arXiv:2603.03222v1 [gr-qc] 3 Mar 2026

黑洞背景上的测地流

KAUSHLENDRA KUMAR 和 SHAHN MAJID

伦敦玛丽女王大学数学科学学院，
Mile End Road，伦敦 E1 4NS，英国

Abstract. 本文详细研究了施瓦西时空中的一种近期提出的测地流概念。该概念源自非交换几何，在经典情形下也具有新颖之处。在这一框架中，测地速度场是一个独立的概念，它进而定义时空上密度 ρ 的流，或者可能定义振幅波函数 ψ 的流，其中 $\rho = |\psi|^2$。固有时流参数 s 由物质的流整体生成。我们仔细说明了如何将 ρ 演化解释为对大量测地线的建模，并将这些测地线插值为局部密度。利用克鲁斯卡尔-塞凯雷什坐标，我们证明穿越视界不存在问题。一个新颖的特点是，两个相撞的高斯密度凸起 ρ 会合并成一个凸起，而两个相位相反、彼此相撞的波函数 ψ 凸起则会合并成一个偶极子，其密度 $|\psi|^2$ 分布不同，这为检验我们的波函数假设提供了潜在方法。我们还重新考察了黑洞周围的克莱因–戈尔登流或伪量子力学，并发现，先前发现的黑洞原子态，以及当扰动区域接近视界时在视界处产生的模，也会以反射的形式出现在黑洞内部。我们认为，视界模穿越视界时的行为以及原子谱的离散化，取决于视界处的量子引力修正。

1. Introduction

在非交换几何中，有人猜想它在普朗克尺度下比连续几何更能准确描述现实 [15, 10, 16, 11], 在这种几何中，可能不存在任何点，因此也就无从谈起测地线。数篇论文提出了一种解决这一问题的方法 [2, 6, 13, 4, 5] 经典地说，这种方法将粒子尘埃视为具有密度 ρ 的粒子集合，随后，随着每个尘埃粒子沿自身的测地线运动，整个粒子尘埃也随之演化。接着，可以令 ρ成为一个 $*$代数 A中的正元，并使其随时间演化；还可以进一步迈向量子理论，令 $\rho = \psi^*\psi$ ，其中 $\psi \in \mathcal{H}$是 A的希尔伯特空间完备化，起到波函数或振幅的作用。

本文将针对一个经典的伪黎曼时空流形 M，具体而言是黑洞背景，详细探讨这一形式体系。该形式体系与相对论流体力学[18] 的标准方法以及最优传输[14] 理论和黎曼几何中法丛上的测地流理论有一些共同之处（但存在显著差异）。

Date: 2026年3月4日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 分类号：83C65、83C57、81S30、81Q35、81R50。*Key words and phrases.* 非交换几何、量子力学、黑洞、量子时空、量子测地线、量子引力。*Authors to whom correspondence should be addressed:* kaushlendra.kumar@qmul.ac.uk 和 s.majid@qmul.ac.uk。*Funding:* KK 获得了 DFG 项目资助（编号 515782239），SM 获得了 Leverhulme Trust 项目资助（编号 RPG-2024-177）。

后者曾因 Arnold[1]利用它导出流体力学中的欧拉方程而闻名，也构成了现代遍历性概念的关键基础。在我们的情形中，可以直观地设想，所有尘埃粒子的切向量构成一个向量场，我们称之为测地速度向量场 X。然而，事实证明，该向量场遵循自身的方程，其中甚至不涉及 ρ，即测地速度方程，

$$\dot{X} + \nabla_X X = 0, \tag{1}$$

其中点表示$\mathrm{d}\ \mathrm{d}s$。接下来，X 确实与 ρ的变化率有关，这由密度流方程给出，

$$\dot{\rho} + X(\rho) + \rho\,\mathrm{div}(X) = 0 \tag{2}$$

但这里再次出现了一个意外：这个方程可以由 X 确定 $\dot{\rho}$，却无法反过来确定。因此，量子测地线这一概念在此应用于经典情形时，打破了通常的测地线观念——通常是先有位置，再由其运动决定速度；而后又以相反的顺序将这些要素重新组合起来：X 本身就是一个场，进而决定任意密度 ρ的流动。本文的首要目标是理解这类测地速度场 X的含义，也就是说，既然它们是更基本的对象，我们应当如何选择它们，并从物理角度理解它们。第二个目标是探究，如果我们进一步像在量子力学中那样写出 $\rho = |\psi|^2$，会发生什么；在量子力学中，ψ 按如下方式演化

$$\dot{\psi} + X(\psi) + \frac{1}{2}\psi\,\mathrm{div}(X) = 0. \tag{3}$$

这振幅流方程意味着密度流方程；将量子测地线的形式体系应用于经典流形时，也会得到这一方程。请注意，如果 $\psi(0)$ 是实数，那么在这种演化下 ψ 仍保持实数，因为偏微分方程的所有项都是实数，但它仍可能是振荡的。若我们写作 $\psi = \sqrt{\rho}e^{\mathrm{i}\theta}$，那么很容易看出，振幅流方程剩余的内容是

$$\dot{\theta} + X(\theta) = 0 \tag{4}$$

其中 $\theta(0) = 0$ 始终为零。不过，这只是一个特殊情形，因为一般的 ψ 无法以平滑的方式进行这样的极分解。（例如，一个穿过零点的实数 ψ 会导致 θ 出现跳跃间断。）请注意，所有这些方程都包含沿 X 的对流导数，与流体力学中的情形相同，其定义为

$$\frac{D}{Ds}|_X f = \dot{f} + X(f), \quad \frac{D}{Ds}|_X Y = \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}s} + \nabla_X Y \tag{5}$$

对于函数 f 或另一个向量场 Y，已知 [4]，X 的长度及其散度满足

$$\frac{D}{Ds}|_X(|X|^2) = 0, \quad \frac{D}{Ds}|_X(\mathrm{div}(X)) = -(\nabla_\mu X^\nu)(\nabla_\nu X^\mu) - X^\mu X^\nu R_{\mu\nu}, \tag{6}$$

在局部坐标中，其中 $R_{\mu\nu}$ 是里奇张量。第二个关系符合广义相对论（GR）中里奇张量的含义：它控制物体自由下落时形状的变化（或其所受的应力）。与此同时，式 (6) 的第一个关系意味着，如果 $|X|^2 = \pm 1$ 在 $s = 0$ 处成立，那么在之后的时刻也仍然成立，因为$X(1) = 0$。因此，我们可以将讨论限定于单位速率速度场；这与微分几何中单位法丛上的测地流概念稍微接近一些（但并不相同）。此外，我们将在洛伦兹情形下工作，度规号差为 $-+++$，因此对于类时流，我们实际上取 $|X|^2 = -1$。我们还将密度流和振幅流纳入讨论。

我们将在黑洞背景下求解这些方程，其中 ∇ 为列维-奇维塔联络，除中心的奇点处外，里奇张量处处为零。我们的目标是在 [13] 闵可夫斯基时空情形的基础上，更好地理解上述违反直觉的因素所蕴含的物理解释

以及 X 本身的作用与意义。虽然我们很容易想象初始密度 ρ 随时间演化，例如位于 $s=0$处的高斯凸起，但 X该如何选取呢？数学上的答案是，每条测地线都从一个点和一个独立选取的速度出发，因此我们可以在 $s=0$处任意选取 X，但仍需以具有物理意义的方式来选择。为此，我们提出：对于任意向量场 X，考虑由它生成的无穷小微分同胚。若 ρ 是定义在M上的函数，那么 $\rho(s)(x) = \rho(x - sX(x))$ 可视为任意密度在小 s下所发生的相应变化。在这种情况下，$\dot{\rho}(s)(x) = -X(\rho(s))$，即 $\frac{D}{Ds}|_X(\rho) = 0$在 $s=0$处。因此，对于这种运动，由密度流方程（2）可推出，对于非零密度，

$$\operatorname{div}(X(0)) = 0. \tag{7}$$

根据（6）中的第二个关系，我们知道这通常不会保持为零，但它与单位速度条件一起，为测地流的起点提供了一个自然条件。在我们的情形下（由于我们关注该理论的径向—时间部分，模型实际上是二维的），这一条件以及与物质含量相关的适当边界条件，将决定初始的 $X(0)$。

我们将沿着这一思路继续，但更符合物理实际的回答或许是：$s=0$ 处的初始物质分布由应力—能量张量支配。对于理想流体，该张量包含密度、压强和速度场，其中 $|u|^2=-1$ 的形式为

$$T_{\mu\nu} = (\epsilon + p)u_\mu u_\nu + p g_{\mu\nu},$$

在这种情况下，通常会用数密度 n （对于单粒子种类的情形）和化学势 μ 来表示，具体如下：

$$\epsilon + p = \mu n, \quad \mathrm{d}\epsilon = \mu \mathrm{d}n.$$

在这种情况下，守恒定律 $\nabla_\mu T^\mu{}_\nu = 0$ 的一部分是方程 $\operatorname{div}(nu) = 0$。若令 $X = u$ 和 $n = \rho$，则可知 $\dot{\rho} = 0$。此外，负加速度满足

$$-\nabla_u u = \frac{(\mathrm{d}p)^\# + u\, u(p)}{\epsilon + p}$$

其中 # 通过度量将 1-形式转化为向量场。上述对应关系意味着，$\dot{u}$ 由右侧的表达式确定，即关于 u的一个非线性演化方程。这些观察未必与相对论流体力学相矛盾，因为其中并未考虑相对于外部时间 s 的演化。它们给出了一个特殊情形：ρ 不演化，而 X 会演化，且两者都有物理解释。此外，$\operatorname{div}(nu) = 0$的推导来自一个状态方程，因此有可能放宽这一条件。

另一个问题是“固有时参数” s，它相当于从测地流中涌现出的一种集体时间，是测地流的内在属性。几何学家不难想象一个粒子位于 $s=0$，并让它相对于自身固有时 s演化；但若要以概率方式对流形上的每个点都这样处理，就相当于引入了一种集体时间，而这还需要进一步理解。为探讨这些问题，我们在第 3 节给出的首个结果是，实际演化大量以高斯密度分布散布的“尘埃”测地线，并表明其结果确实与经典应用的量子测地流理论相当吻合。另一个不同寻常之处是使用波函数 ψ，因为它们存在于整个时空 M上的 $L^2(M)$中。它们相对于 s 演化，因此不应被视为通常意义上的量子力学（通常量子力学是相对于由时间切片构成的叶状结构而言的）。在第4节中，我们在这一 ψ 层次上，使用量子测地流形式体系考察两个这样的高斯凸起碰撞。我们发现，两个密度凸起碰撞并合并为一个凸起；而在 ψ 情形下，若两个凸起的相位不同（我们令一个凸起为正，另一个为负），碰撞结果则是一个具有不同分裂隆起密度分布的偶极子。因此，

关于量子测地线[2, 6, 4] 的假设，即密度 ρ 可由一种底层波函数取代，原则上是可以检验的，前提是我们能更好地理解 s 的物理解释以及时空波函数。

第5节以探讨另一种更接近实际量子力学的量子测地流作为全文的收尾，即定义在微分算子非交换代数 $\mathcal{D}(M)$[6, 7, 8] 上的量子测地流，它是海森堡代数的坐标不变版本。该流的“薛定谔绘景”版本还涉及演化定义在时空上的“波函数” $\phi \in L^2(M)$（我们使用不同的符号，以避免与上文的振幅 ψ 混淆），不过此时它们遵循 克莱因–戈尔登流

$$-\mathrm{i}\frac{\partial \phi}{\partial s} = \frac{\hbar}{2m}\Box\phi, \tag{8}$$

其中 $\Box$ 是克莱因-戈尔登算符。现在，将 s 用作固有时参数，可由算符层面的“海森堡绘景”测地流方程得到论证

$$m\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s} = g^{\mu\nu}p_\nu - \frac{\lambda}{2}\Gamma^\mu, \tag{9}$$

$$m\frac{\mathrm{d}p_\mu}{\mathrm{d}s} = \Gamma^\nu_{\mu\sigma}g^{\sigma\rho}\left(p_\nu p_\rho - \lambda\Gamma^\tau_{\nu\rho}p_\tau\right) + \frac{\lambda}{2}g^{\alpha\beta}\Gamma^\nu_{\beta\alpha,\mu}p_\nu, \tag{10}$$

采用一阶相空间形式，并使用局部坐标，其中 $\lambda = -\mathrm{i}\hbar$ 和 $[x^\mu, p_\nu] = \mathrm{i}\hbar\delta^\mu{}_\nu$。这里，$g^{\mu\nu}$ 是度量，$\Gamma^\mu = \Gamma^\mu_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}$ 是缩并克里斯托费尔符号，而m 是质量参数。方程（8）的定态是质量由本征值决定的有质量克莱因-戈尔登方程的解；不过，该理论并不限于这类壳上模，因此在这方面，它包含了一些人们可能期待从背景时空上的量子场论中获得的信息。

值得关注的是 M 具有静态度量的情形。在这种情况下，可以考察相对于坐标时间演化具有固定能量的ϕ ，以及定义在空间切片上的剩余函数 ψ。此时，式（8）简化为伪量子力学。它与普通量子力学相似，但并不相同，因为不存在一位观察者，其时间就是 s。在 [7] 中使用施瓦西坐标时，有一项发现：当扰动区域到达视界时，会有某些“视界模”从视界发出。我们表明，在事件视界之外使用克鲁斯卡尔-塞凯雷什坐标时，也会出现同样的现象；此外还存在类原子定态模，其中黑洞扮演原子核的角色。这证实了该理论确实如 [7], 所声称的那样具有一般协变性；不过这一次，我们可以进入黑洞内部，并在那里发现类似但呈反射状的行为。从视界任一侧接近视界时，视界模和类原子解都会无限快速地振荡（呈分形形态）；但我们认为，量子引力修正会截断最高频率，从而使模和流的演化能够延伸至视界并穿越视界。通过有限元偏微分方程求解器的数值分辨率，我们可以初步了解这种现象可能呈现的样貌：视界模似乎会穿透视界，在另一侧形成一层薄薄的皮层。作为物理检验，第4节和第5节中 ψ 的演化在数值精度范围内都是幺正的（即范数守恒）；而随着视界模的生成，视界外的模以及 [7] 和黑洞内部的模，其态熵都会增加。

我们在第 6 节给出一些总结性评论。值得注意的是，非交换测地流也以抽象狄拉克算子 [9] 的形式出现在 Connes 的“谱几何”中。数值流使用 Mathematica NDSolve，并采用线法计算。这里有一个离散化参数 res:=MaxCellMeasure，用于设定空间几何的最大单元尺寸；我们将改变该参数，以检验结果对分辨率变化的稳健性。我们尝试过限制演化参数 s 的最大步长，但并未改善图像，因此将其

留给系统自动选择。用于生成这些图像的代码可在 [12] 中获取。

2. Preliminaries on Kruskal-Szekeres coordinates and geodesics

我们简要回顾施瓦西时空，以及适用于黑洞视界附近几何结构的共形变换。洛伦兹号差（$-+++$）和自然单位制（$G = c = 1$）下，非旋转黑洞的施瓦西度规为:

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)\mathrm{d}t^2 + \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\Omega^2, \tag{11}$$

其中

$$r_s = 2M \quad \text{and} \quad \mathrm{d}\Omega^2 = \mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2. \tag{12}$$

这里， r_s 是施瓦西半径，坐标为 $-\infty < t < \infty$、 $0 < r < \infty$、 $0 \le \theta \le \pi$、 $0 \le \phi < 2\pi$。这些坐标在 $r = r_s$ 处的事件视界上是奇异的，因此我们改用克鲁斯卡尔-塞凯雷什坐标。这些坐标将施瓦西度规解析地延拓到视界之外，甚至延拓到另外两个平行区域。我们先按如下方式换用类时坐标 T 和类空坐标X （角坐标保持不变）。

对于外部区域（$r > r_s$）：

$$T = \left(\frac{r}{r_s} - 1\right)^{1/2} e^{r/(2r_s)} \sinh\left(\frac{t}{2r_s}\right), \quad X = \left(\frac{r}{r_s} - 1\right)^{1/2} e^{r/(2r_s)} \cosh\left(\frac{t}{2r_s}\right). \tag{13}$$

对于黑洞内部区域（$0 < r < r_s$）：

$$T = \left(1 - \frac{r}{r_s}\right)^{1/2} e^{r/(2r_s)} \cosh\left(\frac{t}{2r_s}\right), \quad X = \left(1 - \frac{r}{r_s}\right)^{1/2} e^{r/(2r_s)} \sinh\left(\frac{t}{2r_s}\right). \tag{14}$$

关系 $T^2 - X^2 = \left(1 - \frac{r}{r_s}\right) e^{r/r_s}$ 通过朗伯 W_0（主支）函数隐式定义 r：

$$r = r_s\left(1 + W_0\left(\frac{X^2 - T^2}{e}\right)\right). \tag{15}$$

如图1所示， T-X 平面上的克鲁斯卡尔图有四个象限，由现在表现为 $T = \pm X$的事件视界分隔:

- 区域 I（右象限）： $|T| < |X|$， $X > 0$；我们宇宙的渐近平坦外部区域（$r > r_s$），观察者可从中逃逸至无穷远。
- 区域 II（上象限）： $T > |X|$， $T > 0$；黑洞内部（$0 < r < r_s$），任何事物都无法从中逃逸，并通向未来奇点。
- 区域 III（左象限）： $|T| < |X|$， $X < 0$；另一个渐近平坦外部区域（$r > r_s$），被解释为一个平行宇宙。
- IV区（下方象限）： $T < |X|$， $T < 0$；白洞内部（$0 < r < r_s$），一个时间反演的黑洞，物质从中涌出，并与过去奇点相连。

如今， $r = 0$ 奇点沿着双曲线 $T^2 - X^2 = 1$ 展开。 r 为常数的曲线也是双曲线，而 t 为常数的曲线则是穿过原点的直线。图1展示了这些象限的标准克鲁斯卡尔图。

最后，我们转到零坐标 $U = T - X$， $V = T + X$ 其中 U， V坐标轴就是事件视界。使用乌龟坐标 $u = t - r^*$， $v = t + r^*$，其中

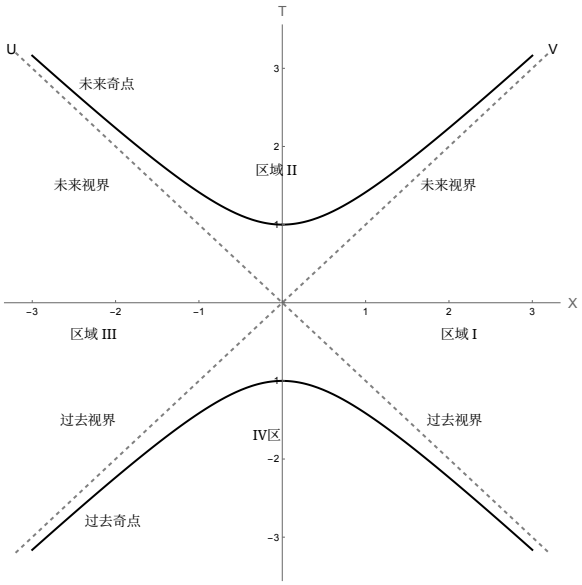

FIGURE 1. 克鲁斯卡尔-塞凯赖什图展示了时空的四个区域：区域 I（外部）、区域 II（黑洞内部）、区域 III（平行宇宙外部）和 IV区（白洞内部）。事件视界位于虚线坐标轴处，而奇点则位于图示的双曲线上。

$r^* = r + r_s \log\left|\frac{r}{r_s} - 1\right|$，$U$和 V的显式表达式经过调整，以确保各象限中的符号一致，具体如下：

- In region I: $U = -\exp\left(-\frac{u}{2r_s}\right), V = \exp\left(\frac{v}{2r_s}\right)$
- In region II: $U = \exp\left(-\frac{u}{2r_s}\right), V = \exp\left(\frac{v}{2r_s}\right)$
- In region III: $U = \exp\left(-\frac{u}{2r_s}\right), V = -\exp\left(\frac{v}{2r_s}\right)$
- In region IV: $U = -\exp\left(-\frac{u}{2r_s}\right), V = -\exp\left(\frac{v}{2r_s}\right)$

这些确保了 $U < 0, V > 0$ 在区域 I 中； $U > 0, V > 0$ 在区域 II 中；等等。关系如下：

$$UV = -\left(\frac{r}{r_s} - 1\right) e^{r/r_s}, \quad \frac{U}{V} = -\exp\left(-\frac{t}{r_s}\right). \tag{16}$$

这些坐标下的度量为：

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{4r_s^3}{r} e^{-r/r_s}(-\mathrm{d}U\mathrm{d}V) + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\phi^2). \tag{17}$$

应注意，在 $U - V$扇区中，该度量是非对角的，其中 $g_{UV} = g_{VU} = -\frac{2r_s^3}{r} e^{-r/r_s}$。

列维-奇维塔联络的非零克里斯托费尔符号

在这些坐标中为

$$\Gamma^U_{UU} = \frac{r_s^2}{r^2}(1+\frac{r}{r_s})Ve^{-\frac{r}{r_s}}, \quad \Gamma^U_{\theta\theta} = -\frac{U}{2}\frac{r}{r_s}, \quad \Gamma^U_{\phi\phi} = -\frac{U}{2}\frac{r}{r_s}\sin^2\theta,$$
$$\Gamma^V_{VV} = \frac{r_s^2}{r^2}(1+\frac{r}{r_s})Ue^{-\frac{r}{r_s}}, \quad \Gamma^V_{\theta\theta} = -\frac{V}{2}\frac{r}{r_s}, \quad \Gamma^V_{\phi\phi} = -\frac{V}{2}\frac{r}{r_s}\sin^2\theta,$$
$$\Gamma^\theta_{U\theta} = \Gamma^\theta_{\theta U} = -V\frac{r_s^2}{r^2}e^{-\frac{r}{r_s}}, \quad \Gamma^\theta_{V\theta} = \Gamma^\theta_{\theta V} = -U\frac{r_s^2}{r^2}e^{-\frac{r}{r_s}}, \quad \Gamma^\theta_{\phi\phi} = -\sin\theta\cos\theta,$$
$$\Gamma^\phi_{U\phi} = \Gamma^\phi_{\phi U} = -V\frac{r_s^2}{r^2}e^{-\frac{r}{r_s}}, \quad \Gamma^\phi_{V\phi} = \Gamma^\phi_{\phi V} = -U\frac{r_s^2}{r^2}e^{-\frac{r}{r_s}}, \quad \Gamma^\phi_{\theta\phi} = \Gamma^\phi_{\phi\theta} = \cot\theta. \tag{18}$$

以仿射参数 s（类时测地线的固有时）为参数的曲线 $x^\alpha(s)$ 的测地线方程形式如下，

$$\frac{\mathrm{d}^2x^\alpha}{\mathrm{d}s^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}s} = 0, \tag{19}$$

其中， $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ 是由度量导出的克里斯托费尔符号。在克鲁斯卡尔-塞凯雷什坐标（U, V）中，相应的径向运动测地线方程可用四速度分量表示为 $\theta = \phi = 0$ 保持为零，且

$$\ddot{U} + \frac{r_s^2}{r^2}(1+\frac{r}{r_s})e^{-\frac{r}{r_s}}V\dot{U}^2 = 0, \tag{20}$$

$$\ddot{V} + \frac{r_s^2}{r^2}(1+\frac{r}{r_s})e^{-\frac{r}{r_s}}U\dot{V}^2 = 0. \tag{21}$$

此处，点号表示 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}$。径向坐标 $r = r(U,\ V)$ (15) 可用“乘积对数”或朗伯函数 W 表示为

$$r(U,V) = r_s(1+W(-UV/e)). \tag{22}$$

零测地线（光线）在（T, X）平面上沿 45 度直线传播，并对应于 $U = 0$ （$U =$ 为常数）或 $V = 0$ （$V =$ 为常数）；这些坐标允许光线平滑穿过 $r = r_s$ 处的视界。

3. Comparison of density of actual geodesics with geodesic flow

本节通过展示量子测地形式在经典应用中能够追踪一群实际测地尘埃粒子运动的统计插值，确立其可信度。

3.1. 多条测地线的密度统计模型 ρ_{stat} 与速度 X_{stat}。 我们首先在克鲁斯卡尔-塞凯雷斯坐标中，设置一群坠入视界 $U = 0$ 的测地线。为方便起见，从现在起令 $r_s = 1$ 。接下来，我们通过从一个正态分布中随机抽样，选取 N 个有质量尘埃粒子的初始（$s = 0$）位置（$U_i(0)$ $V_i(0)$），其中 $i = 1, \ldots, N$用于标记每条测地线

$$\rho(0)(U,V) := \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{-g}}\exp^{-\frac{(U+3)^2+(V-3)^2}{2\sigma^2}} \tag{23}$$

以（-3,3）为中心，标准差为 $\sigma = 0.1$，并归一化使得$\int\sqrt{-g}\mathrm{d}U\mathrm{d}V\rho(0) = 1$。我们使用（$U,V$）子空间上的测度

$$\sqrt{-g} = r(U,V)^2|g_{UV}| = 2r(U,V)e^{-r(U,V)} \tag{24}$$

根据（17）来匹配几何图像，但这等价于平面上的高斯 分布。我们还必须选择初始速度（$U_i(0)$ $V_i(0)$），使其全部具有单位速度，以便能够将其插值为光滑向量场。

(a) Kruskal –Szekeres 坐标 (b) 闵可夫斯基坐标

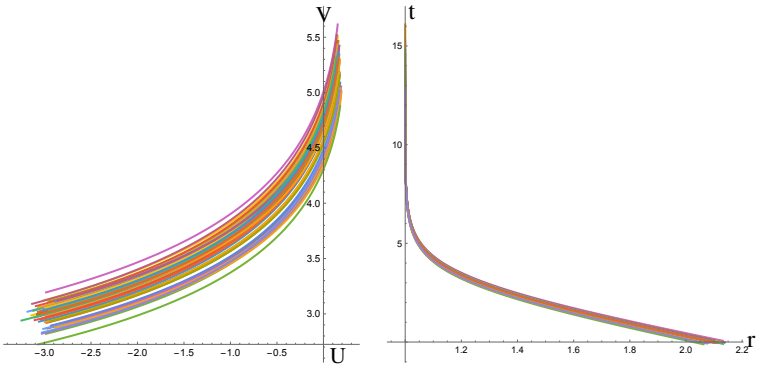

FIGURE 2. 一组50个彼此接近的粒子在 (a) Kruskal-Szekeres 坐标和 (b) 史瓦西坐标中的测地线参数图。

确保这一点的最简单方法是选择一个实际的初始单位范数向量场$X = (X^U, X^V)$，使其满足（类时）

$$|X|^2 := 2g_{UV}X^U X^V = -1, \tag{25}$$

在所有 (U, V) 处并设置

$$\dot{U}_i(0) = X^U(U_i(0), V_i(0)), \quad \dot{V}_i(0) = X^V(U_i(0), V_i(0)). \tag{26}$$

我们选择一个特定的初始条件，使其满足 $X^V > 0$ 和 $X^U > 0$ （见图 5），从而每条测地线都指向未来，且初始时朝视界运动。在这些初始条件下，这组粒子按照（20-21）相对于 s 演化。我们使用 Mathematica 对其进行数值求解，得到的 $N = 50$条测地线结果以参数图的形式显示在图2中，分别对应 Kruskal-Szekeres 坐标和史瓦西坐标；正如预期，后者在视界处是奇异的。

接下来，在设置好一束各自随固有时 s 演化的测地线后，我们使用高斯插值提取统计密度分布

$$\rho_{\text{stat}}(s)(U,V) = \frac{1}{2\pi\sigma^2 N\sqrt{-g}}\sum_{i=1}^{N}\exp\left(-\frac{(U-U_i(s))^2+(V-V_i(s))^2}{\sigma^2}\right), \tag{27}$$

其中，我们使用的标准差 σ 与随机选择这束测地线的初始位置时相同。分母中的粒子数 N 表示取平均，并且我们再次引入几何测度以确保归一化 $\int\sqrt{-g}\mathrm{d}U\mathrm{d}V\rho_{\text{stat}}(s) = 1$。这样一来，$\rho_{\text{stat}}(s)$ 就可以解释为每个 s 处的概率密度。在图 3 中，我们绘制了 $s = 0,\ 1/2,\ 1$ 时的 $\rho_{\text{stat}}(s)$，展示了预期中的向右运动：这束测地线中的粒子随时间演化。

为检验我们方法的完整性，图4展示了 $\rho_{\text{stat}}(0)$ 与用于生成测地线起始点的实际解析高斯 $\rho(0)$ 的比较，并将二者的差值绘制为最大值 $\rho(0)(-3,\ 3)$ 的分数。这里的中心 $(-3,\ 3)$ 反映了用于选择测地线起始点的正态分布。此外，由于对样本进行了高斯平均，标准差现在是原始正态分布的 $\sqrt{2}$ 倍。我们看到拟合效果良好，并且随着粒子数增加到 $N = 500$ 而得到改善，这证实了这里的差异属于统计涨落。这些结果针对的是所研究的特定随机选取的测地线束，但也代表了我们尝试过的其他测地线束的典型情况。

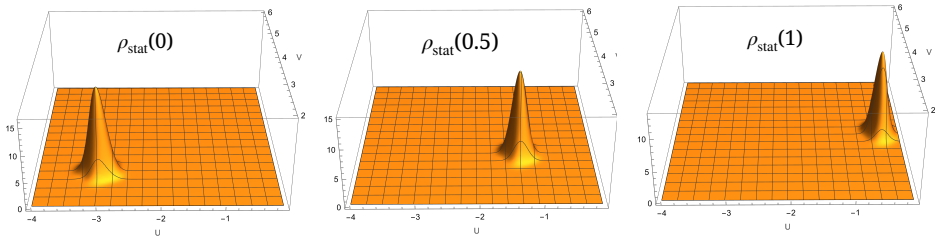

FIGURE 3. 50 个粒子组成的测地线束在 $s = 0$，0.5，1 处的概率密度，显示向右运动。

最后，我们以类似的统计方式对每条测地线的切向量进行但较为粗略的插值，将其表示为光滑向量场 $X_{\text{stat}}(s)$。按照 $\rho_{\text{stat}}(s)$ 的模型，我们再次使用高斯插值，

$$X^U_{\text{stat}}(s) = \frac{\sum_{i=1}^{N} \rho_{\text{stat}}(s)(U_i(s), V_i(s)) X^U_i(s) e^{-\frac{(U-U_i(s))^2+(V-V_i(s))^2}{2\sigma^2}}}{\sum_{i=1}^{N} \rho_{\text{stat}}(s)(U_i(s), V_i(s)) e^{-\frac{(U-U_i(s))^2+(V-V_i(s))^2}{2\sigma^2}}}, \tag{28}$$

对于 X^V_{stat}，情况也类似。这种做法较为粗略，因为我们在不同点（U_i，V_i）处对向量进行相加；从几何角度来说，我们应将向量平行移动到（U，V）处再进行相加。由于靠近（U，V）的点贡献最大，这仍然只是一种近似。尽管比较粗略，这个 $X_{\text{stat}}(s)$ 仍能大致展示测地线束演化时可能对应的高斯凸起速度场。我们看到，在统计数据点附近，$X_{\text{stat}}(0)$ 与 $X(0)$ 相差不大，但在远处会趋于其平均值（鉴于上述原因，这个平均值并无几何意义）。图 5 还展示了 $X^U_{\text{stat}}(s)$ 在 $s = 0.5$，1 时的演化，以便后续比较。

3.2. 测地流与 $\rho_{\text{stat}}(s)$ 和 $X_{\text{stat}}(s)$的比较。在本节中，我们将“观测到的”统计流（$\rho_{\text{stat}}(s)$ $X_{\text{stat}}(s)$）与从 $\rho(0)$和 $X(0)$出发、分别作为 $\rho_{\text{stat}}(0)$和$X_{\text{stat}}(0)$的光滑模型，并按测地流演化后得到的（$\rho(s)$ $X(s)$）进行比较。对于后一种演化，径向场的测地速度方程中，$X^\theta(s) = X^\phi(s) = 0$，并在克鲁斯卡尔-塞凯雷什坐标下工作，此时其余分量 (1) 对于

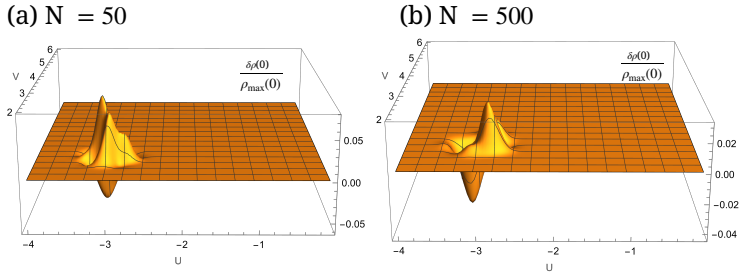

FIGURE 4. 统计 $\rho_{\text{stat}}(0)$初始概率密度与解析 $\rho(0)$概率密度之差，占统计 $\rho_{\text{stat}}(0)$最大值的比例，分别对应（a） $N = 50$ 束和（b） $N = 500$ 束。

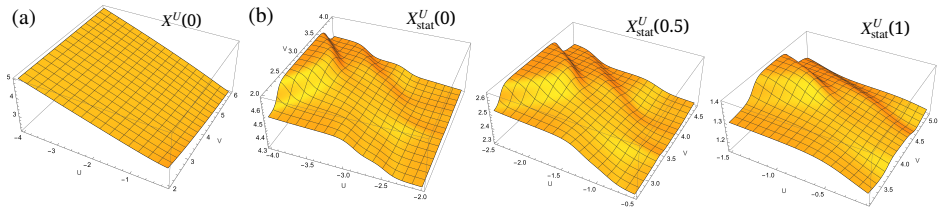

FIGURE 5. （a）解析构造中使用的 $X^U(0)$ 图，以及（b）$N = 500$ 的统计 $X^U_{stat}(s)$。 $X^V(0)$ 和$X^V_{stat}(s)$ 的图相似。

$X(s) = (X^U(s)\ X^V(s))$ 仅依赖于 U， V，为

$$\dot{X^U} + (\partial_U X^U)X^U + (\partial_V X^U)X^V + \frac{r(U,V)+1}{r(U,V)^2} e^{-r(U,V)} V (X^U)^2 = 0, \tag{29}$$

$$\dot{X^V} + (\partial_U X^V)X^U + (\partial_V X^V)X^V + \frac{r(U,V)+1}{r(U,V)^2} e^{-r(U,V)} U (X^V)^2 = 0, \tag{30}$$

其中，点表示对 s 求导。关于 X^θ 和 X^ϕ 的速度方程表明，它们保持为零。若我们关注单位速率速度场 (25)，由于度量的形式，这相当于

$$X^V = \frac{r(U,V)e^{r(U,V)}}{4X^U} \tag{31}$$

那么 (30) 就变得多余了。因此，我们的总体策略是：(i) 对某个初始 $X(0)$，求解 (29) 与 (31)，以获得速度流 $X(s)$；(ii) 利用该结果求解相应的密度流方程 (2)。该方程在克鲁斯卡尔-塞凯雷什坐标中，且在没有角向依赖的径向情形下，写作

$$\dot{\rho} + \partial_U(\rho X^U) + \partial_V(\rho X^V) + \frac{r(U,V)-1}{r(U,V)^2} e^{-r(U,V)} \left(V X^U + U X^V\right) \rho = 0. \tag{32}$$

具体而言，我们使用 $\rho(0)$作为 $\rho_{\rm stat}(0)$的高斯模型，并使用 $X(0)$作为指定初始速度的同一光滑函数，该函数在第3.1节中曾用作 $X_{\rm stat}(0)$的模型。我们以边界条件 $X(s) = X(0)$在边界 $U = -4$ （远离视界）处数值计算 $X(s)$，并要求 $\rho(s)(-4, V) = \rho(s)(-0.1, V) = \rho(s)(U, 0.1) = \rho(s)(U, 6) = 0$在全部四个边界上成立，假定扰动区域永远不会以任何显著程度到达这些边界。我们使用Mathematica，最大单元测度为res=0.003，其精细程度足以避免可见的数值噪声。在相对于此 $X(s)$求解 $\rho(s)$的密度流方程之前，我们纯粹为了加快数值求解，只做一件事，即在

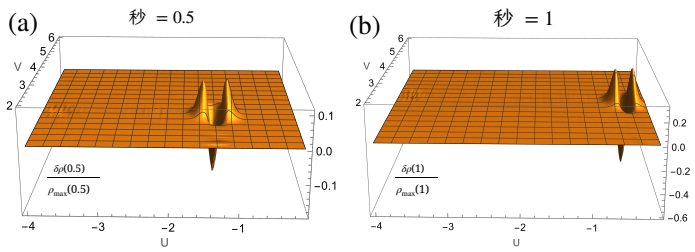

FIGURE 6. 对于一束 $N = 500$，测地流模型 $\rho(s)$ 与统计 $\rho_{\rm stat}(s)$ 在 $s = 0.5$ 和 $s = 1$ 处的差异，占 $\rho_{\rm stat}$ 最大值的比例。

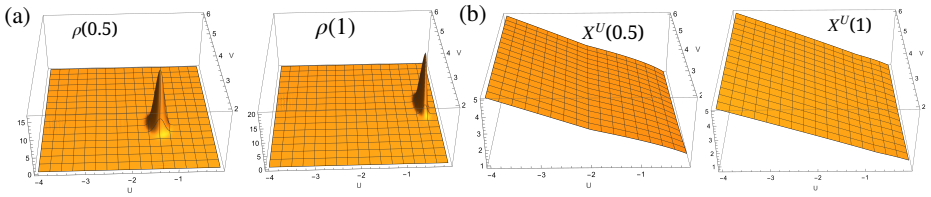

FIGURE 7. 测地流的 (a) 密度 $\rho(s)$ 和 (b) 速度$X^U(s)$，位于 $s = 0.5, 1$

此时，即将 $X^U(s)$有意重采样到更粗的网格上，在每个 s, U, V变量上的间距均为 0.01（并据此确定 $X^V(s)$）。这样做可将使用插值函数 $X^U(s)$ $X^V(s)$及其导数求解 $\rho(s)$偏微分方程的计算负荷降至可处理的程度，且重采样后的 $X(s)$与原始结果之间没有可见差异。

我们发现，演化后的 $\rho(s)$ 和 $X(s)$ 与 $\rho_{\rm stat}(s)$ 和 $X_{\rm stat}(s)$ 相当吻合，也就是说，平滑流沿着与插值后的测地线束相同的轨迹。这里，图 6 显示了 $N = 500$ 时在 $s = 0.5$ 和 $s = 1$ 处的相对差异 $\delta\rho := \rho_{\rm stat} - \rho$ （相对于 $\rho_{\rm stat}(0)$ 的最大值来设定尺度）。对于 $N = 50$，差异的图景和大小也相同，这表明该差异并非源于统计来源。相反，我们看到它随 s 增大，这可能反映了峰值形状的变化；而统计建模按其构造会产生高斯形状。同时，图 7 显示了位于 $s = 0.5, 1$ 的演化后$X^U(s)$。我们已在式 (23) 中给出了作为初始高斯分布的 $\rho(0)$，并在图 5 中给出了$X^U(0)$。此外，守恒密度质量的完整性检验，

$$\int \sqrt{-g}\mathrm{d}U\mathrm{d}V\rho(s) = 1, \tag{33}$$

在演化过程中，这一关系保持得相当好，在至 $s = 1$ 的范围内，数值误差小于 0.002%。

3.3. 选择初始速度流矢量场。 任何单位速率、定向于时间的矢量场 $X = X(0)$ 都可用于指定测地线及测地速度方程的初始速度。但从物理角度来说，我们应如何选择？我们采用的方法是注意到：[13] 任何向量场 X 都是流形上的一个无穷小微分同胚，它使每个点发生演化，因此也会使其上的所有密度函数 ρ 沿相反方向演化。正如引言中所述，利用 (2) 式中的 ρ 演化，我们得到 $\mathrm{div}(X) = 0$。从物理角度看，这一初始条件对应于一种匀速运动，且任意闭曲面上的 X 净通量均为零。我们未必能在所有时刻 s 都施加这一条件，但它为初始矢量场 $X(0)$ 提供了一个自然的条件。

将散度为零条件与单位速率条件（31）结合起来（假设 $X^U,\ X^V > 0$），可得

$$4r^2(X^U)^2\partial_U X^U + 4Ve^{-r}(r-1)(X^U)^3 = 2UrX^U + e^r r^3\partial_V X^U \tag{34}$$

与之前一样，使用 $r = r(U, V)$。通常，含两个变量的偏微分方程需要两个边界条件，例如沿着线段 $(-4, V)$ 和 $(U, 6)$ 给出边界，这些线段构成了上方所绘区域的边界，并且角点 (-4,6) 远离视界。另一方面，我们可以利用该方程将 $\partial_U X^U$ 表示为 $X^U, \partial_V X^U$ 的函数。因此，可以在恒定 $U = U_0$ 的直线上指定单个狄利克雷边界条件，设定 $X^U(U_0, V)$，然后逐步迭代 U_0 的取值。于是，$X^U(U_0 + \epsilon, V) = X^U(U_0, V) + \epsilon\partial_U X^U(U_0, V) + O(\epsilon^2)$，并将其替换为

使用 (34) 中的 $X^U(U_0,V)$ 的数值和 ∂_V 导数。这样便确定了 $X^U(U_0+\epsilon,V)$，从而可以数值求解 (34)，并继续迭代。在一般步骤中，需要沿着相关的恒定 U 直线（最初在 $U=U_0$ 处）数值计算 $\partial_V X^U$；在该直线的 V 端点处，可以从内部取单侧导数，或者等价地，将 X^U 沿该直线插值到略微超出端点的位置，以计算导数。这样的算法可以实现，但一种捷径是在另一条直线上直接取诺伊曼零法向导数（此处为直线 (U,V_0)），然后直接检查解是否确实满足边界之外的 $\mathrm{div}(X)=0$，只是不会在边界上严格满足。

我们关注的情形是：沿主垂直线段 (U_0,V) 在 $U=U_0$ 处、于 $U-V$ 平面内的 X 单位速度且协变常数，并以此作为狄利克雷边界条件。为此我们需要 $\nabla_{\partial_V}X=0$，利用克里斯托费尔符号 $\Gamma^V_{VV}|_{U=U_0}$ (18) 在 $X^U(U_0,V)$ $X^V(U_0,V)$ 上，这意味着

$$\partial_V X^U=0,\quad \partial_V X^V+U_0\frac{r(U_0,V)+1}{r(U_0,V)^2}e^{-r(U_0,V)}X^V=0, \tag{35}$$

由此可求解 $r(U,V)$ (22) 的形式，从而得到

$$X^U_{const\ U_0}(U_0,V)=\frac{c_1}{2},\quad X^V_{const\ U_0}(U_0,V)=\frac{1}{2c_1}r(U_0,V)e^{r(U_0,V)}, \tag{36}$$

其中我们选择第二个积分常数，以便具有单位速度。我们沿直线 $(-4,V)$ 在 $c_1=10$ 条件下这样做，所得结果已用于上一节，如图 5 所示。我们采取了简便做法，在“水平”直线 $(U,6)$ 上施加诺伊曼零条件，但请注意，$\partial_V X^U_{const\ U_0}(U_0,V)$ 在 $U_0=-4$ 时于角点 $(-4,6)$ 处为零，这与沿直线 $(U,6)$ 的诺伊曼条件一致，因此在角点处没有不匹配。这就解释了我们如何选择贯穿第 3 节所使用的场 $X=X(0)$。

相反，如果我们想在恒定 V_0 的水平线（$U,\ V_0$）上施加狄利克雷边界条件，则沿向量场 ∂_U 的 X 协变性可转换为

$$\partial_U X^U+V_0\frac{r(U,V_0)+1}{r(U,V_0)^2}e^{-r(U,V_0)}X^U=0,\quad \partial_U X^V=0, \tag{37}$$

求解可得

$$X^U_{const\ V_0}(U,V_0)=\frac{c_2}{2}r(U,V_0)e^{r(U,V_0)},\quad X^V_{const\ V_0}(U,V_0)=\frac{1}{2c_2}. \tag{38}$$

例如，在（U，6）上施加狄利克雷边界条件，并将（$-4,\ V$）默认为诺伊曼边界条件，我们得到图 8 所示的结果。注意，如果我们尝试使用

$$c_1=c_2r(U_0,V_0)e^{r(U_0,V_0)}$$

使得（$U_0,\ V_0$）处的值相匹配，我们仍会在导数上出现不匹配，并且无法在角点处求解 $\mathrm{div}(X)=0$。因此，通过求解（34）由 X^U（$U_0,\ V$）及其 V-导数计算得到的 $\partial_U X^U$（$U_0,\ V$）$|_{V=V_0}$通常不会与$\partial_U X^U$（$U,\ V_0$）$|_{U=U_0}$相匹配。类似地，一般而言 $\partial_V X^U$（$U,\ V_0$）$|_{U=U_0}\neq\partial_V X^U$（$U_0,\ V$）$|_{V=V_0}$。事实上，同时施加狄利克雷边界条件通常会从角点产生折角伪影，因此无法采用这种方法。

回到我们沿一条边的一个狄利克雷边界条件（另一条边上为诺伊曼条件），我们可以使用边界场的其他来源。其思想是，边界场是全局数据，进而由体区中的 $\mathrm{div}(X)=0$ 确定 X。我们可以根据希望通过边界边规定的运动通量或通量密度，从物理上将其固定。这将随后按照 X 作为 $X(0)$引导体区中所有粒子的初始运动。我们可以选择边界

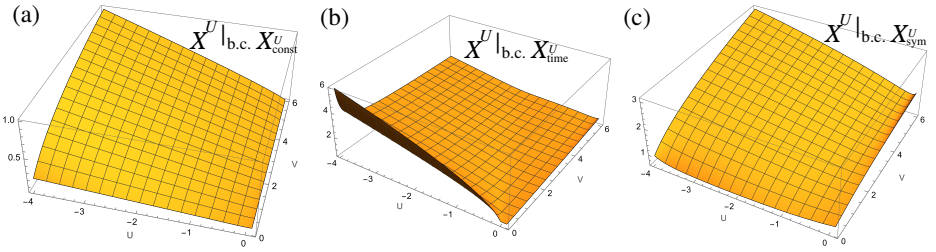

FIGURE 8. 其他满足条件的初始示例 $X = X(0)$，在内部满足 div(X) $= 0$，边界值分别为 (a) $X_{const,\ V_0}$ 在 (U，7) 上，(b)X_{time} 以及 (c) X_{sym} 在 (-4，V) 上。

值可随意选取，但上述协变常数情形的一个自然替代方案是注意到 ∂_t 是一个Killing矢量，因为该度量是稳态的。它并非单位速度，但可以调整为 $X_{time} = (\sqrt{1-\frac{1}{r}})^{-1}\partial_t$ 以成为单位速度。在由(16)进行坐标变换后，它具有分量

$$X^U_{time} = -\frac{U}{2\sqrt{1-\frac{1}{r}}}, \quad X^V_{time} = \frac{V}{2\sqrt{1-\frac{1}{r}}}. \tag{39}$$

随后，我们将其取值作为边界条件 (-4，V) 并求解。这样考虑是因为该处大多远离视界，也远离具有非平凡密度的隆起区域，也就是说，那里物质很少。因此，在这些边界处，我们可以预期，在没有物质的情况下，$X(0) = X_{time}$ 取默认的类时向量场。$X(0)$ 的解如图 8 所示。同样，如果我们还使用 X_{time} 在 (U，6) 处施加边界条件，就会从角点产生一个折点，这是人为造成的伪影。与此同时，在 (U，6) 处采用诺伊曼条件也不完全恰当，但这意味着 div(X) $\neq 0$ 会从角点 (-4，6) 传播到边界 (-4，V) 附近，只是这在 X_{time} 中不可见。

另一个可能值得关注的自然单位速度向量场是令 $X^U = X^V$，由此可得

$$X^U_{sym} = X^V_{sym} = \frac{1}{2}\sqrt{r}e^{\frac{r}{2}} \tag{40}$$

同样，也可以在边界上（-4，V）使用该方法来确定 div(X) $= 0$ 的解，所得结果与图 8 所示类似；若同时施加狄利克雷边界条件，也同样会出现角点伪影。对于图 8 的所有三种情况，我们都将 U 区域扩展到 $U_{max} = 0.1$（原则上还可以进一步扩展到区域 II），以表明视界处没有特殊问题。

注意，由于 X_{time} 和 X_{sym} 均为单位速度，它们也可以直接用于区域 I 中的 $X(0)$。这里，X_{sym} 的另一个优点是可以延伸到其他区域，而且在 $r = 0$处的曲率奇点也不奇异。对于所有场，我们都需要 $X(0)$ 至少在区域 I 中是未来指向的；对于单位速度场，这意味着

$$\frac{X^U}{U} < \frac{X^V}{V}, \quad i.e. \quad (X^U)^2 - r^2\frac{U}{2V\sqrt{-g}} > 0$$

其中第二种表述假设 $X^U > 0$。由此可以得出，在该区域的单位速率场中，正时间定向成立当且仅当X^U，$X^V > 0$。

4. Plots of analytic flows around a black-hole

仔细验证了我们新的测地流方法与实际测地线相比的表现后
，
现在我们已经可以利用它们来探索一些可能的物理学问题。我们已经看到，只要扰动区域是局域的，就可以将 $X(0)$ 取为一个普适的单一选择，而不受物质影响。在这种情况下，其演化 $X(s)$ 也独立于物质分布，因此 $\rho(s)$ 的密度流方程具有可加性，即双峰测地流是两个单峰测地流之和，对于 $\psi(s)$ 的振幅流也同样如此。$\rho = |\psi|^2$ 可能是一种新颖特征，这正是我们特别感兴趣的。对于不存在角向依赖且 $X(s)$ 没有角向分量的径向情形，振幅流的相应 $U - V$ 形式为

$$\dot{\psi} + X^U \partial_U(\psi) + X^V \partial_V(\psi) + \frac{1}{2}\left(\partial_U(X^U) + \partial_V(X^V)\right) + \frac{r(U,V)-1}{2r(U,V)^2} e^{-r(U,V)} \left(V X^U + U X^V\right) \psi = 0. \tag{41}$$

与前面一样，我们将首先结合式 (29) 和式 (31)，并给定一些初始 $X(0)$，求解速度流 $X(s)$。得到令人满意的 $X(s)$ 后（可能需要进行平滑以降低数值噪声），我们将以低分辨率对其重新采样，以便在使用式 (41) 或式 (32) 分别演化初始数据 $\psi(0)$ 或 $\rho(0)$ 时加快计算。我们使用了 Mathematica NDSolve；在流演化过程中，它至少需要一个空间边界条件，因此我们在 $U = U_{min}$ 边界处令 $X(s) = X(0)$ 满足狄利克雷边界条件。对于 $\psi(s)$ 或 $\rho(s)$，默认情况下，我们在全部四个边界上采用齐次狄利克雷边界条件，$U = U_{min}$，U_{max}和 $V = V_{min}$，V_{max}。

4.1. 穿过视界并趋近奇点。使用克鲁斯卡尔-塞凯雷什坐标的一大优势是，它们允许平滑地穿过视界，这一点从图2中的一簇测地线已经可以看出。现在，我们用形式体系展示凸起穿过视界的流动。这里，所考虑的区域为 $U \in [-1, 1-\delta]$ 和 $V \in [-0.5, 1-\delta]$，其中$\delta = 0.0000001$ 允许涵盖所有四个区域，并在(U_{max}, V_{max})角趋近 $r = 0$ 奇点。对于初始向量场，我们取(40)式的 $X(0) = X_{sym}$，它不满足 div$(X) = 0$，但其优点是定义范围很广。随后，我们在固定 $U = -1$ 边界的条件下对其进行演化，结果见图9(a)。计算时采用了 res=0.0001，可以看到 $V = -0.5$ 边界处出现了少量数值噪声。请注意，也完全可以像之前那样，通过在 $U = -1$ 边界处取边界值1.1来求解(34)，但由此得到的 $X(0)$在奇点(1,1)附近会形成一个 X^U 尖峰，随后在很短时间内转变为一个小值，定性上确实与使用 X_{sym} 的情况相同。

为提高速度，接下来我们以三个变量的间距均为 0。01 对 $X(s)$ 进行重新采样，这也会减少后期可见的噪声。与此相对，我们演化位于 IV区、中心位于 $(-0.6, -0.2)$ 的局部密度 $\rho(0)$ 高斯凸起，并$\sigma = 0.05$发现，在演化过程中，该凸起平滑地穿过视界，如图 9(b) 所示，从 IV区移动到区域 I，随后移动到区域 II（我们展示了 $s = 0,$ 0。5、 1 时的快照）。我们使用了 res=0.0005；作为对数值方法的完整性检查，在所绘制的范围内，ρ 对 $\sqrt{-g}$ 测度的积分总值始终保持不变，误差不超过 0。007%。还可以选择 $\rho(0)$ 的适当初始位置，以展示凸起从 IV区移动到区域 III，随后移动到区域 I 的过程。

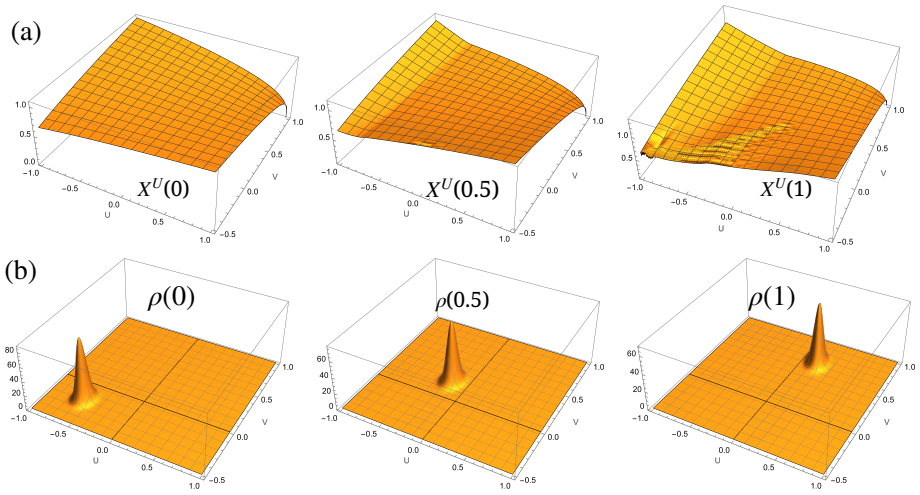

FIGURE 9. 视界穿越图，分别对应 (a) 演化后的 $X^U(s)$，以及 (b) $\rho(s)$ 的演化：自 $s=0$ 的 IV区 出发，经 $s=0.5$ 移至区域 I，并于 $s=1$ 抵达区域 II，其中 $U=0$ 与 $V=0$ 视界以黑色标出。

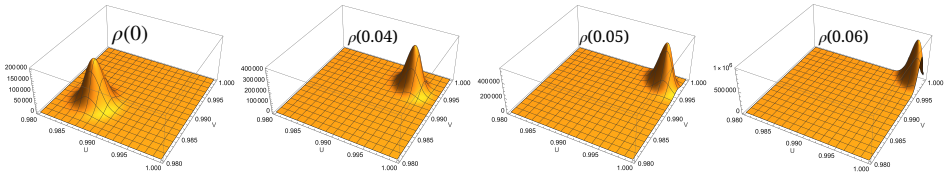

FIGURE 10. 放大显示趋近奇点的过程，该奇点在 (1,1) 处与我们的区域相接。大约从$s=0.05$ 开始出现概率质量损失，因为凸起向 (1,1) 两侧散出画面。

通过从 $\rho(1)$ 重新进行一次演化，可以继续区域 II 内的流动，直到其离开区域的 V_{max} 边界，但不会发生任何特别的情况（最终会在演示范围之外撞上奇点）。因此，我们在图10中展示了接近奇点的局部放大图，初始状态为中心位于 (0.986,0.986) 的高斯凸起，并带有 $\sigma=0.0015$。此时区域为 U，$V\in[0.98,1-\delta]$，其中我们使用上述通过演化 $X(0)$ 得到的$X(s)$，但现在将其限制在这个较小的区域内，并以间距 0。0005 对该 $X^U(s)$ 重新采样，用于 s，以及以 0。0002 的间距对 U，V进行采样，从而加快 $\rho(s)$ 偏微分方程的求解，而不会产生任何可见变化。对于 $\rho(s)$ 演化，我们还设置了 res=δ，并在 $U=U_{max}$ 或 $V=V_{max}$处取消狄利克雷零边界条件。奇点是一条双曲线，但在 (1，1) 角处与我们的区域相交。可以看到，凸起开始变平，其部分概率质量从两侧离开演示范围。它可能沿着双曲线运动，但要清楚地观察这一点，需要使用非方形区域（相反，我们可以看到截面）。

4.2. 波包振幅流。 正如我们在引言中所解释的，我们也可以使用复波函数 ψ，而不是密度 ρ。我们用同一个 $X(s)$来演示这一点；在第 3.2 节中，我们曾用它处理单个凸起。正如我们在引言中看到的，如果 ψ 具有初始极分解，$\psi=\sqrt{\rho}e^{i\theta}$ 那么相位 θ 就会按照式 (4) 演化，保持对流恒定。例如，如果像之前那样令 $\psi(0)$ 为单个高斯凸起，但带有一个相位因子，那么

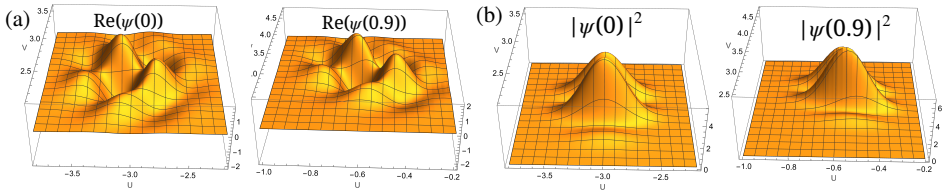

FIGURE 11. 由一个高斯凸起和另一个相距一个标准差的凸起组成、具有不同相位的偶极波包的 Re$(\psi(s))$ 演化及其 $\rho = |\psi(s)|^2$ 局部放大图。基准位置按第 3.2 节中的方式演化，波包宽度收缩，但保持其结构。

$|\psi|^2 = \rho$ 的演化与之前完全相同，而 θ 则在 Re(ψ) 和 Im(ψ) 上施加波状结构；这种结构会使其形状发生畸变，但随着 s 增大，通常仍能保持其形状。
复杂波函数也有这种情况，这里我们以一个偶极波包为例来说明。该波包由两个相距一个标准差、相位不同的高斯凸起组成，即

$$\psi(0)(U,V) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{-g}Z}}\left(e^{8\mathrm{i}(U+V)}e^{-\frac{(U-U_0)^2+(V-V_0)^2}{4\sigma^2}} + e^{8\mathrm{i}(U-V)}e^{-\frac{(U-U_0)^2+(V-(V_0-\sigma))^2}{4\sigma^2}}\right).$$

其基准位置与第 3.2 节中单个凸起的基准位置相同，并以相同方式演化；图11展示了 Re(ψ) 演化的细节，Im(ψ) 也有类似的图。现在的区别在于，密度 $\rho = |\psi|^2$ 是不同频率模式之和，因此会像任何波包一样呈现干涉图样，而不再只是一个高斯分布，图中也展示了这一点。请注意，实际计算中我们省略了常数Z 归一化因子。不过，数值计算的一个有效完整性检验是：使用 $\sqrt{-g}$ 测度正确计算时，范数在整个演化过程中保持不变；在 res=0.0005 下计算的演化中，数值误差不超过 0.7 %。通过 $s = 0.9$ 可以看到以波纹或条纹形式出现的微小数值噪声；下一节将以凸起碰撞为例，对这类噪声作更详细的研究。它们的波长约为 40 res，在 res=0.001 下会更宽，但振幅相近。

4.3. 振幅凸起碰撞与密度凸起碰撞。 现在我们来探讨如何构造两个 ψ 相互碰撞的波包，或两个密度 ρ凸起。显然，单条测地线可以发生碰撞，而每条测地线也可能属于各自的测地线束，正如第 3.2 节所见，我们可以将其建模为密度流 $\rho(s)$ 和测地速度流 $X(s)$。我们也可以像刚才所见那样，将此推广到波包流 $\psi(s)$。然而，要让两个这样的流发生碰撞，我们就会遇到一个根本问题：速度场该取哪一个，是一个“粒子”的速度场，还是另一个“粒子”的速度场？原则上，我们确实可以构造这样的统计束，并观察复合 $X_{stat}(s)$呈现何种形态。但这需要比我们所用的粗略估算精细得多的模型，而且只会把问题推迟：即便采用这样的建模，当两个沿不同轨迹运动的粒子交叉时，物理上相关的 X 仍是多值的。若不解决这一问题就插值为光滑向量场，结果将严重依赖插值方法，也无法反映物理学。一个解决方案是以某种方式使 X 本身具有量子性质，从而能够进行叠加；更准确地说，可以考虑某种同时包含每个粒子的振幅和速度场的张量积系统。这个问题或可留待他处探讨。

与此同时，在当前形式体系中（其中 $X(s)$ 是一个经典实向量场），我们采取的方法是对两种流的初始 $X(0)$ 进行插值，然后让

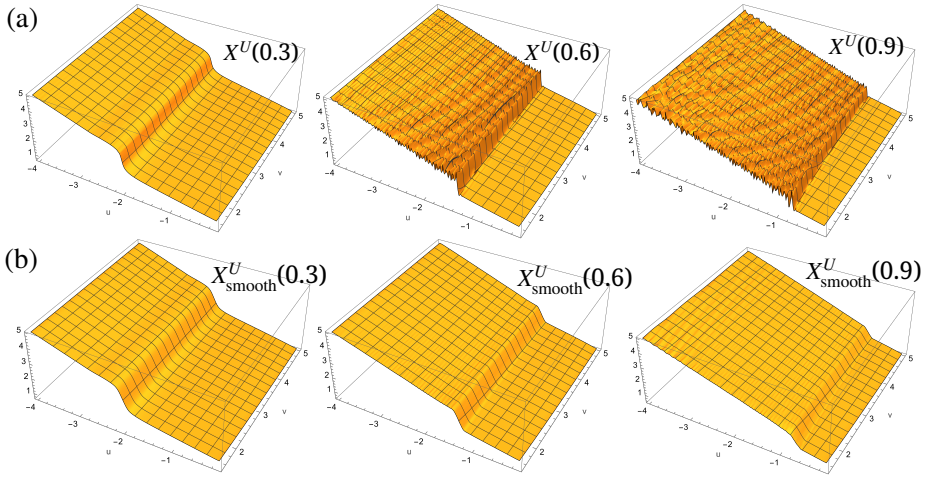

FIGURE 12. 双峰碰撞所需的 (a) $X(s)$ 图，计算分辨率为 res=0.003，以及 (b) 平滑后的同一图。

这个单一向量场在 s 的作用下作为测地速度场演化。鉴于上述原因，这种做法的物理解释并不清楚（基本上，我们不会把两个粒子或两个粒子团视为测地流），但我们可以选取任意初始 $X(0)$，因此可以这样做。不过，这种做法的缺点是，随着系统演化，如果某个时刻两个波函数或密度近似重合，那么它们之后也必然继续以近似相同的方式演化，因为只有一个（共享的）速度向量场 X。这意味着，我们可以并且将会对两个粒子“凸起”相遇的情形建模，但此后它们往往会一起移动，而不是彼此真正穿过。它们并非绝不可能穿过彼此，例如其中一个的形状与另一个迥异时就有可能，但要展示这种情况，似乎需要远高于现有水平的分辨率。

4.3.1. 插值速度场的演化与平滑。 具体而言，我们令“粒子 1”为以 $(-3.5,2.5)$ 为中心的正 ψ-凸起，且 $X_1(0)$ 与图 5 中所用的类型相同。令“粒子 2”为以 $(-2.6,2.2)$ 为中心的负 ψ-凸起，且$X_2(0)$ 在 $U = U_{min}$ 上取常数值 3，即速度差异很大。然后我们用

$$X^U(0) = \frac{1}{2}(1 - \tanh(3(U+3)))X_1^U(U,V) + \frac{1}{2}(1 + \tanh(3(U+3)))X_2^U(U,V)$$

作为我们的初始速度场。我们将 X^V 从 X^U 设定为单位速度。随后，我们使用 res=0.003 演化 $X(0)$，结果如图 12 所示。我们看到，两个区域之间的过渡区向 $U = 0$ 视界移动。这里， V 的范围是从 $V_{min} = 1.5$ 到 $V_{max} = 5$。不过，我们也看到，随着 s增大，解会迅速出现数值噪声/波纹。接近 $V = 0$ 视界时，波纹的振幅也会增大，因此我们设置了 $V_{min} = 1.5$以减弱其影响。然而，这些波纹并非由区域边缘（我们在那里不施加任何条件）引起，因为即使设置 $V_{min} = 0.5$，在内部给定的 V 处仍能得到基本相同的截面。我们认为这些波纹是数值伪影，应像第二行所示那样进行平滑。平滑处理针对每个 s 进行：先在均匀的（U， V）网格上计算 X^U，对每个二维数据集应用固定小半径的高斯卷积，然后对过滤后的数据重新插值。结果如X^U_{smooth}（s）所示。

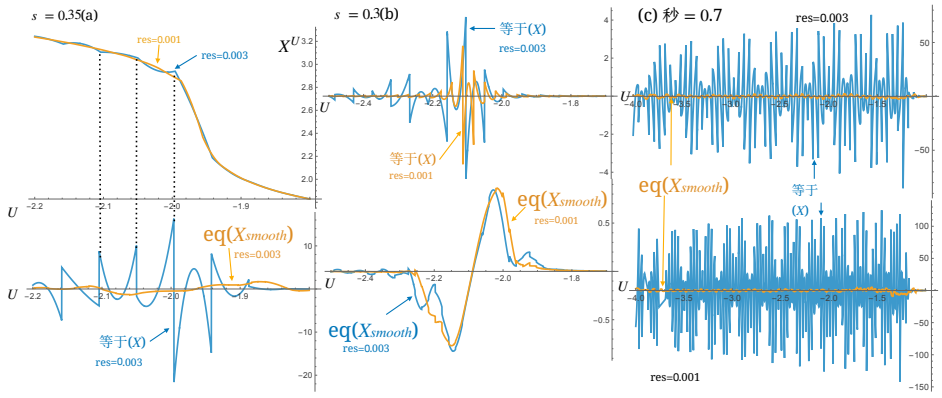

FIGURE 13. 横截面在 $V = 3.25$ 显示了改进的准确性：在 (a) 中将分辨率从 res=0.003 更改为 res=0.001，位于$s = 0.35$。分段解在分段边界处出现残差尖峰，但对于较小的 s，如 (b) 中 $s = 3$ 所示，在更高分辨率下残差尖峰会减小。我们还可以看到平滑对过渡区域斜率的影响。但在后期时刻，如 (c) 中 $s = 0.7$ 所示，在更高分辨率下残差尖峰反而更加明显。

图13阐明了这些波纹的数值成因。从 (a) 部分可以看出，在 $s = 0.35$ 处，分辨率为 res=0.003 时的 X^U 存在尖点，导数在尖点处不匹配；这是因为解是分段构造的，每段约为 15 res。分辨率更高、为 res=0.001 时，这些波纹则几乎不可见。在解的下方，我们绘出了残差 eq(X)，即 (1) 式左端；对于一个解，它应为零。由于导数失效，eq(X)在分段边界处无法得到恰当定义，因此这里出现了尖峰。Mathematica 没有报错，但显然，该解旨在保持连续，却并非可微。另一方面，eq(X_{smooth})更为合理，表明平滑后我们得到了一个不错的解。请注意，我们没有研究重新采样后的 X_{smooth}，它因重新采样而产生了更多（但程度相当）的数值伪影。在 (b) 部分，我们回到 $s = 0.3$，并确认分辨率更高的 res=0.001 确实具有更小的残差。然而，eq(X_{smooth})并未减小，而是趋于一种特定的横向S形。这是因为平滑处理也平滑了 X^U 中的陡降，导致平滑后的 X_{smooth} 在过渡区域不完全满足速度方程；不过，这是已知且可以修正的误差（例如，我们可以只在过渡区域以外进行平滑）。除这一问题外，我们看到，分辨率越高，速度流方程的求解精度也越高。

这适用于较小的 s，但到图中(c)部分的 $s = 0.7$ 时，我们已进入另一种状态：对于更精细的分=0辨率，解中的波纹振幅相近（但波长更短）。事实上，随着分辨率提高，方程(X)中的尖峰反而增大，而方程(X_{smooth})随分辨率变化不大。平滑后它比之前小得多，但与 X^U的大小相比仍不算小，因此即使经过平滑，我们得到的解也只是中等程度地好，而且无法通过提高分辨率来改进。还可以进一步平滑（使用更大的平滑半径），但这会在过渡区域造成更大的误差。若要得到更好的解，一种方法是仅在足够小的 s 区间内进行演化，以免后期出现混沌行为；然后进行平滑，并将其作为下一个此类区间的初始状态，依此类推。因此，原则上可以通过在多个区间内减少平滑，构造出在所有时刻都更严格满足(1)的光滑解，但从远处看，它并不

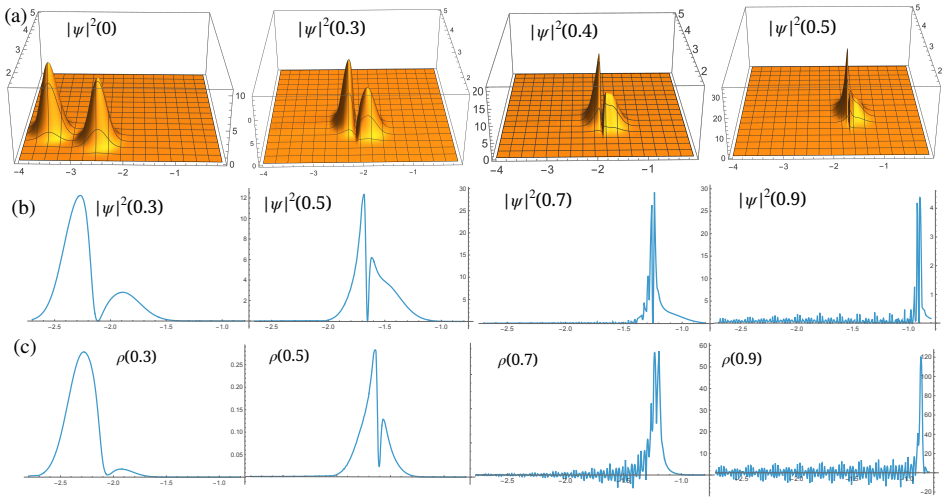

FIGURE 14. (a) 两个“粒子”凸起相对于$X(s)$演化，见第4.3.1节。除 $s = 0.5$外，所示的演化 $|\psi|^2$ 情形中，一个 ψ凸起为负，其定性特征与两个高斯凸起以及演化 $\rho(s)$的情形相似；(b) 对于符号相反的初始 ψ凸起碰撞形成偶极子的情况，在 $V = 2.9$ 处的 $|\psi|^2$ 截面；(c) 初始 ρ凸起碰撞形成另一个凸起时，在 $V = 3.3$ 处的截面。两种情况下拖尾的峰值或波纹均为数值噪声。

预期会与图 12 第二行看起来有很大不同，只是过渡会稍微陡峭一些，因为平滑使其变得平缓。

4.3.2. 振幅凸起演化为偶极子与密度凸起的演化 ψ 。 ρ 本节求解相对于前一节中得到的平滑 $X(s)$的 ψ 演化方程(3)，但将其重新采样为s 方向上间隔0.02、 U方向上间隔0.1, V。此举纯粹是为了加快本节数值解的计算，同时不会过多改变 X^U 。其中包含一个沿 X^U 朝 $U = 0$ 视界移动的阶跃；完成重新采样后，它与图 12(b) 完全相同，只是看不到波纹。

相对于这个速度场，我们将初始的 $\psi(0)$ 取为两个相位不同的凸起的叠加（为求简便，我们选择保留 ψ 实数，因此一个凸起为正，另一个为负）。凸起中心的位置经过设定，使得速度在两个位置分别以 $X(0)$ 为初值的经典测地线会在 $s = 0.65$ 附近相遇并交叉。有趣的是，实际情况并非如此——两个“粒子”确实彼此靠近，但碰撞时却转变为一个实偶极子，并继续演化。图14(a)展示了碰撞前的过程，图14(b)则从 $s = 0.3$ 开始展示了 $V = 2.9$ 处的截面。作为完整性检查（33），在此处取 $\rho = |\psi|^2$ 后，我们发现它在整个讨论的 s 范围内演化时保持恒定，偏差不超过 2.8%。请注意，正负ψ凸起不可能在保持形状的同时彼此“追上”，因为这会因异号部分重叠而大幅降低范数。截面图像显示，在所用分辨率 =00.0005 下存在一些背景拖尾数值噪声，应予忽略。

相比之下，我们展示了两个密度凸起的 ρ演化，其中每个凸起都是前一组波函数凸起的 $|\psi_i|^2(0)$。（这等同于两个符号或相位相同、而非相反的波

函数凸起。）请注意，这个初始的 $\rho(0) = |\psi_1|^2(0)+|\psi_2|^2(0)$ 与 $|\psi_1+\psi_2|^2(0)$ 并不完全相同，因为初始凸起略有重叠；这反而正好，因为 ρ和 $|\psi|^2$ 满足相同的微分方程，所以如果它们的初始值完全相同，就不可能有不同的演化。由于密度也具有可加性，结果看起来就像一个密度凸起追上另一个，近似于图14(a)中的情形；但这一次，从图14(c)的截面中可以看到，它们合并成了一个凸起。请注意，$s = 0.3$ 处的凸起大小相近，但看起来并非如此，因为第二个凸起位于更靠下方，远离 $V = 3.3$ 截面。我们采用了相同的分辨率 res=0.0005，但演化中的噪声更大。请注意，尾随的波纹只能是数值伪影（而且在分辨率较低时确实更大），因为 ρ 在演化过程中不可能变成负值。相对于该测度的总质量在演化过程中再次保持恒定，达到 4.4%，这可作为完整性检查（33），考虑到噪声的大小。

请注意，两个尚未完全碰撞的密度凸起，在一定程度上仍可能从密度分布的角度看起来像一个偶极子。相比之下，如前所述，波函数的情形不会出现正、负凸起恰好重叠的情况；而在我们的情形中，这一问题由偶极子结果解决。我们尚不完全清楚这两种情形之间的差异如何转化为新的物理预测，因为波函数通常并不定义在整个时空上，而且量子力学通常也不是相对于某种集体固有时 s来描述的，而这里正是如此。不过，这些问题属于诠释层面；若能克服这些问题，我们就有望检验这样一个假设：底层存在波函数振幅，而演化并非密度的演化。

5. Geodesics on quantum phase space

到目前为止，我们只研究了黑洞周围的经典几何，但采用的是量子测地流的语言；此外，我们还考虑了 $\rho = |\psi|^2$ 的可能性，其中 ψ 满足式（3）。然而，尽管这个方程是一阶方程，它并不是薛定谔方程。若要研究类似后者的情形（但相对于 s演化），则应转而考察海森堡代数[6] 上的量子测地流，或者一般地考察微分算子代数[7] $\mathcal{D}(M)$上的量子测地流。在本节中，我们使用克鲁斯卡尔-塞凯雷什坐标 U, V, θ, ϕ更详细地重新探讨黑洞情形，正如第2节中所回顾的那样。

5.1.克鲁斯卡尔-塞凯雷什坐标中的海森堡绘景演化。我们首先使用（18）计算以 $r_s = 1$ 为单位的缩并克里斯托费尔符号 Γ^μ，得到，

$$\Gamma^U = -\frac{U}{r(U,V)}, \quad \Gamma^V = -\frac{V}{r(U,V)}, \quad \Gamma^\theta = -\frac{\cot\theta}{r(U,V)^2}, \quad \Gamma^\phi = 0. \tag{42}$$

现在，利用上面的 Γ^μ 表达式，我们可以很容易地从（9）式得到四动量，

$$\begin{aligned} p_U &= \frac{1}{r(U,V)^2} e^{-r(U,V)}(\lambda V - 2m\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}s}), \quad p_V = \frac{1}{r(U,V)^2} e^{-r(U,V)}(\lambda U - 2m\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}s}), \\ p_\theta &= -\frac{\lambda}{2}\cot\theta + m\, r(U,V)^2 \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}, \quad p_\phi = m\, r(U,V)^2 \sin^2\theta\, \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}s}. \end{aligned} \tag{43}$$

类似地，（10）式中这些四动量的流方程为，

$$\begin{aligned}
-m\frac{dp_U}{ds} &= \frac{\lambda}{2r(U,V)}p_U + \frac{V}{2r(U,V)}(1+r(U,V))p_V p_U \\
&\quad + \frac{\lambda V}{2r(U,V)^3}e^{-r(U,V)}(Up_U+Vp_V) + \frac{V}{r(U,V)^4}e^{-r(U,V)}p_{sph}^2, \\
-m\frac{dp_V}{ds} &= \frac{\lambda}{2r(U,V)}p_V + \frac{U}{2r(U,V)}(1+r(U,V))p_V p_U \\
&\quad + \frac{\lambda U}{2r(U,V)^3}e^{-r(U,V)}(Up_U+Vp_V) + \frac{U}{r(U,V)^4}e^{-r(U,V)}p_{sph}^2, \\
m\frac{dp_\theta}{ds} &= \frac{\lambda}{2r(U,V)^2\sin^2\theta}p_\theta + \frac{\cot\theta}{r(U,V)^2\sin^2\theta}p_\phi^2, \\
m\frac{dp_\phi}{ds} &= 0,
\end{aligned} \tag{44}$$

其中球面动量 p_{sph}^2 定义为

$$p_{sph}^2 = p_\theta^2 + \lambda\cot\theta\, p_\theta + \frac{p_\phi^2}{\sin^2\theta}. \tag{45}$$

此外，总动量为，

$$-p_{tot}^2 = \frac{\lambda}{r(U,V)}(Up_U+Vp_V) - r(U,V)e^{r(U,V)}p_U p_V + \frac{1}{r(U,V)^2}p_{sph}^2. \tag{46}$$

将p_μ 表示为演化算符；但若将它们视为经典实数并令 $\lambda=0$，那么令 p_{tot}^2 为常数，就会得到单条测地线的一阶形式方程，而 p_{sph}^2 是守恒的角动量。算符公式可用于埃伦费斯特定理的应用，见 [7], ；不过，我们主要回顾这些公式，是因为它们将 ds解释为固有时。现在，我们转而关注相应的薛定谔图像。

5.2. **克莱因-戈尔登流作为伪量子力学**。我们关注克莱因-戈尔登流下径向波函数 $\phi=\phi(U,\ V)$的演化。这里的克莱因-戈尔登算符由薛定谔表象给出，其中p_μ 对 (46) 中的 $\underline{x^\mu}\in\{U,V\}$ 起到 $\lambda\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ 的作用，且 $\lambda=-\mathrm{i}\hbar$ 和

$$-\lambda\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}s} = \frac{-p_{tot}^2}{2m}\phi \tag{47}$$

可明确地还原出 (8)：

$$-\mathrm{i}\frac{\partial\phi}{\partial s} = \frac{\hbar}{2m}\left(\frac{1}{r(U,V)}(U\frac{\partial\phi}{\partial U}+V\frac{\partial\phi}{\partial V}) - r(U,V)e^{r(U,V)}\frac{\partial^2\phi}{\partial U\partial V}\right). \tag{48}$$

与史瓦西坐标 ($t,\ r$) 不同，这里没有显式的时间方向，但能量守恒仍然成立。我们利用这一点，要求波函数 ϕ 是 Killing 矢量场 ∂_t (39) 的特征函数，其形式为 $e^{\mathrm{i}pt}$；利用 (16) 可将其写为：

$$(-\frac{U}{V})^{-\mathrm{i}p}\psi(s,z) \tag{49}$$

在 $U,\ V$坐标中，取 $z:=UV$（随后我们在其他区域也采用这一形式）。这里，p 决定守恒能量，而 ψ 仅取决于 z，其中在区域 I、III 中 $z<0$，在区域 II、IV 中 $z>0$。$U=0$ 视界位于 $z=0$。采用这种场的形式后，克莱因–戈尔登流（48）变为：

$$-\mathrm{i}\frac{\partial\psi}{\partial s} = \frac{\hbar}{2m}\left(\frac{2z}{r(z)}\psi' - r(z)e^{r(z)}\big(\frac{p^2}{z}\psi+\psi'+z\psi''\big)\right), \tag{50}$$

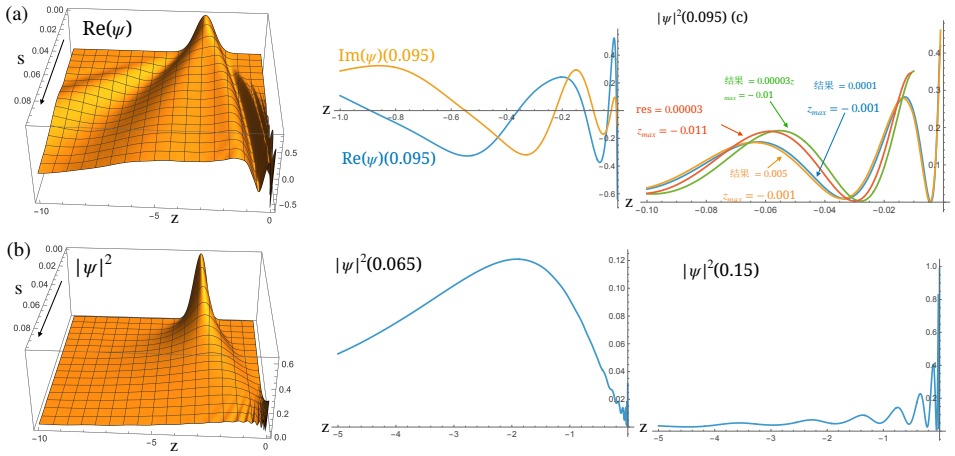

FIGURE 15. 当耗散高斯波包的扰动区域接近 $U = 0$ 视界时的视界模。（a）展示了 Re($\psi(s,\ z)$) 的演化，而（b）展示了 $|\psi(s,\ z)|^2$ 的演化。我们还展示了模开始出现时（约在$s = 0.06$ ）以及稍后在 $s = 0.15$ 时的横截面；到那时，视界模已经取代了高斯凸起。（c）检验了改变分辨率和改变右边界 z_{max} 时的稳健性。

其中，撇号表示关于 z 的导数，且 $r\ (z)\ = 1 + W\ (-z/e)$ 。我们还使用从（$U,\ V$）到（$z,\ w$）的坐标变换的雅可比因子，其中$w := U/V$，并由（24）得到有效测度:

$$\frac{r(z)e^{-r(z)}}{|w|}\mathrm{d}z\mathrm{d}w \tag{51}$$

对于原始场（49）上的 $L^2(M)$-范数。遵循 [7] 的策略（这也大体上是量子力学推导中的策略），我们随后得到一种“伪量子力学”：相对于L^2-内积在 $\psi(z)$ 上完备化，此时测度为 $r(z)e^{-r(z)}\mathrm{d}z$ ，并使用单个变量 z 和“时间” s 中传统量子力学的方法。当存在角变量时，也可以采用同样的做法，但我们将重点放在径向理论上。需要注意的是，尽管在结构上存在相似之处，但由于演化是相对于集体固有时 s 而非给定的实验室时间进行的，我们并不是在通常意义上进行真正的量子力学。

作为一个具体例子，我们设定 $p = -1$ ，并在很大的负 z_{min} 处采用边界条件 $\psi(s,\ z_{min}) = 0$ （即远离黑洞事件视界）。为方便起见，我们展示 $\hbar = m = 1$ 的结果，并从以 $z = -3$ 为中心、满足 $\sigma = 0.5$ 的初始高斯波函数开始。对于所考虑的 s 范围，我们将 $z_{min} = -30$ 设在远离任何扰动区域的位置，并将 $z_{max} = -0.001$ 设定为在区域 I 的视界上方附近进行研究。使用 Mathematica 得到的结果（res =0.0001）如图 15 所示，其中绘出了（a） ψ 的实部和（截面上的）虚部，以及（b）密度 $|\psi|^2$。我们看到，随着 s 增大，高斯峰向视界移动，并按预期以波状方式耗散；但当扰动区域在约 $s = 0.065$ 处接近视界时，会产生“视界模”，并随着 s 增大而增强，直至 $s = 0.15$ 时，原始高斯波函数被黑洞“吞噬”，完全转化为视界模。这重现并证实了在施瓦西（t, r）坐标中于 [7] 发现的这一新颖现象。我们还如 [7] 中所示证实，波函数熵（即作为概率密度的 $|\psi|^2$

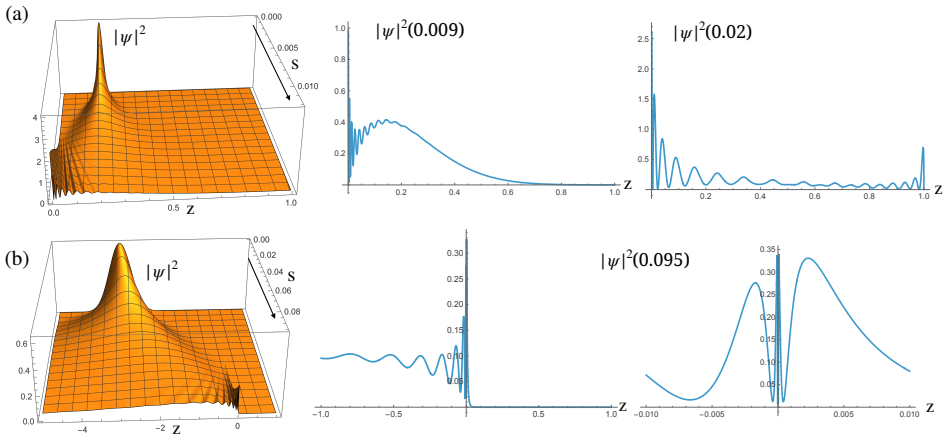

FIGURE 16. (a) 事件视界内的高斯凸起会产生视界模，如同视界外凸起的镜像。(b) 为讨论之便，展示的假定解穿过了视界。

）在整个过程中持续增加，而期望值$\langle z\rangle$ 实际上变得更加负，即由于视界模的影响而远离视界。提高系统能量，即增大 p，会使视界模在更小的 s 处出现。作为完整性检查，我们还验证了采用上述测度的 $|\psi|^2$ 在演化过程中保持不变，变化幅度约为 0.06%。

利用克鲁斯卡尔-塞凯雷什坐标，我们还可以更仔细地考察接近视界时的这些视界模。这里，图 15 的 (c) 部分检验了分辨率变化下的数值稳健性。事实上，随着我们增大 res（对应于更粗的分辨率），直到 res $>|z_{max}|$之前都看不出明显变化；也就是说，只要我们不试图过于接近视界，就不会有明显变化。图中展示了 $z_{max}=-0.001$和 res=0.005 与 res=0.0001 的情况。改变 z_{max}不会影响远离视界处的视界模（当负 z较大时，曲线趋于重合），但会在更靠近视界处显著改变相位和波长。我们发现，当 $|z_{max}|>1000$ res 左右时，这种依赖性会减弱。我们展示了 res $=0.00003$ 和 $z_{max}=-0.01$ 与 $z_{max}=-0.011$的结果。我们还考察了残差（方程未能得到满足的表象），但与第4.3.1节不同的是，这里在固定的 z 下，残差在 res 较小时确实趋于零（此外还存在其他形式的数值噪声，例如机器精度带来的噪声）。图示分辨率下的残差并不算小，但如前所述，这是因为解是由分段构造的，而各分段边界处的导数并不匹配。另一方面，对于固定分辨率，随着我们接近 $z=0$，残差会增大，这证实了如果试图过于接近视界，结果就不可靠。这可归因于式 (50) 中的 $1/z$ 项；随着我们接近视界，该项会导致越来越快（但显然有界）的振荡。

最后，鉴于 Kruskal-Szekeres 坐标在 $z\geq 0$ 处同样适用，我们可以尝试在黑洞内部求解薛定谔型方程。图 16(a) 显示了内部高斯凸起的类似行为，但视界模产生于视界内侧。我们使用了相同的基础分辨率 res$=0.0001$ ，但现在为$z_{min}=0.001$ 和 $z_{maz}=1$。高斯峰在被视界吸收时实际上会略微向视界移动。类似的问题在于，由于从 $z>0$ 趋近视界时振荡越来越快，现在 z_{min} 不能太小，否则无法进行可靠的数值计算，而且即使在

高分辨率下，其取值也存在一定依赖。我们没有将其绘制出来，但已核实 $\langle z\rangle$ 始终增大，即远离视界并朝向黑洞中心移动。同样，态熵大约增长至 $s=0.017$，随后到 $s=0.02$ 时开始略微下降。我们将后一种行为归因于 $z=1$ 处的非物理模；当熵的增长速率放缓时，这些模在 $s=0.014$ 开始变得可见。这些模，如图 16(a) 中 $s=0.02$ 处的最后一幅图所示，并非物理的，因为它们是由人为施加在该处的 $\psi(z_{max})=0$ 边界条件上的反射所产生的伪迹。我们有意将图展示到 $s=0.02$，以呈现这些模，但物理过程只应取到扰动区域明显触及 $z=1$ 边界之前。

与此同时，图 16(b) 试图展示我们最初在外部设置的高斯凸起，但现在还通过设置 $z_{max}=1$ 观察黑洞内部。第二个截面是视界附近的特写。将图放大 10 倍后，图像看起来相似（但镜像对称性更强）。这些图应谨慎看待，因为尽管 Mathematica 声称能够毫无问题地求出演化结果，但我们从对左侧（及右侧）的分析中已经知道，如果将积分区域从任一侧延伸得过于靠近视界，数值演化就不稳定。因此，虽然这些图似乎表明视界模会激发视界内部的镜像模，但这可能是离散化造成的影响：离散化会截断当我们接近$z=0$ 时无限快的振荡，并在分辨率尺度上有效地平滑图像。

这项数值研究对连续理论的启示是，固定能量扇区中的克莱因–戈尔登流解（即我们所称的伪量子力学）在视界处不可微分，因为视界模在接近视界时具有越来越短的波长。这些模源于一个波包（在我们的例子中，最初是一个高斯峰）向视界靠近；经过有限时间 s 后，原始场被吸收，并由视界模取代，如 [7]所示。这些模似乎还会激发视界另一侧的镜像模，但这可能是数值假象，因为我们无法在不模糊视界两侧无限短波长的情况下进行跨越视界的数值演化。然而另一方面，时空很可能并非连续的，并且在普朗克尺度上可能存在某种离散性／非交换性，这是由量子引力效应[15, 10, 16]导致的。从上述计算来看，这或许能平滑 $z=0$处的无限频率，基本上将其截断在普朗克尺度，使被吞噬波包的信息最终留存于视界处某种“皮层”之中。这种“皮层”与 [17]中较早采用的非交换黑洞波算符方法处于大致相同的范畴。这些论述也可能与 [7] 中的“原子”态有关；这些态被定义为演化（50）的有界定态模（即克莱因–戈尔登方程的实际解）。值得研究的是，这些模能否穿过视界，以及黑洞内部是否也存在原子模。接下来我们将讨论这一点。

5.3. 克莱因-戈登波算子的原子模态。 解决这一相空间系统中测地流的另一种方法，是考虑克莱因-戈登算子（46）的本征模态E_{KG}，

$$\frac{-p_{tot}^2}{2m}\phi = E_{KG}\phi, \tag{52}$$

这类似于求解相应的「定态」薛定谔方程。由于该系统除了我们之前看到的 ∂_t 之外，还存在另一个 Killing 矢量场 ∂_ϕ （对应角动量守恒），因此我们利用这类本征函数

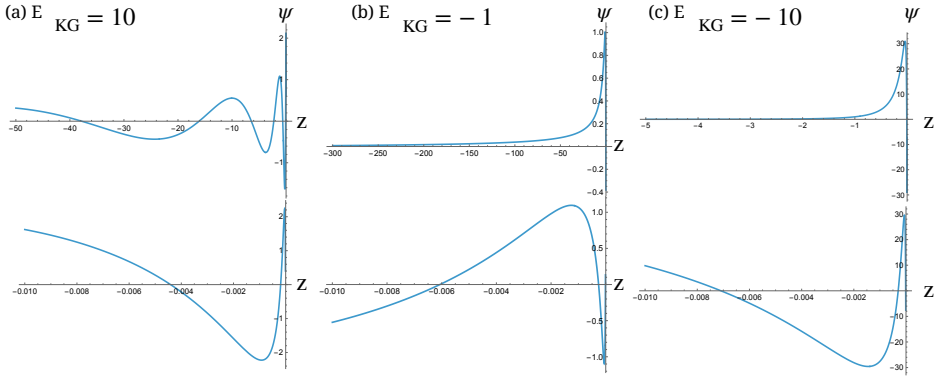

FIGURE 17. 视界外的 Klein-Gordon 模式：顶行显示 E_{KG} 的三个取值，底行显示视界附近的放大图。

将 $\phi(U,\ V,\ \theta,\ \phi)$ 写成可分离的形式，如下：

$$(-\frac{U}{V})^{-ip}\psi(s,z)e^{in\phi}F(\theta). \tag{53}$$

经过涉及变量分离的常规计算，可得

$$\frac{2mE_{KG}}{\hbar^2}\psi+\left(\frac{2z}{r(z)}\psi'-r(z)e^{r(z)}\left(\frac{p^2}{z}\psi+\psi'+z\psi''\right)\right)=\frac{l(l+1)}{r(z)^2}\psi, \tag{54}$$

对于某个常数参数 l 以及 $\mathbb{R}^3$上的拉普拉斯方程，即

$$\left(l(l+1)-\frac{n^2}{\sin^2\theta}\right)F+\cot(\theta)F'+F''=0, \tag{55}$$

其中，F 上的撇号表示关于 θ的导数。后者由勒让德多项式 $P_l^n(\theta)$求解，其中 $n=0,\ \ldots\ldots,\ l$ 是众所周知的球谐函数 $Y_{l,\ n}(\theta,\ \psi)$ 的一部分：$=P_l^n(\theta)e^{in\phi}$。文献 [7] 已表明，该系统与氢原子的量子力学模式具有相似性。在这里，我们取参数 $\hbar=m=-p=1$，并在本例中通过临界值 $E_{KG}=-\frac{p^2}{2m}=-\frac{1}{2}$ 将不同类型的模分开，以求解方程（54）。这与 [7] 中的情况相同，但需要注意的是，临界值两侧的解在实际中看起来并没有太大差异，只是属于不同的族。增大 p 会使它们在较大的负 z下变得越来越振荡，而在视界处，所有模都呈现分形振荡。我们研究球对称情形的解，即 $l=0$，并在下文讨论较高 l 值对两类解的影响。

视界外的解如图 17 所示，计算时取 res=0.00001，并将 z_{min} 设为较大的负值（具体取值取决于所考虑的模），以使其远离视界，同时将 $z_{max}=-$res 设在紧邻视界之外。对于更大的 $|z_{max}|$，图形看起来没有太大差异，只是视界附近的细节有所减少。我们在 $z=-1$处施加混合边界条件，即在离视界足够远处；与 [7] 中一样，我们对其进行微调，从而得到原本会发散的解 (b) 和 (c)。解 (a) 是一种振荡模，是大正值 $E_{KG}=10$ 的典型表现；随着我们远离视界，在越来越负的 z 下，其振幅逐渐减小，但衰减速度不足以使其具有有限范数。当我们将 E_{KG} 的值逐渐降至临界值时，可以看到远离视界处的振荡波长不断增加（振幅则不断减小）。相比之下，(c) 显示了大负值 $E_{KG}=-10$的典型解，它远离视界后迅速趋近于零，且具有有限范数。更接近临界

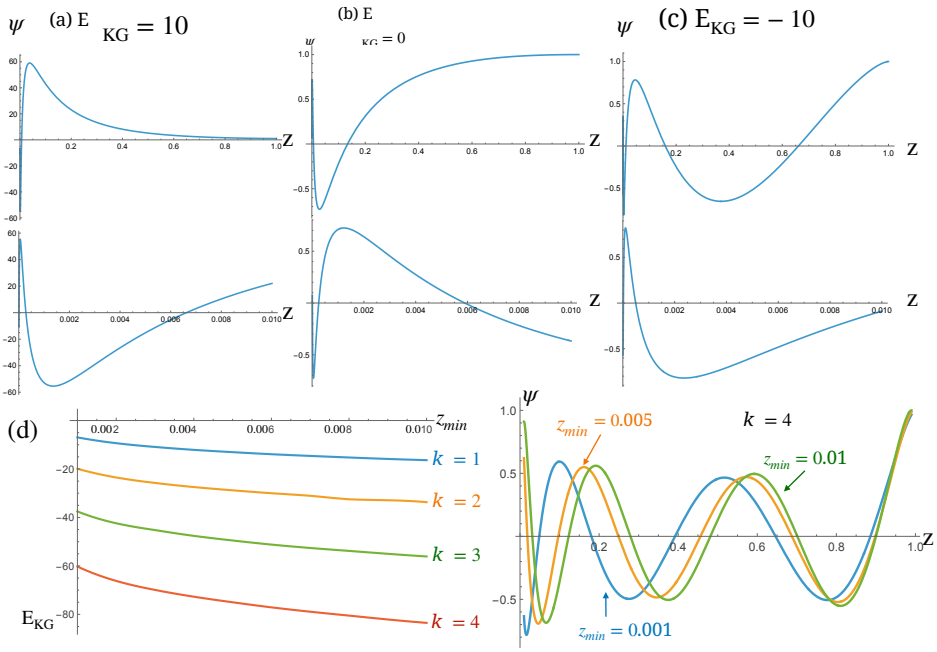

FIGURE 18. 视界内的 Klein-Gordon 模式：(a)–(c) 为第一行中 E_{KG} 的三个不同取值，以及其正下方第二行所示的视界附近局部放大图。(d) 若施加 $\psi'(z_{min}) = 0$ 作为量子引力修正的模型，则本征值 E_{KG} 的离散化取决于 z_{min}

值时，$E_{KG} = -1$ 中的 (b) 需要将右边界 $z_{min} = -300$ 设得更远，但除此之外与之前相似。它的下降不那么陡峭；当我们趋近 $E_{KG} = -0.5$时，要想得到类似的图形，就必须不断将右边界推至非常大的负值 z_{min} 。对于这三个解，我们都能在正下方的局部放大图中看到视界附近的类分形行为，与 [7]中的情况相同。此外，我们发现，增大角参数 l 会得到类似的模，只是它们在视界附近开始以越来越高的值发散。我们还检查了这些解的残差，即式 (17) 不满足的程度；只要不太接近视界，残差就处于可接受范围内。这些结果在定性上相同，因此证实了 [7]中史瓦西坐标下的结果。

接下来，由于我们使用了克鲁斯卡尔-塞凯雷什坐标，现在同样可以求解黑洞内部的类似模。解见图18(a)-(c)，同样取 res=0.00001，但现在设定 z_{min}=res 和 z_{max}=1。例如，若我们在 $z = 0.5$ 处采用混合边界条件，沿用黑洞外部的处理方法，解通常会在 $z = 1$ 处发散，但可以通过精细调节使其取任意值，从而消除发散。鉴于这一行为，我们直接聚焦于这类解，设定$\psi(1) = 1$ 和 $\psi'(1) = 0$ （不过，也可以自由选择 $z = 1$处的其他值）。这种方法还能避免区域中部的残差出现伪影。所得解在定性上与视界外部的模相映成镜像：如(a)所示，较大的正 E_{KG} 会产生有界模（在视界附近快速振荡后），并在趋近 $z = 1$时衰减。像(c)所示的较大负值则会产生振荡模，直至黑洞中心的 $z = 1$ 奇点。(b)中该值附近同样存在一个软 $E_{KG} = -0.5$ 。在这三种情况下，趋近视界时都会再次出现分形状振荡，如正下方的局部放大图所示。此外，我们发现

增大参数 l 会使到达奇点前出现更多振荡周期，这与 E_{KG}的取值无关。

最后，我们注意到，如 [7] 所示，无论是在视界之外还是其内部， E_{KG}的取值都没有量子化，这可以归因于视界本身缺少任何边界条件。Mathematica 无法求解跨越视界的模，但假设我们能够做到，考虑到预期解在此处的对称性，我们可能会要求 $\psi'(0) = 0$ （参见图 16(b) 的最后一幅图）。因此，要消除过于靠近视界处的最高频率振荡，一种正则化方案是在视界两侧分别求解：视界外区域取 $\psi'(z_{max}) = 0$，视界内区域取 $\psi'(z_{min}) = 0$ ，其中 $|z_{max}| = z_{min}$ ，从而保持视界两侧的对称性。这样一来，视界附近更近处的所有细节都会缺失；最小的取值 $|z_{max}| = z_{min} =$ res 丢失的信息最少（但同时也最不可靠）。聚焦于黑洞内部，我们使用 $\psi'(z_{min}) = 0$ 边界条件替代之前的 $\psi'(z_{max}) = 0$ 边界条件，但随后通过计算机搜索 $E_{KG} \leq -0.5$ ，使结果仍然满足 $\psi'(z_{max}) = 0$ 。这样确实得到了一个离散谱，其在体区内的零点穿越数 k 逐渐增加（在视界附近的主峰之后计数，即不计视界附近类分形行为所产生的零点穿越），见图18(d)。我们设定 $z_{max} = 1 - z_{min}$ ，但其具体取值并不重要。我们已经看到，对于视界模，改变 z_{min}时视界附近会出现相移及其他变化，但远离视界处的行为不会受到显著影响。本例中也能看到这一点：左侧绘出的本征值随 $k = 1$逐渐变化，对应 z_{min}， 2，3，4，而其对 z_{min} 的依赖仅呈渐变趋势（这些图本身是由10个等间距采样点插值得到的）。我们还展示了 $k = 4$ 模在 z_{min} 初始值、最终值和中间值下的图，以观察其形状如何变化； $k = 1$， 2，3也有类似的对比。如果将本征值和本征函数绘制为关于 z_{min} 的函数，并一直考察到分辨率尺度 z_{min} =res，也会出现类似行为。作为稳健性测试，将分辨率调粗至 res 的十倍，同时固定 z_{min} ，所得图形并无变化。与视界模的情况一样， z_{min} 的最小取值可视为一种粗略模型：通过数值分辨率模拟量子引力效应可能导致的离散化。非交换坐标也应能够模拟出类似的量子引力效应。

6. Concluding remarks

我们已经表明，经典量子测地流这一概念（即量子测地线[2, 6, 4, 5, 7] ，但应用于交换代数 $C^\infty(M)$）提供了一种可能对广义相对论有用的新工具，其中单条测地线被密度流所取代。我们特别考察了主要的新要素 X，即服从(1)的测地速度场；它更为基本，因为它经由(2)决定密度流，而非相反。这与直觉相悖，因而需要一种如何初始选取 $X(0)$的方法。归根结底，这是一个自由选择，但我们提出，一个自然的选项是要求在感兴趣区域的内部满足$\mathrm{div}(X(0)) = 0$ ，并结合表达粒子流入或流出该区域的初始通量的边界条件。随后，我们建立了大量实际测地线的统计模型，并将其插值为密度，其中每个粒子在其所在位置以速度 $X(0)$出发。它们经过略显粗略插值的切向量随后给出了插值$X_{stat}(s)$的大致图景，在该区域中心（粒子密度足够高之处）与通过求解(1)得到的 $X(s)$大体相当。我们还可以将通过求解(2)得到的 $\rho(s)$与来自测地线的插值密度 $\rho_{stat}(s)$进行比较

粒子位置，其中每个粒子按其自身的固有时 s演化。拟合良好，但差异归因于峰值形状的变化，而这在统计建模中并未被捕捉到。这有助于证明测地流理论中的 s 作为某种集体固有时是合理的。

在第 3 节完成这一概念验证后，我们在第4节继续研究测地流理论，探讨它本身能否成为广义相对论的一种潜在新工具。尤其值得关注的是这样一种设想： $\rho = |\psi|^2$ 对于一个振幅 ψ，我们对此进行了探索。我们考察了凸起穿过视界的流、波包 ψ 的流，以及两个符号相反、相互作用的 ψ-凸起的流（它们碰撞后形成一个偶极子）。后者的密度分布不同于两个 ρ-凸起足够接近地碰撞时形成的单个凸起。换言之，那个激进的假设——在某些情况下，我们或许可以用时空上的波函数取代时空上的密度——原则上是可以检验的。一个重要的未解问题是将我们的分析扩展到包含角变量，因为为了让数值积分易于处理，我们只研究了 U, V 的函数（即径向运动）。纳入角运动，例如可以让我们展示引力玻姆–阿哈罗诺夫效应：波函数 ψ 绕黑洞流动并与自身发生干涉。我们还遇到了严重但可控的噪声问题，需要采用新技术（并增加计算能力）来解决。这些将是应用方面值得探索的方向。

在第5节中，我们考察了另一种同样涉及时空上函数 ϕ 的理论，不过现在这些函数被视为壳上或壳下的克莱因-戈尔登（即标量）场。这里适用的流是（8），我们考察了它的一个特定极限，称为“伪量子力学”，因为它看起来像量子力学，只不过是相对于集体时间 s而言的。此前已在黑洞外部的 [7]中对这一情况进行过研究，而我们如今在克鲁斯卡尔-塞凯雷什坐标中得到相同的行为，也很好地检验了这一形式体系的协变性。我们感兴趣的定能模式（相对于坐标时间而言）现在变成了如下形式的模 $(-w)^{-\mathrm{i}p}\psi(z,\ \theta,\ \phi)$，其中 $z = UV$、 $w = U/V$和 p是实参数；我们再次聚焦于不含角度的情形。这导出了一个优雅的薛定谔型方程（50），使我们得以更详细地研究 [7] 中的这一新颖过程：视界外的一片密度或振幅区域向视界移动，最终产生聚集在视界处的“视界模”；当我们趋近视界时，这些模以任意小的波长振荡。

我们进一步指出，若要全面理解这一问题并将视界本身纳入考量（而非仅将区域截断在视界外侧），就需要进行正则化，例如将时空离散化或使其成为非交换时空；在我们的情形中，最接近的截断便是数值求解器自身的分辨率。从这一角度得到的初步结果表明，视界处可能存在某种“皮层”，如 [17]所示，值得更系统地研究。视界模也值得进一步结合信息流加以研究（其中已表明，在高斯凸起最终转变为这些视界模的过程中，概率密度熵会持续增加，见[7]）。我们还发现了与原子态相似的定态模式（即克莱因–戈尔登方程的实际解），同样如 [7]所示。这一次，我们利用克鲁斯卡尔-塞凯雷什坐标，在黑洞内部找到了视界模和原子模的类似结果。黑洞内部类似原子的态或许值得关注，因为其内部结构在外部不可见。由于我们探寻的是克莱因–戈尔登方程演化／求解过程中的定态模式，这里的物理作用也可能更加直接。一个新发现是，若将内部区域截断在视界外侧，并在 $z = 1$奇点处施加混合边界条件，那么黑洞内部的原子模具有离散谱。离散谱中的本征值

取决于截断位置，但其行为模式一直延续到分辨率尺度。因此，视界处以离散化或有限分辨率形式体现的量子引力效应，会直接决定黑洞内部原子模的谱。

显然，我们的方法也可以应用于其他时空。文献 [8] 研究了 FLRW 时空上的克莱因–戈尔登流；但对于这些模型，也应结合宇宙学来考察更基础的经典测地流——这是本研究的主要关注点（以及其背后存在波函数的可能性）。此外，了解我们的方法与相对论流体力学（如引言中所提及）的相互作用也很重要。最后但同样重要的是，还应进一步探究本理论与最优传输的关系，以及它与流形法丛上测地流理论（该理论广为人知，但有所不同）的关系。对于非交换代数，有人曾在 [9] 提出，这类流由 $|D|$ 生成，其中 D 是 Connes 谱三元组概念中的一个抽象“狄拉克算子”。因此，在海森堡代数或微分算子代数上构造这类流或许会很有意思。

Declarations

经费支持： KK 获得了 DFG 项目资助，项目编号为 515782239。SM 获得了 Leverhulme Trust 项目资助，项目编号为 RPG-2024-177。

数据可用性： 本研究未生成或分析任何数据集，因此不适用数据共享。用于数值研究的软件代码可在线获取[12]。

利益冲突： 作者声明不存在与本文内容相关的利益冲突。

References

[1] V. Arnold, 《关于无限维李群的微分几何及其在理想流体水动力学中的应用》, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 16 (1966) 319–361[2] E.J. Beggs, 《非交换测地线与 KSGNS 构造》, J. Geom. Phys. 158 (2020 103851) E. J. Beggs and S. Majid, 《 *Quantum Riemannian Geometry*》, 数学科学基础丛书, [3] 第 355, 2020 卷, Springer, E. J. Beggs and S. Majid, 《量子测地流与曲率》, [4] Lett. Math. Phys. 113 (2023) 73（44 页）[5] E. Beggs and S. Majid, 《图上的量子测地流》, Lett. Math. Phys. 114 (2024) 112（41 页）[6] E.J. Beggs and S. Majid, 《量子力学中的量子测地线》, J. Math. Phys. 65 (2024)（44 页）[7] E. J. Beggs and S. Majid, 《广义协变量子力学》, Lett. Math. Phys. 116 (2026) 9（65 页）

[8] 2501 18295 E. J. Beggs and S. Majid, 《FLRW 时空上的克莱因–戈尔登流》, arXiv: [9] . A. Connes, 《从谱观点看几何》, Lett. Math. Phys. ( ) 34 1995 203 238 – S. Doplicher, K. Fredenhagen and J. E. Roberts, 《普朗克尺度上的时空量子结构与量子场》, [10] Commun. Math. Phys. 172 1995 187 220 ( ) – G.’t Hooft, 《维度引力中点粒子的量子化与时空离散性》, [11] Class. Quant. Grav. 2+1 13 1996 1023 ( ) K. Kumar and S. Majid, 《黑洞背景上的测地流》 Mathematica 代码，已提交至 Notebook Archive。[12] [13] C. Liu and S. Majid, 《量子闵可夫斯基时空上的量子测地线》, J. Physics A, 55 (2022 424003) J. Lott and C. Villani, 《通过最优传输研究度量测度空间的里奇曲率》, [14] Ann. of Math. 169 (2009), 903–991

[15] S. Majid, 《普朗克尺度物理学中的霍普夫代数》, Class. Quant. Grav. 5 (1988) 1587– 1607[16] S. Majid and H. Ruegg, 《 κ-庞加莱群的双交叉积结构与非交换几何》, Phys. Lett. B. 334 1994 348 354 ( ) – S. Majid, 《几乎交换黎曼几何：波算子》, Commun. Math. Phys. 310 2012 569 609 ( ) – J. Olsthoorn, 《相对论流体动力学》, Waterloo Math. Rev. 1 (2011) 44–58[17] [18]