap \{|s-t| \le 1\}$$

和 $\mathcal{L}^2_{(s,t)}(D) = 3$。因此，底面的面积为 $\mathcal{L}^2(\mathbf{v}^\perp \cap B^3_{\mathrm{tr}}) = 3\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}$。高度为 $h_{B^3_{\mathrm{tr}}}(\mathbf{v}) = \langle (1,\ 1,\ 0),\ \mathbf{v}\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}$. 我们有

$$\mathcal{L}^2(\mathbf{v}^\perp \cap B^3_{\mathrm{tr}}) \cdot h_{B^3_{\mathrm{tr}}}(\mathbf{v}) = 3 \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = 3,$$

这表明在此例中 $\mathcal{M}^2_{\mathrm{tr}}(F) = \sigma^2_{\mathrm{tr}}(F)$。

(2) 设 F 位于平面 $2x+2y-z=0$ 上，$\mathbf{v} = \frac{1}{3}(2,\ 2,\ -1)$。那么 $(x,\ y,\ z) = (s,\ t,\ 2(s+t))$，$J = 3$ 且 $\mathcal{L}^2_{(s,t)}(D) = \frac{11}{12}$。因此，底面的面积为 $\mathcal{L}^2(\mathbf{v}^\perp \cap B^3_{\mathrm{tr}}) = 3\cdot\frac{11}{12} = \frac{11}{4}$。高度为 $h_{B^3_{\mathrm{tr}}}(\mathbf{v}) = \langle (1,\ 1,\ 0),\ \mathbf{v}\rangle = \frac{4}{3}$. 我们有

$$\mathcal{L}^2(\mathbf{v}^\perp \cap B^3_{\mathrm{tr}}) \cdot h_{B^3_{\mathrm{tr}}}(\mathbf{v}) = \frac{11}{4}\cdot\frac{4}{3} = \frac{11}{3} > 3,$$

这表明在此例中 $\mathcal{M}^2_{\mathrm{tr}}(F) > \sigma^2_{\mathrm{tr}}(F)$。

10. Tropical honeycomb theorem in $\mathbb{R}^n$

根据热带等周不等式，我们得到以下推论。

定理10.1（热带蜂窝定理，适用于 $\mathbb{R}^n$）。设 $G \subset \mathbb{R}^n$ 是一个 $n-1$ 维连通集，将 $\mathbb{R}^n$ 分割成无穷多个有界的单连通分支，每个分支的（热带）测度均为 1，且其边界为（$n-1$）可求长边界。设 $C = \mathbb{R}^n \setminus G$。设 B^n_R 为以原点为中心、半径为 R 的标准 n 维球。则

$$\limsup_{R\to\infty} \frac{\mathcal{M}^{n-1}_{\mathrm{tr}}(G \cap B^n_R)}{\mathcal{L}^n(B^n_R)} \ge \frac{n\sqrt[n]{n+1}}{2}, \tag{10.1}$$

当各分支为热带单位球时，等号成立。

证明。证明可由定理 9.10、热带等周不等式和定理 4.1 得出，与二维情形下定理 8.2 的证明类似。根据定理 9.10，对于一个 n维且（热带）体积为 1 的实体，其最小表面积

为 $n\sqrt[n]{n+1}$，热带球可达到这一数值。由于在 $\mathbb{R}^n$ 的铺砌中，每个面都属于两个热带球；又由于当 $R \to \infty$时，位于球 B_R^n 边界上的热带球的总表面积在计算比值时可以忽略（其阶为 $O(R^{n-1})$，而球的体积的阶为 $O(R^n)$），因此热带球在（10.1）中的极限为 $\frac{n\sqrt[n]{n+1}}{2}$。□

10.1. 的铺砌 $\mathbb{R}^3$。热带情形下空间蜂窝定理的下界为 $\frac{3}{2}\sqrt[3]{4} \approx 2.381$。为了将其与欧几里得情形下 $\mathbb{R}^3$ 的铺砌进行比较，我们使用 [39] 中的表格数据，该表显示了等周商

$$\frac{36\pi V^2}{A^3} \tag{10.2}$$

不同结构的情形，其中 V 为体积，A 为表面积。该表达式用于与标准球作比较，标准球的取值为1（较大的值表示更高效的铺砌）。当然，用球铺砌 $\mathbb{R}^3$ 是不可能的，而最佳排列（开普勒猜想）已由Thomas Hales于1998年证明（该证明借助计算机完成，形式化证明则在 2017 [17]中给出）。铺砌 $\mathbb{R}^3$ 的等周商（10.2）的已知最佳值属于Weaire 和 Phelan [39], ，它由两类胞元组成：不规则十二面体与截角六角偏方面体，二者均略微弯曲。该值大于Kelvin在一百多年前提出的方案，后者由略呈弯曲的截角八面体形胞元构成。表 1列出了用 Weaire 和 Phelan胞元、Kelvin胞元以及立方体铺砌时的等周商取值（取自 [39]），此外还包括欧几里得情形下的三维热带球 B^3_{tr}（其中铺砌并不假定为最优）以及热带情形下的取值（最佳商）：$\frac{36\pi 4^2}{(3\cdot 4)^3} = \frac{\pi}{3} \approx 1.047$。

结构	等周商
标准球	1.000
Weaire-Phelan	0.764
Kelvin	0.757
Cube	0.524
热带球（欧几里得测度）	0.595
热带球（热带测度）	1.047

TABLE 1. 不同三维结构的等周商 $\frac{36\pi V^2}{A^3}$

References

[1] Marianne Akian. 幂等测度的密度与大偏差. Trans. Amer. Math. Soc., 351(11):4515–4543, 1999.[2] Erwan Brugall´e、Mar´ıa Ang´elica Cueto、Alicia Dickenstein、Eva-Maria Feichtner与Ilia Itenberg编. 热带几何的代数与组合方面, 《当代数学》第589卷. 美国数学会, 普罗维登斯, RI, 2013..[3] Hermann Brunn. Uber Ovale und Eifl ¨achen. 就职学位论文, M¨unchen, 1887.[4] Peter Butkovi˘c. 极大线性系统：理论与算法. 施普林格数学专著. 施普林格伦敦出版社, 伦敦, 2010.[5] Guy Cohen、St´ephane Gaubert与Jean-Pierre Quadrat. 幂等半模中的对偶性与分离定理. Linear Algebra Appl., 379:395–422, 2004.[6] Mar´ıa Jes´us de la Puente. 由两点确定的热带直线上的距离. Kybernetika（布拉格）, 50(3):408–435, 2014.[7] Antonio De Rosa. 论各向异性极小曲面理论. Notices Amer. Math. Soc., 71(7):853–859, 2024.[8] Pierre Del Moral与Michel Doisy. 马斯洛夫幂等概率演算. I. Teor. Veroyatnost. i Primenen., 43(4):735–751, 1998.[9] Jules Depersin、St´ephane Gaubert与Michael Joswig. 热带等周不等式. 载于发表在S´eminaire Lotharingien de Combinatoire的论文集, 第78B卷, 文章编号27, 伦敦, 2017年7月.[10] Kenneth J. Falconer. 分形集几何, 剑桥数学丛书第85卷. 剑桥大学出版社, 剑桥, 1986.[11] Herbert Federer. 几何测度论, 《数学科学基础》第 153 卷 . Springer-Verlag New York, Inc., 纽约 , 1969.[12] L´aszl´o Fejes. ¨uber das k¨urzeste Kurvennetz, das eine Kugeloberfl¨ache in fl¨achengleiche konvexe Teile zerlegt. Math. Naturwiss. Anz. Ungar. Akad. Wiss., 62:349–354, 1943.[13] Alessio Figalli与Yi Ru-Ya Zhang. 带晶体范数的沃尔夫不等式的强稳定性. Comm. Pure Appl. Math., 75(2):422–446, 2022.[14]Richard J. Gardner. 布伦-闵可夫斯基不等式. 《美国数学会通报》（新辑）, 39(3):355–405, 2002.[15] Mark Gross. 热带几何与镜像对称, CBMS区域数学会议丛书第114卷. 数学科学会议委员会, 华盛顿特区; 美国数学会, 普罗维登斯, RI, 2011.[16] Thomas C. Hales. 蜂窝猜想. Discrete Comput. Geom., 25(1):1–22, 2001.[17] Thomas C. Hales等. 开普勒猜想的形式化证明. Forum Math. Pi, 5:e2, 29, 2017.[18] Ilia Itenberg、Grigory Mikhalkin与Eugenii Shustin. 热带代数几何, 奥伯沃尔法赫研讨会第35卷. Birkh¨auser Verlag, 巴塞尔, 第二版, 2009.[19] Michael Joswig. 热带组合学要义, 数学研究生教材第219卷. 美国数学会, 普罗维登斯, RI, [2021] ©2021.[20] Vassili N. Kolokoltsov与Victor P. Maslov. 幂等分析及其应用, 《数学及其应用》第401卷. 克吕维尔学术出版集团, 多德雷赫特, 1997. 译自《幂等分析及其在最优控制中的应用》（俄文）, “Nauka”莫斯科, 1994 [MR1375021 (97d:49031)], 由V. E. Nazaikinskii翻译, 附Pierre Del Moral所撰附录.[21] Wonjun Lee、Wuchen Li、Bo Lin与Anthea Monod. 热带最优输运与瓦瑟斯坦距离. Inf. Geom., 5(1):247–287, 2022.

[22] Grigory L. Litvinov。《马斯洛去量化、幂等数学与热带数学：简明介绍》。《数学科学杂志》，140：426–444，2007年。译自《彼得堡数学学会学术研讨会纪要》，326，（2005年），145–182。[23] Georg Loho 和 Matthias Schymura。热带埃尔哈特理论与热带体积。《Res. Math. Sci.》，7(4)：论文第30号，34页，2020年。[24] Diane Maclagan 和 Bernd Sturmfels。《热带几何入门》，数学研究生教材第161卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2015年。[25] Francesco Maggi。《有限周长集与几何变分问题：几何测度论入门》，剑桥高等数学研究丛书第135卷。剑桥大学出版社，剑桥，2012年。[26] Viktor P. Maslov。《算子方法》。 ́Mir出版社，莫斯科，1987年。Djilali Embarek译自俄文。[27] Grigory Mikhalkin 和 Johannes Rau。《热带几何》。准备中的书稿。[28] Hermann Minkowski。《数的几何》。Teubner，莱比锡，1896年。重印本：Teubner数学丛书，第40卷，J ohnson Reprint Corp.，纽约—伦敦，1968年。[29] Frank Morgan。《几何测度论：初学者指南》。爱思唯尔 / Academic Press，阿姆斯特丹，第五版，2016年。[30] Robin Neumayer。各向异性等周问题的极小化子与临界点。载于 Jan de Gier、Cheryl E. Praeger 和 Terence Tao（编），《2018年MATRIX年刊》，第293–302页。施普林格国际出版公司，2020年。[31] Robert Osserman。等周不等式。《美国数学会通报》，84(6)：1182–1238，1978年。[32] Lior Pachter 和 Bernd Sturmfels。生物学。载于《计算生物学代数统计》，第125–159页。剑桥大学出版社，纽约，2005年。[33] Jürgen Richter-Gebert、Bernd Sturmfels 和 Thorsten Theobald。热带几何入门。载于《幂等数学与数学物理》，《当代数学》第377卷，第289–317页。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2005年。[34] Claude A. Rogers。豪斯多夫测度。剑桥大学出版社，伦敦—纽约，1970年。[35] Amnon Rosenmann。热带球、测地线与蜂窝。2026年。arXiv：2601。14447[math]。[36] Rolf Schneider。《凸体：布伦－明可夫斯基理论》，数学及其应用百科全书第151卷。剑桥大学出版社，剑桥，扩充版，2014年。[37] Leon Simon。《几何测度论讲义》，《数学分析中心论文集》第3卷。澳大利亚国立大学数学分析中心，堪培拉，1983年。[38] Jean E. Taylor。晶体变分问题。《美国数学会通报》，84(4)：568–588，1978年。[39] Denis Weaire 和 Robert Phelan。关于开尔文猜想的极小曲面反例。《哲学杂志快报》，69(2)：107–110，1994年。[40]Georg Wulff。关于生长速度和晶面的溶解问题。《结晶学与矿物学杂志》，34：449–530，1901年。电子邮箱：rosenmann@math.tugraz.at