arXiv:2603.03216v1 [math-ph] 3 Mar 2026

扭曲标准模型及其克雷因结构谨以此文纪念 *Manuele Filaci*

P. Martinetti

热那亚大学数学系 & 意大利国家核物理研究所

2026年3月4日

摘要

我们回顾 Manuele Filaci 对非交换几何中标准模型描述所作的贡献。Manuele Filaci 是热那亚大学的一名博士生，一年多前不幸英年早逝。基于 Manuele 发现的标准模型谱三元组存在多种最小扭曲方式，我们系统地研究了由扭曲诱导的内积。在宽松的假设下，这一内积使谱三元组的希尔伯特空间成为克莱因空间。对于标准模型，相对于扭曲乘积的酉群包含扭量对称群这一子群。

I 引言

Manuele Filaci 曾是热那亚大学的学生，于2021年完成了博士论文。此后不久，他在克拉科夫的雅盖隆大学开始博士后研究，但他作为科学家的光明前程却被一场残酷的疾病无情地中断。Manuele 于2024年11月去世，距在国际数学研究中心（吕米尼，法国）召开的非交换几何在规范理论、场论与量子时空中的应用 会议开幕仅数月之遥，当时人们正以极大的兴趣和好奇期待他的贡献。本文旨在缅怀他、纪念他的工作，并彰显他对科学的贡献如何蕴含着丰富的未来发展。

Manuel 开始撰写关于中微子唯象学的博士论文 [2], ，随后决定转向数学物理。这是一次勇敢的转变，我们决定共同研究非交换几何在高能物理中的应用，尤其是借助谱三元组来描述基本相互作用的标准模型 [10]。关于标准模型的中微子扇区，仍有若干重要问题悬而未决：中微子是狄拉克旋量还是马约拉纳旋量，它们的质量是多少，右手中微子是否存在？在标准模型的谱描述中，中微子的行为同样不同于其他费米子。它们对度量的涨落是透明的，因此并不参与该模型玻色子扇区的生成。

事实上，费米子场属于希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ ，该空间参与定义与标准模型相关的谱三元组* $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ [6], ，而玻色子场则是（广义）联络1-形式的一部分

$$A + JAJ^{-1} \tag{1}$$

*$\mathcal{A}$ 是一个代数，通过忠实的对合表示 π作用为可分希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的有界算子；而 D 是 $\mathcal{H}$ 上的一个算子，其定义见下文公式（5）。通常省略表示的符号 π ，需要时再将其重新引入。在全文中，我们假设 $\mathcal{A}$ 是一个以**1**为单位元的含幺代数。

其中 A 是（广义）1-形式集合中的一个自伴元

$$\Omega^1_D(\mathcal{A}) := \left\{ \sum_i a_i \, [D, b_i], a_i, b_i \in \mathcal{A} \right\}, \tag{2}$$

并且 J 是实结构 [9]，也就是 $\mathcal{H}$ 上的一个反酉算子，使得 t

$$J^2 = \epsilon \mathbb{I}, \qquad JD = \epsilon' DJ, \qquad J\Gamma = \epsilon'' \Gamma J \tag{3}$$

其中 ϵ，ϵ'，ϵ'' 在 $\{-1, 1\}$ 中定义了*KO*-维数，而 Γ 是分次，将在下文第 II.2 节中定义。算子 D 由该理论的物理输入参数化，即费米子的汤川耦合、Cabibbo 矩阵以及中微子的 PNMS 混合矩阵。结果表明，D 中包含中微子马约拉纳质量的部分——且仅此部分——与代数对易，因此不会对联络（1）作出贡献。将算子 D 替换为协变算子

$$D_A := D + A + JAJ^{-1} \tag{4}$$

称为算子 D 的涨落 （对于 D，也称为度量涨落，因为 D 通过 Connes 谱距离公式 [13]定义度量）。因此，我们总结前面的讨论指出：中微子对度量涨落是透明的。

从一开始就已充分认识到这种透明性 [6]，而且它似乎并没有特别棘手，直到 2012 年希格斯玻色子的发现。随后，Connes 和 Chamseddine 意识到，让中微子的马约拉纳质量对模型的玻色部分作出贡献，就能使非交换几何对希格斯质量的预测与观测相符，同时还能提供解决电弱真空亚稳态问题所需的那类标量场 [5]。

将马约拉纳质量转化为标量场的一种方法，是沿着 [12, §9.1、9.2]中预想的思路，在 [8], 中提出的 σ 。这种方法通过放宽一阶条件（定义谱三元组的条件之一），对算子进行涨落 D，随后借助更高对称性的自发破缺，动态地恢复一阶条件。由此得到一个用于大统一的 Pati-Salam 模型 [7]。

另一种设想是从一个比标准模型代数更大的代数出发，使其不再与狄拉克算子的马约拉纳部分对易 [17]。这使得人们能够用一个扭曲谱三元组 [18]来描述标准模型（详尽综述见 [20]）。Manuele 的贡献至关重要：他在此前一种仅扩大了标准模型代数部分内容的模型基础上 [18], ，构建了完整标准模型的扭曲版本 [21]。他还发现，与我们最初的期望相反，一阶条件并未得到保留，甚至其扭曲形式也不例外。于是，我们开始对扭曲标准模型的所有可能方式进行分类，希望找出其中一种，既能保留扭曲一阶条件，又能产生额外标量场 [19]。我们没有时间得出结论。

以上内容在第二节中作了回顾，同时介绍了一项最新成果：将自由狄拉克算子的扭曲涨落解释为挠率项。第三节受 Manuele 发现的启发——标准模型的谱三元组存在多种扭曲方式——我们全面研究了任意扭曲在 $\mathcal{H}$ 上诱导的内积（§ III.1-III.3）。我们在命题 III.6 中证明，在相当宽松的条件下，这个内积是一个 Krein 积，与此前已知的例子 [16, 15, 26] 以及近期的研究 [28]相符。在 §III.4 中，我们将这些结果应用于极小扭曲，并在 §III.5 中指出扭曲酉元与扭量对称群之间的关系。

II 标准模型的最小扭曲

II.1 标准模型的谱描述

标准模型的谱三元组 [6] 是如下乘积

$$\mathcal{A} = C^\infty(\mathcal{M}) \otimes \mathcal{A}_F, \quad \mathcal{H} = L^2(\mathcal{M}, S) \otimes \mathcal{H}_F, \quad D = \partial\!\!\!/ \otimes \mathbb{I}_F + \gamma_{\mathcal{M}} \otimes D_F \tag{5}$$

与黎曼紧致偶数维自旋流形 $\mathcal{M}$相关联的典范谱三元组，即

$$C^\infty(\mathcal{M}), \quad L^2(\mathcal{M}, S) \quad \partial\!\!\!/ = -i\gamma^\mu \nabla_\mu, \tag{6}$$

与有限维谱三元组

$$\mathcal{A}_F = \mathbb{C} \oplus \mathbb{H} \oplus M_3(\mathbb{C}), \ \mathcal{H}_F = \mathbb{C}^{96}, \quad D_F. \tag{7}$$

在（6）中，光滑函数代数在希尔伯特空间$L^2(\mathcal{M},\ S)$上通过乘法作用；该空间由自旋丛在 $\mathcal{M}$ 上的平方可积光滑截面构成。算子 $\partial\!\!\!/$ 是量子场论中通常的狄拉克算子，其中的 γ^μ 是满足以下反对易关系的欧几里得狄拉克矩阵

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}\mathbb{I} \tag{8}$$

其中 $g^{\mu\nu}$ comp 黎曼度量的分量，以及 $\mathbb{I}$ 在 L^2（$\mathcal{M}$, S）上的恒等算子，而 e

$$\nabla_\mu = \partial_\mu + \omega_\mu \tag{9}$$

是旋量丛上的协变导数，其中ω_μ 是自旋联络，即将 $\mathcal{M}$上的列维-奇维塔联络提升到旋量丛上的联络。†

式（5）中的算子 $\gamma_{\mathcal{M}}$ 是 $\mathcal{M}$ 上克利福德丛的分次（在四维流形上，这就是物理学家所说的 γ^5 矩阵），而 $\mathbb{I}_F$ 是 $\mathcal{H}_F$上的恒等自同态。

有限维谱三元组（7）的细节与本文无关（可见 [6], ，其动机见 [4]）。算子 D_F 是一个 96×96 矩阵，包含该理论的参数，即费米子的汤川耦合、中微子的狄拉克质量和马约拉纳质量、Cabibbo 矩阵以及中微子混合矩阵。以下重要的是， D_F 分解为分块对角部分 D_0 和非对角部分 D_M，后者与代数 $\mathcal{A}_F$ 在 $\mathcal{H}_F$上的表示相交换，即

$$[\gamma_{\mathcal{M}} \otimes D_M, a] = 0 \qquad \forall a \in \mathcal{A} = C^\infty(\mathcal{M}) \otimes \mathcal{A}_F. \tag{10}$$

因此， D_M的唯一非零元素是中微子的马约拉纳质量 k_M，它不会对 1-形式 (4) 作出贡献。正如引言中所解释的，我们称它对度量涨落是透明的。

为了使标准模型中的中微子部分参与玻色子的生成，一种可能的做法是放宽一阶条件[8]

$$[[D, a],\ JbJ^{-1}] = 0 \qquad \forall a, b \in \mathcal{A} \tag{11}$$

这是 Connes 重构定理的条件之一 [11], ，标准模型的谱三元组同样满足该条件。由此，人们生成了稳定电弱真空所需的额外标量场 σ，并得到正确的希格斯质量 [5]。这导向一个大统一的 Pati-Salam 模型 [7]。

†我们对位置交替的指标采用爱因斯坦求和约定：上/下或下/上。鉴于洛伦兹号差， $\mathcal{M}$ 的维数由一个从 0 到 $n-1$ 的希腊指标 μ 来计数。

II.2 扭曲分次

或者，人们可以考虑一个更大的代数 $\mathcal{A}'$ ，它作用在同一个希尔伯特空间 $\mathcal{H}$上，但不与 $\gamma_{\mathcal{M}} \otimes D_M$对易。这样，人们使中微子的马约拉纳质量 k_R 对涨落有所贡献。保持希尔伯特空间和狄拉克算子不变是重要的，因为它们编码了模型的费米子内容，而且既没有实验迹象，也没有理论要求表明存在超出标准模型的新费米子。

只要谱三元组带有分次，就有一个自然的候选代数 $\mathcal{A}'$。谱三元组 $(\mathcal{A}、\ \mathcal{H}、\ D)$ 的分次是一个自伴算子 $\Gamma \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$，它具有 $\gamma_{\mathcal{M}}$ 的性质，即其平方等于 $\mathbb{I}$ ，并且满足

$$\{\Gamma, D\} = 0, \qquad [\Gamma, a] = 0 \quad \forall a \in \mathcal{A}. \tag{12}$$

将希尔伯特空间分解为 $\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$ ，其中 $\mathcal{H}_\pm := p_\pm \mathcal{H}$ 是由投影 $\mathcal{H}$ 的像

$$p_\pm := \frac{1}{2}(\mathbb{I} \pm \Gamma) \tag{13}$$

在分次定义的投影下，表示 π 的 $\mathcal{A}$ 是分块对角的

$$\pi(a) = \begin{pmatrix} \pi_+(a) & 0 \\ 0 & \pi_-(a) \end{pmatrix} \tag{14}$$

其中 $\pi_\pm$ 是 π 在 $\mathcal{H}_\pm$ 上的限制。因此， $\mathcal{H}$ 足够大，能够承载 $\mathcal{A}$ 的两个彼此独立的表示，分别作用于子空间 $\mathcal{H}_\pm$ 上。换言之，分次谱三元组的希尔伯特空间自然带有代数的一个表示 π'

$$\mathcal{A}' = \mathcal{A} \otimes \mathbb{C}^2, \tag{15}$$

即

$$\pi'((a_1, a_2)) = \begin{pmatrix} \pi_+(a_1) & 0 \\ 0 & \pi_-(a_2) \end{pmatrix} \qquad \forall a_1, a_2 \in \mathcal{A}. \tag{16}$$

然而，谱三元组的一个基本性质对 $\mathcal{A}'$ 不再成立，即对任意 a 属于 $\mathcal{A}$，交换子 $[D, \pi(a)]$ 有界。这是因为根据定义， Γ 与 D 反对易，因此 D 在 Γ 的特征基下是非对角的，

$$D = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{D} \\ \mathcal{D}^\dagger & 0 \end{pmatrix} \tag{17}$$

其中 $\mathcal{D}$ 是 D 在 $\mathcal{H}_-$ 上的限制，其取值于 $\mathcal{H}_+$。因此

$$[D, \pi'(a_1, a_2)] = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{D}\pi_-(a_2) - \pi_+(a_1)\,\mathcal{D} \\ \mathcal{D}^\dagger\,\pi_+(a_1) - \pi_-(a_2)\,\mathcal{D}^\dagger & 0 \end{pmatrix}. \tag{18}$$

这个交换子没有理由是有界的。

例 II.1。 对于标准模型的谱三元组 *(5)*，无界性来自算子 D 的分量 $\partial\!\!\!/ \otimes \mathbb{I}_F$ （另一部分 $\gamma_{\mathcal{M}} \otimes D_F$ 是有界算子，它与任意 a 的扭曲交换子都有界）。有

$$[\partial\!\!\!/ \otimes \mathbb{I}_F, \pi'((a_1, a_2))] = -i[\gamma^\mu \partial_\mu \otimes \mathbb{I}_F, \pi((a_1, a_2))] - i[\gamma^\mu \omega_\mu \otimes \mathbb{I}_F, \pi((a_1, a_2))]. \tag{19}$$

第二项是有界的，因为狄拉克矩阵、自旋联络以及代数的表示都是有界算子。相反，只要 a_1、 a_2 不是常数，第一项就不是有界的。只需在 $a_1 = f \otimes \mathbf{1}_F$、 $a_2 = g \otimes \mathbf{1}_F$上检验，其中 f、 g是 $C^\infty(\mathcal{M})$ 中的两个不同的非常数函数，而 $\mathbf{1}_F$是 $\mathcal{A}_F$的恒等算子。为简单起见，考虑维数为4 的情形

（但证明可推广到任意偶数维），并取狄拉克矩阵

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \tilde{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \quad for \quad \sigma^\mu = \{\mathbb{I}, -i\sigma_{j=1,2,3}\}, \quad \tilde{\sigma}^\mu = \{\mathbb{I}, i\sigma_{j=1,2,3}\} \qquad \mu = 0,1,2,3 \tag{20}$$

其中 σ_i为泡利矩阵，可得

$$[-i\gamma^\mu\partial_\mu \otimes \mathbb{I}_F, \pi'(a_1,a_2)] = -i\left(\begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu\partial_\mu \\ \tilde{\sigma}^\mu\partial_\mu & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu\partial_\mu \\ \tilde{\sigma}^\mu\partial_\mu & 0 \end{pmatrix}\right) \otimes \mathbb{I}_F, \tag{21}$$

$$= -i\begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu\partial_\mu g - f\sigma^\mu\partial_\mu \\ \tilde{\sigma}^\mu\partial_\mu f - g\tilde{\sigma}^\mu\partial_\mu & 0 \end{pmatrix} \otimes \mathbb{I}_F. \tag{22}$$

根据莱布尼茨法则，右上分块为

$$\sigma^\mu(\partial_\mu g) + \sigma^\mu g\partial_\mu - f\sigma^\mu\partial_\mu = \sigma^\mu(\partial_\mu g) + \sigma^\mu(g-f)\partial_\mu. \tag{23}$$

这是一个微分算子，因此无界。左下分块同样如此。

这个问题与 [14], 中所处理的问题相似，但语境不同（见注记II.2）。解决办法是，将对 D 与 $\mathcal{A}$的交换子有界性的要求，替换为如下条件：存在 $\mathcal{A}'$ 的一个自同构 ρ ，使得扭曲交换子

$$[D, a']_\rho := Da' - \rho(a')D \tag{24}$$

对任意 $a' \in \mathcal{A}'$都有界。这定义了一个扭曲谱三元组

$$(\mathcal{A}', \mathcal{H}, D), \rho \tag{25}$$

（也称为 σ-谱三元组，但我们不使用这一术语，以避免与通过对中微子的马约拉纳质量进行涨落而得到的额外标量场 σ 混淆）。

在我们的情形中， ρ 是 $\mathcal{A}\otimes\mathbb{C}^2$ 的自同构，它翻转 $\mathcal{A}$的两个元素，

$$\rho((a_1,a_2)) := (a_2,a_1) \quad \forall (a_1,a_2) \in \mathcal{A}\otimes\mathbb{C}^2. \tag{26}$$

事实上，（恢复表示的符号后）的有界性

$$[D, \pi'(a_1,a_2)]_\rho = D\,\pi'(a_1,a_2) - \pi'(a_2,a_1)\,D = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{D}\pi_-(a_2) - \pi_+(a_2)\mathcal{D} \\ \mathcal{D}^\dagger\pi_+(a_1) - \pi_-(a_1)\mathcal{D}^\dagger & 0 \end{pmatrix}$$

由以下对象的有界性得到

$$[D, \pi(a_1)] = [D, \pi'(a_1,a_1)] = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{D}\pi_-(a_1) - \pi_+(a_1)\mathcal{D} \\ \mathcal{D}^\dagger\pi_+(a_1) - \pi_-(a_1)\mathcal{D}^\dagger & 0 \end{pmatrix} \tag{27}$$

（ a_2也同样如此），这继承自初始谱三元组的定义（$\mathcal{A}, \mathcal{H}, D$）。

如果（14）中的表示 $\pi_\pm$ 是忠实的，那么（15）中的表示也同样忠实，于是我们得到一个扭曲谱三元组

$$(\mathcal{A}\otimes\mathbb{C}^2,\ \mathcal{H},\ D),\ \rho \tag{28}$$

称为分次谱三元组的最小扭曲$(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$。形容词“最小”反映了这样一个事实：希尔伯特空间和算子 D 保持不变，只有代数经过了修改。

注 II.2。在 *[14],* 中，通过对狄拉克算子施加共形映射（保持代数和希尔伯特空间不变），可将流形的典范谱三元组(6)转化为一个扭曲谱三元组。它满足所谓的利普希茨条件（同样省略表示符号）

$$[|D|, a']_\rho \ \ is\ bounded \ \ \forall a' \in \mathcal{A}'. \tag{29}$$

最小扭曲(28) 不满足这一条件，因此成为应用 *[14,§3]*中引入的双指标公式的一个有趣候选对象。这将在后续论文 *[25]*中探讨。

任何满足以下条件的分次谱三元组（$\mathcal{A},\ \mathcal{H},\ D$），只要（14）中的表示 $\pi_\pm$ 是忠实的，都可以按照上述步骤进行最小扭曲，我们称之为按分次扭曲。所得扭曲谱三元组的一般性质已在 [23]中研究。特别是，它与初始三元组具有相同的分次。此外，若初始谱三元组是实的，那么其扭曲伙伴也是实的，并具有相同的实结构和 KO-维数。若初始谱三元组满足一阶条件，那么其扭曲伙伴会自动满足该条件的一个扭曲版本，

$$[[D,a']_\rho,\, Jb'J^{-1}]_{\rho_0}=0 \qquad \forall a',b'\in\mathcal{A}\otimes\mathbb{C}^2 \tag{30}$$

其中

$$\rho_0(JbJ^{-1}):=J\rho(b)J^{-1}. \tag{31}$$

度量涨落在扭曲背景下同样具有意义，其作用是将式（1）中的广义1-形式 A 替换为广义扭曲1-形式 A_ρ，后者是下列对象的一个元素

$$\Omega^1_D(\mathcal{A},\rho):=\left\{\sum_i a_i\,[D,b_i]_\rho, a_i,b_i\in\mathcal{A}\otimes\mathbb{C}^2\right\}. \tag{32}$$

这将得到一个扭曲协变的狄拉克算子

$$D_{A_\rho}=D+A_\rho+JA_\rho J^{-1}. \tag{33}$$

II.3 最小扭曲标准模型

通过对标准模型的谱三元组（5）施加扭曲，人们希望借助度量的扭曲涨落（33）生成第§II.1节末尾讨论的额外标量场 σ，同时保留其扭曲形式的一阶条件（30）。然而，Manuele 最先注意到，使用谱三元组（5）的分次进行的扭曲

$$\Gamma=\gamma_{\mathcal{M}}\otimes\Gamma_F, \tag{34}$$

（其中 Γ_F 是谱三元组（7）的一个分次）无法实现这一点，因为 $\gamma_{\mathcal{M}}\otimes D_M$ 与 $\mathcal{A}\otimes\mathbb{C}^2$扭曲对易：

$$[\gamma_{\mathcal{M}}\otimes D_M,\pi'(a_1,a_2)]_\rho=0. \tag{35}$$

这是因为 D_F 的对角部分 D_0 与非对角部分 D_M 分别独立地与 Γ_F 反对易（见 [20, §4.2]）。换言之，$\gamma_{\mathcal{M}}\otimes D_M$ 在扭曲涨落下也是透明的。

这一论证对按分次扭曲成立，但幸运的是，扭曲并不一定必须按分次进行。对于任意近乎交换几何，即 $\mathcal{M}$ 的典范谱三元组(6)与一个有限维谱三元组（不一定是(7)）的任意乘积(5)，可以用任意算子代替分次 Γ 来重复§II.2的构造

$$T=\gamma_{\mathcal{M}}\otimes T_F \tag{36}$$

其中 T_F 是 $\mathcal{H}_F$ 上不同于 $\pm\mathbb{I}_F$ 的有界算子，并且满足

$$T_F=T_F^\dagger, \qquad T_F^2=\mathbb{I}_F \quad \text{and} \quad [T_F,m]=0\ \forall m\in\mathcal{A}_F. \tag{37}$$

这些条件保证 $\mathcal{H}$ 携带 $\mathcal{A}$ 的两个相互独立的表示，分别作用于 T 的两个特征子空间上。这使我们能够构造最小扭曲，其扭曲自同构为翻转 [19]。

但并不需要

$$\{T_F, D_F\} = 0, \tag{38}$$

这意味着， Γ_F 不必是谱三元组（7）的分次。使用 T_F而非 Γ_F 的优点在于，一旦（38）不成立，那么（35）也没有理由成立，因此$\gamma_{\mathcal{M}} \otimes D_M$ 在扭曲涨落下便不再显而易见。

在 [19] 中已经对任意几乎交换几何的所有可能扭曲算子 T_F 进行了分类（另见 [23, §4.2]）。这项工作尚未完全完成，我们仍不知道标准模型可以用多少种彼此不等价的方式进行最小扭曲。不过，我们知道至少存在一个扭曲算子，能够得到额外标量场σ，即取值为以下形式的算子 T_F

$$+1 \text{ on left particles and antiparticles}, \quad -1 \text{ on right particles and antiparticles}. \tag{39}$$

遗憾的是，这种最小扭曲违反了扭曲一阶条件（30）。然而，这并不妨碍按照 [27]中制定的步骤使度量发生涨落。后者将 [8]中引入的“无一阶条件的涨落”推广到了扭曲谱三元组。

注释 II.3. 将正号（负号）赋予左手（右手）实体只是一种约定。这里重要的是， T_F 并非分次 Γ_F ，因为后者在右手粒子与左手反粒子上取相同的值，在左手粒子与右手反粒子上也取相同的值。

该模型的场内容已在 [21] 中建立：

- $\gamma_{\mathcal{M}} \otimes D_F$ 对角部分的扭曲涨落产生两个希格斯双重态，它们分别作用于狄拉克旋量的手征分量。预计它们会在作用量中混合为一个线性组合，从而得到通常的希格斯双重态。

- $\gamma_{\mathcal{M}} \otimes D_F$ 的非对角部分产生一组手征额外标量场双重态。

- $\partial\!\!\!/ \otimes \mathbb{I}_F$ 的扭曲涨落产生标准模型的玻色部分。此外，还得到三个新的 1-形式场：其中两个取值于 $\mathbb{R}$，一个取值于 $M_3(\mathbb{C})$。

关于该作用的一些初步结果由 Manuele 在其博士论文中推导得出，但未曾发表。

目前尚不清楚，是否存在某种扭曲算子，既能产生额外标量场，又能保持一阶条件 (30)；抑或产生额外标量场与扭曲一阶条件彼此排斥。若是后一种情况，人们完全有理由质疑这一切对物理学的意义。既然只需放宽通常（即非扭曲）谱三元组的一阶条件，就足以得到所需的额外标量场（如 [7] 所示），那么

为什么要扭曲?

事实上，扭曲最重要的意义在于从 $\partial\!\!\!/ \otimes \mathbb{I}_F$ 的扭曲涨落中得到新的 1-形式场。类似的形式已在 [18], 中出现，当时标准模型中只有弱相互作用部分被扭曲。该模型存在一些数学问题，相关讨论见 [20], ，这些问题后来在 [21] 中得到解决。当时这些 1-形式的含义尚不明确，直到最近才在两种不同的背景下得到阐明：一是作为流形最小扭曲中的挠率，二是作为电动力学最小扭曲中的号差变换。下一小节将简要回顾挠率方面的结果。第 III 节将详细讨论号差变换。

II.4 挠率作为扭曲涨落

上文讨论的新 1-形式场源自 $\not{\partial} \otimes \mathbb{I}_F$ 的扭曲涨落。为了理解它们的几何意义，似乎应当聚焦于谱三元组的流形部分。

偶维黎曼紧致自旋流形$\mathcal{M}$ 的典范谱三元组 (6) 按分次扭曲后为 $2m$

$$\mathcal{A} = C^\infty(\mathcal{M}) \otimes \mathbb{C}^2, \quad \mathcal{H} = L^2(\mathcal{M}, S), \quad D = \not{\partial}; \quad \rho \tag{40}$$

其表示为

$$\pi(f,g) = \begin{pmatrix} f\,\mathbb{I}_{2^{m-1}} & 0 \\ 0 & g\mathbb{I}_{2^{m-1}} \end{pmatrix} \tag{41}$$

扭曲自同构为

$$\rho(f,g) = (g,f) \qquad \forall (f,g) \in \mathcal{A}. \tag{42}$$

这是用有限维代数 [23, 最小程度地扭曲流形的唯一方式（命题 4.2]）。

在 KO维数为 0 和 4 的情形下（也就是说，流形的维数 $2m = 0$ 模 8 同余于 0 或 4），存在非零的狄拉克算子自伴扭曲涨落 $\not{\partial}$，从而得到扭曲协变算子 [23]

$$D_{\omega_f} = \not{\partial} - i\, f_\mu \gamma^\mu \gamma_{\mathcal{M}} \quad \text{with} \quad f_\mu \in C^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{R}). \tag{43}$$

指标记法 ω_f 是合理的，因为注意到上面方程中的第二项是 1-形式的霍奇对偶的克利福德作用 c

$$\omega_f = f_\mu dx^\mu, \tag{44}$$

也就是说，有 [24]

$$-i\, f_\mu \gamma^\mu \gamma_{\mathcal{M}} = \frac{(-i)^{m+1}}{2m}\, c(\star \omega_f). \tag{45}$$

这是最小扭曲的一个显著特点，因为在非扭曲情形下， $\not{\partial}$的所有涨落都消失 [10]。

注 II.4. 在 KO维 2 和 6中， $\not{\partial}$的所有自伴扭曲涨落都消失。在奇数维中，没有分次，因此整个构造需要作适当调整。

此外，在四维中，可以证明 (43) 中的 D_{ω_f} 是某个保持正交结构和测地线的联络在旋量上的提升，其挠率 3-形式为

$$\mathcal{T} = - \star \omega_f. \tag{46}$$

在其他维数中，模 $4]$, 的 4 [是否存在类似的几何解释尚不明确，除了式 (45) 之外。例如，在一个 8 维流形上， $\mathcal{T}$ 是一个 7-形式，可以与具有类型 (p,q) 且满足 $p+q=7$的张量相关联。其中有哪一个具有特殊的几何意义吗?

在标准模型的最小扭曲中，人们预期新的 1-形式场具有类似的诠释：其中两个可解释为挠率，第三个则是取值于 $M_3(\mathbb{C})$ 的挠率。

III 度规号差变化

III.1 扭曲内积

最小扭曲与从欧几里得到洛伦兹的过渡之间的联系，最早在 [15] 中得到强调。人们注意到，如果扭曲谱三元组（$\mathcal{A}, \mathcal{H}, D$） ρ（带有表示 π）的扭曲自同构可扩展为代数 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 的内自同构，其中 $\mathcal{H}$ 是作用于 $\mathcal{H}$ 上的有界算子代数，也就是说，如果存在一个酉 $R \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$，使得

$$\pi(\rho(a))) = R\,\pi(a)\,R^* \quad \forall a \in \mathcal{A}, \tag{47}$$

于是 ρ 在 $\mathcal{H}$上诱导出一个内积，称为扭曲乘积，

$$(\psi, \varphi)_R := < \psi, R\varphi > \tag{48}$$

其中 $\langle \cdot, \ \cdot \rangle$ 是 $\mathcal{H}$上的初始希尔伯特内积。关键在于，扭曲乘积不一定是正定的。

例如，对于流形的最小扭曲（40）， R 的一个自然选择是第一个狄拉克矩阵

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I}_{2^{m-1}} \\ \mathbb{I}_{2^{m-1}} & 0 \end{pmatrix}. \tag{49}$$

于是扭曲乘积为（其中 dv 是 $\mathcal{M}$上的体积形式）

$$(\psi, \varphi)_R = \int_{\mathcal{M}} \langle \bar{\psi}(x),\, \gamma^0\, \varphi(x) \rangle_p \, dv \tag{50}$$

¯其中 $\langle \cdot, \ \cdot \rangle_p$ 是 $\mathbb{C}^p$ 上的典范标量积（对于 $p = 2^m$），而 ψ 是 ψ的复共轭。˜被积函数是洛伦兹流形 $\mathcal{M}$上旋量内积的被积函数，即

$$\int_{\tilde{\mathcal{M}}} \langle \bar{\psi}(x),\, \gamma^0\, \varphi(x) \rangle_p \, d\tilde{v}. \tag{51}$$

关于满足（47）的任意扭曲谱三元组，也可参见文献 [28]中的类似讨论。

请注意，此积分（50）未转变为洛伦兹流形。不过，若考虑局部积分区域，那么经过维克旋转，黎曼体积形式与洛伦兹体积形式应当只相差一个符号。（50）与（51）也同样只相差一个符号，并给出相同的运动方程。然而，若在整个流形上积分，就会遇到如何将黎曼流形转变为洛伦兹流形的问题，而这已知并非总是可行。因此目前只能说，扭曲会改变内积被积函数的度规号差。尽管这种改变有限，却会对费米子作用量 [26, 24]产生重要影响。

注记 III.1. 为避免混淆，我们强调：在扭曲过程中，狄拉克算子始终是黎曼型的。我们并不处理洛伦兹狄拉克算子，这与其他处理洛伦兹非交换几何的方法不同，例如 *[34, 1, 22, 35, 29]*。

在下一节中，我们推广条件(47)，并证明：任何延拓到整个 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$的扭曲自同构都必然诱导一个扭曲乘积，但不一定由酉元实现。这使得我们可以处理那些不一定

$*$-自同构，这与幺正性条件 [14]相一致

$$\rho(a^*) = \left(\rho^{-1}(a)\right)^*. \tag{52}$$

在§III.3中，我们推导出了一些相当宽松的条件，以保证扭曲乘积诱导出一个Krein结构。在§III.4中，我们将这些结果应用于极小扭曲（不一定由分次给出），并在§III.5中以对扭曲酉元的一些考察作结。

III.2 可扩张扭转

让我们从对条件（47）的一个适当推广开始。

定义 III.2. 扭曲谱三元组$(\mathcal{A},\mathcal{H},D)$ ρ的扭曲自同构 ρ若存在一个自同构 $\tilde{\rho}\in Aut(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ 使得下式成立，则称其为可扩展的

$$\pi(\rho(a))=\tilde{\rho}(\pi(a))\quad\forall a\in\mathcal{A}. \tag{53}$$

由此扩展，我们称该扭曲谱三元组本身是可扩展的。

给定一个代数 $\mathcal{A}$，它通过表示π在希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上作用为有界算子。若存在可逆算子 $R\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$，使得下式成立，则称 $\mathcal{A}$ 的自同构具有空间的 [30]性质

$$\pi(\rho(a))=R\,\pi(a)\,R^{-1}\qquad\forall a\in\mathcal{A}. \tag{54}$$

命题 III.3. 任何可扩展扭曲自同构都是空间的，因此会诱导出非退化的扭曲乘积。当且仅当对于某个自伴 $R\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$， ρ是空间的时，后者才是厄米的。

证明. 根据 Okayasu冯·诺依曼代数自同构的极分解定理 $[30,\text{Th.}9]$,，作用在希尔伯特空间 $\mathcal{H}$上的冯·诺依曼代数 M的任意自同构 $\tilde{\rho}$，都可表示为以下复合

$$\tilde{\rho}=\tilde{\rho}_2\circ\tilde{\rho}_1 \tag{55}$$

自同构 $\tilde{\rho}_1(\cdot)=P\cdot P^{-1}$ 由可逆正算子 $P\in M$ ‡ 诱导，且该算子具有 $*$-自同构 $\tilde{\rho}_2$。对于 $\mathcal{M}=\mathcal{B}(\mathcal{H})$，任何 $*$-自同构都是内自同构（例如 $[3,\text{II.5.5.}14]$）： $\tilde{\rho}_2(\cdot)=U\cdot U^\dagger$对于某个酉算子 $U\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$。因此， $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 的任何自同构 $\tilde{\rho}$ 都具有如下形式

$$\tilde{\rho}(\cdot)=R\cdot R^{-1} \tag{56}$$

其中某个 $R=UP$属于 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$。

诱导的扭曲乘积 (48) 是非退化的，因为

$$(\psi,\varphi)_R=0\,\forall\varphi\in\mathcal{H}\iff\langle\psi,R\varphi\rangle=0\,\forall\varphi\iff\langle\psi,\tilde{\varphi}\rangle=0\,\forall\tilde{\varphi}\in\mathrm{Im}(R)\iff\langle\psi,\tilde{\varphi}\rangle=0\,\forall\tilde{\varphi}\in\mathcal{H}$$

这里我们利用 R 可逆，因此其像为 $\mathcal{H}$。当且仅当以下条件成立时，它是厄米的 ，

$$0=\overline{(\psi,\varphi)_\rho}-(\varphi,\psi)_\rho=\overline{\langle\psi,R\varphi\rangle}-\langle\varphi,R\psi\rangle, \tag{57}$$

$$=\langle R\varphi,\psi\rangle-\langle\varphi,R\psi\rangle=\langle\varphi,(R^\dagger-R),\psi\rangle\quad\forall\varphi,\psi\in\mathcal{H}, \tag{58}$$

也就是说 $R=R^\dagger$。 □

推论 III.4. 诱导出厄米扭曲乘积的可扩展扭曲自同构必然是酉的，意义同式 *(52)*。

证明。 根据前一个命题，可扩展扭曲自同构 ρ 满足式 (54)。由于表示 π 是对合的（$\pi(a^*)=\pi(a)^\dagger$），因此有

$$\pi(\rho(a^*))=R\,\pi(a)^\dagger\,R^{-1} \tag{59}$$

而利用 $\pi(\rho^{-1}(a))=R^{-1}\pi(a)R$ （在式 (54) 中用 $\rho^{-1}(a)$ 替换 a 得到）

$$\pi((\rho^{-1}(a))^*)=\pi(\rho^{-1}(a))^\dagger=\left(R^{-1}\,\pi(a)\,R\right)^\dagger=R^\dagger\,\pi(a)^\dagger\,(R^{-1})^\dagger. \tag{60}$$

若扭曲乘积是厄米的，则根据前一个命题， R 是自伴的，因此式 (59) 等于式 (60)。由于 π 是忠实的，这意味着式 (52)。 □

其逆命题未必成立。若 ρ 满足 (52)，则由 (59) 和 (60) 可得 $R^{-1}R^\dagger$ 属于 $\pi(\mathcal{A})$ 的交换子，但不一定等于 $\mathbb{I}$。

‡Okayasu 称之为内。

III.3 Krein结构

克莱因空间是配备了不定、非退化内积 $(\cdot,\cdot)$ 的向量空间 $\mathcal{K}$，它可分解为直和

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_+ \oplus \mathcal{K}_- \tag{61}$$

使得该积在 $\mathcal{K}_+$上正定，在 $\mathcal{K}_-$上负定，并且后者关于由 $\pm(\cdot,\cdot)$诱导的范数是完备的。基本对称性是指满足以下条件的任意算子 F在 K 上

$$F^2 = \mathbb{I} \quad \text{and} \quad (\cdot, F\cdot) = (F\cdot,\cdot) \tag{62}$$

使得积$(\cdot, F\cdot)$正定。例如

$$F = \mathbb{I}_+ \oplus (-\mathbb{I}_-) \tag{63}$$

其中 $\mathbb{I}_\pm$是作用在 $\mathcal{K}_\pm$上的恒等算子。赋予积$(\cdot, F\cdot)$的空间 $\mathcal{K}$因此是一个希尔伯特空间。

克莱因空间的经典例子是洛伦兹流形上旋量丛的平方可积截面空间，其积为（51）。如§III.1所述，这个Krein 积与极小扭曲流形的扭曲积一致。

注释 III.5. 根据 *[34, 式 21]*，，在维数为 n 、度规号差为$(n-k,k)$ 的伪黎曼流形上，其中 k是 -1 的数量，则旋量丛纤维上的克莱因结构为

$$\langle \cdot\, , \mathfrak{J}\, \cdot \rangle_p \tag{64}$$

其中 $\langle\cdot,\cdot\rangle_p$ 是 $\mathbb{C}^p$ 上的典范标量积（p 为旋量表示的维数），并且

$$\mathfrak{J} = i^{\frac{n(n-1)}{2}} \gamma^1 ... \gamma^k. \tag{65}$$

特别地，在度规号差为 $(1,-1,-1,-1)$ 的洛伦兹流形上（将 $\mathcal{M}$ 的维数从 0 计至 3），可得

$$\mathfrak{J} = i^{\frac{k(k+1)}{2}} \gamma_L^1 \gamma_L^2 \gamma_L^3 = i \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I}_2 \\ -\mathbb{I}_2 & 0 \end{pmatrix} \tag{66}$$

其中 $\gamma_L^j = i\gamma^j$ 是将欧几里得狄拉克矩阵 (20) 乘以 i 后得到的洛伦兹狄拉克矩阵；我们回顾一下，泡利矩阵为

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{67}$$

克莱因积 $\langle\cdot,\mathfrak{J}\cdot\rangle_p$ 与最小扭曲流形的扭曲乘积(50) 等价，因为 $\mathfrak{J}$ 与 γ^0 酉等价

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbb{I}_2 & \mathbb{I}_2 \\ -i\mathbb{I}_2 & i\mathbb{I}_2 \end{pmatrix}. \tag{68}$$

主要　　本节的结果给出了扭曲乘积成为克莱因积的一个充分条件。

命题 III.6。 设$(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ ρ是按定义 *III.2* 意义下的可扩展扭曲谱三元组。在厄米扭曲乘积中，所有由具有纯点谱的算子 R 诱导、且0 不是谱的聚点的乘积，都是克莱因乘积。

证明。 根据命题 III.3，算子 R 可逆且自伴；由假设，它具有纯点谱，因此其特征值均为非零实数，且相应的特征向量张成 $\mathcal{H}$ （例如参见 [33,第 VII.4] 定理）。因此，后者是以下各空间的直和

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^+ \oplus \mathcal{H}^- \tag{69}$$

特征子空间　　对应于 $\mathcal{H}_\pm$ 的正/负特征值。任意 $\psi^+ \in \mathcal{H}^+$ 都可写成如下的和

$$\psi^+ = \sum_{i=1}^{n_I} \sum_{k=1}^{n_i} \alpha_{ik}\, \varphi_{ik} \qquad \alpha_{ik} \in \mathbb{R} \tag{70}$$

其中 n_I 是 R 的正特征值个数；对于任意不同的特征值 λ_i，其简并度为 n_i，集合 $\{\varphi_{ik} \in \mathcal{H},\, k = 1, ..., n_i\}$ 是对应特征子空间的一组正交归一基。注意， n_I 和 n_i 均可能是无限的。对于 $\psi^+ \neq 0$，可验证

$$(\psi^+, \psi^+)_R = \langle \psi^+, R\psi^+ \rangle = \sum_{i,k} |\alpha_{ik}|^2 \lambda_i \tag{71}$$

是严格正的，这意味着限制在 $\mathcal{H}_+$ 上的（非退化）扭曲乘积是正定的，并诱导出一个范数 $||\cdot||^+ = \sqrt{(\cdot,\cdot)_R}$。由 (71) 可得

$$(||\psi^+||^+)^2 = \langle \psi^+, R\psi^+ \rangle^2 \geq \lambda_m \sum_{i,k} |\alpha_{ik}|^2 = \lambda_m ||\psi^+||^2 \tag{72}$$

其中 $\lambda_m \neq 0$是最小的正特征值，而右端的范数是 $\mathcal{H}$上的范数。因此， $\mathcal{H}^+$中对 $||\cdot||^+$为柯西的任意序列 $\{\psi_n^+\}$对 $||\cdot||$也是柯西的。此外，记 $R^+ : \mathcal{H}^+ \to \mathcal{H}^+$ 为 R 到 $\mathcal{H}^+$的限制，则有

$$(||\psi^+||^+)^2 = \langle \psi^+ \oplus 0, (R^+ \oplus \mathbb{I}_-)\psi^+ \oplus 0 \rangle \leq ||R^+||^2\, ||\psi^+||^2. \tag{73}$$

因此， $\mathcal{H}^+$ 中对 $||\cdot||$ 完备的任意柯西序列 $\{\psi_n^+\}$ 对 $||\cdot||^+$也是完备的。这表明 $||\cdot||^+$ 在 $\mathcal{H}^+$上是完备的。

类似地，限制在 $\mathcal{H}^-$ 上的扭曲乘积是负定的，且 $\mathcal{H}^-$ 对于范数 $||\cdot||^- = \sqrt{-(\cdot,\cdot)_R}$是完备的。因此 $(\cdot,\cdot)_R$是一个 Krein 积。 □

在 $\mathcal{H}$ 上的初始乘积被恢复为

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = (\cdot, R^{-1}\cdot)_R \tag{74}$$

但 R^{-1} 不是基本对称性，除非 R 是酉的。于是 $R = R^* = R^{-1}$ 以及条件(62)得到满足。

命题 III.6 给出了一个保证扭曲 Krein 乘积存在的判据，但并未表明任何可扩展扭曲谱三元组都必然存在这样的乘积。在下一节中，我们将证明，所有与高能物理相关的扭曲谱三元组实例中都存在这样的乘积。

III.4 由算子实现的最小扭曲

如 §II.2 中所述，对于表示足够忠实的分次谱三元组，总是可以为其关联一个扭曲伙伴。但是，正如标准模型的例子所示，实现这一点也可能有其他方式。以下定义将明确讨论范围。

定义 III.7. 设$(\mathcal{A},\mathcal{H},D)$是一个谱三元组，且 T 是作用于 $\mathcal{H}$ 上的自伴、有界、对合的（$T^2=\mathbb{I}$）算子，不是恒等算子的倍数，并且与 $\pi(\mathcal{A})$交换。令

$$p_\pm=\frac{1}{2}(\mathbb{I}\pm T) \tag{75}$$

为 T[§] 的两个正交特征空间 $\mathcal{H}_\pm$ 上的投影，以及

$$\pi'((a_1,a_2)):=p_+\pi(a_1)+p_-\,\pi(a_2)\qquad\forall a_1,a_2\in\mathcal{A} \tag{76}$$

为 $\mathcal{A}\otimes\mathbb{C}^2$ 在 $\mathcal{H}$ 上由(14) 给出的表示。若后者是忠实的，且扭曲交换子

$$[D,\pi'(a_1,a_2)]_\rho\quad for\ \rho\ the\ flip\ (26) \tag{77}$$

对任意 $(a_1,a_2)\in\mathcal{A}\otimes\mathbb{C}^2$ 都是有界的，则该扭曲谱三元组

$$(\mathcal{A}\otimes\mathbb{C}^2,\mathcal{H},D),\ \rho \tag{78}$$

称为由 T 对 $(\mathcal{A},\mathcal{H},D)$ 实现的最小扭曲。

T 必须与代数对易，以保证 $p_+\pi$ 与 $p_-\pi$对易，从而使π'成为表示（否则，由于交叉项不为零，$\pi'((a_1,\ a_2))\ \pi'((b_1,\ b_2))$可能不等于 $\pi'((a_1b_1,\ a_2b_2))$）。

要将扭曲乘积 (48) 与最小扭曲关联起来，后者必须是可展开的。

命题 III.8. 任意谱三元组 $(\mathcal{A},\mathcal{H},D)$ 经某个算子 T作最小扭曲后，按照定义 *III.2* 的意义是可展开的，当且仅当存在算子 R 使得

$$\{R,T\}=0,\qquad[R,\pi(a)]=0\quad\forall a\in\mathcal{A}. \tag{79}$$

证明. 将 (76) 中的 $a_1=-a_2=\mathbf{1}$ 写为 $\mathcal{A}$的单位元，可得

$$T=\pi'((\mathbf{1},-\mathbf{1})). \tag{80}$$

假设 ρ 是可展开的，即存在如 (56) 中的 $\tilde{\rho}$，满足 (53)（将其写为 π'的形式）。特别地

$$RTR^{-1}=R\,\pi'((\mathbf{1},-\mathbf{1}))\,R^{-1}=\pi'((-\mathbf{1},\mathbf{1}))=-T. \tag{81}$$

因此得到第一个方程 (79)。后者推出 $Rp_\pm=p_\mp R$，于是由 (53) 可得

$$0=\pi'((a,a))-R\,\pi'((a,a))\,R^{-1}, \tag{82}$$

$$=p_+\left(\pi(a)-R\pi(a)R^{-1}\right)+p_-\left(\pi(a)-R\pi(a)R^{-1}\right)=\pi(a)-R\pi(a)R^{-1}\quad\forall a\in\mathcal{A}. \tag{83}$$

由此得到第二个方程（79）。

反过来，任何满足（79）的 R 都可以扩展该扭曲，因为

$$R\pi'((a_1,a_2))R^{-1}=R\,p_+\pi(a_1)\,R^{-1}+R\,p_-\pi(a_2)\,R^{-1}, \tag{84}$$

$$=p_-\,R\pi(a_1)R^{-1}+p_+\,R\pi(a_2)R^{-1}=p_-\,\pi(a_1)+p_+\,\pi(a_2)=\pi'((a_2,a_1)).\qquad\square$$

[§] T 是酉且自伴的，具有离散谱 $\{-1,1\}$。因此，后者的元素是特征值，而 $\mathcal{H}$ 是相应特征子空间 $\mathcal{H}_+$的直和，$\mathcal{H}_-$（例如 [31, 命题 4.4.5]）。

只有当 T 的特征子空间 $\mathcal{H}_\pm$ 维数相同时， T 的最小扭曲才可展开。实际上，在分解 $\mathcal{H}=\mathcal{H}_+\oplus\mathcal{H}_-$中，算子 T和 R 是分块矩阵

$$T=\begin{pmatrix}\mathbb{I}_+ & 0\\ 0 & -\mathbb{I}_-\end{pmatrix},\qquad R=\begin{pmatrix}R_{++} & R_{+-}\\ R_{-+} & R_{--}\end{pmatrix} \tag{85}$$

其中 $\mathbb{I}_\pm$是 $\mathcal{H}_\pm$上的恒等算子，而 R_{ij}是从 $\mathcal{H}_i$到 $\mathcal{H}_j$的算子，适用于 $i,\ j\in\{+,-\}$。 T 与 R 的反对易关系蕴含 $R_{++}=R_{--}=0$。根据定义， R 在左侧和右侧均可逆（否则 (54) 或其逆 $R^{-1}\cdot R$ 就不是代数同态）。由 (85) 可知， R_{+-} 和 R_{-+} 在左侧和右侧均可逆；这只有当它们是方阵时才可能，也就是说

$$\dim\mathcal{H}_+=\dim\mathcal{H}_-. \tag{86}$$

在无限维情形下，这一点仍然成立（更准确地说，是可数无限维，因为根据假设， $\mathcal{H}$ 是可分的），正如流形的最小扭曲情形：旋量丛的秩有限，但 $\mathcal{H}_\pm$作为向量空间是无限维的。

判断最小扭曲是否可扩展的另一个实用判据，可由针对 R （如 (85) 中所示，令 $R_{++}=R_{--}=0$）计算第二个方程 (79) 得出。将 $\pi_\pm$ 记为 π 在 $\mathcal{H}_\pm$ 上的限制（如 (14) 中所示），可得：当且仅当 $R_{+-}\pi_-(a)=\pi_+(a)R_{+-}$且 $R_{-+}\pi_+(a)=\pi_-(a)R_{-+}$时， $[R,\pi(a)]=0$。换言之，扭曲算子诱导的 $\mathcal{A}$的两个表示 $\pi_\pm$必须在 R_{+-} 和 R_{-+}的作用下彼此共轭：

$$\pi_+(a)=R_{+-}\,\pi_-(a)\,R_{+-}^{-1}\qquad \pi_-(a)=R_{-+}\pi_+(a)\,R_{-+}^{-1}. \tag{87}$$

检验这一点是否成立的一个简单方法，是对上面的等式取迹。若 $[R,\pi(a]=0$，则

$$\mathrm{Tr}\ (\pi_+(a))=\mathrm{Tr}\ (\pi_-(a))\quad\forall a\in\mathcal{A}. \tag{88}$$

应用于 (76)，可得

$$\mathrm{Tr}\,\pi'(a')=\ \mathrm{Tr}\,\pi'(\rho(a'))\quad\forall a'\in\mathcal{A}\otimes\mathbb{C}^2. \tag{89}$$

例 *III.9.* 设 $\mathcal{A}=\mathbb{C}$ 在 $\mathcal{H}=\mathbb{C}^3$ 上作用为对角矩阵 $\pi(z)=diag\,(z,z,z)$。算子 $T=diag\,(1,-1,-1)$ 将 $\mathcal{H}$ 分解于 $\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}^2$，因此 *(86)* 不成立。此外， $p_+\pi(z)=diag\,(z,0,0)$， $p_-\pi(z)=diag\,(0,z,z)$，所以 $Tr\ \pi_+(z)=Tr\ p_+\pi(z)=z$，而 $Tr\ \pi_-(z)=Tr\ p_-\pi(z)=2z$，因此 *(88)* 不成立。*(89)* 也同样如此：有 $\pi'((z_1,z_2))=diag\,(z_1,z_2,z_2)$，因此

$$Tr\,\pi'((z_1,z_2))=z_1+2z_2\quad while\quad Tr\,\pi'((z_2,z_1))=z_2+2z_1. \tag{90}$$

T 的特征子空间维数相同，但 π_+ 和 π_- 彼此并不共轭的一个例子是 $\mathcal{A}=\mathbb{C}\oplus M_2(\mathbb{C})$ 在 $\mathcal{H}=\mathbb{C}^{10}$ 上按块对角作用，如下所示

$$\pi(z,m)=diag\,(m,c,c,c,m,m,c). \tag{91}$$

对于 $T=$对角矩阵 $(\mathbb{I}_2,1,1,1,-\mathbb{I}_2,-\mathbb{I}_2,-1)$，一个有 $\dim\mathcal{H}_+=\dim\ \mathcal{H}_-=5$，且这些表示

$$\pi_+(c,m)=diag\,(m,c,c,c,0_2,0_2,0),\qquad \pi_-(c,m)=diag\,(0_2,0,0,0,m,m,c) \tag{92}$$

都是忠实的。然而，对于每个 $m\in M_2(\mathbb{C})\ c\in\mathbb{C}$， $Tr(\pi_+(c,m))=Tr\,m+3c$，且 $Tr(\pi_-(c,m))=2\ Tr\ m+c$ 并不相等。此外，有

$$\pi'((m_1,c_1),(m_2,c_2))=diag\,(m_1,c_1,c_1,c_1,m_2,m_2,c_2)\,, \tag{93}$$

其迹 $Tr\,m_1+2Tr\,m_2+3c_1+c_2$ 不等于

$$Tr\,\pi'(\rho((m_1,c_1),(m_2,c_2)))=\ Tr\,\pi'((m_2,c_2),(m_1,c_1))=\ Tr\,m_2+2\,Tr\,m_1+3c_2+c_1 \tag{94}$$

对于所有 c、 m。

命题 III.8 可用于证明，配备扭曲乘积的可扩张的极小扭曲的空间 $\mathcal{H}$ 永远不是希尔伯特空间。

命题 III.10. 由谱三元组 $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ 的可扩张极小扭曲经某个扭曲算子 T 所得到的所有厄米扭曲乘积都是不定且非退化的。

证明。 由命题 III.3 和命题 III.8 可知，与这种极小扭曲相关联的扭曲乘积是厄米的，当且仅当 (85) 中的算子 R 具有如下形式

$$R = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{R} \\ \mathcal{R}^\dagger & 0 \end{pmatrix} \tag{95}$$

对于某个可逆 算子 $\mathcal{R}$: $\mathcal{H}_- \to \mathcal{H}_+$。对于任意 $\varphi_\pm \in \mathcal{H}_\pm$，我们将 $\mathcal{H}$ 中的两个元素定义为

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi_+ \\ \varphi_- \end{pmatrix}, \qquad \tilde{\psi} = \begin{pmatrix} \varphi_+ \\ -\varphi_- \end{pmatrix}. \tag{96}$$

记 $\langle \cdot, \cdot \rangle_\pm$ 为 $\mathcal{H}$ 上的内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 在 $\mathcal{H}_\pm$ 上的限制，则有

$$(\psi, \psi)_R = \langle \psi, R\psi \rangle = \langle \varphi_+, \mathcal{R}\varphi_- \rangle_+ + \langle \varphi_-, \mathcal{R}^\dagger \varphi_+ \rangle_-, \tag{97}$$

$$(\tilde{\psi}, \tilde{\psi})_R = \langle \tilde{\psi}, R\tilde{\psi} \rangle = -\langle \varphi_+ \mathcal{R}\varphi_- \rangle_+ - \langle \varphi_- \mathcal{R}^\dagger \varphi_+ \rangle_- = -(\psi, \psi)_R. \tag{98}$$

由于 $(\psi, \psi)_R$ 是实数（根据假设，扭曲乘积是厄米的），且不可能为零（否则 $\mathcal{R}$ 将为零），因此存在 $\varphi_\pm$，使得 $(\psi, \psi)_R$ 和 $(\psi, \psi)_R$ 异号。因此，该扭曲乘积是不定的。

□

如果可以选取算子 R，使其具有纯点谱，且 0 不是其聚点，那么根据命题 III.6，配备扭曲乘积 $(\cdot, \cdot)_R$ 的空间 $\mathcal{H}$ 就是克莱因空间。在无限维情形下，作者不确定这样的算子 R 是否总是存在。不过，在与标准模型相关的例子中，它确实存在。

例 III.11。 正如本节开头所述，对于流形的最小扭曲，一个自然的算子选择 R 是 γ^0 矩阵。实际上，任意狄拉克矩阵都满足命题 *III.8* 的条件，因此可以用来展开扭曲自同构。它也满足命题 *III. 6* 的条件，所以扭曲乘积是一个克莱因积。此外，这些矩阵（在手征表示中）都是酉矩阵，因而是基本对称性。不过，就费米子作用量而言，它们并非都等价：正如 *[24],* 中所述，只有 γ^0 才能使费米子作用量中的被积函数被解释为洛伦兹拉格朗日量 *[26]*。

在电动力学的谱三元组中， *[36],* $\mathcal{A} = C^\infty(\mathcal{M}) \otimes \mathbb{C}^2$ 作用于 $\mathcal{H} = L^2(\mathcal{M}, S) \otimes \mathbb{C}^4$，形式如下

$$\pi((f, g)) = diag(f\,\mathbb{I}_4,\, f\,\mathbb{I}_4, g\,\mathbb{I}_4, g\,\mathbb{I}_4) \tag{99}$$

其中 $\mathbb{I}_4$ 作用于 $L^2(\mathcal{M}, S)$。它由分次给出的最小扭曲

$$\gamma^5 \otimes \gamma_F = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbb{I}_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{100}$$

是基于 $\mathcal{A} \otimes \mathbb{C}^2$ *[26,* 式 *5.8]* 的表示构建的

$$\pi'((f, g, f', g')) = diag(f\mathbb{I}_2,\, f'\mathbb{I}_2,\, f'\mathbb{I}_2,\, f\mathbb{I}_2,\, g'\mathbb{I}_2,\, g\mathbb{I}_2,\, g\mathbb{I}_2,\, g'\mathbb{I}_2,). \tag{101}$$

该算子

$$R = \gamma^0 \otimes \mathbb{I}_4 \tag{102}$$

诱导翻转自同构，满足命题 *III.8*、*III.6* 的条件，且是酉的。因此，它在 $\mathcal{H}$ 上诱导出一个 *Krein* 积，并且是一个基本对称性。 $\gamma^a \otimes \mathbb{I}_4$（$a = 1, 2, 3$）也同样如此，但只有算子 (102) 才能在费米子作用量 *[26,§5]*中得到洛伦兹号差下的狄拉克方程。

关于标准模型，如 *§II.3* 中所述，为了生成额外的标量场 σ，最小扭曲不应通过分次来实现，而应通过算子来实现

$$\gamma_{\mathcal{M}} \otimes T_F \tag{103}$$

其中 T_F 定义见(37) *[21,* 备注 *3.1]*。扭曲乘积和费米子作用量尚未得到研究。根据命题 *III.8*，扭曲标准模型可由任意算子扩展

$$R = \gamma^a \otimes \mathbb{I}_{96} \tag{104}$$

根据命题 *III.6*，该算子将希尔伯特空间变为克莱因空间。人们预期，对于 $a = 0$，扭曲费米子作用量将给出洛伦兹号差下的运动方程。*Manuele* 博士论文中尚未发表的结果也指向这一方向。

III.5 扭曲酉元

给定一个可扩展扭曲谱三元组（$\mathcal{A}$， $\mathcal{H}$， D） ρ及其扭曲乘积（$\cdot$， $\cdot$）$_R$，若算子$u \in \mathcal{B}$（$\mathcal{H}$）满足以下条件，则称其为扭曲酉：

$$(u\varphi, u\psi)_R = (\varphi, \psi)_R \qquad \forall \varphi, \psi \in \mathcal{H}. \tag{105}$$

对于维数为 $n = 2m$ 的流形的最小扭曲，其扭曲乘积为（49）。一个扭曲酉元 $\tilde{u}$ 在各个分量 ψ_n 上的作用是平凡的（对于 $n = 1$，...， p，其中 $p = 2^m$ 为旋量表示的维数），它是一个维数为 p的方阵，并保持乘积不变

$$\langle \cdot, \gamma^0 \cdot \rangle_p. \tag{106}$$

由于 γ^0与 diag（$\mathbb{I}_{\frac{p}{2}}$， $-\mathbb{I}_{\frac{p}{2}}$）酉等价，由这些元素生成的群 $\tilde{U}_R$就是酉群 U（$_2^p$， $_2^p$）。特别地，在四维流形上，有 $p = 2^2 = 4$，因此

$$\tilde{U}_R = U(2, 2). \tag{107}$$

该群与扭量的对称群 [32]密切相关。关于标准模型的谱描述与扭量之间可能存在的关系，早在 [12, §9.1]中就已有人指出。上述讨论表明，扭量可能与洛伦兹版本的非交换几何有关，尤其是鉴于近期关于旋量维克旋转的研究 [37], ，这些研究显示出与此处提出的号差变换存在某些相似之处。

IV 结论

近年来，Manuele一直集中致力于洛伦兹流形上谱作用量的计算，旨在运用弯曲时空上量子场论的技术，改写 [38]的若干结果。他未能获得足够的时间完成这项工作，但让我们承诺将其完成。

参考文献

[1] J. W. Barrett. 粒子物理学标准模型之非交换几何的洛伦兹版本. 数学物理杂志, 48:012303, 2007.[2] C. Biggio、E. Fernandez-Martinez、M. Filaci、J. Hernandez-Garcia与J. Lopez-Pavon. type-[iii]跷跷板的全局界限. 高能物理杂志, 2020:22, 2020.[3] B. Blackadar. 算子代数。关于 C^*-代数与冯·诺依曼代数的理论. 数学科学百科全书122, 2006.[4] A. H. Chamseddine与A. Connes. 为什么是标准模型？ 几何物理杂志, 58:38–47, 2008.[5] A. H. Chamseddine与A. Connes. 谱标准模型的韧性. 高能物理杂志, 09:104, 2012.[6] A. H. Chamseddine、A. Connes与M. Marcolli. 引力与含中微子混合的标准模型. 理论与数学物理进展, 11:991–1089, 2007.[7] A. H. Chamseddine、A. Connes与W. van Suijlekom. 超越谱标准模型：帕蒂-萨拉姆统一的涌现. 高能物理杂志, 11:132, 2013.[8] A. H. Chamseddine、A. Connes与W. van Suijlekom. 无一阶条件的非交换几何中的内涨落. 几何物理杂志, 73:222–234, 2013.[9] A. Connes. 非交换几何与实在性. 数学物理杂志 , 36:6194–6231, 1995.[10] A. Connes. 与物质耦合的引力及非交换几何的基础 . 数学物理通讯, 182:155–176, 1996.[11] A. Connes. 论流形的谱刻画. 非交换几何杂志, 7(1):1–82, 2013.[12] A. Connes与A. H. Chamseddine. 非交换几何作为统一包括引力在内的所有基本相互作用的框架，第1部分. 物理学进展, 58:553–600, 2010.[13] A. Connes与J. Lott. 非交换几何的度量方面. 北约高级研究丛书*B*辑物理学, 295:53–93, 1992.[14] A. Connes与H. Moscovici. III型与谱三元组. 数论、几何与量子场中的迹，《数学面面观》，*Friedt. Vieweg*，威斯巴登, E38:57–71, 2008.[15] A. Devastato、S. Farnsworth、F. Lizzi与P. Martinetti. 洛伦兹符号与扭曲谱三元组. 高能物理杂志, 03(089), 2018.[16] A. Devastato、M. Filaci、P. Martinetti与D. Singh. 扭曲谱三元组的作用量以及从欧几里得到洛伦兹的过渡. 现代物理中几何方法国际杂志, 17(增刊1):2030001（10页）, 2020.[17] A. Devastato 、 F. Lizzi 与 P. Martinetti. 大对称性、谱作用量与希格斯质量 . 高能物理杂志, 01:042, 2014.[18] A. Devastato与P. Martinetti. 标准模型的扭曲谱三元组与大对称性的自发破缺. 数学物理、分析与几何, 20(2):43, 2017.

[19]M. Filaci 和 P. Martinetti. 几乎交换几何的最小扭曲。*arXiv:2112.06271*，2021年。[20] M. Filaci 和 P. Martinetti. 超越标准模型的扭曲谱三元组批判性综述。*J. Phys. A*，56:153001，2023年。[21] M. Filaci、P. Martinetti 和 S. Pesco. 非交换几何中标准模型的最小扭曲：场内容。*Phys. Rev. D*，104:025011，2021年。[22] N. Franco 和 M. Eckstein. 非交换几何因果性的代数表述。*Class. Quantum Grav.*，30:135007，2013年。[23] G. Landi 和 P. Martinetti. 通过代数自同构扭曲实谱三元组。*Lett.Math. Phys.*，106:1499–1530，2016年。[24] P. Martinetti、G. Nieuviarts 和 R. Zeitoun. 扭曲谱三元组中的挠率与洛伦兹对称性。即将发表于 ***Math. Phys. Anal. Geo.***，2025年。[25] P. Martinetti 和 E. Ouvrard. 最小扭曲谱三元组的指标。编写中，2025年。[26] P. Martinetti 和 D. Singh. 通过扭曲欧几里得谱三元组得到洛伦兹费米子作用量。*J. Noncomm. Geo.*，16(2):513–559，2022年。[27] P. Martinetti 和 J. Zanchettin. 不满足一阶条件的扭曲谱三元组。*arXiv2103.15643*，2021年。[28] G. Nieuviarts. 谱三元组同构下的度规号差变化。*arXiv 2402.05839*，2024年。[29] G. Nieuviarts. 洛伦兹对称性从几乎交换扭曲谱三元组中涌现。*arXiv 2502.18105*，2025年。[30] T. Okayasu. 冯·诺依曼代数自同构的结构定理。*Tôhoku Math.Journ.*，20:199–206，1968年。[31] G. K. Pedersen. 《当代分析》。施普林格出版社，1989年。[32] R. Penrose 和 M. A. H. MacCallum. 扭量理论：一种量子化场与时空的方法。*Physics Reports*，6(4):241–316，1973年。[33] M. Reed 和 B. Simon. 现代数学物理方法。第*1*卷：泛函分析。AP，1980年。[34] A. Strohmaier. 关于非交换几何与半黎曼几何。*J. Geom. Phys*，56:175–195，2006年。[35] K. van den Dungen. 克莱因谱三元组与费米子作用量。*Math. Phys. Anal. Geo.*，19，2016年。[36] K. van den Dungen 和 W. D. van Suijlekom. 非交换几何中的电动力学。*J. Noncommut. Geom.*，7:433–456，2013年。[37] P. Woit. 时空是右手性的。*arXiv: 2311.00608*，2023年。[38] M. Wrochna 和 N. V. Dang. 洛伦兹散射空间上的波算子复幂与谱作用量。*J. Eur. Math. Soc.*，27:971–1054，2025年。