arXiv:2603.03246v1 [math.PR] 3 Mar 2026

随机热流的对数对数涨落

顾宇和 LI-CHENG TSAI

摘要。我们研究初始数据为常数的随机热流，并分析其在 $\varepsilon \ll 1$ 尺度上的空间平均。我们证明，平均过程的对数满足逐点中心极限定理：以 $-\frac{1}{2}\log\log\varepsilon^{-1}$ 为中心化项，并按 $\sqrt{\log\log\varepsilon^{-1}}$ 缩放后，它依分布收敛到标准高斯分布。

1. 引言

1.1. 主要结果。本文针对任意固定的耦合常数 $\theta \in \mathbb{R}$，研究在一个较小空间区域上取平均的随机热流（SHF）对数的渐近逐点涨落。SHF 最初在 [CSZ23] 中构造为随机环境中的离散聚合物的有限维分布极限。本文采用 [Tsa24] 中 SHF 的公理化表述。令 $\mathcal{M}_+(\mathbb{R}^d)$ 表示 $\mathbb{R}^d$ 上正局部有限测度所构成的空间，并赋予由 $\mathbb{R}^d$ 上连续紧支撑函数诱导的弱拓扑。耦合常数为 $\theta \in \mathbb{R}$ 的 SHF 是一个连续的 $\mathcal{M}_+(\mathbb{R}^4)$ 值过程$Z^\theta = Z^\theta_{s,t}$，定义在 $s \le t \in \mathbb{R}$ 上，并由 [Tsa24], 中的公理唯一刻画；我们将在第 2.1 节回顾这些公理。在这一表述下，Z^θ 的存在性也已由 [Tsa24] 确立。令$p(s,x) := e^{-|x|^2/2s}/2\pi s$ 表示标准二维热核，取任意 $\theta \in \mathbb{R}$，并考虑

$$H_\varepsilon(y) := \log Z_\varepsilon(y)\,, \qquad Z_\varepsilon(y) := \int_{\mathbb{R}^4} Z^\theta_{0,1}(\mathrm{d}x, \mathrm{d}x')\, p(\varepsilon^2, y - x')\,, \qquad x, x' \in \mathbb{R}^2\,. \tag{1.1}$$

定理 1.1. 存在一列确定性常数 $\alpha_\varepsilon \to 0$，使得

$$\frac{1}{\sqrt{\log\log\varepsilon^{-1}}}\Big(H_\varepsilon(0) + \frac{1+\alpha_\varepsilon}{2}\log\log\varepsilon^{-1}\Big) \Longrightarrow \textit{standard Gaussian}, \quad \textit{as } \varepsilon \to 0\,. \tag{1.2}$$

利用 H_ε 的空间平移不变性，可以立即得到以下推论，它表明 Z_ε 的“典型”值的量级为 $1/\sqrt{\log\varepsilon^{-1}}$。

推论 1.2. 存在 $\beta_\varepsilon < \beta'_\varepsilon$，使得 $\beta_\varepsilon, \beta'_\varepsilon \to \frac{1}{2}$ 当 $\varepsilon \to 0$ 时，且对于

$$D_\varepsilon := \Big\{ y \in \mathbb{R}^2 \,\Big|\, \frac{1}{(\log\varepsilon^{-1})^{\beta'_\varepsilon}} \le Z_\varepsilon(y) \le \frac{1}{(\log\varepsilon^{-1})^{\beta_\varepsilon}} \Big\} \tag{1.3}$$

以及所有有界的 $D \subset \mathbb{R}^2$,

$$\mathbf{E}|D \cap D_\varepsilon^{\mathrm{c}}| \xrightarrow{\varepsilon} 0\,. \tag{1.4}$$

1.2. 间歇性带来的挑战。证明定理 1.1 的主要挑战在于，需要在存在间歇性的情况下得到 $Z_\varepsilon(0)$的典型行为。众所周知，期望$Z_\varepsilon(0) = 1$ 且期望$Z_\varepsilon(0)^2 \sim \log\varepsilon^{-1}$。对于 $Z_\varepsilon(0)$的一个类似量， [LZ24]进一步证明了，对每个固定的 $n \in \mathbb{N}$，期望$(Z_\varepsilon(0))^n \sim (\log\varepsilon^{-1})^{\binom{n}{2}}$。这些矩的渐近行为表明，$Z_\varepsilon(0)$通常很小，而这些矩实际上由 $Z_\varepsilon(0)$的罕见且异常大的取值所主导，这一现象被称为间歇性。正整数阶矩一直是、并且仍然是1

理解SHF及相关模型的主要工具。然而，在存在间歇性的情况下，从这些矩中提取 $Z_\varepsilon(0)$ 的典型行为会变得困难得多。

为更全面地看待这个问题，我们注意到，已有一系列研究证明了 $Z_\varepsilon(0)$ 的类似对象收敛到对数正态分布，参见 [CSZ17，DG22，CC22，CSZ25]，其中给出了定向聚合物、光滑化随机热方程以及某些弱无序区域中的平均随机热场的结果。在所有这些研究中，$Z_\varepsilon(0)$ 的类似对象依分布收敛到对数正态分布 $\exp(\sigma N(0,\ 1)\ -\sigma^2/2)$，其中某个 $\sigma \in (0,\ \infty)$。特别地，$Z_\varepsilon(0)$ 的极限为1量级，且二阶矩保持有界，当 $\varepsilon \to 0$。另一方面，本文研究真正的临界区域，并证明在（1.2）的意义下，

$$Z_\varepsilon(0) \text{ approximates } \exp\left(\sigma_\varepsilon N(0,1) - \frac{1}{2}\sigma_\varepsilon^2\right) \text{ in law}, \qquad \sigma_\varepsilon^2 := \log\log\varepsilon^{-1} \to \infty\,. \tag{1.5}$$

这里，$Z_\varepsilon(0)$ 以 $1/\sqrt{\log\varepsilon^{-1}}$ 的速率衰减至0，而 $Z_\varepsilon(0)$ 的二阶矩以 $\log\varepsilon^{-1}$ 的速率趋于 ∞。

间歇性对证明具有重要影响。为说明这一点，对于某个 $b \ll 1$，考虑指数缩放时间 $\{t_i := \varepsilon^2 b^{-2i}\}_{i=0,\dots,N}$，它们在 ε^2 与 1 之间进行插值。本文建立的一个关键性质是，$Z_\varepsilon(0)$ 在指数时间尺度下近似解耦。尽管“解耦”现象在先前的研究中已经被观察到过几次，但在那些非间歇性的弱无序区域中，近似解耦成立是因为（其对应物的）二阶矩

$$Z_\varepsilon(0) - \prod_{i=1}^{N} \int_{\mathbb{R}^4} Z^\theta_{t_{i-1},t_i}(\mathrm{d}x, \mathrm{d}x')p(t_{i-1}, x) \tag{1.6}$$

收敛到 0，因此 $Z_\varepsilon(0)$ 可以近似表示为相互独立的随机变量的乘积。参见例如 [CD25，定理 2。2] 其中对此进行了明确证明。然而，在间歇区域中，（1.6）的二阶矩发散到 ∞，而其中两项衰减到 0。尽管近似解耦仍然成立，但其成立的原因却截然不同。事实上，由于（1.6）中的两项都衰减到 0，我们需要考虑它们的比值

$$\frac{Z_\varepsilon(0)}{\prod_{i=1}^{N} \int_{\mathbb{R}^4} Z^\theta_{t_{i-1},t_i}(\mathrm{d}x, \mathrm{d}x')p(t_{i-1}, x)}$$

（更准确地说，是它的截断版本；参见（1.9））， 并使其与 0 和 ∞保持距离。

间歇区域之所以特别具有挑战性，是因为我们需要处理发散数量的区间，这最终会导致（1.2）中的均值和方差发散。在以往的研究中，b的对应量定义为 $\varepsilon^{1/N}$，因此指数时间尺度表示为 ε^q，其中变量为 $q = \frac{2N-2i}{N} \in [0, 2)$；当时的一般策略是先令 $\varepsilon \to 0$ 趋于无穷，同时保持 N 固定，然后再令 $N \to \infty$ 趋于无穷。在本研究中，我们（必须）先令 $\varepsilon \to 0$ 趋于无穷，再令 $b \to 0$ 趋于无穷，这就需要处理在 ε中发散的 $N = \lfloor \log\ \varepsilon^{-1}/\log\ b^{-1} \rfloor$。从概率论视角来看，解耦可以如下理解。任取 $s < t$，SHF 的半群性质使我们能够写出 $Z^\theta_{0,\ t} = Z^\theta_{0,\ s} \bullet Z^\theta_{s,\ t}$；见（2.2）。可以将 $Z^\theta_{0,\ s}$ 视为 $[0, s]$ 上的定向聚合物的点到点配分函数，而我们所寻求的解耦，本质上就是用点到线配分函数乘以热核 $p(s,\ \cdot)$来近似点到点配分函数：

$$Z^\theta_{0,s}(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) \approx \int_{x' \in \mathbb{R}^2} Z^\theta_{0,s}(\mathrm{d}x, \mathrm{d}x')\, p(s, x - y)\, \mathrm{d}y\,.$$

尽管对于每个 $[s,t]=[t_{i-1},t_i]$，这类近似中的误差都可以得到控制，但证明定理 1.1 的一项主要技术挑战，是确保随着区间数量趋于无穷，这些误差不会累积。

1.3. **迈向 KPZ**。 我们这项研究的另一个动机，是理解相关随机生长模型中高度函数的标度极限，或定向聚合物的自由能。事实上，非正式地说，随机热方程（SHE）的对数给出了描述随机生长的 Kardar–Parisi–Zhang（KPZ）方程。由于 SHF 可以作为二维光滑化随机热方程的标度极限得到，因此，考虑对 SHF 取对数并研究所得过程颇有意义。然而，正如 [CSZ25] 所示，并由本文的推论 1.2加以量化，SHF 本质上是取值于测度空间的，因此即便只是对 SHF 取对数也并非易事。本文的定理1.1 可以视为一项迈向超越次临界区间的二维 KPZ 方程的结果：通过对空间平均随机热场取对数，并研究其逐点涨落来实现。在场层面研究涨落，也就是将其视为随机施瓦茨分布，是一个值得探讨的后续问题。在次临界区间，已有研究证明二维 KPZ 方程的场涨落收敛到爱德华兹–威尔金森高斯极限；参见 [CD20,CSZ20, Gu20,NN23]. 在这一区间，理解逐点涨落对于获得场收敛至关重要。我们希望本文也能以类似方式，为理解超越次临界区间的二维 KPZ 方程提供一个切入点。

1.4. **一些相关文献**。 在次临界／弱无序区间，关于定向聚合物配分函数的对数正态涨落（其处于 $1+2$ 随机环境中）以及光滑化二维随机热方程解的对数正态涨落，最早由 [CSZ17], 推导得出；他们还进一步证明，在临界区域及其以上，同一数量依概率趋于零。[DG22、DG23]将次临界情形下的结果推广到了半线性随机热方程模型，并以一个前向-后向随机微分方程的形式推导出了分布极限。后来， [CC22] 从混沌展开的角度给出了对数正态性的一个简化证明。与我们工作最相关的是 [CD25], ，他们通过建立式（1.6）中的解耦，给出了对数正态涨落的一个简短而简单的证明。

准临界区间由 [CCR23], 引入，它在某种意义上介于次临界区域与临界区域之间。对于定向聚合物， [CSZ25], 证明了准临界和临界区域中的对数正态涨落，其中逆温度（相应地，耦合常数 θ）经过调节，使得配分函数在 L^2中保持有界。另有 [CSZ25] 证明，SHF 相对于勒贝格测度是奇异的，并且 $Z_\varepsilon(y)\to 0$ 对勒贝格几乎处处的 $y\in\mathbb{R}^2$收敛。

定理陈述中出现的双重Log来自 SHF 的对数相关性与非线性变换1.1的共同作用 $H_\varepsilon=\operatorname{Log} Z_\varepsilon$。顺带一提，在研究二维高斯自由场旋度中的被动示踪粒子的间歇行为时，也观察到了类似现象 [MOW25]。

1.5. **证明思路**。 首先，我们陈述实际要证明的结果，即定理 1.3，它比定理 1.1略强。为简化记号，我们利用 SHF 的时间反演不变性，将热核从 (1.1) 中移至起始时刻，并进一步将起始时刻从 0 改为 ε^2。这不会失去一般性，因为根据 SHF 的不变性（见 $[\varepsilon^2,1]$），可以将 $[0,1]$ 缩放回 [Tsa24，推论 1。6]），代价是稍微改变 θ；并且在定理 θ 1.3中，我们允许 {v} 在任意固定有界区间内变化。

定理 1.3。 允许 θ 依赖于 ε，且 $|\theta| = |\theta_\varepsilon| \le c_0 < \infty$，我们有

$$\frac{1}{\sqrt{\log\log\varepsilon^{-1}}}\Big(\log\int_{\mathbb{R}^4} Z^\theta_{\varepsilon^2,1}(\mathrm{d}x,\mathrm{d}x')\,p(\varepsilon^2,x)+\frac{1+\alpha_\varepsilon}{2}\log\log\varepsilon^{-1}\Big)\Longrightarrow \textit{standard Gaussian}. \tag{1.7}$$

我们将采用指数缩放时间

$$t_i = t_{i,N,b} := \varepsilon^2 b^{-2i}\ ,\ i=0,\dots,N-1\ ,\qquad N = N_{\varepsilon,b} := \lfloor \log\varepsilon^{-1}/\log b^{-1}\rfloor\ , \tag{1.8}$$

（1.6）中的最后几个因子表现不佳，因此这些时间区间需要单独处理。为此，我们取 ℓ，考虑 $[t_{i-1},t_i]$ 对于 $i=1,\dots\dots,N-\ell$ 并单独考虑 $[t_{N-\ell},1]$。我们将先令$\varepsilon\to 0$（由此 $N\to\infty$），然后令（ℓ，b）$\to$（∞，0）。相应地，定理1.1的证明分为两个步骤。第一步处理区间 $[t_{i-1},t_i]$ 对于 $i\le N-\ell$，第二步处理 $[t_{N-\ell},1]$。

在证明的第一步中，我们证明

$$\frac{1}{2}\le\frac{\int_{\mathbb{R}^4} Z^\theta_{\varepsilon^2,t_{N-\ell}}(\mathrm{d}x,\mathrm{d}x')\,p(\varepsilon^2,x)}{\prod_{i=1}^{N-\ell}\int_{\mathbb{R}^4} Z^\theta_{t_{i-1},t_i}(\mathrm{d}x,\mathrm{d}x')p(t_{i-1},x)}\le\frac{3}{2} \tag{1.9}$$

以高概率，当 $\ell\to\infty$ 在 $\varepsilon\le 1/2$ 和 $b\le 1/c$中一致时，并且

$$\frac{1}{\sqrt{\log\log\varepsilon^{-1}}}\Big(\log\ \text{denominator of (1.9)}\ +\frac{1+o(1)}{2}\log\log\varepsilon^{-1}\Big)\Longrightarrow\ \text{standard Gaussian}. \tag{1.10}$$

（1.9）的分母是相互独立变量的乘积，因此借助适当的矩估计，可以通过经典中心极限定理证明（1.10）。我们在引理2.2 和附录B中完成这一证明。另一方面，证明（1.9）构成了整篇论文的主要部分。为证明这一点，我们首先在命题1.9中对（2.1）中的分式进行精确展开，并在第3–4节中对展开式中的误差项进行界定。

在证明的第二 步中，我们证明当 $r'_{\ell,b}, r_{\ell,b}\to\infty$ 足够快地趋于零时，$(\ell,b)\to(\infty,0)$，

$$\mathbf{P}\Big[e^{-r_{\ell,b}}\le\frac{\int_{\mathbb{R}^4} Z^\theta_{\varepsilon^2,t_{N-\ell}}(\mathrm{d}x,\mathrm{d}x')\,p(\varepsilon^2,x)}{\int_{\mathbb{R}^4} Z^\theta_{\varepsilon^2,1}(\mathrm{d}x,\mathrm{d}x')\,p(\varepsilon^2,x)}\le e^{r'_{\ell,b}}\Big]\longrightarrow 1 \tag{1.11}$$

对 $\varepsilon\le 1/2$一致。关键步骤是推导式（1.11）中分式的下尾界。为此，我们利用 [CT25] 中的条件高斯乘法混沌（GMC）结构，并将 [MF14], 中的论证应用于条件GMC。该论证基于 Talagrand 的高斯集中不等式之一。这样做需要一些界，这些界已在第 3–4 节中推导。我们指出，文献 $Z_\varepsilon(0)$ 中已给出了（某个变体的） [Nak25] 的下尾界。

式（1.9）–（1.11）的精确表述分别见引理 2.2、推论 4.2以及式（5.1）–（5.2）。事实上，将它们结合起来即可得到定理 1.3。

论文提纲。第2节回顾 [Tsa24], ，介绍一些工具，并推导所关注量$\int_{\mathbb{R}^4} Z^\theta_{\varepsilon^2,\ 1}(\mathrm{d}x,\ \mathrm{d}x')p(\varepsilon^2,\ x)$的展开式。第3 节专门对展开式中涉及的一个表达式的二阶矩进行界定。基于这一界，第4 节将对展开式中的所有误差项整体进行界定。至此，第1.5节所述的第一步便告完成。第二步将在第5 节通过建立若干比较界来完成。为使行文简洁，一些技术步骤放在附录中。

致谢。我们感谢 Cl´ement Cosco 指引我们关注论文 [CD25] 以及该论文中半群性质的作用。Y.G. 的研究部分得到美国国家科学基金会 DMS-2203014 项目资助。LCT 的研究部分得到美国国家科学基金会 DMS-2243112 项目以及 Alfred P Sloan 基金会通过 Sloan 研究奖学金 FG-2022-19308 提供的资助。

2. 公理化表述、工具、解耦展开

2.1. **SHF 的公理化表述**。 我们回顾 [Tsa24]中 SHF 的公理化表述，这也是我们将要使用的表述。暂缓定义乘积 $\bullet$ 和函数 $\mathcal{Q}^{n,\theta}$我们回顾一下，根据 [Tsa24，定理 1。3], 具有耦合常数 $\theta \in \mathbb{R}$ 的 SHF 由以下公理唯一刻画。

(1) $Z^\theta = Z^\theta_{s,t}$ 是一个取值于 $\mathcal{M}_+(\mathbb{R}^4)$、在 $s \le t \in \mathbb{R}$ 中连续的过程。(2) 对所有 $s < t < u$、$Z^\theta_{s,t} \bullet Z^\theta_{t,u} = Z^\theta_{s,u}$。(3) 对所有 $s < t < u$、$Z^\theta_{s,t}$ 和 $Z^\theta_{t,u}$ 相互独立。(4) 对于 $n = 1, \ldots\ldots, 4$、$s < t$，以及 $x = (x_1, \ldots\ldots, x_n)$ $x' = (x'_1, \ldots\ldots, x'_n) \in \mathbb{R}^{2n}$,

$$\mathbf{E} \bigotimes_{i=1}^{n} Z^\theta_{s,t}(\mathrm{d}x_i, \mathrm{d}x'_i) = \mathrm{d}x\, \mathrm{d}x'\, \mathcal{Q}^{n,\theta}(t-s, x, x') \,. \tag{2.1}$$

存在　性 Z^θ 在此表述下已于 [Tsa24的命题1中得到确立。5]。

乘积 $\bullet$ 是在 [CM24] 中引入的，并如下所述

$$Z^\theta_{s,t} \bullet Z^\theta_{t,u} := \lim_{\delta \to 0} Z^\theta_{s,t} \bullet_\delta Z^\theta_{t,u} \,, \tag{2.2}$$

$$\big(Z^\theta_{s,t} \bullet_\delta Z^\theta_{t,u}\big)(\mathrm{d}x, \mathrm{d}x') := \int_{\mathbb{R}^4} Z^\theta_{s,t}(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)\, p(\delta^2, y - y')\, Z^\theta_{t,u}(\mathrm{d}y', \mathrm{d}x') \,. \tag{2.3}$$

[CM24] 的工作表明，(2.3)几乎必然地以及在 L^2(P)中模糊收敛（更确切地说，是(2.3)的一个细微变体，其中右侧的两个 t分别被替换为 t_δ、t'_δ，且带有$t_\delta \le t \le t'_\delta$ 和 $t'_\delta - t_\delta = \delta$）。随后， [Tsa24] 证明了，对所有$n < \infty$，(2.3)在 L^n(P)中模糊收敛，并且(2.3)中的热核 p 可以被一类一般的函数所替换。

函数 $\mathcal{Q}^{n,\theta}(t, x, x')$是二维δ-玻色半群 $\mathcal{Q}^{n,\theta}(t)$的积分核，该半群是 $L^2(\mathbb{R}^{2n})$上的强连续半群。其关于 $n \in \mathbb{N}$的显式公式在[GQT21的定理1.1]中得到，基于 [Raj99, DR04]。对于 $n = 1$，我们直接有 $\mathcal{Q}^{1,\theta}(t) = p(t)$。该$n = 2$ 公式可追溯到 [ABD95, BC98]，并如下所述。令

$$\mathsf{j}^\theta(t) := \int_0^\infty \mathrm{d}a\, \frac{t^{a-1} e^{\theta a}}{\Gamma(a)} \,, \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^{2,\theta}(t, x, x') := \int_{0<s<s'<t} \mathrm{d}s\mathrm{d}s' \int_{\mathbb{R}^4} \mathrm{d}y\mathrm{d}y' \prod_{j=1,2} p(s, x_j - y) \\ \cdot 4\pi \mathsf{j}^\theta(s' - s) p(\tfrac{s'-s}{2}, y - y') \prod_{j=1,2} p(t - s', y' - x'_j) \,, \end{aligned} \tag{2.5}$$

我们有

$$\mathcal{Q}^{2,\theta}(t) = p(t)^{\otimes 2} + \mathcal{W}^{2,\theta}(t) \,. \tag{2.6}$$

本文的大部分内容中，我们只使用 $n = 1$、2 的公式。只有在附录 B 中，我们才使用一般的 n 公式，并将在那里回顾它。

2.2. 符号与工具。 本文采用一种我们希望能直观体现测度值过程对测试函数作用方式的记法，例如

$$\int_{\mathbb{R}^4} Z^\theta_{s,t}(\mathrm{d}x,\mathrm{d}x')\, f(x)g(x') := f \blacktriangleleft Z^\theta_{s,t} \blacktriangleright g\,, \tag{2.7}$$

以及它们的乘积（例如 $(f \blacktriangleleft Z^\theta_{s,\,t})^{\otimes 2} \blacktriangleright h$，其中 $h = h(x_1,\ x_2)$，$x_1,\ x_2 \in \mathbb{R}^2$。左侧/右侧实心箭头指向较早/较晚时刻的测试函数。结合公理 2中的半群性质，我们得到如下恒等式：

$$f \blacktriangleleft Z^\theta_{s,u} \blacktriangleright g = f \blacktriangleleft Z^\theta_{s,t} \bullet Z^\theta_{t,u} \blacktriangleright g\,. \tag{2.8}$$

我们通常将 Z^θ 分解为其均值和零均值部分。由于 $\mathcal{Q}^{1,\theta}(t) = p(t)$，令 $\mathcal{P}_{s,t} = \mathcal{P}_{s,t}(\mathrm{d}x, \mathrm{d}x') := \mathrm{d}x\mathrm{d}x'\, p(t-s, x-x')$，可得期望 $Z^\theta = \mathcal{P}$。相应地，我们用 $W^\theta := Z^\theta - \mathcal{P}$ 表示 Z^θ 的零均值部分。根据定义，期望 $W^\theta = 0$，并且很容易从（2.5）验证期望 $W^{\theta\,\otimes 2}_{s,t} = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}x'\,\mathcal{W}^{2,\theta}(t-s, x, x')$。如前所述，我们主要研究 $n = 1$ 阶矩，但也提到，W^θ 的 n 阶矩允许写出一个显式公式

$$\mathbf{E}\, W^{\theta\,\otimes n}_{s,t}(\mathrm{d}x,\mathrm{d}x') := \mathbf{E} \bigotimes_{i=1}^{n} W^\theta_{s,t}(\mathrm{d}x_i,\mathrm{d}x'_i) = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}x'\,\mathcal{W}^{n,\theta}(t-s,x,x')\,, \tag{2.9}$$

其中 $\mathcal{W}^{n,\,\theta}$ 的表达式见（B.5）。

接下来注意，取期望后，乘积 $\bullet$，$\blacktriangleleft$，$\blacktriangleright$ 会转化为算子乘积和内积。记 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$ 为 $L^2(\mathbb{R}^d,\ \mathrm{d}x)$ 上的内积。对于 $f,\ g \in L^2(\mathbb{R}^{2n})$，

$$\mathbf{E}\, f \blacktriangleleft (Z^\theta_{s,t} \bullet W^\theta_{t,u})^{\otimes n} \blacktriangleright g = \big\langle f\,, \mathcal{Q}^{n,\theta}(t-s)\,\mathcal{W}^{n,\theta}(u-t)\, g\big\rangle\,, \tag{2.10}$$

由公理4、（2.2）和（2.9）可验证，更多项的乘积也满足类似关系。

函数 $\mathfrak{j}^\theta(t)$ 在（2.4）中近似于 $t^{-1}(\log t + \theta)^{-2}$（当 t 较小时），更精确地说

$$\frac{(1-\epsilon_-(c_0,t))}{t\,((\log t+\theta)^2_- + 1)} \le \mathfrak{j}^\theta(t) \le \frac{(1+\epsilon_+(c_0,t))}{t\,((\log t+\theta)^2_- + 1)}\,, \qquad \theta \le c_0\,,\ t \in (0,1]\,, \tag{2.11}$$

其中 $\epsilon_\pm(c_0,\ \cdot)$ 有界且满足 $\epsilon_\pm(c_0,\ t) \to 0$ 当 $t \to 0$ 时。在特别情况下，

$$\int_0^t \mathrm{d}s\, \mathfrak{j}^\theta(s) \le \frac{c(c_0)}{(\log t+\theta)_- + 1}\,, \qquad t \in (0,1]\,,\ \theta \le c_0\,. \tag{2.12}$$

估计（2.11）例如可由以下拉普拉斯逆公式得到。注意，$\mathfrak{j}^\theta$ 的拉普拉斯变换为 $\int_0^\infty \mathrm{d}t\, e^{zt}\mathfrak{j}^\theta(t) = 1/(\log(-z) - \theta)$ 对于 $-z > e^\theta$，因此通过类梅林反演公式对拉普拉斯变换进行逆变换可得

$$\mathfrak{j}^\theta(t) = \int_{\subset} \frac{\mathrm{d}z}{2\pi\mathbf{i}} \frac{e^{-zt}}{\log(-z) - \theta}\,, \tag{2.13}$$

其中，$\subset$ 表示复平面内从实轴的正上方和正下方开始并包围 $[-e^\theta, \infty)$ 的逆时针围道 $\{[-e^\theta,\infty) + \mathbf{i}0\} \cup \{[-e^\theta,\infty) - \mathbf{i}0\}$。

接下来，我们陈述几个有用的界。令 $\mathscr{F}_{[s,t]}$ 为由 $Z^\theta_{s'}$ 生成的 σ-代数，t' 对 $s \le s' \le t' \le t$，回忆一下 t_i 由（1.8），令

$$Z_i = Z^\theta_i := Z^\theta_{t_{i-1},t_i}\,, \qquad W_i = W^\theta_i := W^\theta_{t_{i-1},t_i}\,, \qquad p_i := p(t_i,\cdot)\,, \tag{2.14}$$

并记作$p_{i,\ r,\ y} := p\left(t_i r^2,\ \cdot - y\right)$以简化记号。借助（1.8）和（2.5），结合（2.11）–（2.12），不难验证以下界：

$$\lim_{b\to 0} \sup_{\varepsilon\le 1/2, i\in[1,N-1]} \left|(N-i)\mathbf{E}(p_{i-1} \blacktriangleleft W_i^\theta \blacktriangleright 1)^2 - 1\right| = 0\,, \tag{2.15}$$

$$t_i r^2 \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}y\, \mathbf{E}(p_{i-1} \blacktriangleleft Z_i^\theta \blacktriangleright p_{i,r,y})^2 \le c(c_0) r^2 \log\frac{1+r^2}{r^2}\,, \tag{2.16}$$

其中（2.16）对所有 $i\in[1,N-1]$，$b\le 1/2$，$|\theta|\le c_0$，以及 $r\in(0,\ \infty)$成立。

为减轻繁重的记号，我们将经常略去对 ε，b，θ 的依赖，正如我们一直通过记作 $N_{\varepsilon,\ b}=N$、$t_{i,\ \varepsilon,\ b}=t_i$ 和 $Z_i^\theta = Z_i$ 所做的那样。除非另有说明，本文中的所有界对任意固定的 $c_0<\infty$ 下的 $|\theta|\le c_0$ 成立，且本文中的其他常数 c 可以依赖于 c_0 而无须明确说明。我们用 $c=c(a_1,\ a_2,\ \ldots\ldots)$ 表示 $[2,\infty)$ 中的一般确定性常数，它可随处变化，但仅依赖于所指定的变量，只是我们可以略去对 c_0 的依赖。

2.3. **解耦展开**。 我们来对（1.9）中的分式建立精确展开。设

$$D_i = D_i^\theta := Z_i^\theta - (Z_i^\theta \blacktriangleright 1)\, p_i\,, \tag{2.17}$$

$$\begin{aligned}\mathscr{I} = \mathscr{I}(N,\ell) := \big\{\mathcal{I}=\{I_1,\ldots,I_{|\mathcal{I}|}\}\,\big|\,|\mathcal{I}|\ge 1,\\ I_1,\ldots,I_{|\mathcal{I}|} \text{ disjoint intervals of integers in } [1,N-\ell],\ \text{each with } |I_i|\ge 2\big\}\,,\end{aligned} \tag{2.18}$$

并将任意非空整数区间 I写作 $[i_I,j_I]\cap\mathbb{Z}$，其中 $i_I\le j_I\in\mathbb{Z}$。可以将 D_i视为用乘以热核 p_i 的点到线配分函数 $Z_i^\theta\blacktriangleright 1$ 近似点到点配分函数 Z_i^θ 时产生的误差。

命题 2.1。 我们有如下展开式：

$$\frac{p(\varepsilon^2)\blacktriangleleft Z_{\varepsilon^2,t_{N-\ell}}\blacktriangleright 1}{\prod_{i=1}^{N-\ell} p_{i-1}\blacktriangleleft Z_i\blacktriangleright 1} = 1 + \sum_{\mathcal{I}\in\mathscr{I}}\prod_{I\in\mathcal{I}} \frac{p_{i_I-1}\blacktriangleleft D_{i_I}\bullet\cdots\bullet D_{j_I-1}\bullet Z_{j_I}\blacktriangleright 1}{(p_{i_I-1}\blacktriangleleft Z_{i_I}\blacktriangleright 1)\cdots(p_{j_I-1}\blacktriangleleft Z_{j_I}\blacktriangleright 1)}\,. \tag{2.19}$$

证明。 首先，写作

$$p(\varepsilon^2)\blacktriangleleft Z_{\varepsilon^2,t_{N-\ell}}\blacktriangleright 1 = \left(p_0\blacktriangleleft Z_1\blacktriangleright 1\right) p_1\blacktriangleleft Z_{t_1,t_{N-\ell}}\blacktriangleright 1 + p_0\blacktriangleleft D_1\bullet Z_{t_1,t_{N-\ell}}\blacktriangleright 1\,. \tag{2.20}$$

在右侧，第一项将 $[\varepsilon^2,t_1]$ 和 $[t_1,t_{N-\ell}]$上的作用解耦，而第二项则是误差项。继续这一过程，写作

$$p_1\blacktriangleleft Z_{t_1,t_{N-\ell}}\blacktriangleright 1 = \left(p_1\blacktriangleleft Z_{t_1,t_2}\blacktriangleright 1\right) p_2\blacktriangleleft Z_{t_2,t_{N-\ell}}\blacktriangleright 1 + p_1\blacktriangleleft D_2\bullet Z_{t_2,t_{N-\ell}}\blacktriangleright 1\,, \tag{2.21}$$

$$p_0\blacktriangleleft D_1\bullet Z_{t_1,t_{N-\ell}}\blacktriangleright 1 = \left(p_0\blacktriangleleft D_1\bullet Z_{t_1,t_2}\blacktriangleright 1\right) p_2\blacktriangleleft Z_{t_2,t_{N-\ell}}\blacktriangleright 1 + p_0\blacktriangleleft D_1\bullet D_2\bullet Z_{t_2,t_{N-\ell}}\blacktriangleright 1\,, \tag{2.22}$$

并以此类推。这样便得到

$$p(\varepsilon^2)\blacktriangleleft Z_{\varepsilon^2,t_{N-\ell}}\blacktriangleright 1 = \prod_{i=1}^{N-\ell} p_{i-1}\blacktriangleleft Z_i\blacktriangleright 1 \tag{2.23a}$$

$$+\sum_{\mathcal{I}\in\mathscr{I}}\prod_{I\in\mathcal{I}} p_{i_I-1}\blacktriangleleft D_{i_I}\bullet\cdots\bullet D_{j_I-1}\bullet Z_{j_I}\blacktriangleright 1\cdot\prod_{i\notin\cup\mathcal{I}} p_{i-1}\blacktriangleleft Z_i\blacktriangleright 1\,. \tag{2.23b}$$

两边同时除以第一个乘积，即可得到所需结果。 □

To 为了控制 (2.19的右侧分母，我们引入偶 t

$$\Omega = \Omega(N_{\varepsilon,b},\ell) := \cap_{i=1}^{N-\ell}\Omega_i\ , \qquad \Omega_i := \big\{|p_{i-1}\triangleleft W_i\triangleright 1|\le 1/2\big\}\ . \tag{2.24}$$

注意到 $p_{i-1}\triangleleft Z_i\triangleright 1 = 1 + p_{i-1}\triangleleft W_i\triangleright 1$，因此在事件 Ω 上，我们有 $p_{i-1}\triangleleft Z_i\triangleright 1 \ge 1/2$。当 $\ell\to\infty$ 时，该事件以高概率成立。要看出原因，对 $n=4$ 使用 (B.22)，得到 $\mathbf{P}[\Omega_i^{\mathrm{c}}] \le c(c_0,\ n)(N-i)^{-2}$ 对所有 $i \le N-c$ 均成立，再通过并集界将它们结合起来，得到

$$\sup_{\varepsilon,b\in(0,1/2]} \mathbf{P}[\Omega^{\mathrm{c}}] \longrightarrow 0\ , \quad \text{as } \ell\to\infty\ , \qquad \text{where } \Omega = \Omega(N_{\varepsilon,b},\ell)\ . \tag{2.25}$$

式 (2.19) 左侧的分母是相互独立变量的乘积。借助 (2.15) 以及一个我们在 (B.22) 中推导出的高阶矩界，不难应用经典中心极限定理得到以下收敛结果。我们在附录 B 末尾给出证明。

引理 2.2。 存在 $f(\varepsilon,\ell,b)$ 使得 $\lim^{(\ell,b)\to(\infty,0)}\limsup_{\varepsilon\to 0} f = 0$ 并且随机变量

$$H'_{\varepsilon,\ell,b} := \frac{1}{\sqrt{\log\log\varepsilon^{-1}}}\Big(\log\prod_{i=1}^{N-\ell} p_{i-1}\triangleleft Z_i\triangleright 1 + \frac{1+f(\varepsilon,\ell,b)}{2}\log\log\varepsilon^{-1}\Big) \tag{2.26}$$

按以下意义收敛到高斯分布

$$\lim_{\ell,b\to(\infty,0)}\limsup_{\varepsilon\to 0}\Big|\mathbf{P}\big[H'_{\varepsilon,\ell,b}\in[\alpha,\beta]\big] - \int_\alpha^\beta \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-x^2/2}\Big| = 0\ , \qquad \alpha<\beta\in\mathbb{R}\ . \tag{2.27}$$

3. 误差界定

本节中，我们对式（2.19）中分式的分子的二阶矩进行界定。令

$$pDZ_I := p_{m-1}\triangleleft D_m\bullet\cdots\bullet D_{n-1}\bullet Z_n\triangleright 1\ , \quad I=[m,n] \tag{3.1}$$

表示所关注的量。本节中，我们将指标区间记为 $[i,j] := [i,j]\cap\mathbb{Z}$，并默认其限制在整数上。为方便记号，我们也会交替使用 $I=[i_I,j_I]=[m,n]$。为准备第5节中的分析，我们实际上考虑一个略有不同的表达式

$$\int_{\mathbb{R}^2}\mathrm{d}y\,\mathbf{E}\,pDZ_{I,r}(y)^2\ , \qquad pDZ_{I,r}(y) := p_{m-1}\triangleleft D_m\bullet\cdots\bullet D_{n-1}\bullet Z_n\triangleright p(t_n r^2,\cdot-y)\ . \tag{3.2}$$

正如推论3.5的证明中将会看到的，可以从对式（**期望**pDZ_I^2 中的积分的适当界定，轻易推出对3.2）的界定。

为了界定式（3.2）中的积分，我们先推导其表达式。

引理 3.1。 对于 $I=[m,n]$，其中 $m<n$，且 B_ω 的定义见本引理之后 *a,*

$$\int_{\mathbb{R}^2}\mathrm{d}y\,\mathbf{E}\,pDZ_{I,r}(y)^2 = \sum_{\omega\subset(m,n]} B_\omega\ . \tag{3.3}$$

B_ω的定义将涉及指标集 $[m,n]_\omega := [m,n]\backslash\omega$，其中我们一直并将继续写作 $J_\omega := J\setminus\omega$。令 $i_- = i_-(\omega) := \max[m,i)_\omega$ 为 i 在指标集中的前一个指标。该定义还将涉及针对 $i\in[m,n]_\omega$ 对 $\vec\beta_i\in\{+,-\}^2$ 的求和。将 $\vec\beta_A := (\vec\beta_i)_{i\in A}$ 记为，以便

简化记号。对于 $\vec\beta=(\beta_1,\beta_2)\in\{\pm\}^2$，将 $\pm$ 解释为 ±1，并令符号 $\vec\beta:=\beta_1\beta_2$。现定义

$$B_\omega=\prod_{i\in[m,n]_\omega}\int_{t_{i-1}<s_i<s_i'<t_i}\mathrm{d}s_i\,\mathrm{d}s_i'\;\cdot\;\frac{1}{s_m}\mathsf{j}(s_m'-s_m) \tag{3.4a}$$

$$\cdot\prod_{i\in(m,n]_\omega}\sum_{\vec\beta_{i_-}}\frac{\operatorname{sign}\vec\beta_{i_-}}{s_i-u_{i_-}}\mathsf{j}(s_i'-s_i)\cdot\Big(\sum_{\vec\beta_{(n+1)_-}}\operatorname{sign}\vec\beta_{(n+1)_-}\Big)^{1_{n\in\omega}}\frac{1}{4\pi(s_{n+1}-u_{(n+1)_-})}\,, \tag{3.4b}$$

约定 $s_{n+1}:=t_n+t_nr^2$，其中求和遍历 $\vec\beta_{i_-}$，$\vec\beta_{(n+1)_-}\in\{+,-\}^2$ 如前所述，而 $u_i=u_i(\vec\beta_{[m,i]_\omega})$ 由以下迭代以及 $v_i=v_i(\vec\beta_{[m,i]_\omega})$ 给出。对于满足 $i\in[m,n)_\omega$ 的 u_i，以及满足 $i_-\in[m,n)_\omega$ 的 v_i，迭代为

$$u_i=\begin{cases}s_i'\,, & \vec\beta_i=(+,+)\,,\\ 0\,, & \vec\beta_i=(-,-)\,,\\ \frac{s_i'+v_{i_-}}{4}\,, & \operatorname{sign}\vec\beta_i=-1\,,\end{cases}\qquad v_i=\begin{cases}v_{i_-}\,, & \vec\beta_i=(+,+)\,,\\ 0\,, & \vec\beta_i=(-,-)\,,\\ \frac{s_{i_+}(s_i'+v_{i_-})}{4s_{i_+}-s_i'-v_{i_-}} & \operatorname{sign}\vec\beta_i=-1\,,\end{cases} \tag{3.5}$$

满足 $v_{m_-}:=0$；当 $n\notin\omega$时，$u_{(n+1)_-}=u_n:=s_n'$。

引理的证明*3.1*. 我们首先推导式（3.3）左侧的展开式。回忆（见第2.2节），**期望**$Z_{s,\,t}=\mathcal{P}_{s,\,t}$，并且 $W_{s,\,t}:=Z_{s,\,t}-\mathcal{P}_{s,\,t}$。稍微滥用一下记号，记 $\mathcal{P}_{i,\,j}:=\mathcal{P}_{t_i,\,t_j}$。我们通过如下方式书写，将 D_i 和 Z_n 的均值与其本身分开

$$D_i=E_i+\bar E_i\,,\qquad E_i:=W_i-(W_i\triangleright1)\,p_i\,,\qquad \bar E_i:=\mathbf{E}D_i=\mathcal{P}_{i-1,i}-p_i\,,\qquad i\in[m,n)\,, \tag{3.6}$$

$$Z_n=E_n+\bar E_n\,,\qquad E_n:=W_n\,,\qquad \bar E_n:=\mathbf{E}Z_n=\mathcal{P}_{n-1,n}\,, \tag{3.7}$$

其中这些 p_i 被解释为 $\mathrm{d}y\,\mathrm{d}y'p(t_i,y')\in\mathcal{M}_+(\mathbb{R}^4)$。记 $p_{n,r,y}=p(t_nr^2,\cdot-y)$ 以简化记号，注意 $p_{m-1}\triangleleft E_m=0$，并记

$$pDZ_{I,r}(y)=p_{m-1}\triangleleft E_m\bullet(E_{m+1}+\bar E_{m+1})\bullet\cdots\bullet(E_n+\bar E_n)\triangleright p_{n,r,y}\,. \tag{3.8}$$

展开最后一个表达式得到

$$pDZ_{I,r}(y)=\sum_{\omega\subset(m,n]}A_\omega(y)\,,\qquad A_\omega(y):=p_{m-1}\triangleleft E_m\bullet\cdots\triangleright p_{n,r,y}\,, \tag{3.9}$$

其中乘积中的因子为 E_i 当 $i\notin\omega$ 且 E_i 否则。注意到 **期望**$A_\omega A_{\omega'}=0$每当 $\omega\neq\omega'$。为说明原因，不妨设 $\omega\setminus\omega'\neq\varnothing$，取 $i\in\omega\setminus\omega'$，并对 $A_\omega A_{\omega'}$ 在给定 $\sigma\{Z_{s,t}\,|\,[s,t]\subset[0,t_{i-1}]\cup[t_i,1]\}$ 时取条件期望，利用如下事实：**期望**$E_i=0$。对（3.9）中的求和取二阶矩，并将结果在 y 上积分，得到

$$\mathbf{E}\,pDZ_{I,r}(y)^2=\sum_{\omega\subset(m,n]}\int_{\mathbb{R}^2}\mathrm{d}y\,\mathbf{E}A_\omega(y)^2\,. \tag{3.10}$$

接下来，我们将（3.10）中的第二个期望表示为积分。令 $\omega=[i_1,j_1]\cup\ldots\cup[i_k,j_k]$，其中 $j_h+1<i_{h+1}$，并使用易于验证的恒等式 **期望**$D_i\bullet\cdots\bullet$**期望**$D_j=\mathcal{P}_{i-1,\,j}-p_j$，其中 $[i,j]=[i_1,j_1]$、……、$[i_k,j_k]$。然后，令 $E_i^+:=W_i$ 且 $E_i^-:=(W_i\triangleright1)\,p_i$，对每个 $i\in[m,n)_\omega$ 写出 $E_i=E_i^+-E_i^-$，并注意到 $E_{i-1}^-\bullet(\mathcal{P}_{i-1,\,j}-p_j)=0$。这样便得到

$$A_\omega(y)=p_{m-1}\triangleleft\Big(\prod_{h=1}^k\cdots E_{i_h-1}^+\bullet\big(\mathcal{P}_{i_h-1,j_h}-p_{j_h}\big)\Big)\cdots\triangleright p_{n,r,y}\,, \tag{3.11}$$

其中，第一个 $\cdots$ 由 $E_i^+ - E_i^-$ 与 $i \in (j_{h-1},\ i_h)$ 的乘积以及 $j_0 := m-1$ 构成，第二个 $\cdots$ 由 $E_i^+ - E_i^-$ 与 $i \in (j_k, n)$ 后接 W_n 当 $j_k < n$ 时，而当.....时应整体省略 $j_k = n$。此外，当 $\omega = \varnothing$ 时，括号内的项应整体省略。将（3.11）平方，展开结果，借助（**期望**（2.9）计算 $n = 2$、（2.5）以及类似（2.10）的关系，并利用热半群性质化简结果。由此得到

$$\mathbf{E}A_\omega(y)^2 = \prod_{i\in[m,n]_\omega} \int_{t_{i-1}<s_i<s_i'<t_i} \mathrm{d}s_i\,\mathrm{d}s_i' \int_{\mathbb{R}^4} \mathrm{d}y_i\,\mathrm{d}y_i' \cdot p(s_m, y_m)^2 \tag{3.12a}$$

$$\cdot \prod_{i\in[m,n]_\omega} 4\pi \mathrm{j}(s_i' - s_i) p(\tfrac{s_i'-s_i}{2}, y_i' - y_i) \sum_{\vec\beta_i} \operatorname{sign}\vec\beta_i \prod_{j=1,2} f^{\beta_{ij}}(s_i', y_i', s_{i_+}, y_{i_+})\,. \tag{3.12b}$$

这里 $i_+ = i_+(\omega) := \min(i, n+1]_\omega$，约定 $s_{n+1} := t_n + t_n r^2$，且 $y_{n+1} := y_\circ$ 对于$i \in [m,n)_\omega$，求和遍历 $\vec\beta_i \in \{+,-\}^2$。当 $n \notin \omega$ 时，$\vec\beta_n$ 的求和遍历单个元素 $(+,+)$。函数 f^β 定义为

$$f^\beta(s', y', s, y) := \begin{cases} p(s-s', y-y')\,, & \text{when } \beta = +\,, \\ p(s,y)\,, & \text{when } \beta = -\,. \end{cases} \tag{3.13}$$

对于 $i \in [m,n)_\omega$，向量 $\vec\beta_i$ 在$i_+ = i+1$时参数化了 (3.11) 中在 E_i^+ 和 $-E_i^-$ 之间的选择；而在 $i_+ > i+1$时，则参数化了在 $E_i^+ \bullet \mathcal{P}_{i_\,i_+-1}$和 $-E_i^+ \bullet p_{i_+-1}$之间的选择（这意味着对于某个 h，$i = i_h - 1$ 和 $i_+ - 1 = j_h$）。当 $n \notin \omega$时，(3.11) 中倒数第二个因子为 W_n。与其他项不同，它不是一个差，因此对于 $\vec\beta_n$，会得到单个值 $(+,+)$。

为完成证明，我们对 y 上的 (3.12) 积分，并按y_m、y_m'、y_{m+1}、.....的顺序计算空间积分。首先，写出 $p(s_m, y_m)^2 p(\frac{s_m'-s_m}{2}, y_m' - y_m) = \frac{1}{4\pi s_m} p(\frac{s_m}{2}, y_m) p(\frac{s_m'-s_m}{2}, y_m' - y_m)$，并对 y_m 积分，得到 $\frac{1}{4\pi s_m} p(\frac{s_m'}{2}, y_m')$。接下来，对~~于~~关于 y_m' 的积分，相关被积函数为 $i = m$时的 $p(\frac{s_m'}{2}, y_m')$ 以及 (3.12b) 中最后一个乘积。借助热半群性质对 y_m' 积分，并化简结果。由此得到

$$\int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}y_m'\, p(\tfrac{s_m'}{2}, y_m') \prod_{j=1,2} f^{\beta_{mj}}(s_m', y_m', s_{m_+}, y_{m_+}) = \frac{1}{4\pi(s_{m_+} - u_m)} p(\tfrac{s_{m_+} - v_m}{2}, y_{m_+})\,. \tag{3.14}$$

归纳地对$y_{m_+}, y_{m_+}', \ldots$积分，注意 $y_{n+1} := y$，并将结果$(i, i_+) \mapsto (i_-, i)$重新编号。如此即得所需结果。□

事实上，u_i 依赖于v_{i_-}，而后者又依赖于许多 β_j，这并不方便。另一方面，由（3.5）中的迭代不难验证 $v_i \le s_i'$，并回顾 t_i遵循指数时间尺度（1.8）。因此，只要 b很小，v_{i_-} 在（3.4）中的贡献就应很小。下述引理量化了这一事实。令

$$w_i(\vec\beta) := \begin{cases} s_i'\,, & \vec\beta = (+,+)\,, \\ 0\,, & \vec\beta = (-,-)\,, \\ s_i'/4\,, & \operatorname{sign}\vec\beta = -1\,. \end{cases} \tag{3.15}$$

引理 3.2. 设定如上。存在 c，使得对所有 $b \le 1/c$ 与 $i \in (m,n]_\omega$，

$$\frac{1}{s_i - u_{i_-}(\vec\beta_{[m,i_-]_\omega})} = \frac{1}{s_i - w_{i_-}(\vec\beta_{i_-})} \sum_{j\in[m,i_-]} u_{\lambda(i,j)}(\vec\beta_{\lambda(i,j)_\omega})\,, \qquad \lambda(i,j) := [j, i_-)\,, \tag{3.16}$$

where $u_{\lambda(i,i_-)} = u_\varnothing := 1$，其余的 us 满足 $|u_\lambda| \le (cb^2)^{|\lambda|}$，对于 $\lambda = \lambda(i,\ j)$.

证明。 首先，我们对 $i \in [m,n]_\omega$ 使用归纳法来证明

$$v_i(\vec{\beta}_{[m,i]_\omega}) = \sum_{j\in[m,i]_\omega} v_{ij}(\vec{\beta}_{[j,i]_\omega}) \,, \qquad |v_{ij}| \le t_j \,. \tag{3.17}$$

为表示式（3.5）中的迭代，令 $f(s',s,\vec{\beta},v) := v1_{\vec{\beta}=(+,+)} + s(s'+v)1_{\operatorname{sign}\vec{\beta}=-1}/(4s-s'-v)$. 对于 $i=m$，只需取 $v_{mm}(\beta_m) = f(s'_m, s_{m_+}, \beta_m, 0)$。对于 $i>m$，使用式（3.5）中的迭代和归纳假设，可写为

$$v_i(\vec{\beta}_{[m,i]_\omega}) = f\Big(s'_i, s_{i_+}, \vec{\beta}_i, \sum_{j\in[m,i_-]_\omega} v_{i_-j}(\vec{\beta}_{[j,i_-]_\omega})\Big) \,. \tag{3.18}$$

当 $\vec{\beta}_i = (+,+)$ 或 $(-,-)$时，命题（3.17）确实成立。当 $\vec{\beta}_i = (+,-)$ 或 $(-,+)$时，对右侧进行泰勒展开，得到

$$\frac{s_{i_+}s'_i}{4s_{i_+}-s'_i}\Big(1+\frac{\sum_{j\in[m,i_-]_\omega} v_{i_-j}(\vec{\beta}_{[j,i_-]_\omega})}{s'_i}\Big)\sum_{k\ge 0}\Big(\frac{\sum_{j\in[m,i_-]_\omega} v_{i_-j}(\vec{\beta}_{[j,i_-]_\omega})}{4s_{i_+}-s'_i}\Big)^k \,. \tag{3.19}$$

我们希望（3.19）成为 $\vec{\beta}_i = (+,-)$ 或 $(-,+)$ 时（3.17）的右侧。展开（3.19）。在展开结果中，令 $(s_{i_+}s'_i)/(4s_{i_+}-s'_i)$ 为 $v_{ii}(+,-) = v_{ii}(-,+)$。然后，收集所有 $\vec{\beta}$ 仅依赖于 $\beta_{[i_-,i_-]}$ 的其余项，并令 $v_{ii_-}(\beta_{i_-},+,-) = v_{ii_-}(\beta_{i_-},-,+)$ 为这些项的求和。类似地继续，按 j 递减的顺序定义 v_{ij}。鉴于 $s'_i < t_i < s_{i_+}$，以及式（1.8）中 t_j 的指数尺度，只要取足够小且与 i 无关的 b，并使用归纳假设 $|v_{i_-j}| \le t_j$，就很容易（尽管繁琐）验证 $|v_{ij}| \le t_j$。

得到（3.17）后，我们用它来证明所需结论。在（3.5）中 u_i的定义里对 v_{i_-}作泰勒展开，将（3.17）代入所得结果，并相应地展开。根据所得结果，按照与构造 v_{ij} 类似的方式，按 j 递减的顺序构造 $u_{[j,i_-)_\omega}$，从$u_{[i_-,i_-)} := 1$开始。已知 $s'_{i_-} < t_{i_-} < s_i$，并取 b 足够小（且与 i无关），不难（但较为繁琐）验证其余 us 满足所声称的界。□

利用引理 3.2，接下来我们对 βs（3.5）中的求和进行界定，从而得到对 $|B_\omega|$ 的界，其中不再包含对 $\vec{\beta}$s 的求和。令 $\tilde{n} := (n+1)_- :=$ 最大值$[m,n+1) \setminus \omega$ 以简化记号。对于 $\lambda \subset [m,\tilde{n}_-)_\omega$，令

$$\tilde{g}_{\omega,\lambda,i_-}(s',s) := \begin{cases} \frac{1}{s-s'} - \frac{1}{s} \,, \\ \frac{1}{s-s'} \,, \\ \frac{1}{s-s'} \,, \end{cases} \qquad g_{\omega,\lambda,i_-} := \tilde{g}_{\omega,\lambda,i_-} \begin{cases} 1 \,, & i_- \in [m,n)_\omega \setminus \lambda \,, \\ b^{2(i-i_-)} \,, & i_- \in \lambda \,, \\ 1 \,, & i_- = n \text{ or } i = m \,, \end{cases} \tag{3.20}$$

$$G_{\omega,\lambda} := \prod_{i\in[m,n]_\omega} \int_{t_{i-1}<s_i<s'_i<t_i} \mathrm{d}s_i \, \mathrm{d}s'_i \; g_{\omega,\lambda,i_-}(s'_{i_-},s_i)\, \mathrm{j}(s'_i - s_i)\cdot g_{\omega,\lambda,\tilde{n}}(s'_{\tilde{n}}, s_{n+1}) \,, \tag{3.21}$$

约定 $s'_{m_-} := 0$ 和 $s_{n+1} := t_n + t_n r^2$。

引理 3.3。 存在 c，使得对于满足 $m<n$ 和 $b \le 1/c$ 的 $\omega \subset [m,n] \subset [1,N-1]$，

$$|B_\omega| \le c^{n-m+1} \sum_{\lambda\subset[m,\tilde{n}_-)_\omega} G_{\omega,\lambda} \,. \tag{3.22}$$

证明。 我们先进行一些展开。对 $i \in [m,n]_\omega = [m,\tilde{n}]_\omega$ 上的 (3.16) 中的求和取乘积，并展开结果，得到

$$\prod_{i\in[m,n]_\omega} \sum_{j\in[m,i_-]_\omega} u_{\lambda(i,j)} = \sum_{\delta\in\Delta} U_\delta \,, \qquad U_\delta := \prod_{(i,j)\in\delta} u_{\lambda(i,j)} \,, \tag{3.23}$$

其中 Δ 由形如 $\delta = \{(i,j_i) \mid i \in [m,n]_\omega, j_i \in [m,i_-]_\omega\}$的集合组成。令 $\Lambda(\delta) := \bigcup_{(i,j)\in\delta} \lambda(i,j)$，从而 $U_\delta = U_\delta(\vec{\beta}_{\Lambda(\delta)_\omega})$。由于$u_{\lambda(i,j)} = u_{\lambda(i,j)}(\vec{\beta}_{\lambda(i,j)_\omega})$，我们有 $U_\delta = U_\delta(\vec{\beta}_{\Lambda(\delta)_\omega})$。现在，将(3.16)代入(3.4)，并根据(3.23)展开所得结果。回顾 $\tilde{n} := (n+1)_-$并令

$$B_{\omega,\delta} := \prod_{i\in[m,n]_\omega} \int_{t_{i-1}<s_i<s_i'<t_i} \mathrm{d}s_i\,\mathrm{d}s_i' \cdot \frac{1}{4\pi s_m} \mathrm{j}(s_m' - s_m) \tag{3.24a}$$

$$\cdot \prod_{i\in(m,n]_\omega} \sum_{\vec{\beta}_{i_-}} \frac{\operatorname{sign}\vec{\beta}_{i_-}}{s_i - w_{i_-}(\vec{\beta}_{i_-})} \mathrm{j}(s_i' - s_i) \tag{3.24b}$$

$$\cdot \Big(\sum_{\vec{\beta}_{\tilde{n}}} \operatorname{sign}(\vec{\beta}_{\tilde{n}})\Big)^{1_{n\in\omega}} \frac{1}{t_n + t_n r^2 - w_{\tilde{n}}(\vec{\beta}_{\tilde{n}})} U_\delta(\vec{\beta}_{\Lambda(\delta)_\omega}) \,, \tag{3.24c}$$

我们有$B_\omega = \sum_{\delta\in\Delta} B_{\omega,\,\delta}$，特别地$|B_\omega| \le \sum_{\delta\in\Delta} |B_{\omega,\,\delta}|$。让我们根据 $\Lambda(\delta)_\omega$分解最后的求和。注意 $[m,n]_\omega = [m,\tilde{n}]_\omega$，因为 $\tilde{n} = (n+1)_-$。由于 $\Lambda(\delta)$是形如 $\lambda(i,\ j) := [j_i, i_-)$且满足 $i \in [m,n]_\omega = [m,\tilde{n}]_\omega$的集合之并，集合 $\Lambda(\delta)_\omega$ 包含于$[m,\tilde{n}_-)_\omega$。因此，我们记

$$|B_\omega| \le \sum_{\delta\in\Delta} |B_{\omega,\delta}| = \sum_{\lambda\subset[m,\tilde{n}_-)_\omega} \sum_{\delta:\Lambda(\delta)_\omega=\lambda} |B_{\omega,\delta}| \,. \tag{3.25}$$

我们来界定 (3.25) 中的内层求和。取 λ 和 δ，使得 $\Lambda(\delta)_\omega = \lambda_\omega$。在 (3.24) 中，对于 $i_- \notin \lambda$，唯一依赖于 β_{i_-} 的项是$\vec{}$ $\vec{}\,w_{i_-}$，因此可以独立于 (3.24) 中的其他因子计算关于 β_{i_-} 的求和。计算该求和，并将结果的绝对值界定为表达式$1/s_i + (1-2)/(s_i - s_{i_-}')$ $= \tilde{g}_{\omega,\lambda,i_-}(s_{i_-}', s_i)$（见 (3.15) 和 (3.20)）。接下来，对每个 $i_- \in \lambda \cup \{n\}$,$\vec{}$，界定 $|\operatorname{sign}\beta_{i_-}| \le 1$ 和 $|1/(s_i - u_{i_-})| \le 1/(s_i - s_{i_-}') = \tilde{g}_{\omega,\lambda,i_-}(s_{i_-}', s_i)$。最后注意，根据定义，$1/s_m = \tilde{g}_{\omega,\lambda,m_-}(s_{m_-}', s_m)$。令 $G_{\omega,\lambda}$ 由 (3.21) 中每个 g 都替换为$\tilde{g}$得到。我们有 $|B_{\omega,\delta}| \le 4^{n-m+1}\, \tilde{G}_{\omega,\lambda}\, |U_\delta(\vec{\beta}_\lambda)|$，因此

$$\sum_{\delta:\Lambda(\delta)_\omega=\lambda} |B_{\omega,\delta}| \le 4^{n-m+1}\, \tilde{G}_{\omega,\lambda} \sum_{\delta:\Lambda(\delta)_\omega=\lambda} |U_\delta(\vec{\beta}_\lambda)| \,. \tag{3.26}$$

为完成证明，我们来界定（3.26）中的最后一个求和。首先注意到，由于 g 和 $\tilde{g}$ 仅相差（3.20）中的乘法因子，令 $k_\lambda := \sum_{i_-\in\lambda}(i - i_-)$，则有$\tilde{G}_{\omega,\,\lambda} = b^{-2k_\lambda} G_{\omega,\,\lambda}$。接下来，将 $\Lambda(\delta)_\omega = \lambda$ 更明确地写为$\bigcup_{(i,\ j)\in\delta} [j, i_-)_\omega = \lambda$，并注意到去掉 ω下标（从而增大集合 $[j, i_-)_{\ \omega}$至 $[j, i_-)$），可得

$$\bigcup_{(i,j)\in\delta} [j, i_-) \supset \bigcup \big\{ [h_-, h) \,\big|\, h_- \in \lambda \big\} \,, \tag{3.27}$$

因为每个 $h_- \in \lambda = \Lambda(\delta)_\omega$都属于 $[j, i_-)$对于某个 $(i,j) \in \delta$并且 $h_- < i_-$意味着 $h \le i_-$。(3.27) 右侧的集合有 k_λ 个元素。由 (3.27) 和界 $|u_\lambda| \le (cb^2)^{|\lambda|}$

根据引理 3.2，回顾 U_δ 在 (3.23) 中的定义，可得

$$\sum_{\delta:\Lambda(\delta)_\omega=\lambda}|U_\delta|=\sum_{\delta:\Lambda(\delta)_\omega=\lambda}\prod_{(i,j)\in\delta}|u_{\lambda(i,j)}|\le\prod_{i\in[m,n]_\omega}\sum_{k_i\ge 0}(cb^2)^{k_i}\cdot 1_{\sum k_i\ge k_\lambda}\,, \tag{3.28}$$

其中我们使用 $k_i:=i_--j_i$ 来表示 $\lambda(i,j)$ 的基数。右侧在 $\sum_{k\ge k_\lambda}\binom{|[m,n]_\omega|+k-1}{k}a^k$ 时的值为 $a=cb^2$，且当 $2^{n-m+1}(2a)^{k_\lambda}$ 时有界。将此界代入 (3.26)，代入 $\tilde G_{\omega,\lambda}=b^{-2k_\lambda}G_{\omega,\lambda}$ 并将结果代入 (3.25)。由此得到所需结果 (3.22)。□

接下来，我们着手对 $G_{\omega,\lambda}$ 中的时间积分进行界定。引理 3.3 处理了对 βs 的求和，但时间积分仍保留在界中，如 3.21 中 $G_{\omega\text{ 的定义所示},\lambda}$。下一步是对时间积分进行界定。重申一下，我们假设 $|\theta|\le c_0$，并且通常省略显示对 θ 或 c_0 的依赖性。特别地，$G_{\omega,\lambda}=G^\theta_{\omega,\lambda}$ 以及 (3.29) 中的 c 取决于 c_0。

引理 3.4。 存在 c，使得对于满足 $m<n$ 的 $\omega\subset[m,n]\subset[1,N-1]$，$\lambda\subset[m,\tilde n_-)_\omega$、$b\le 1/c$ 和 $r\in(0,\infty)$，

$$G_{\omega,\lambda}\le c^{n-m+1}\prod_{i\in[m,n]_\omega}\frac{1}{\log t_i^{-1}}\cdot\frac{b^{2|\omega|}\log b^{-1}}{t_n(1+r^2)^{21_{n\in\omega}}}\Big(\log\frac{1+r^2}{r^2}\Big)^{1_{n\notin\omega}}\,. \tag{3.29}$$

证明。证明的关键在于对（3.21）中的积分进行估计。我们只考虑 $m+1<n$；情形 $m+1=n$ 可以用同样的方法处理。回顾一下，$\tilde n:=(n+1)_-:=$最大值$[m,n]_\omega$。

我们先估计（3.21）中的最后一个积分，即 $i=\tilde n$ 积分

$$\int_{t_{\tilde n-1}<s<s'<t_{\tilde n}}\mathrm{d}s\mathrm{d}s'\,g_{\omega,\lambda,\tilde n_-}(s'_{\tilde n_-},s)\,\mathsf{j}(s'-s)\,g_{\omega,\lambda,\tilde n}(s',t_n+t_nr^2)\,, \tag{3.30}$$

其中我们将哑变量 $s_{\tilde n}$，$s'_{\tilde n}$ 重新记为 s，s'，并代入 $s_{n+1}:=t_n+t_nr^2$。令 $u:=s-t_{\tilde n-1}$、$u':=s'-s$ 和 $u'':=t_{\tilde n}-s'$，任取 $v\in[1/2,1]$，并作变量代换 u，u'，$u''\mapsto\frac{1}{v}u$，$\frac{1}{v}u'$，$\frac{1}{v}u''$，得到

$$(3.30)=\int\frac{\mathrm{d}u\mathrm{d}u'}{v^2}\,g_{\omega,\lambda,\tilde n_-}\big(s'_{\tilde n_-},\tfrac{1}{v}u+t_{\tilde n-1}\big)\,\mathsf{j}\big(\tfrac{1}{v}u'\big)\,g_{\omega,\lambda,\tilde n}\big(t_{\tilde n}-\tfrac{1}{v}u'',t_n+t_nr^2\big)\,, \tag{3.31}$$

其中积分遍历 $u+u'+u''=v(t_{\tilde n}-t_{\tilde n-1})$。我们来界定被积式中的三个因子（在 $1/v^2$ 之后）。鉴于 $v\ge 1/2$，对 $i_-=\tilde n_-$ 使用（3.20），并在 $\tilde n_-\notin\lambda\cup\{n\}$ 时合并其中的两个分式，可知第一个因子被 $4g_{\omega,\lambda,\tilde n_-}(\frac{1}{2}s'_{\tilde n_-},u+\frac{1}{2}t_{\tilde n-1})$ 所界定。至于第二个因子，回顾（2.4）可知，$\mathsf{j}^\theta(\frac{1}{v}u')=v\mathsf{j}^{\theta-\log v}(u')\le\mathsf{j}^{\theta+\log 2}(u')$。为界定最后一个因子，分别考虑 $n\in\omega$ 和 $n\notin\omega$ 两种情况。鉴于 $\tilde n\notin\lambda$，且在前一种情况下 $\tilde n<n$，我们对 $i_-=\tilde n$ 使用（3.20）中的第一个表达式，合并其中的两个分式，并使用 $s'_{\tilde n}\le t_{\tilde n}=t_nb^{2n-2\tilde n}$ 和 $\tilde n<n$。由此可知，（3.30）中的最后一个因子被 $c\,b^{2n-2\tilde n}/t_n(1+r^2)^2$ 所界定。在后一种情况下 $n\notin\omega$，我们有 $\tilde n=n$。对 $i_-=\tilde n=n$ 使用（3.20）中的最后一个表达式，并使用 $v\le 1$，可知（3.30）中的最后一个因子被 $1/(t_nr^2+u'')$ 所界定。结合这些界，并将（3.31）中的 $1/v^2$ 以 4 为界，我们得到

$$(3.30)\le c\,b^{2n-2\tilde n}\int\mathrm{d}u\mathrm{d}u'\,g_{\omega,\lambda,\tilde n_-}\big(\tfrac{s'_{\tilde n_-}}{2},u+\tfrac{t_{\tilde n-1}}{2}\big)\,\mathsf{j}^{\theta+\log 2}(u')\begin{cases}\frac{1}{t_n(1+r^2)^2} & n\in\omega\,,\\ \frac{1}{t_nr^2+u''} & n\notin\omega\,,\end{cases} \tag{3.32}$$

其中积分在 $u+u'+u''=v(t_{\tilde n}-t_{\tilde n-1})$ 上进行。该界对所有 $v\in[1/2,1]$ 成立。我们将其对 $v\in[1/2,1]$ 取平均。在平均后的界中，作变量代换

$(u,u',v) \mapsto (u,u',u''')$，其中 $u''' := v(t_{\tilde{n}} - t_{\tilde{n}-1}) - u - u'$，将所得雅可比行列式界定为 $(t_{\tilde{n}} - t_{\tilde{n}-1})^{-1} \le ct_{\tilde{n}}^{-1}$，将积分范围放宽至 $u,u',u''' \in [0,t_{\tilde{n}}]$，从而使所得积分因式分解。借助 (2.12) 对因式分解后的积分求值并给出上界，并注意到 $\tilde{n}_- \notin \lambda$，即可证明

$$(3.30) \le c \log \frac{1 - s'_{\tilde{n}_-}/(2t_{\tilde{n}} + t_{\tilde{n}-1})}{1 - s'_{\tilde{n}_-}/t_{\tilde{n}-1}} \frac{b^{2(n-\tilde{n})}}{t_n (1+r^2)^{21_{n\in\omega}}} \Big(\log \frac{r^2+1}{r^2} \Big)^{1_{n\notin\omega}} . \tag{3.33}$$

现在，我们通过计算并界定式（3.21）中的其余积分，完成证明。以下界成立。

$$\log \frac{1 - s'_{i_-}/(at_i + t)}{1 - s'_{i_-}/t_{i-1}} + \frac{s'_{i_-}}{t_i} \le c\, b^{2(i-1-i_-)} \log \frac{2}{1 - s'_{i_-}/t_{i-1}} , \quad a \ge 1 , \ t \ge 0 , \tag{3.34}$$

$$\begin{aligned} &\int_{t_{i-1}<s<s'<t_i} \mathrm{d}s\mathrm{d}s'\, g_{\omega,\lambda,i_-}(s'_{i_-}, s) \mathrm{j}(s'-s) \log \frac{2}{1 - s'/t_i} \\ &\qquad \le \frac{c}{\log t_i^{-1}} \begin{cases} \log \frac{1 - s'_{i_-}/t_i}{1 - s'_{i_-}/t_{i-1}} + \frac{s'_{i_-}}{t_i} , & i_- \in [m,n)_\omega \setminus \lambda , \\ b^{2(i-i_-)} \log \frac{2}{b^2 - s'_{i_-}/t_i} , & i_- \in \lambda , \\ \log b^{-1} , & i = m . \end{cases} \end{aligned} \tag{3.35}$$

第一个界可通过分别考虑 $i_- < i-1$ 和 $i_- = i-1$ 得出：在第一种情况下，用 $c\, b^{2(i-1-i_-)}$ 给左侧作界；在第二种情况下，用 $1 - s'_{i_-}/(at_i + t) \le 1$ 作界。第二个界的推导方法是先对 s' 上的积分作界，将定义域分为 $s < s' < (t_i + s)/2$ 和 $(t_i + s)/2 < s < t_i$，并结合 $\epsilon_+(c_0,t) \le c(c_0)$ 使用式（2.11）中的上界；随后对 s' 上的积分作界，同样将定义域分为 $t_{i-1} < s < (t_{i-1} + t_i)/2$ 和 $(t_{i-1} + t_i)/2 < s < t_i$。接下来，对于式（3.35）中的情形 $i_- \in \lambda$，令 $b^2 - s'_{i_-}/t_i = b^2(1 - s'_{i_-}/t_{i-1})$，并利用 $b^2 \log b^{-2} \le c$，将大括号中的表达式整体界为 $c\, b^{2(i-1-i_-)} \log 2/(1 - s'_{i_-}/t_{i-1})$。将所得各界与式（3.34）结合，并令 $\phi_i(s') := \log 2/(1 - s'/t_i)$ 以简化记号，得到

$$\int_{t_{i-1}<s<s'<t_i} \mathrm{d}s\mathrm{d}s'\, g_{\omega,\lambda,i_-}(s'_{i_-}, s) \mathrm{j}(s'-s) \phi_i(s') \le \frac{c\, b^{2(i-1-i_-)}}{\log t_i^{-1}} \phi_{i-1}(s'_{i_-}) , \ i \in (m,n)_\omega . \tag{3.36}$$

将（3.34）代入（3.33），然后使用（3.36），按递减顺序针对 i，并使用（3.35）于 $i = m$。在所得结果中，将 $n - \tilde{n} + \sum_{i\in(m,\,\tilde{n}]_\omega} (i - 1 - i_-)$ 视为 $|\omega|$。如此即得所需的界（3.29）。□

现在我们根据先前的结果推导所需的界。设

$$pDZ'_I := p_{m-1} \triangleleft D_m \bullet \cdots \bullet D_{n-1} \bullet Z_n , \qquad I = [m,n] . \tag{3.37}$$

这是一个随机符号测度，其全变差具有有限的正矩，即**期望**$(|pDZ'_I|1)^k < \infty$；这一点可通过将 D 在（3.37）中表示为 Z 与热核的形式看出。令 $p'(t,\ x_1,\ x_2) := \exp(-|x_1 - x_2|^2/4t)$，其中 $x_i \in \mathbb{R}^2$，并注意到根据热半群性质，

$$4\pi t \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}y \prod_{j=1,2} p(t, x_j - y) = p'(t, x_1, x_2) . \tag{3.38}$$

推论 3.5。 存在 c，使得对于满足 $|I|>1$ 的 $I=[i_I,j_I]\subset[1,N-\ell]$、对于 $b\le 1/c$ 以及对于 $\ell\in[1,N]$,

$$4\pi t_{j_I} r^2\int_{\mathbb{R}^2}\mathrm{d}y\,\mathbf{E}\,pDZ_{I,r}(y)^2\le\frac{c^{|I|}}{(\log b^{-1})^{|I|-1}}r^2\log\frac{r^2+1}{r^2}\,, \tag{3.39}$$

$$\mathbf{E}\,pDZ_I{}^2\le\frac{c^{|I|}}{(\log b^{-1})^{|I|-1}(N-j_I)^2}\,. \tag{3.40}$$

证明。 在此证明中，我们记作 $m=i_I$ 和 $n=j_I$ 以简化记号。

为得到 (3.39)，将 (3.29) 两边乘以 $4\pi t_n r^2$，利用 $\frac{1}{1+r^2}\le$对数 $\frac{1+r^2}{r^2}$（因为 $\log(1-x)\le -x$ 当 $x=\frac{1}{1+r^2}$时成立），对 $\omega\subset(m,n]$ 和 $\lambda\subset[m,\tilde{n}_-)_\omega$求和，再将结果代入 (3.3) 即得

$$4\pi t_n r^2\int_{\mathbb{R}^2}\mathrm{d}y\,\mathbf{E}\,pDZ_{I,r}(y)^2\le c^{|I|}\log b^{-1}\prod_{i\in I}\Big(\frac{1}{\log t_i^{-1}}+\frac{1_{i>m}\,b^2}{(1+r^2)^{1_{i=n}}}\Big)\cdot r^2\log\frac{r^2+1}{r^2}\,. \tag{3.41}$$

所需的界 (3.39可由以下方法得到

$$\log t_i^{-1}=2\log b^{-1}\cdot\Big(\frac{\log\varepsilon^{-1}}{\log b^{-1}}-i\Big)\ge 2\log b^{-1}\cdot(N-i)\,,\qquad b^2\le\frac{c}{\log b^{-1}}\,, \tag{3.42}$$

以及当 $i\in I$时的 $N-i\ge 1$。

第二个界 (3.40) 可通过在 (3.41) 中令 $r\to\infty$ 得到。在 (3.41) 右侧令 $r\to\infty$，利用 (3.42)，对 $i=m,n$ 使用 $N-i\ge N-n=N-j_I$，并对 $i\in(m,n)$ 使用 $N-i\ge 1$。由此可知，(3.41) 右侧的极限被 (3.40) 右侧的极限所界定。至于左侧，令 $f_r(y,x_1,x_2):=4\pi t_n r^2 p(t_n r^2,x_1-y)p(t_n r^2,x_2-y)$，并将 (3.41) 的左侧写为 $\int\mathrm{d}y$ 期望 $pDZ_I'^{\otimes 2}\,f_r(y,\cdot,\cdot)$。根据 (3.37) 后提到的性质，我们交换积分与期望 $pDZ_I'^{\otimes 2}$，对 $t=t_n r^2$ 使用 (3.38)，并借助控制收敛定理令 $r\to\infty$ 取极限。由此可知，(3.41) 的左侧收敛到 (3.40) 的左侧。□

4. 解耦

本节的主要目标是证明命题 4.1，该命题断言：当 $\ell\log b^{-1}$ 足够大时，(2.19) 中的求和在事件 Ω（定义于 (2.24)）上小于 $1/2$。回顾 (2.18) 之前的 $\mathscr{I}=\mathscr{I}(N,\ell)=\mathscr{I}(N_\varepsilon,b,\ell)$。令 $\mathscr{F}_i$ 为由 $Z_{s,t}$ 对 $s\le t\in[t_{i-1},t_i]$ 生成的 σ-代数，并注意根据公理 3，$\mathscr{F}_1,\dots,\mathscr{F}_{N-\ell}$ 是独立的。重申一下，我们已假设 $|\theta|\le c_0$，并且大多会省略显示对 θ的依赖。

命题 4.1. 存在 $c=c(c_0)$ 使得对所有 $b\le 1/c$ 和 $\ell\in[1,N\quad]$,

$$\mathbf{E}\Big(\sum_{\mathcal{I}\in\mathscr{I}}\prod_{I\in\mathcal{I}}\frac{1_\Omega\,pDZ_I}{(p_{i_I-1}\blacktriangleleft Z_{i_I}\blacktriangleright 1)\cdots(p_{j_I-1}\blacktriangleleft Z_{j_I}\blacktriangleright 1)}\Big)^2\le\frac{c}{(\ell\log b^{-1})^{1/2}}\,. \tag{4.1}$$

证明。 我们先进行初步展开。令 F_I 表示式（4.1）中的分式，并将式（4.1）的左边写作$\sum_{\mathcal{I},\mathcal{J}\in\mathscr{I}}$期望$[\prod_{I\in\mathcal{I}}F_I\cdot\prod_{J\in\mathcal{J}}F_J]$。利用 $\mathscr{F}_1,\dots,\mathscr{F}_{N-\ell}$的独立性，我们希望将该期望拆成乘积。将 $1,\dots,N-\ell$ 视为顶点；若两个顶点同属于某个 $I\in\mathcal{I}$ 或 $J\in\mathcal{J}$，则在它们之间连一条边。由此得到一个图，我们记作$G_{\mathcal{I},\mathcal{J}}$，其连通分支将 $[1,N-\ell]\cap\mathbb{Z}$ 划分为若干区间。单点集

区间中不包含 $\bigcup\mathcal{I}\cup\bigcup\mathcal{J}$中的元素，因为 $\mathcal{I}$和 $\mathcal{J}$中的区间至少包含两个元素（由（2.18）可知）。我们舍弃单点集区间，并令

$$\mathcal{K}_{\mathcal{I},\mathcal{J}} := \big\{K \,|\, K \text{ a connected component of } G_{\mathcal{I}\cup\mathcal{J}} \text{ with } |K|\geq 2\big\}\,. \tag{4.2}$$

根据 $\mathscr{F}_1,\dots,\mathscr{F}_{N-\ell}$的独立性，**期望**$[\prod_{I\in\mathcal{I}}F_I\cdot\prod_{J\in\mathcal{J}}F_J]=\prod_{K\in\mathcal{K}_{\mathcal{I},\mathcal{J}}}A_{K,\mathcal{I},\mathcal{J}}$，其中

$$A_{K,\mathcal{I},\mathcal{J}} := \mathbf{E}\Big[\prod_{I\in\mathcal{I},I\subset K}F_I\cdot\prod_{J\in\mathcal{J},J\subset K}F_J\Big]\,, \tag{4.3}$$

因此

$$\text{lhs of (4.1)} = \sum_{\mathcal{I},\mathcal{J}\in\mathscr{I}}\prod_{K\in\mathcal{K}_{\mathcal{I},\mathcal{J}}}A_{K,\mathcal{I},\mathcal{J}}\,. \tag{4.4}$$

Wr写 $c=c(c_0)$ 为简化记号，我们证明 (4.4) 中的被加数满足 s

$$A_{K,\mathcal{I},\mathcal{J}} \leq \frac{1}{(N-j_K)^{3/2}}\frac{c^{|K|}}{(\log b^{-1})^{(|K|-1)/2}}\,,\quad K=[i_K,j_K]\,. \tag{4.5}$$

在 (4.3) 中，考虑两个乘积均非空（$\prod_\varnothing:=1$）的情形及其补集情形

.

情况 1，(4.3) 中的两个乘积都非空：在 (4.3) 中应用柯西-施瓦茨不等式，并利用指示函数 1_Ω 对 $(p_{i-1}\triangleleft Z_i\triangleright 1)1_i\geq 1/2$ 进行估计，得到 $A_{K,\mathcal{I},\mathcal{J}}\leq c^{|K|}($$\prod_{I\in\mathcal{I},I\subset K}$期望 $pDZ_I{}^2\cdot\prod_{J\in\mathcal{J},J\subset K}$期望 $pDZ_J{}^2)^{1/2}$。根据 $\mathcal{K}_{\mathcal{I},\mathcal{J}}$ 的定义， K 中的每个元素都至少属于某个 Is 或 Js。根据 $\mathscr{I}$ 的定义，每个 $I\in\mathcal{I}$ 或 $J\in\mathcal{J}$ 都至少包含两个元素。利用这些性质应用 (3.40)，即可得到 (4.5)，事实上还得到 $1/(N-j_K)^2$ 的更优幂次。情况 2，(4.3) 中有一个乘积为空：此时，由于 $\mathcal{I}$ 中的区间两两不相交， $\mathcal{J}$ 中的区间也如此，因此 $A_{K,\mathcal{I},\mathcal{J}}$ =期望F_K。回顾 (2.24)，有 $1_\Omega=\prod_i 1_{\Omega_i}$。利用这一点以及 $i=i_K$ 的 $p_{i-1}\triangleleft Z_i\triangleright 1=1+p_{i-1}\triangleleft W_i\triangleright 1$，可写为

$$F_K = pDZ_K\Big(1-\Big(1_{\Omega_{i_K}^c}+\frac{p_{i_K-1}\triangleleft W_{i_K}\triangleright 1}{p_{i_K-1}\triangleleft Z_{i_K}\triangleright 1}1_{\Omega_{i_K}}\Big)\Big)\prod_{i\in(i_K,j_K]}\frac{1_{\Omega_i}}{p_{i-1}\triangleleft Z_i\triangleright 1}\,. \tag{4.6}$$

令 **期望**$_i$ =**期望**$[\cdot\,|\,\dots,\mathscr{F}_{i-1},\mathscr{F}_{i+1},\dots]$，并在等式**期望**$_{i_K}$两边取 4.6 中的 $p_{i-1}\triangleleft$**期望**$_i D_i=p_{i-1}\triangleleft(\mathcal{P}_{t_{i-1},\,t_i}-p_{i-1})=0$，取 $i=i_K$ 可知，式4.6中的第一个 1 不影响结果。进一步取**期望** 得到

$$\mathbf{E}F_K = \mathbf{E}\,pDZ_K\Big(-1_{\Omega_{i_K}^c}-\frac{p_{i_K-1}\triangleleft W_{i_K}\triangleright 1}{p_{i_K-1}\triangleleft Z_{i_K}\triangleright 1}1_{\Omega_{i_K}}\Big)\prod_{i\in(i_K,j_K]}\frac{1_{\Omega_i}}{p_{i-1}\triangleleft Z_i\triangleright 1}\,. \tag{4.7}$$

将括号内各项的绝对值以上界 $4|p_{i_K-1}\triangleleft W_{i_K}\triangleright 1|$控制，并将最后的乘积以上界 $2^{|K|-1}$控制，借助式（3.1）（注意 $|K|\geq 2$），应用柯西-施瓦茨不等式以及 **期望**$(p_{i_K-1}\triangleleft W_{i_K}\triangleright 1)^2\leq c/(N-i_K)\leq c/(N-j_K)$，后者由式（2.15）推出。由此即得结论（4.5）。

证明的其余部分由组合界构成。令 $\mathscr{K}:=\{\mathcal{K}_{\mathcal{I},\mathcal{J}}\,|\,\mathcal{I},\mathcal{J}\in\mathscr{I}\}$，并对每个 $\mathcal{K}\in\mathscr{K}$令 $\mathscr{I}^2_{\mathcal{K}}:=\{(\mathcal{I},\ \mathcal{J})\in\mathscr{I}^2\,|\,\mathcal{K}=\mathcal{K}_{\mathcal{I},\ \mathcal{J}}\}$。将 (4.5) 代入 (4.4)，得到

$$\text{lhs of (4.1)} \leq \sum_{\mathcal{K}\in\mathscr{K}}\sum_{(\mathcal{I},\mathcal{J})\in\mathscr{I}^2_{\mathcal{K}}}\prod_{K\in\mathcal{K}}\frac{1}{(N-j_K)^{3/2}}\frac{c^{|K|}}{(\log b^{-1})^{(|K|-1)/2}}\,. \tag{4.8}$$

将第二个求和的大小限制为 $\prod_{K\in\mathcal{K}}(\sum_{i\leq|K|/2}\binom{|K|}{2i})^2\leq\prod_{K\in\mathcal{K}}c^{|K|}$，将此界吸收到已有的 $c^{|K|}$ 中，并使用 $\mathscr{K}\subset\mathscr{I}$ (参见 (4.2) 和 (2.18)) 将对 $\mathcal{K}\in\mathscr{K}$的求和替换为

对 $\mathcal{K}\in\mathscr{I}$ 求和。接下来，对每个 $\mathcal{K}\in\mathscr{I}$，由于 $\mathcal{K}$ 中的区间互不相交，按 $\mathbb{Z}$ 上的顺序将它们排列为 $(K_1,\ \ldots\ldots,\ K_{|\mathcal{K}|})$，并定义类型 $\mathcal{K}:=(|K_1|,\ \ldots\ldots,\ |K_{|\mathcal{K}|}|)\in\mathbb{Z}_{\geq 2}^{|\mathcal{K}|}$。这样，我们可以将对 $\mathcal{K}\in\mathscr{I}$ 的求和写为 $\sum_{m=2}^{N-\ell}\sum_{\vec{u}:\ \sum u_i=m}\sum_{\mathcal{K}:\ \text{类型}\,\mathcal{K}=\vec{u}}$，因此

$$\text{lhs of (4.1)}\leq\sum_{m=2}^{N-\ell}\frac{c^m}{(\log b^{-1})^{(m-1)/2}}\sum_{\vec{u}:\sum u_i=m}\ \sum_{\mathcal{K}:\text{type}\,\mathcal{K}=\vec{u}}\ \prod_{h=1}^{|\vec{u}|}\frac{1}{(N-j_{K_h})^{3/2}}\,. \tag{4.9}$$

回想一下，我们对 $\mathcal{K}$中的区间进行了排序，因此 $j_{K_1}<j_{K_2}<\ldots\in[1,N-\ell]$。因此，最内层的求和有上界 $c^{|\vec{u}|}\ell^{-|\vec{u}|/2}/|\vec{u}|!\ \leq c^m\ell^{-1/2}/|\vec{u}|!$，且 $|\{\vec{u}\,|\,u_1+\ldots+u_{|\vec{u}|}=m\}|/|\vec{u}|!$ 的上界是 m的整数分拆数，而它有上界 $c^{\sqrt{m}}\leq c^m$；例如参见 [And98，公式 (5.1.2)]。对 m 求和即可得到所需结果。□

结合命题 2.1和 4.1 立即可得

推论 4.2。 存在 $c=c(c_0)$，使得对所有 $b\leq 1/c$和 $\ell\in[1,N]$，

$$\mathbf{P}\Big[\ 1_\Omega\Big|\frac{p(\varepsilon^2)\triangleleft Z_{0,t_{N-\ell}}\triangleright 1}{\prod_{i=1}^{N-\ell}p_{i-1}\triangleleft Z_i\triangleright 1}-1\Big|>\frac{1}{2}\ \Big]\leq\frac{c}{(\ell\log b^{-1})^{1/2}}\,. \tag{4.10}$$

本节余下部分将用于证明推论 4.4，该推论将在第 5节中使用。我们首先采用命题 4.1 证明中的相同论证，推导一个初步界。回忆 $p'(t,\ x_1,\ x_2):=\exp(-|x_1-x_2|^2/4t)$，记 $p'(t):=p'(t,\ \cdot)$。

引理 4.3. 存在 $c=c(c_0)$ 使得对所有 $b\leq 1/c$, $r\in(0,\infty)$，以及 $\ell\in[1,N\qquad]$，

$$\mathbf{E}\,\frac{1_\Omega(p(\varepsilon^2)\triangleleft Z_{0,t_{N-\ell}})^{\otimes 2}\triangleright p'(t_{N-\ell}r^2)}{(\prod_{i=1}^{N-\ell}p_{i-1}\triangleleft Z_i\triangleright 1)^2}\leq c\,r^2\log\frac{r^2+1}{r^2}\,. \tag{4.11}$$

证明。 我们从解耦展开开始。首先，记 $p(t_{N-\ell}r^2,\ \cdot-y)=p_{N-\ell,\ r,\ y}$ 以简化记号，并利用 (3.38) 写出

$$\text{lhs of (4.11)}=4\pi t_{N-\ell}r^2\int_{\mathbb{R}^2}\mathrm{d}y\,\mathbf{E}\Big(\frac{1_\Omega\,p(\varepsilon^2)\triangleleft Z_{0,t_{N-\ell}}\triangleright p_{N-\ell,r,y}}{\prod_{i=1}^{N-\ell}p_{i-1}\triangleleft Z_i\triangleright 1}\Big)^2\,. \tag{4.12}$$

接下来，考虑整数 $[1,N-\ell]$中由 $\mathcal{I}=\{I_1,\ldots,I_{|\mathcal{I}|}\}$ 个两两不相交区间构成的集合。我们要求 $\mathcal{I}$ 中有一个区间包含 $N-\ell$（因为这些区间两两不相交，至多只有一个这样的区间），$\mathcal{I}$ 中的其他每个区间至少包含两个元素，并且 $\cup\mathcal{I}$ 至少包含两个元素。令 $\mathscr{I}'$ 表示所有这类 $\mathcal{I}$ 的集合，并且

$$M_I(y):=\begin{cases}pDZ_{\,I}\,, & \text{when } |I|\geq 2 \text{ and } N-\ell\notin I\,,\\ pDZ_{\,I,r}(y)\,, & \text{when } |I|\geq 2 \text{ and } N-\ell\in I\,,\\ p_{N-\ell-1}\triangleleft Z_{N-\ell}\triangleright p_{N-\ell,r,y}\,, & \text{when } I=\{N-\ell\}\,,\end{cases} \tag{4.13}$$

我们对（2.23）进行类似的展开，并应用于（4.12）中的分子，再将结果除以（4.12）中的分母，从而得出

$$\text{fraction in (4.12)}=1_\Omega\frac{M_{\{N-\ell\}}(y)}{p_{N-\ell-1}\triangleleft Z_{N-\ell}\triangleright 1}+\sum_{\mathcal{I}\in\mathscr{I}'}\prod_{I\in\mathcal{I}}\frac{1_\Omega\,M_I(y)}{\prod_{i\in I}p_{i-1}\triangleleft Z_i\triangleright 1}\,. \tag{4.14}$$

注意，（4.14）与（2.19）不同，因为（4.12）中分子里的最后一个测试函数是$p_{N-\ell,\ r,\ y}$而不是1。这一事实也反映在 $\mathscr{I}'$ 与 $\mathscr{I}$（定义见（2.18））的不同之处。

接下来，我们使用上述解耦展开来估计（4.12）。在（4.14）中，利用 $1/2$，使用 1_Ω，将第一个分母从下方进行估计，再使用 $(x+y)^2\leq 2x^2+2y^2$对结果平方，并应用

$4\pi t_{N-\ell} r^2 \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}y$**期望** 于结果，使用（2.16）对 $i = N-\ell$ 进行估计，从而界定结果右侧的第一项，并记 $c = c(c_0)$ 以简化记号。由此可得

$$\text{lhs of (4.11)} \le c\, r^2 \log \frac{r^2+1}{r^2} + c t_{N-\ell} r^2 \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}y\, \mathbf{E}\Big(\sum_{\mathcal{I}\in\mathscr{I}'} \prod_{I\in\mathcal{I}} \frac{1_\Omega\, M_I(y)}{\prod_{i\in I} p_{i-1} \blacktriangleleft Z_i \blacktriangleright 1} \Big)^2 . \tag{4.15}$$

现在只需对（4.15）中的最后一项进行界，我们通过采用命题4.1证明中的论证来完成这一点。令$F'_I(y)$表示（4.15）中的最后一个分式，其中 $\mathcal{I}$，$\mathcal{J} \in \mathscr{I}'$ 令$G_{\mathcal{I},\mathcal{J}}$表示在（4.2）之前定义的图，并令$\mathcal{K}'_{\mathcal{I},\mathcal{J}}$表示 K 的连通分支集合$G_{\mathcal{I},\mathcal{J}}$使得 $|K| \ge 2$ 或 $K \ni N-\ell$。类似于（4.4），这里有

$$\text{last term in (4.15)} = \sum_{\mathcal{I},\mathcal{J}\in\mathscr{I}'} \prod_{K\in\mathcal{K}'_{\mathcal{I},\mathcal{J}}} A'_{K,\mathcal{I},\mathcal{J}} , \tag{4.16}$$

$$A'_{K,\mathcal{I},\mathcal{J}} := c t_{N-\ell} r^2 \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}y\, \mathbf{E}\Big[\prod_{I\in\mathcal{I}, I\subset K} F'_I(y) \cdot \prod_{J\in\mathcal{J}, J\subset K} F'_J(y) \Big] . \tag{4.17}$$

根据定义，在$\mathcal{K}'_{\mathcal{I},\mathcal{J}}$中恰好有一个区间包含 $N-\ell$，对于 $\mathscr{I}'$中的集合也同样如此。我们将该区间记为 K_*。注意，在（4.17）的乘积中，恰好各有一个 I 和一个 J 包含 K_*。由推论3.5 以及2.16）对 $i = N-\ell$的结论，导出（4.5）的相同论证给出

$$A'_{K,\mathcal{I},\mathcal{J}} \le \frac{1}{(N-j_K)^{\frac{3}{2}1_{K\neq K_*}}} \frac{c^{|K|}}{(\log b^{-1})^{(|K|-1)/2}} \Big(r^2 \log \frac{1+r^2}{r^2} \Big)^{1_{K=K_*}} . \tag{4.18}$$

将（4.18）代入（4.16），并应用（4.9）之后的论证来界定结果。由此可知，（4.15）中的最后一项有如下界

$$r^2 \log \frac{1+r^2}{r^2} \Big(\sum_{m=2}^{N-\ell} \frac{c^m}{(\log b^{-1})^{(m-1)/2}} \sum_{\vec{u}:\sum u_i = m} \sum_{\mathcal{K}} \prod_{h=1}^{|\vec{u}|-1} \frac{1}{(N-j_{K_h})^{3/2}} \Big) , \tag{4.19}$$

其中，第三个求和遍历所有类型为 $\mathcal{K} = \vec{u}$ 的 $\mathcal{K} \in \mathscr{I}'$，而类型 $\mathcal{K}$ 在（4.9）之前已定义。（4.19）中的乘积不包含 $h = |\vec{u}|$，因为（4.18）中的界缺少因子$1/(N-j_K)^{3/2}$，当 $K = K_*$ 时（并且按 $\mathcal{K} \in \mathscr{I}'$ 中区间的顺序排列时，K_* 是最后一个区间）。为补上缺失的因子，我们令 $n := m - |K_*|$, $\vec{v} := (u_1, \dots, u_{|\vec{u}|-1})$ 且 $\mathcal{L} := \mathcal{K}\setminus\{K_*\}$，并将（4.19）括号内的表达式写为

$$\sum_{n=0}^{N-\ell} \frac{c^n}{(\log b^{-1})^{n/2}} \sum_{\vec{v}:\sum v_i = n} \sum_{\mathcal{L}} \prod_{h=1}^{|\vec{v}|} \frac{1}{(N-j_{K_h})^{3/2}} \cdot \sum_{|K_*|=1}^{N-\ell} \frac{c^{|K_*|}}{(\log b^{-1})^{(|K_*|-1)/2}} , \tag{4.20}$$

其中第三个求和遍历所有 $\mathcal{L}$ 满足 类型$\mathcal{L} = \vec{v}$ 且 $\mathcal{L}\cup\{K_*\} \in \mathscr{I}'$ 的项。将最后一个求和界定为 c，假设 b 足够小，略去求和中对 $\mathcal{L}\cup\{K_*\} \in \mathscr{I}'$ 的条件 $\mathcal{L}$，并应用（4.9）之后的论证，得出（4.20）$\le c$。证明至此完成。□

现在证明将在第 5 节中用到的结果。令 $\mathrm{Log}(x_1, x_2) := \log(|x_1 - x_2|^{-1} \vee 1)$，其中 x_1, $x_2 \in \mathbb{R}^2$。

推论 4.4. 存在 $c = c(c_0)$ 使得，对于 $b \le 1/c$、$\ell \in [1, N]$ 和 $L \ge 1$,

$$\mathbf{P}\Big[1_\Omega \frac{\big(p(\varepsilon^2) \blacktriangleleft Z_{0,t_{N-\ell}}\big)^{\otimes 2} \blacktriangleright (1+\mathrm{Log})}{\big(p(\varepsilon^2) \blacktriangleleft Z_{0,t_{N-\ell}} \blacktriangleright 1\big)^2} > L + \log t_{N-\ell}^{-1} \Big] \le \frac{c}{(\ell \log b^{-1})^{1/2}} + \frac{c}{L} . \tag{4.21}$$

证明。 首先，写作

$$\mathrm{Log}(t_{N-\ell}^{-1/2}x) = \int_0^1 \mathrm{d}r\,\frac{1}{r}1_{|x_1-x_2|\le r\,t_{N-\ell}^{1/2}} \le c\int_0^1 \mathrm{d}r\,\frac{1}{r}p'(t_{N-\ell}r^2,x)\,,\quad x=(x_1,x_2)\,, \tag{4.22}$$

将 $(p(\varepsilon^2)\triangleleft Z_{0,t_{N-\ell}})^{\otimes 2}$ 应用于不等式两边，将结果乘以 1_Ω，再除以（4.11）中的分母，在结果两边取 **期望**，将 **期望** 移入关于 r 的积分中，并应用引理 4.3。由此可得

$$\mathbf{E}\,1_\Omega\frac{\big(p(\varepsilon^2)\triangleleft Z_{0,t_{N-\ell}}\big)^{\otimes 2}\triangleright \mathrm{Log}(t_{N-\ell}^{-1/2}\cdot)}{(\prod_{i=1}^{N-\ell}p_{i-1}\triangleleft Z_i\triangleright 1)^2} \le c\int_0^1 \mathrm{d}r\,\frac{1}{r}\,r^2\log\frac{1+r^2}{r^2}<\infty\,. \tag{4.23}$$

结合马尔可夫不等式和命题 4.1 可得

$$\mathbf{P}\Big[1_\Omega\frac{\big(p(\varepsilon^2)\triangleleft Z_{0,t_{N-\ell}}\big)^{\otimes 2}\triangleright \mathrm{Log}(t_{N-\ell}^{-1/2}\cdot)}{\big(p(\varepsilon^2)\triangleleft Z_{0,t_{N-\ell}}\triangleright 1\big)^2}>L\Big] \le \frac{c}{(\ell\log b^{-1})^{1/2}}+\frac{c}{L}\,. \tag{4.24}$$

接下来，注意到 $1+\log t^{-1/2}+\mathrm{Log}(t^{-1/2}\cdot)\ge 1+\mathrm{Log}$，并且 $(p(\varepsilon^2)\triangleleft Z_{0,t_{N-\ell}})^{\otimes 2}\triangleright f_0 = f_0\,(p(\varepsilon^2)\triangleleft Z_{0,t_{N-\ell}}\triangleright 1)^2$ 对于任意常函数 f_0（关于 x）。将这些关于 $t=t_{N-\ell}$ 和 $f_0=1+\log t_{N-\ell}^{-1/2}$ 的观察结合起来，我们看到 (4.24) 蕴含 (4.21)。□

5. 最后一个区间的比较

由推论 4.2 可知，只需证明以下比较界，即可完成定理 1.1 的证明。我们将证明如下比较界：对于任意 $r_{\ell,b}$，使得$r_{\ell,b}/(\ell\log b^{-1})^\alpha\to\infty$ 当 $(\ell,b)\to(\infty,0)$ 时成立，其中某个 $\alpha>3/2$,

$$\mathbf{P}\big[p(\varepsilon^2)\triangleleft Z_{0,1}\triangleright 1 > e^r\,p(\varepsilon^2)\triangleleft Z_{0,t_{N-\ell}}\triangleright 1\big]\le e^{-r}\,,\quad r\ge 0\,, \tag{5.1}$$

$$\lim_{(\ell,b)\to(\infty,0)}\ \sup_{\varepsilon\le 1/2,|\theta|\le c_0}\mathbf{P}\big[p(\varepsilon^2)\triangleleft Z_{0,1}\triangleright 1 < e^{-r_{\ell,b}}\,p(\varepsilon^2)\triangleleft Z_{0,t_{N-\ell}}\triangleright 1\big]=0\,. \tag{5.2}$$

事实上，这些界与引理2.2 和推论 4.2 共同推出定理 1. 1.

为证明这些界，我们将 $Z_{0,1}$ 分解为 $Z_{0,t_{N-\ell}}\bullet Z_{t_{N-\ell},1}$。回顾 (2.2)–(2.3，$\bullet$是通过取极限定义的。记

$$p(\varepsilon^2)\triangleleft Z_{0,1}\triangleright 1=\lim_{\delta\to 0}\Phi_\delta\triangleleft Z_{t_{N-\ell},1}\triangleright 1\,,\quad \Phi_\delta=\Phi^\theta_{\ell,\delta}(x):=p(\varepsilon^2)\triangleleft Z^\theta_{0,t_{N-\ell}}\triangleright p(\delta^2,\cdot-x)\,. \tag{5.3}$$

出于纯技术原因，下面我们不处理 $p(\varepsilon^2)\triangleleft Z_{0,1}\triangleright 1$，而改为处理 $\Phi_\delta\triangleleft Z_{t_{N-\ell},1}\triangleright 1$，其中$\delta>0$。下面得到的界对 $\delta\le 1$一致，因此最后可以令 $\delta\to 0$，从而恢复关于 $p(\varepsilon^2)\triangleleft Z_{0,1}\triangleright 1$ 的结论。记 $\mathbb{E}:=$**期望**$[\cdot\,|\mathscr{F}_{[0,t_{N-\ell}]}]$，$\mathbb{P}$ 的定义类似。根据公理 3 中的独立性，我们也可以将 $\mathbb{E}$ 和 $\mathbb{P}$ 分别视为 $Z_{s,t}$（$s,t\in[t_{N-\ell},1]$）的分布。

为证明（5.1），使用马尔可夫不等式写出

$$\mathbb{P}\big[\Phi_\delta\triangleleft Z_{t_{N-\ell},1}\triangleright 1\le e^r\,p(\varepsilon^2)\triangleleft Z_{0,t_{N-\ell}}\triangleright 1\big]\ge 1-\frac{\mathbb{E}\,\Phi_\delta\triangleleft Z_{t_{N-\ell},1}\triangleright 1}{e^r\,p(\varepsilon^2)\triangleleft Z_{0,t_{N-\ell}}\triangleright 1}\,. \tag{5.4}$$

在最后一个期望中，注意到$\mathbb{E}$仅作用于$Z_{t_{N-\ell},1}$，利用$\mathbb{E}\,Z_{t_{N-\ell},1}=\mathcal{P}_{t_{N-\ell},1}$，写出$\langle\Phi_\delta,\ \mathcal{P}_{t_{N-\ell},1}1\rangle=\langle\Phi_\delta,\ 1\rangle$，并观察到内积的值为$p(\varepsilon^2)\triangleleft Z_{0,t_{N-\ell}}\triangleright 1$。由此可知分式（5.4）等于$e^{-r}$。现在令$\delta\to 0$并借助（5.3）可得（5.1）。

为了证明 (5.2)，我们需要用到 [CT25] 中的条件GMC结构。首先，回顾一下，与 Z 相关的聚合物测度是在 [CM24] 中构造的。令 $\Gamma:=C([t_{N-\ell},1],\mathbb{R}^2)$

并将 $M := M^{\theta}_{[t_{N-\ell},1]}$ 记为 $[t_{N-\ell},1]$ 上的聚合物测度，它是定义在 Γ 上的随机测度。将 $\Phi_\delta(x)$ 视为 $\gamma\in\Gamma$ 的函数，方法是代入 $x=\gamma(t_{N-\ell})$，于是

$$\Phi_\delta \blacktriangleleft Z_{t_{N-\ell},1} \blacktriangleright 1 = M[\Phi_\delta] := \int_\Gamma M(\mathrm{d}\gamma)\,\Phi_\delta(\gamma(t_{N-\ell}))\,. \tag{5.5}$$

接下来，将耦合常数减小 $a>0$，并记 $M' := M^{\theta-a}_{[t_{N-\ell},1]}$ 为相应的聚合物测度。令 $\tau:\Gamma^2\to[0,\infty]$ 为在 [CM25]，中构造的交叉局部时间；快速回顾请参见 [CT25，第 2 节。2] 令 $\xi=(\xi_1,\xi_2,\ldots)$ 为一组独立同分布的标准高斯变量。给定这些数据，我们现在考虑基准测度为 M'、协方差核为τ、高斯输入为 $\sqrt{a}\xi$ 的高斯乘法混沌 $\mathcal{G}(M',\sqrt{a}\xi)$，其中我们取 M' 和 $\sqrt{a}\xi$ 相互独立。我们称 $\mathcal{G}(M',\sqrt{a}\xi)$ 为条件GMC，因为其基准测度是随机的，且该高斯乘法混沌是在给定基准测度的条件下理解的。为便于介绍，我们将 $\mathcal{G}(M',\sqrt{a}\xi)$ 的完整定义推迟到附录 C，并仅指出，根据 [CT25，定理 1.1]

$$M=\mathcal{G}(M',\sqrt{a}\xi)\,,\qquad M=M^{\theta}_{[t_{N-\ell},1]}\,,\ M'=M^{\theta-a}_{[t_{N-\ell},1]}\,, \tag{5.6}$$

其中第一个等式依分布成立。为表述方便，我们适当地扩展概率空间以包含 M'和 ξ使得它们独立于 $Z_{s,\,t}$对于 $s,\ t\in[0,t_{N-\ell}]$并且使得（5.6）中的第一个等式逐样本成立。相应地，记 $\mathbb{E}$ 为 M'与 ξ的联合分布。

在附录 C中，我们将 [MF14] 中的论证应用于（5.6）中的条件GMC，以得到如下界。设

$$R := \frac{M'^{\otimes 2}[\Phi_\delta^{\otimes 2}e^{a\tau}]}{M'[\Phi_\delta]^2}\,,\qquad R' := \frac{M'^{\otimes 2}[\Phi_\delta^{\otimes 2}\tau e^{a\tau}]}{M'[\Phi_\delta]^2}\,, \tag{5.7}$$

其中这些变量依赖于 θ，ℓ，a，δ和 b，ε（通过 $t_{N-\ell}$，N）。于是，$\mathbf{P}$-几乎必然地，如下界对所有 $r\geq 0$成立

$$\mathbb{P}\Big[M[\Phi_\delta]<e^{-r}\,M'[\Phi_\delta]\Big]\leq 2\,\mathbb{E}\exp\Big(-\frac{1}{2^7aRR'}\big(r-\log 2-\sqrt{2^7aRR'\log 2^4R}\big)_+^2\Big)\,. \tag{5.8}$$

为使用（5.8），我们需要建立若干界。回顾 Ω 于（2.24），并记 $\mathbf{P}[X<Y,\Omega]=\mathbf{P}[\{X<Y\}\cap\Omega]$, 等。

引理 5.1. *Th* 存在 $c=c(c_0)$，使得对于所有的 $\ell\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$、$b\leq 1/c$、$a\geq 0$、$\delta\leq 1$和 $L\geq 1$,

$$\mathbf{P}\Big[M'[\Phi_\delta]<\tfrac{1}{2}\,p(\varepsilon^2)\blacktriangleleft Z_{0,t_{N-\ell}}\blacktriangleright 1\,,\Omega\Big]\leq\frac{c\,\ell\log b^{-1}}{a+1}+\frac{c}{(\ell\log b^{-1})^{1/2}}\,, \tag{5.9}$$

$$\mathbf{P}\big[R>L\,,\Omega\big]+\mathbf{P}\big[R'>L\,,\Omega\big]\leq\frac{c\,\ell\log b^{-1}}{a+1}+\frac{c\,\ell\log b^{-1}}{L}+\frac{c}{(\ell\log b^{-1})^{1/2}}\,. \tag{5.10}$$

证明。回顾一下，$\mathcal{Q}^{n,\theta'}$ 和 $\mathcal{W}^{n,\theta'}$ 分别表示 $Z^{\theta'}$ 和 $W^{\theta'}$的第 n 阶矩的核。我们首先建立以下恒等式和界

$$\mathbb{E}\,M'[\Phi_\delta]=p(\varepsilon^2)\blacktriangleleft Z_{0,t_{N-\ell}}\blacktriangleright 1\,, \tag{5.11}$$

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}\,M'[\Phi_\delta]\leq\big(p(\varepsilon^2)\blacktriangleleft Z_{0,t_{N-\ell}}\big)^{\otimes 2}\blacktriangleright\mathcal{W}^{2,\theta-a}(1+\delta^2-t_{N-\ell})1\,, \tag{5.12}$$

$$\mathbb{E}\,M'^{\otimes 2}[\Phi_\delta^{\otimes 2}e^{a\tau}]\leq\big(p(\varepsilon^2)\blacktriangleleft Z_{0,t_{N-\ell}}\big)^{\otimes 2}\blacktriangleright\mathcal{Q}^{2,\theta}(1+\delta^2-t_{N-\ell})1\,, \tag{5.13}$$

$$\mathbb{E}\,M'^{\otimes 2}[\Phi_\delta^{\otimes 2}\tau e^{a\tau}]\leq\big(p(\varepsilon^2)\blacktriangleleft Z_{0,t_{N-\ell}}\big)^{\otimes 2}\blacktriangleright\mathcal{Q}^{2,\theta+1}(1+\delta^2-t_{N-\ell})1\,. \tag{5.14}$$

分别将 $Z^{\theta-a}_{t_{N-\ell},\,1}$和 $W^{\theta-a}_{t_{N-\ell},\,1}$写作 $Z'_{t_{N-\ell},\,1}$和 $W'_{t_{N-\ell},\,1}$，以简化记号。为证明（5.11），写出 $M'[\Phi_\delta]=\Phi_\delta\blacktriangleleft Z'_{t_{N-\ell},\,1}\blacktriangleright 1$，并在等式两侧取 $\mathbb{E}$。这样可得 $\mathbb{E}\,M'[\Phi_\delta]=$

$\langle \Phi_\delta, \mathcal{P}_{t_{N-\ell}, 1} 1\rangle = \langle \Phi_\delta, 1\rangle$。根据（5.3）中 Φ_δ 的定义，我们看到 $\langle \Phi_\delta, 1\rangle$ 等于（5.11）的右侧。为证明（5.12），写出 $M'[\Phi_\delta] = \Phi_\delta \triangleleft Z'_{t_{N-\ell}, 1} \triangleright 1$，并注意到 $\mathbb{V}\mathrm{ar}\, \Phi_\delta \triangleleft Z'_{t_{N-\ell}, 1} \triangleright 1 = \mathbb{E}\,(\Phi_\delta \triangleleft W'_{t_{N-\ell}, 1} \triangleright 1)^2$,，其计算结果为 $\langle \Phi_\delta^{\otimes 2}, \mathcal{W}^{2,\theta-a}(1 - t_{N-\ell}) 1\rangle$。参考（5.3）中 Φ_δ 的定义，并注意到

$$\big(p(\delta^2)^{\otimes 2} \mathcal{W}^{2,\theta-a}(1 - t_{N-\ell})\big)(x, x') \le \mathcal{W}^{2,\theta-a}(1 - t_{N-\ell} + \delta^2, x, x') \tag{5.15}$$

（见（2.5））， 我们看到，最后一个内积有（5.12）右侧的上界。为证明（5.13），首先注意到 $M'^{\otimes 2}[\Phi_\delta^{\otimes 2} e^{a\tau}] = M[\Phi_\delta]^2$。这由（5.6）和 GMC 的二阶矩公式（见（C.6））得到。接下来，写成 $M[\Phi_\delta]^2 = (\Phi_\delta \triangleleft Z_{t_{N-\ell}, 1} \triangleright 1)^2 = \Phi_\delta^{\otimes 2} \triangleleft Z^{\otimes 2}_{t_{N-\ell}, 1} \triangleright 1$，在两边取$\mathbb{E}$，并像上面那样化简。由此得到（5.13）。为证明（5.14），注意到 $\tau e^{a\tau} \le e^{(a+1)\tau}$ 并对 $a \mapsto a + 1$使用（5.13）。

让我们证明（5.9）。回顾一下，$\mathrm{Log}(x_1, x_2) := \log(|x_1 - x_2|^{-1} \vee 1)$。由（2.12）、（2.5）以及 $\mathcal{Q}^{2,\theta'} = \mathcal{P} + \mathcal{W}^{2,\theta'}$，很容易验证

$$0 < \mathcal{W}^{2,\theta'}(t) 1 \le \frac{c(c_0)}{\theta'_- + 1}(1 + \mathrm{Log})\,, \qquad 0 < \mathcal{Q}^{2,\theta'}(t) 1 \le c(c_0)\,(1 + \mathrm{Log})\,, \tag{5.16}$$

对所有 $\theta' \le c_0$ 和 $t \ge 1/2$均成立。利用（5.11）–（5.12）和（5.16），对关于 wrt $\mathbb{E}$ 的随机变量 $M'[\Phi_\delta]$ 应用切比雪夫不等式，取结果的 **期望**，并利用推论4.4进行估计。由此得到

$$\mathbf{P}\Big[M'[\Phi_\delta] < \tfrac{1}{2}\, p(\varepsilon^2) \triangleleft Z_{0, t_{N-\ell}} \triangleright 1\,, \Omega\Big] \le c\, \frac{L + \log t_{N-\ell}^{-1}}{a+1} + \frac{c}{(\ell \log b^{-1})^{1/2}} + \frac{c}{L}\,, \tag{5.17}$$

对于 $L \ge 1$。由此，写成 $\log t_{N-\ell}^{-1} = 2 \log b^{-1} \cdot (\frac{\log \varepsilon^{-1}}{\log b^{-1}} - N + \ell) \le c\, \ell \log b^{-1}$并取 $L = \ell \log b^{-1}$即可得到（5.9）。

我们来证明 (5.10)。借助 (5.13)–(5.14) 和 (5.16)，对关于 $\mathbb{E}$ 的随机变量 $M'^{\otimes 2}[\Phi_\delta^{\otimes 2} e^{a\tau}]/(p(\varepsilon^2) \triangleleft Z_{0, t_{N-\ell}} \triangleright 1)^2$ 和 $M'^{\otimes 2}[\Phi_\delta^{\otimes 2} \tau\, e^{a\tau}]/(p(\varepsilon^2) \triangleleft Z_{0, t_{N-\ell}} \triangleright 1)^2$ 应用马尔可夫不等式，对所得结果取期望，并利用推论 4.4 进行估计，其中 $L = \ell \log b^{-1}$，使用 $\log t_{N-\ell}^{-1} \le c\, \ell \log b^{-1}$。由此得到

$$\mathbf{P}\Big[\frac{M'^{\otimes 2}[\Phi_\delta^{\otimes 2} e^{a\tau}]}{(p(\varepsilon^2) \triangleleft Z_{0, t_{N-\ell}} \triangleright 1)^2} > \tilde{L}\,, \Omega\Big] + \mathbf{P}\Big[\frac{M'^{\otimes 2}[\Phi_\delta^{\otimes 2} \tau e^{a\tau}]}{(p(\varepsilon^2) \triangleleft Z_{0, t_{N-\ell}} \triangleright 1)^2} > \tilde{L}\,, \Omega\Big] \tag{5.18a}$$

$$\le \frac{c\, \ell \log b^{-1}}{\tilde{L}} + \frac{c}{(\ell \log b^{-1})^{1/2}}\,, \tag{5.18b}$$

~ ~对所有 $L \ge 1$。结合 (5.18) 和 (5.9)，并将 $L/4 \mapsto L$ 重新命名，得到 (5.10)。 □

我们来证明 (5.2)。结合 (5.8) 和引理5.1可得

$$\mathbf{P}\Big[M[\Phi_\delta] < e^{-r}\, p(\varepsilon^2) \triangleleft Z_{0, t_{N-\ell}} \triangleright 1\,, \Omega\Big] \le \frac{c\, \ell \log b^{-1}}{a+1} + \frac{c \ell \log b^{-1}}{L} + \frac{c}{(\ell \log b^{-1})^{1/2}} \tag{5.19a}$$

$$+ c\, \exp\Big(- \frac{1}{c a L^2} (r - c - c\sqrt{a L^2 \log cL})_+^2 \Big)\,. \tag{5.19b}$$

给定任意 $r_{\ell,b}$，满足 $r_{\ell,b}/(\ell \log b^{-1})^\alpha \to \infty$，对于 $\alpha > 3/2$，令 $a_{\ell,b} = L_{\ell,b} := (\ell \log b^{-1})^{(2\alpha+3)/6}$，并代入 $a = a_{\ell,b}$, $L = L_{\ell,b}$ 和 $r = r_{\ell,b}$，使 (5.19) 的右侧在 $(\ell, b) \to (\infty, 0)$ 时趋于 0。结合这一事实与 (2.25)，即可得到 (5.2)。

附录 A. 推论 1.2 的证明

注意，$\frac{1}{(\log\varepsilon^{-1})^{\beta'_\varepsilon}} \le Z_\varepsilon(y) \le \frac{1}{(\log\varepsilon^{-1})^{\beta_\varepsilon}}$ 等价于

$$\Big(\frac{1+\alpha_\varepsilon}{2}-\beta'_\varepsilon\Big)\log\log\varepsilon^{-1} \le H_\varepsilon(y)+\frac{1+\alpha_\varepsilon}{2}\log\log\varepsilon^{-1} \le \Big(\frac{1+\alpha_\varepsilon}{2}-\beta_\varepsilon\Big)\log\log\varepsilon^{-1}\,. \tag{A.1}$$

取 $\beta_\varepsilon := \frac{1+\alpha_\varepsilon}{2} - (\log\log\varepsilon^{-1})^{-1/3}$ 和 $\beta'_\varepsilon := \frac{1+\alpha_\varepsilon}{2} + (\log\log\varepsilon^{-1})^{-1/3}$，并将 (A.1) 写成

$$H_\varepsilon(y)+\frac{1+\alpha_\varepsilon}{2}\log\log\varepsilon^{-1} \in I_\varepsilon := [-(\log\log\varepsilon^{-1})^{2/3}, (\log\log\varepsilon^{-1})^{2/3}] \tag{A.2}$$

对于区间 I_ε。于是我们有

$$\mathbf{E}|D\cap D_\varepsilon^{\mathrm{c}}| = \int_D \mathrm{d}y\,\mathbf{P}[y\in D_\varepsilon^{\mathrm{c}}] = \int_D \mathrm{d}y\,\big(1-\mathbf{P}[H_\varepsilon(y)+\tfrac{1+\alpha_\varepsilon}{2}\log\log\varepsilon^{-1}\in I_\varepsilon]\big)\,. \tag{A.3}$$

利用 H_ε 的平移不变性，将 $H_\varepsilon(y)$ 替换为 $H_\varepsilon(0)$，并应用定理1.1，证明即可完成。

附录 B. 矩

回忆公理 4和 (2.9)，$\mathcal{Q}=\mathcal{Q}^{n,\theta}$ 和 $\mathcal{W}=\mathcal{W}^{n,\theta}$ 分别表示 n阶的 Z^θ和 W^θ 的矩。

回顾 $\mathcal{Q}$ 和 $\mathcal{W}$ 的显式公式及其性质。记 $[n] := [1,n]\cap\mathbb{Z}$以简化记号。称一对 $\alpha=ij$ 为由 $i<j\in[n]$ 构成的无序对，并将其视为集合 $\alpha=\{i,j\}$。用 $\mathsf{Pair}[n]$ 表示这类无序对的集合，并令 $[n]_\alpha := \{\mathsf{c}\}\cup([n]\setminus\alpha)$，其中 c 表示质心指标，取自 $[n]$之外。回忆 $p(t,x) = \exp(-|x|^2/2t)/2\pi t$ 是 $\mathbb{R}^2$上的热核。稍微滥用一下记号，当$|\alpha\cap\alpha'|=1$时，我们写作 $y_{\alpha\setminus\alpha'}=y_i$，其中 $\alpha\setminus\alpha'=\{i\}$，对 $y_{\alpha'\setminus\alpha}$也作类似处理。对于 $\alpha\neq\alpha'\in\mathsf{Pair}[n]$，定义积分算子 $\mathcal{P}_\alpha(t)$、$\mathcal{P}_\alpha(t)^*$、$\mathcal{P}_{\alpha\alpha'}(t)$、$\mathcal{J}_\alpha(t)=\mathcal{J}^\theta_\alpha(t)$，其核如下：

$$\mathcal{P}_\alpha(t,y,x) := \prod_{i\in\alpha}p(t,y_{\mathrm{c}}-x_i)\cdot\prod_{i\in[n]\setminus\alpha}p(t,y_i-x_i) =: \mathcal{P}^*_\alpha(t,x,y)\,, \tag{B.1a}$$

$$\mathcal{J}^\theta_\alpha(t,y,y') := 4\pi\,\mathsf{j}^\theta(t)\,p(\tfrac{t}{2},y_{\mathrm{c}}-y'_{\mathrm{c}})\prod_{i\in[n]\setminus\alpha}p(t,y_i-y'_i)\,, \tag{B.1b}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{\alpha'\alpha}(t,y',y) := &\prod_{i\in[n]\setminus(\alpha'\cup\alpha)}p(t,y'_i-y_i)\\ &\cdot\begin{cases}p(t,y'_{\alpha\setminus\alpha'}-y_{\mathrm{c}})p(t,y'_{\mathrm{c}}-y_{\alpha'\setminus\alpha})p(t,y'_{\mathrm{c}}-y_{\mathrm{c}})\,, & |\alpha'\cap\alpha|=1\,,\\ \prod_{i\in\alpha'}p(t,y'_{\mathrm{c}}-y_i)\cdot\prod_{i\in\alpha}p(t,y'_i-y_{\mathrm{c}})\,, & \alpha'\cap\alpha=\varnothing\,,\end{cases}\end{aligned} \tag{B.1c}$$

其中 $x\in\mathbb{R}^{2[n]}$ 且 y，$y'\in\mathbb{R}^{2[n]_\alpha}$ 在（B.1a）–（B.1b）中，并且 $y'\in\mathbb{R}^{2[n]_{\alpha'}}$ 且$y\in\mathbb{R}^{2[n]_\alpha}$ 在（B.1c）中。令

$$\mathrm{Dgm}[n] := \big\{\vec\alpha=(\alpha_k)_{k=1}^m\in\mathrm{Pair}[n]^m\,\big|\,m\in\mathbb{N},\alpha_k\neq\alpha_{k+1},k=1,\dots,m-1\big\}\,. \tag{B.2}$$

这个集合为某些图编号，因此简称为 Dgm；参见 [GQT21，第 2] 节。记作$|\vec\alpha| := m$，表示 $\vec\alpha\in\mathsf{Dgm}$ 的长度。对于依赖于有限个非负 us 的函数 $f=f(u,u',\dots)$，记 $\int_{\Sigma(t)}\mathrm{d}\vec u\,f = \int_{u+u'+\dots=t}\mathrm{d}\vec u\,f$ 为卷积型积分。对于$\vec\alpha\in\mathsf{Dgm}[n]$，定义算子

$$\mathcal{R}^{n,\theta}_{\vec\alpha}(t) := \int_{\Sigma(t)}\mathrm{d}\vec u\,\mathcal{P}_{\alpha_1}(u_{\frac12})^*\prod_{k=1}^{|\vec\alpha|-1}\mathcal{J}^\theta_{\alpha_k}(u_k)\,\mathcal{P}_{\alpha_k\alpha_{k+1}}(u_{k+\frac12})\cdot\mathcal{J}^\theta_{\alpha_{|\vec\alpha|}}(u_{|\vec\alpha|})\,\mathcal{P}_{\alpha_{|\vec\alpha|}}(u_{|\vec\alpha|+\frac12})\,. \tag{B.3}$$

下文中，算子的乘积均按从左到右的索引顺序理解，即 $\prod_{\ell=1}^{k}\mathcal{T}_\ell := \mathcal{T}_1\mathcal{T}_2\cdots\mathcal{T}_k$。根据 [GQT21，定理 1。1]，

$$\mathcal{Q}(t) = \mathcal{Q}^{n,\theta}(t) = \mathcal{P}(t) + \sum_{\vec{\alpha}\in \mathrm{Dgm}[n]} \mathcal{R}^{n,\theta}_{\vec{\alpha}}(t)\,. \tag{B.4}$$

至于 $\mathcal{W}$，由 [Tsa24，公式 (2.20)]，

$$\mathcal{W}(t) = \mathcal{W}^{n,\theta}(t) = \sum_{\vec{\alpha}\in \mathrm{Dgm}_*[n]} \mathcal{R}^{n,\theta}_{\vec{\alpha}}(t)\,, \tag{B.5}$$

$$\mathrm{Dgm}_*[n] := \big\{\vec{\alpha}\in \mathrm{Dgm}[n] \,\big|\, \alpha_1\cup\cdots\cup\alpha_{|\vec{\alpha}|} = \{1,\dots,n\}\big\}\,. \tag{B.6}$$

称 $\langle f,\ \mathcal{T}g\rangle$ 为 $\mathcal{T}$**相对于** f，g 的检验表达式。由 [ST25，第 2] 节，对任意 $f\colon\ \mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{R}$ 指数衰减，则（B.4）–（B.5）中的级数在相对于 f，1 检验时绝对收敛。容易验证

$$\mathcal{R}^{n,\theta'}_{\vec{\alpha}}(t,x,x') = s^n\mathcal{R}^{n,\theta'+\log s}_{\vec{\alpha}}\big(st,\sqrt{s}x,\sqrt{s}x'\big)\,,\qquad \theta'\in\mathbb{R}\,,\ s>0\,, \tag{B.7}$$

因此，同样的缩放性质对 $\mathcal{Q}$ 与 $\mathcal{W}$ 成立。

下面，我们将推导**期望**$(p(r^2)\triangleleft W^{-L_{\log 0}}{}^{r^{-1}}{}_{,1}\triangleright 1)^n$，对 $r\le 1/2$ 与 $L\ge 1$ 的一个界，并利用缩放性质（B.7）推出**期望**$(p_{i-1}\triangleleft W_i\triangleright 1)^n$的一个界。

我们先给出一个初步的界。设

$$\mathcal{A}^{\theta'}_{\alpha} := \int_0^{r^{-2}} \mathrm{d}t\,\mathcal{J}^{\theta'}_{\alpha}(t)\,,\qquad \mathcal{B}^1_{\alpha'\alpha} := \int_0^1 \mathrm{d}t\,\mathcal{P}_{\alpha'\alpha}(t)\,,\qquad \mathcal{B}^2_{\alpha'\alpha} := \int_1^{r^{-2}} \mathrm{d}t\,\mathcal{P}_{\alpha'\alpha}(t)\,, \tag{B.8}$$

$$\mathcal{C}^1_{\alpha} := \int_0^1 \mathrm{d}t\,\mathcal{P}_{\alpha}(t)^*\,,\qquad \mathcal{C}^2_{\alpha} := \int_1^{r^{-2}} \mathrm{d}t\,\mathcal{P}_{\alpha}(t)^*\,, \tag{B.9}$$

$\mathcal{B}_{\alpha'\alpha} := \mathcal{B}^1_{\alpha'\alpha} + \mathcal{B}^2_{\alpha'\alpha}$，以及 $\mathcal{C}_\alpha := \mathcal{C}^1_\alpha + \mathcal{C}^2_\alpha$。

引理 B.1. 对于 $r\le 1/2$、$L\ge 1$ 和 $\mathcal{A}_\alpha = \mathcal{A}_\alpha^{-(L+2)\log r^{-1}}$，

$$\mathbf{E}(p(r^2)\triangleleft W_{0,1}^{-L\log r^{-1}}\triangleright 1)^n \le \sum_{\vec{\alpha}\in\mathrm{Dgm}_*[n]} \big\langle p(1)^{\otimes n}, \mathcal{C}_{\alpha_{|\vec{\alpha}|}}\mathcal{A}_{\alpha_{|\vec{\alpha}|}}\mathcal{B}_{\alpha_{|\vec{\alpha}|}\alpha_{|\vec{\alpha}|-1}}\cdots\mathcal{B}_{\alpha_2\alpha_1}\mathcal{A}_{\alpha_1}1\big\rangle\,. \tag{B.10}$$

证明。利用 (B.5)，将 (B.10) 左侧表示为算子积分的求和，其中算子作用于 $p(r^2)^{\otimes n}$、1，并对 $\theta' = -L\log r^{-1}$ 和 $s = r^{-2}$ 应用缩放性质 (B.7)。在所得结果中，注意到 $\mathcal{P}_{\alpha_{|\vec{\alpha}|}}(u_{|\vec{\alpha}|+1/2})1 = 1$，这实际上消去了变量 $u_{|\vec{\alpha}|+1/2}$，并将积分定义域转化为 $\sum u_i\in[0,r^{-2}]$。注意，(B.1) 中的核和 j 均为正，因此被积函数也为正。将积分范围扩展至 $u_i\le r^{-2}$，对所有 i 均如此。由此得到 (B.10)。□

接下来，我们需要引入一些术语。取 $[n]$或 $[n]_\alpha$ 为指标集，并考虑该指标集的一个划分 $\Omega = \{\omega_1,\dots,\omega_{|\Omega|}\}$。若函数 f 定义在 $\mathbb{R}^{2\cup\Omega}$ **Ω-平移不变**上，且除变量重合处外处处有定义，并且在每个 $(y_j)_{j\in\omega_i}$ 内平移量为常数的任意平移下保持不变，则称其为**-平移不变**。更确切地说，

$$f:\big\{y\in\mathbb{R}^{2\cup\Omega}\,\big|\,y_i\ne y_j,\forall ij\in\mathrm{Pair}(\omega)\,,\omega\in\Omega\big\}\longrightarrow\mathbb{R}\,, \tag{B.11}$$

$$f\big(((y_i+a_\omega)_{i\in\omega})_{\omega\in\Omega}\big) = f(y)\,,\qquad \vec{a}\in\mathbb{R}^{2\Omega}\,. \tag{B.12}$$

为简化记号，记作 $\|\cdot\|_\eta := \|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}^{2\eta})}$。由于平移不变性，范数 $\|\cdot\|_{\cup\Omega}$ 通常会取无穷大，因此适当的范数概念应当将平移等价掉。考虑

例如 $\Omega = \{\omega\}$ 的情形，其中 $\omega = [n]$或 $[n]_\alpha$，我们通过固定任意变量 $\|f\|_{\omega/\{\omega\}} := \|f\|_{\omega\setminus\{i\}}(y_i) = \sup_{y_i\in\mathbb{R}^2}\|f\|_{\omega\setminus\{i\}}(y_i)$ 来定义模 Ω 范数；该范数不依赖于 $i\in\omega$ 或 $y_i\in\mathbb{R}^2$的选取，因此等于所写的上确界。更一般地，对任意 $i_\omega\in\omega$ 以及每个 $\omega\in\Omega$ 取 $y_\omega\in\mathbb{R}^2$，我们将 Ω-平移不变 f 的**模-Ω L^2 范数**定义为

$$\|f\|_{\cup\Omega/\Omega} := \|f\|_{\cup\Omega\setminus\{i_\omega\,|\,\omega\in\Omega\}}(\vec{y}) = \sup_{\vec{y}\in\mathbb{R}^{2\Omega}}\|f\|_{\cup\Omega\setminus\{i_\omega\,|\,\omega\in\Omega\}}(\vec{y})\,. \tag{B.13}$$

接下来，我们用平移不变函数的语言给出引理 B.1 中的算子界

引理 B.2. 给定任意 $\alpha'\neq\alpha\in$ 对$[n]$、任意划分 Ω *of* $[n]_\alpha$、任意 Ω-平移不变$\psi\geq 0$以及下列所列的任意 $\mathcal{G}$，存在一个划分 O 和一个 O-平移不变 $f\geq 0$，使得

$$\mathcal{G}\psi\leq c(n)g(r,L)f\,,\quad \|f\|_{\cup O/O}\leq\|\psi\|_{\cup\Omega/\Omega}\,, \tag{B.14a}$$

$$g(r,L) := \begin{cases} \frac{1}{L\log r^{-1}} & \mathcal{G}=\mathcal{A}_\alpha := \mathcal{A}_\alpha^{-(L+2)\log r^{-1}}\,,\\ 1 & \mathcal{G}=\mathcal{B}^1_{\alpha'\alpha}\ or\ \mathcal{C}^1_\alpha\,,\\ \log r^{-1} & \mathcal{G}=\mathcal{B}^2_{\alpha'\alpha}\ or\ \mathcal{C}^2_\alpha\,,\end{cases} \tag{B.14b}$$

对所有 $r\leq 1/2$和 $L\geq 1$均成立。

证明。 先概述证明思路。在整个证明中，记 $c(n)=c$。关于 $\mathcal{C}^1_\alpha$ 和 $\mathcal{C}^2_\alpha$ 的陈述证明与关于 $\mathcal{B}^1_{\alpha'\alpha}$ 和 $\mathcal{B}^2_{\alpha'\alpha}$的类似，因此我们只考虑后者以及关于 $\mathcal{A}_\alpha$的情形。对于 $\mathcal{G}=\mathcal{A}_\alpha,\mathcal{B}^1_{\alpha'\alpha},\mathcal{B}^2_{\alpha'\alpha}$的每种情况，我们将构造一个合适的 O 和一个合适的积分算子 $\mathcal{H}(t)$，其核为正，使得

$$\mathcal{G}\psi_\Omega\leq\int_s^{s'}\mathrm{d}t\,\mathcal{H}(t)\psi_\Omega\,,\quad (s,s') = \begin{cases}(0,r^{-2})\,, & \mathcal{G}=\mathcal{A}_\alpha := \mathcal{A}_\alpha^{-(L+2)\log r^{-1}}\,,\\ (0,1)\,, & \mathcal{G}=\mathcal{B}^1_{\alpha'\alpha}\,,\\ (1,r^{-2})\,, & \mathcal{G}=\mathcal{B}^2_{\alpha'\alpha}\,,\end{cases} \tag{B.15}$$

并且 $\mathcal{H}(t)$ 将 Ω-平移不变函数映射为 O-平移不变函数。此外，令 $\|\cdot\|_{\mathrm{op}/}$表示从 $\|\cdot\|_{\cup\Omega/\Omega}$到 $\|\cdot\|_{\cup O/O}$的算子范数，我们将证明

$$\Big\|\int_s^{s'}\mathrm{d}t\,\mathcal{H}(t)\Big\|_{\mathrm{op}/}\leq\begin{cases}c/(L\log r^{-1})\,, & \mathcal{G}=\mathcal{A}_\alpha := \mathcal{A}_\alpha^{-(L+2)\log r^{-1}}\,,\\ c\,, & \mathcal{G}=\mathcal{B}^1_{\alpha'\alpha}\,,\\ c\log r^{-1}\,, & \mathcal{G}=\mathcal{B}^2_{\alpha'\alpha}\,.\end{cases} \tag{B.16}$$

完成这些步骤后，结合 (B.15)–(B.16) 即可得到所需结果。

情形 $\mathcal{G}=\mathcal{A}_\alpha$。 取 $O=\Omega$，令 $\mathcal{H}'(t) := p(t/2)\otimes p(t)^{\otimes[n]_\alpha}$，并取 $\mathcal{H}(t) = \mathsf{j}(t)\mathcal{H}'(t)$。根据定义，不等式 (B.16) 两边相等，并且容易验证 $\mathcal{H}(t)$ 将 Ω-平移不变函数映射为 Ω-平移不变函数。像 (B.13) 之前那样任取 i_ω，并将 $\mathcal{H}'(t)\psi$ 写成积分。在积分中，利用热核在 $i\in\{i_\omega\,|\,\omega\in\Omega\}$ 上的积分为 1 这一事实，以及热核在 $i\notin\{i_\omega\,|\,\omega\in\Omega\}$上收缩 L^2 范数这一事实。由此可得 $\|\mathcal{H}'(t)\psi\|_{\cup O/O}\leq\|\psi\|_{\cup\Omega/\Omega}$，进而得到 $\|\mathcal{H}'(t)\|_{\mathrm{op}/}\leq 1$。结合 (2.12)，这就验证了 (B.16)。

情况 $\mathcal{G}=\mathcal{B}^1_{\alpha'\alpha}$。 为简化记号，取 $\alpha=12$和 $\alpha'=23$或 34。

我们首先构造 O 和 $\mathcal{H}(t)$。只需取 $\mathcal{H}(t)=\mathcal{P}_{\alpha'\alpha}(t)$，使不等式 (B.15) 两边相等。为构造 O，将 $[n]_\alpha$ 和 $[n]_{\alpha'}$ 视为互不相交的顶点集。稍微滥用一下记号，我们将 $[n]_\alpha$ 中的元素记作 c、3、4 等，将 $[n]_{\alpha'}$ 中的元素记作 $\mathsf{c}',1',5'$

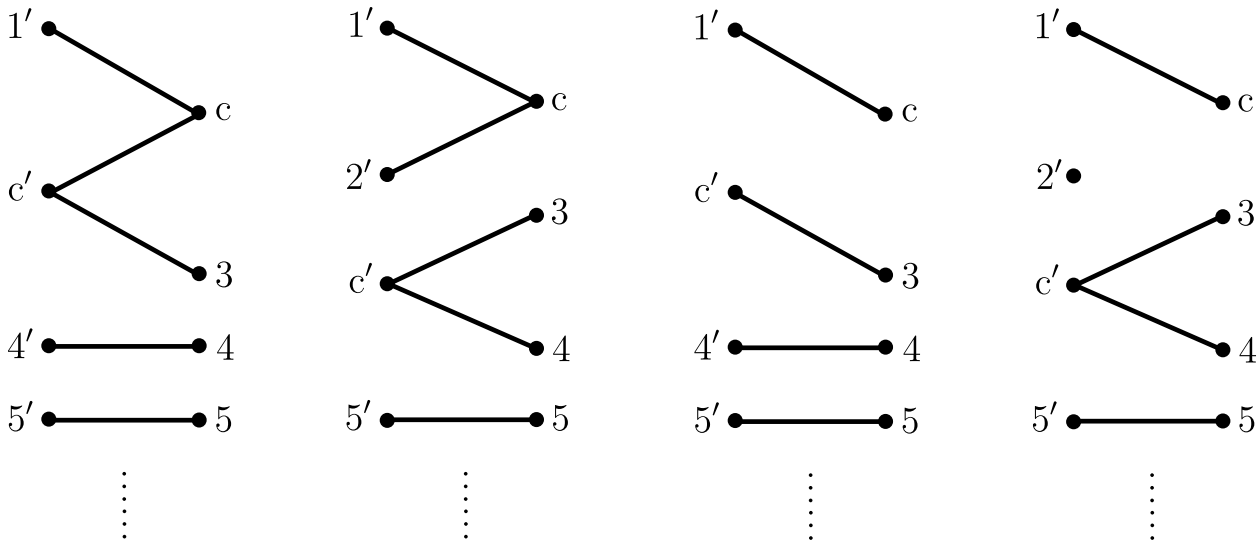


图1。从左到右，这些图分别是 G^1 对应 $\alpha = 12$和 $\alpha = 23$， G^1 对应$\alpha = 12$ 和 $\alpha = 34$， G^2 对应 $\alpha = 12$和 $\alpha = 23$，以及 G^2 对应 $\alpha = 12$和 $\alpha = 34$。

等，并用撇号表示这些集合互不相交。在 (B.1c) 中，将 y'_c, y'_1 等视为以 $\mathfrak{c}', 1'$ 为索引；若相应的 y 和 y'变量出现在 (B.1c) 的同一个热核中，则在 $[n]_\alpha$ 中的一个顶点与 $[n]_{\alpha'}$ 中的一个顶点之间连一条边。由此得到一个二部图，记作 G^1；见图1。接下来，在 G^1 中，若两个顶点属于同一个 $\omega \in \Omega$，则在它们之间连一条边，并将所得的图记作 G^1_Ω。G^1_Ω 的连通分支在 $[n]_{\alpha'}$上诱导出一个划分，我们将该划分记作 O。容易验证， $\mathcal{H}(t) = \mathcal{P}_{\alpha'\alpha}(t)$ 将 Ω-平移不变函数映射为 O-平移不变函数。

接下来，我们来明确为 $\omega \in \Omega$和 $o \in O$选择 i_ω 和 i_o 的方式。对于 $i \in [n]_{12}$，记包含 i的$\omega \in \Omega$为 ω_i ； 对 o_i也作类似处理。

选择 i_ω 和 i_o 时 $\alpha = 12$和 $\alpha' = 23$： 选择 $i_{\omega_\mathfrak{c}} = \mathfrak{c}$；若 $3 \notin \omega_\mathfrak{c}$，则选择 $i_{\omega_3} = 3$ （否则选择$i_{\omega_3} = i_{\omega_\mathfrak{c}} = \mathfrak{c}$），并选择 $i_{o_{\mathfrak{c}'}} = i_{o_{1'}} = \mathfrak{c}'$。其余 ωs和 os一一对应。更准确地说，记 π： $4 \mapsto 4'$， $5 \mapsto 5'$，……，我们有 $O \setminus \{o_{\mathfrak{c}'}, o_{1'}\} = \{\pi\omega \,|\omega \in \Omega \setminus \{\omega_\mathfrak{c}, \omega_3\}\}$。对最后一个集合中的那些 ω，任意选择 i_ω ； 对 $o = \pi\omega$，选择 $i_o = i_\omega$。

选择 i_ω 和 i_o 当 $\alpha = 12$以及 $\alpha' = 34$时： 选择 $i_{\omega_\mathfrak{c}} = \mathfrak{c}$，若 $3 \notin \omega_\mathfrak{c}$ 则选择 $i_{\omega_3} = 3$ （否则 $i_{\omega_3} = i_{\omega_\mathfrak{c}} = \mathfrak{c}$），若 $4 \notin \omega_\mathfrak{c} \cup \omega_3$ 则选择 $i_{\omega_4} = 4$ （否则类似地选择），选择 $i_{o_{\mathfrak{c}'}} = \mathfrak{c}'$，若 $1'$则选择 $i_{o_{1'}} = i_{o_{2'}} = 1'$， $2' \notin o_{\mathfrak{c}'}$ （否则类似地选择）。其余的 ωs 和 os 也像之前一样一一对应，并以类似方式选择。

我们来验证（B.16）。利用容易验证的不等式（例如参见 [ST25，方程（2.15）] 的证明） $p(t, y' - y)\, e^{-a|y'|} \le 2e^{a^2 t} p(2t, y' - y)\, e^{-a|y|}$， $a > 0$，在$\mathcal{P}_{\alpha'\alpha}(t)$ 的核中（在（B.1c）中）得到

$$\prod_{o \in O} e^{-|y'_{i_o}|} \cdot \mathcal{P}_{\alpha'\alpha}(t, y', y) \le c\, \mathcal{P}_{\alpha'\alpha}(2t, y', y) \prod_{\omega \in \Omega} e^{-|y_{i_\omega}|/2}\,, \quad t \in (0, 1]\,. \tag{B.17}$$

接下来，根据定义，对于任意 Ω-平移不变的 f 以及任意 $g \in L^2(\mathbb{R}^2)$，

$$\Big\| f(y) \prod_{\omega \in \Omega} g(y_{i_\omega}) \Big\|_{L^2(\mathbb{R}^{2 \cup \Omega})} = \|f\|_{\cup\Omega/\Omega} \prod_{\omega \in \Omega} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\,. \tag{B.18}$$

在 (B.17) 中对 $\Omega = \Omega$ 和 $g(y) = e^{-|y|/2}$，以及对 $\Omega \mapsto O$ 和 $g(y') = e^{-|y'|}$ 使用这一结果可知，$\| \int_0^1 \mathrm{d}t \mathcal{P}_{\alpha'\alpha}(t) \|_{\mathrm{op}/}$ 由 $L^2(\mathbb{R}^{2[n]_\alpha}) \to L^2(\mathbb{R}^{2[n]_{\alpha'}})$ 算子范数的常数倍所界；根据 [GQT21, 引理 8.2(b)]，后者由 c 所界。

情形 $\mathcal{G} = \mathcal{B}^2_{\alpha'\alpha}$。为简化记号，取 $\alpha = 12$和 $\alpha' = 23$或 34。

我们首先构造 $\mathcal{H}(t)$ 和 O。在 $\mathcal{P}_{\alpha'\alpha}(t)$ 在 (B.1c) 中的核里，当 $\alpha' = 23$ 时，将 $p(t, y'_{\mathrm{c}} - y_{\mathrm{c}}) \le 1/2\pi t$ 界定为；当 $\alpha' = 34$时，将 $p(t, y'_2 - y_{\mathrm{c}}) \le 1/2\pi t$ 界定为。我们有

$$\mathcal{B}^2_{\alpha'\alpha}\psi \le \int_1^{r^{-2}} \frac{\mathrm{d}t}{2\pi t} \mathcal{H}^2(t)\psi \,, \tag{B.19}$$

$$\mathcal{H}^2(t, y', y) := \begin{cases} p(t, y'_1 - y_{\mathrm{c}}) p(t, y'_{\mathrm{c}} - y_3) \prod_{i>3} p(t, y'_i - y_i) \,, & \alpha' = 23 \,, \\ p(t, y'_1 - y_{\mathrm{c}}) \prod_{j=3,4} p(t, y'_{\mathrm{c}} - y_j) \cdot \prod_{i>4} p(t, y'_i - y_i) \,, & \alpha' = 34 \,. \end{cases} \tag{B.20}$$

令 $\mathcal{H}(t) := \frac{1}{2\pi t} \mathcal{H}^2(t)$，使得 (B.15) 成立。接下来，按照构造 G^1 的类似方法构造图 G^2，但以 (B.20) 中的热核作为参照，而不是 (B.1c)。由于 $\mathcal{H}^2$ 是在 (B.19) 之前通过界定过程得到的，因此图 G^2 与 G^1 相同，只是在 $\alpha' = 23$ 时删除 c' 与 c 之间的边，在 $\alpha' = 34$ 时删除 $2'$ 与 c 之间的边；见图1。接下来，在 G^2 中，如果 $[n]_\alpha$ 中的顶点属于同一个 Ω，就在它们之间连一条边，并令 G^2_Ω 表示所得的图。G^2_Ω 的连通分支在 $[n]_{\alpha'}$ 上诱导出一个划分，我们将该划分记为 O。容易验证，$\mathcal{H}^2(t)$ 因而 $\mathcal{H}(t)$ 将 Ω-平移不变函数映射为 O-平移不变函数。

现在验证（B.16）。取 i_ω 并 i_o，方法与前一种情况相同，但这里令 $i_{o_{2'}} = 2'$ 当 $\alpha' = 34$时：与前一种情况不同，这里 $o_{2'} = \{2'\}$。利用（$\mathcal{H}^2$）$t\psi$，将其写成积分。B.20）。

当 $\alpha = 12$ **且** $\alpha' = 23$**，或** $\alpha = 12$ **且** $\alpha' = 34$**并** $i_{\omega_3} \ne i_{\omega_4}$**时：**在积分中，利用热核在 $i \in \{i_\omega \,|\, \omega \in \Omega\}$ 上积分为 1 这一事实，以及热核在 $i \notin \{i_\omega \,|\, \omega \in \Omega\}$ 上收缩 L^2 范数这一事实。由此可得 $\|\mathcal{H}^2(t)\psi\|_{\cup O/O} \le \|\psi\|_{\cup\Omega/\Omega}$，因此 $\|\mathcal{H}^2(t)\|_{\mathrm{op}/} \le 1$。

当 $\alpha = 12$，$\alpha' = 34$，**以及**$i_{\omega_3} = i_{\omega_4}$**：**在该积分中，利用热核对 $i \in \{i_\omega \,|\, \omega \in \Omega\} \setminus \{4\}$ 的积分为1这一事实，以及热核在 $i \notin \{i_\omega \,|\, \omega \in \Omega\}$上压缩 L^2 范数这一事实，并借助$\int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}y_4\, p(t, y'_{\mathrm{c}} - y_4)^2 = 1/4\pi t$在 y_4 上应用柯西-施瓦茨不等式。由此可得 $\|\mathcal{H}^2(t)\psi\|_{\cup O/O} \le \|\psi\|_{\cup\Omega/\Omega}(4\pi t)^{-1/2}$，因此$\|\mathcal{H}^2(t)\|_{\mathrm{op}/} \le (4\pi t)^{-1/2} \le 1$，因为此处 $t \ge 1$。

将 $\|\mathcal{H}^2(t)\|_{\mathrm{op}/} \le 1$ 与 $\mathcal{H}(t)$结合：$= \frac{1}{2\pi t} \mathcal{H}^2(t)$ 即可验证（B.16）。 □

现在我们可以证明所需的关于 W 的矩界了。回想一下，$W^\theta_i = W^\theta_{t_{i-1},\, t_i}$，且 t_i 依赖于 b。

Coro引理 B.3。 对每个 $n \in \mathbb{N}$，存在 $c_1 = c_1(n)$ 和 $c_2 = c_2(n, c_0)$，使得

$$\mathbf{E}(p(r^2) \blacktriangleleft W^{-L\log r^{-1}}_{0,1} \blacktriangleright 1)^n \le c_1 L^{-\lceil n/2 \rceil} \,, \tag{B.21}$$

$$\mathbf{E}(p_{i-1} \blacktriangleleft W^\theta_i \blacktriangleright 1)^n \le c_1 (N-i)^{-\lceil n/2 \rceil} \,, \tag{B.22}$$

对于所有 $L \ge c$、$r \in (0, 1/2]$、$i \in [1, N-c]$、$b \le 1/2$ 以及 $\theta \le c_0$。

证明。 为证明（B.21），结合引理 B.2 中的后两个结果，利用 $\mathcal{B}_{\alpha'\alpha} = \mathcal{B}^1_{\alpha'\alpha} + \mathcal{B}^2_{\alpha'\alpha}$和 $\mathcal{C}_\alpha = \mathcal{C}^1_\alpha + \mathcal{C}^2_\alpha$ 可得，对于每个 Ω 以及 ψ （如引理 B.2中所述），

$$\mathcal{B}_{\alpha'\alpha}\psi \le c(n)\log r^{-1}\sum_O f_O\,, \quad \mathcal{C}_\alpha\psi \le c(n)\sum_O g_O\,, \tag{B.23}$$

对于某个非负的 O-平移不变 f_O 和 g_O，其中 $\|f_O\|_{\cup O/O}$、$\|g_O\|_{\cup O/O} \le \|\psi\|_{\cup\Omega/\Omega}$；第一个求和遍历 $[n]_{\alpha'}$ 的所有划分，第二个求和遍历 $[n]$的所有划分。在 (B.10) 中使用 (B.23) 和引理 B.2 的第一个结论，注意到当 $\Omega_1 = \{\{i\} \mid i \in [n]_{\alpha_1}\}$ 且 $\|1\|_{[n]_{\alpha_1}/\Omega_1} = 1$时，1 是 Ω_1-平移不变的，并利用 $\langle p(1)^{\otimes n}、\ f\rangle \le (4\pi)^{(n-|O|)/2}\|f\|_{[n]/O}$这一性质。由此可知，该内积有界于 $(c(n)/L)^{|\vec\alpha|}$。注意到至多有 $\binom{n}{2}^m$ 个满足 $|\vec\alpha| = m$ 的 $\vec\alpha$，且每个 $\vec\alpha \in \mathrm{Dgm}_*[n]$ 都满足 $|\vec\alpha| \ge \lceil n/2\rceil$。利用这些观察对求和进行估计，即可得到 (B.21)。

界（B.22）由（B.21）推出。为说明原因，对 W 使用（B.7）的类似形式，令 $s = t_i - t_{i-1}$，取 $r = (t_{i-1}/t_i)^{1/2}$和 $L = (-\theta + \log s^{-1})/\log r^{-1}$，并借助（1.8）和（3.42）对 $\log r^{-1} \le c\log b^{-1}$和 $\log s^{-1} \ge 2\log b^{-1}\cdot(N-i) - c$进行估计。□

现在我们来证明引理2.2。

引理2.2的证明。回忆Ω和Ω_i 由（2.24）给出，并令

$$X_i := Y_i - \mathbf{E}\,Y_i\,, \qquad Y_i := 1_{\Omega_i}\log p_{i-1}\triangleleft Z_i\triangleright 1\,. \tag{B.24}$$

我们希望对 $Y_1 + \ldots + Y_{N-\ell}$ 应用 Lindeberg中心极限定理。为此，写作 $p_{i-1}\triangleleft Z_i\triangleright 1 = 1 + p_{i-1}\triangleleft W_i\triangleright 1$，并相应地对对数作泰勒展开，注意到 Ω_i 蕴含 $p_{i-1}\triangleleft W_i\triangleright 1 \ge -1/2$。由此得到

$$Y_i = 1_{\Omega_i}\,p_{i-1}\triangleleft W_i\triangleright 1 - 1_{\Omega_i}\tfrac12\,(p_{i-1}\triangleleft W_i\triangleright 1)^2 + U_i\,, \qquad |U_i| \le c\,|p_{i-1}\triangleleft W_i\triangleright 1|^3\,. \tag{B.25}$$

采用大 O 记号。给定 (B.25), 利用 (B.22) 以及 $\mathbf{P}[\Omega_i^c] \le c(k)/(N-i)^k$对于 $i \ge c(k)$ 和任意 $k \ge 1$ (这可由 (B.22) 得出）可得

$$\mathbf{E}\,Y_i = -\tfrac12\mathbf{E}\,(p_{i-1}\triangleleft W_i\triangleright 1)^2 + O(\tfrac{1}{(N-i)^{3/2}})\,,\ \ \mathbf{Var}\,Y_i = \mathbf{E}\,(p_{i-1}\triangleleft W_i\triangleright 1)^2 + O(\tfrac{1}{(N-i)^2})\,, \tag{B.26}$$

以及 **期望** $(Y_i - \textbf{期望}\,Y_i)^4 \le c/(N-i)^2$。此外，由 (2.15) 以及 N在 (1.8) 中的定义，

$$\sum_{i=1}^{N-\ell}\mathbf{E}\,(p_{i-1}\triangleleft W_i\triangleright 1)^2 = (1 + f(\varepsilon,\ell,b))\log\log\varepsilon^{-1}\,, \tag{B.27}$$

对于某个 f，使得 $\lim^{(\ell,b)\to(\infty,0)}\limsup_{\varepsilon\to0}|f| = 0$。具备这些性质后，对固定的 ℓ, b^{-1} 应用 Lindeberg中心极限定理，随后令 $(\ell,b) \to (\infty,0)$，可得 $Y_1 + \ldots + Y_{N-\ell}$ 代替 $H'_{\varepsilon,\ell,b}$时，(2.27) 成立。由于这两个随机变量在 Ω 上相同，且根据 (2.25)，Ω 的概率趋于 1，因此所需结果 (2.27) 得证。□

附录 C. 条件GMC

我们首先回顾 [CT25], 中使用的高斯乘法混沌形式体系，其主要基于 [Sha16], ; 并指出，高斯乘法混沌理论最早由 [Kah85] 开创，综述可参见 [RV14]。取一个 Polish空间 $\mathfrak{X}$，取其上的正局部有限（在有界集上有限）Borel测度 μ 作为基准测度。用 $C(\mathfrak{X})$ 表示具有有界支集的有界连续函数空间，并令 $\xi = (\xi_1,\xi_2,\ldots)$ 为一列独立同分布高斯变量。接下来，取一个对称函数 $\mathsf{k}:\ \mathfrak{X}^2 \to [0,\infty]$ 作为协方差核。设 $\mu_g(\mathrm{d}x) := \mu(\mathrm{d}x)\,g(x)$，并进一步假设存在 $g_0 \in \hat{}C(\mathfrak{X})$，使得对所有有界 B，$\inf_B g_0 > 0$，且 k 定义了一个正的希尔伯特–施密特积分算子

作用于 $L^2(\mathfrak{X},\ \mu_{g_0})$ 上。给定这些数据，考虑基准测度为 μ、协方差核为 k、高斯输入为 $\sqrt{a}\xi$ 的次临界高斯乘法混沌。若其存在，它是 $\mathfrak{X}$ 上的一个随机 Borel测度（取值于 ξ），记作 $\mathcal{G}(\mu,\ \sqrt{a}\xi)\ =\mathcal{G}(\mu,\ \sqrt{a}\xi)(\mathrm{d}x)$。通常令高斯输入具有单位方差，并将 a 依赖性放在协方差核中；但我们采用相反的做法，因为这在聚合物测度的语境下更方便。记 $\mathbb{E}$ 为 ξ 的分布。

在当前假设下，若高斯乘法混沌存在，则可将其更明确地表示为杜布鞅的极限。任取 $\varphi:\ \mathfrak{X}\to[0,\infty]$ 满足

$$\mu_\varphi^{\otimes 2}\big[e^{a'\mathsf{k}}\big]:=\int_{\mathfrak{X}^2}\mu_\varphi^{\otimes 2}\,e^{a'\mathsf{k}}:=\int_{\mathfrak{X}^2}\mu^{\otimes 2}\,\varphi^{\otimes 2}e^{a'\mathsf{k}}<\infty\,,\qquad a'\in\mathbb{R}\,. \tag{C.1}$$

由于k 在 $L^2(\mathfrak{X},\mu_{g_0})$ 上定义了一个正算子，并且下确界$_B\, g_0>0$ 对所有有界的 B，k 也在 $L^2(\mathfrak{X},\mu_\varphi)$上定义了一个正算子，该算子由（C.1）可知是希尔伯特–施密特算子。将其（严格）正特征值及对应的特征向量依次记为 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots$ 和 $u_1,u_2,\ldots$，并令

$$\mathcal{G}_n(\mu,\sqrt{a}\xi)(\mathrm{d}x):=\mu(\mathrm{d}x)\,\exp\sum_{i=1}^n\Big(\sqrt{a\lambda_i}\xi_iu_i(x)-\frac{1}{2}a\lambda_iu_i(x)^2\Big)\,. \tag{C.2}$$

由 [Sha16], 的高斯乘法混沌随机平移刻画，不难验证

$$\mathbb{E}\big[\,\mathcal{G}(\mu,\sqrt{a}\xi)[\varphi]\,\big|\,\xi_1,\ldots,\xi_n\big]=\mathcal{G}_n(\mu,\sqrt{a}\xi)[\varphi]\,. \tag{C.3}$$

也就是说，（C.3）中的表达式构成一个杜布鞅，因此特别有

$$\mathcal{G}(\mu,\sqrt{a}\xi)[\varphi]=\lim_{n\to\infty}\mathcal{G}_n(\mu,\sqrt{a}\xi)[\varphi]\,,\qquad\text{a.s. and in } L^1(\mathbb{P})\,. \tag{C.4}$$

杜布鞅也有助于推导界。令$\mathsf{k}_n(x,y):=\sum_{i=1}^n\lambda_iu_i(x)u_i(y)$，并将（C.2）–（C.3）与詹森不等式结合，可得

$$\mu_\varphi^{\otimes 2}\big[e^{a\mathsf{k}_n}\big]=\mathbb{E}\big(\mathcal{G}_n(\mu,\sqrt{a}\xi)[\varphi]\big)^2\le\mathbb{E}\big(\mathcal{G}(\mu,\sqrt{a}\xi)[\varphi]\big)^2\,. \tag{C.5}$$

发送 $n\to\infty$ 即可恢复标准的二阶矩公式

$$\mathbb{E}\big(\mathcal{G}(\mu,\sqrt{a}\xi)[\varphi]\big)^2=\mu_\varphi^{\otimes 2}\big[e^{a\mathsf{k}}\big]:=\mu^{\otimes 2}\big[\varphi^{\otimes 2}\,e^{a\mathsf{k}}\big]\,. \tag{C.6}$$

我们来说明如何将上述设置特化为与本文相关的情形。为此，取 $\mathfrak{X}=\Gamma:=C([t_{N-\ell},1];\,\mathbb{R}^2)$, 赋予其上确界范数，取 $\mu=M':=M^{\theta-a}_{[t_{N-\ell},1]}$，并取 $\mathsf{k}\ =\tau$，即在 [CM25] 中构造的交叉局部时间；快速回顾请参见 [CT25, 第 2 节。2]对于 g_0有许多种选择，为具体起见，我们取 $g_0(\gamma):=\exp(-|\gamma(t_{N-\ell})|)$。基准测度 M' 是随机的，我们将其取为与 ξ相互独立。在当前的特化情形下，由于 [CT25] 的引理 3.3、方程 (3.37) 和引理 A.3，我们对 $\mathsf{k}\ =\tau$ 和 g_0 的假设成立。 $\mathcal{G}(M',\sqrt{a}\xi)$ 的存在性由 [CT25, 引理 3.3] 以及 [Sha16, 定理 3]推出。我们还将把 φ 特化为 (5.3) 中定义的 Φ_δ。利用关于 $a\mapsto a'$ 和 $\theta\mapsto\theta-a+a'$ 的 (5.13)，可知该特化情形满足 (C.1)。

我们现在应用 [MF14] 的论证来证明以下下尾界。

引理 C.1. 设定同上。令 $\rho:=\mu_\varphi^{\otimes 2}[e^{a\mathsf{k}}]/\mu[\varphi]^2$ 和 $\rho':=\mu_\varphi^{\otimes 2}[\mathsf{k}e^{a\mathsf{k}}]/\mu[\varphi]^2$，则有

$$\mathbb{P}\Big[\,\mathcal{G}(\mu,\sqrt{a}\xi)[\varphi]<e^{-r}\mu[\varphi]\,\Big]\le 2\exp\Big(-\frac{1}{2^7a\rho\rho'}\big(r-\log 2-\sqrt{2^7a\rho\rho'\log 2^4\rho}\big)_+^2\Big)\,. \tag{C.7}$$

该引理通过按照上述说明对设定进行特化，推出了（5.8）。

证明。为说明为简化记号，我们取 $a=1$ 并将 $\mathcal{G}(\mu,\ \xi)=\mathcal{G}(\xi)$ 和 $\mathcal{G}_n(\mu,\ \xi)=\mathcal{G}_n(\xi)$ 记为。

我们来说明，如何由所需结果的近似版本推出该结果。回顾此前的n 式（C.5），并令 ρ_n 和 ρ'_n 分别由k 替换 ρ 和 ρ' 中的k_n得到。我们要证明

$$\mathbb{P}\Big[\,\mathcal{G}_n(\xi)[\varphi]<e^{-r}\mu[\varphi]\,\Big]\le 2\exp\Big(-\frac{1}{2^7\rho_n\rho'_n}\big(r-\log 2-\sqrt{2^7\rho_n\rho'_n\log 2^4\rho_n}\big)_+^2\Big)\,. \tag{C.8}$$

事实上，令 $n\to\infty$ 趋于极限，(C.8) 左侧便趋于 (C.7) 左侧。右侧也收敛，这相当于说明 $\mu_\varphi^{\otimes 2}[e^{a\mathsf{k}_n}]\to\mu_\varphi^{\otimes 2}[e^{a\mathsf{k}}]$ 和 $\mu_\varphi^{\otimes 2}[\mathsf{k}_n e^{\mathsf{k}_n}]\to\mu_\varphi^{\otimes 2}[\mathsf{k}$。为此，首先注意到 $\mathsf{k}_n\to\mathsf{k}$ 关于 $\mu_\varphi^{\otimes 2}$ 依测度收敛，因此类似的收敛性也适用于 e^{k_n} 和 $\mathsf{k}_n e^{\mathsf{k}_n}$。要将其提升为在 $L^1(\mathfrak{X}^2,\mu_\varphi^{\otimes 2})$ 中收敛，结合 $a\mapsto 2a$ 的 (C.5)–(C.6) 可推出 $\sup_n\mu_\varphi^{\otimes 2}|e^{\mathsf{k}_n}|^2<\infty$，再借助 $\mu_\varphi^{\otimes 2}[(\mathsf{k}_n-\mathsf{k})^2]=\sum_{i=n+1}^{\infty}\lambda_i^2\to 0$，对差值 $\mathsf{k}_n e^{\mathsf{k}_n}-\mathsf{k}e^{\mathsf{k}}$ 应用柯西-施瓦茨不等式。

为证明（C.8），由于 $\mathcal{G}_n(\xi)$ 只依赖于 n 的前 ξ个条目，稍微滥用一下记号，在余下的证明中，我们记 $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_n)$。

作为证明（C.8）的第一步，我们推导一个有用的下界。记$\mathcal{G}_{n,\ \varphi}(\xi)(\mathrm{d}x):=\mathcal{G}_n(\xi)(\mathrm{d}x)\,\varphi(x)/\mathcal{G}_n(\xi)[\varphi]$ 为归一化测度，令

$$A_1:=\big\{\xi\in\mathbb{R}^n\,\big|\,\mathcal{G}_n(\xi)[\varphi]\ge\tfrac12\mu[\varphi]\big\}\,,\qquad A_2(\alpha):=\big\{\xi\in\mathbb{R}^n\,\big|\,\overline{\mathcal{G}}_{n,\varphi}(\xi)^{\otimes 2}[\mathsf{k}_n]\le\alpha\big\}\,, \tag{C.9}$$

并令 $A(\alpha):=A_1\cap A_2(\alpha)$，将 $\mathcal{G}_n(\xi)[\varphi]$ 表示如下

$$\mathcal{G}_n(\xi)[\varphi]=\overline{\mathcal{G}}_{n,\varphi}(\xi')\Big[\exp\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\xi'_i)\sqrt{\lambda_i}u_i\Big]\cdot\mathcal{G}_n(\xi')[\varphi]\,, \tag{C.10}$$

对 $\mathcal{G}_{n,\ \varphi}(\xi')$ 应用詹森不等式，并对所得结果中的求和应用柯西-施瓦茨不等式。记 $|\cdot|$ 为 $\mathbb{R}^n$上的欧几里得范数。上述步骤得到

$$\mathcal{G}_n(\xi)[\varphi]\ge\exp\Big(-|\xi-\xi'|\Big(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\big(\overline{\mathcal{G}}_{n,\varphi}(\xi')[u_i]\big)^2\Big)^{1/2}\Big)\cdot\mathcal{G}_n(\xi')[\varphi]\,. \tag{C.11}$$

记 $d(\xi,A):=\inf\{|\xi-\xi'|\,|\,\xi'\in A\}$ 为从 ξ到集合 A的欧几里得距离。将最后的求和认作 $\mathcal{G}_{n,\ \varphi}(\xi')^{\otimes 2}[\mathsf{k}_n]$，对 C.9 应用 $\xi\mapsto\xi'$，并对所得不等式关于 $\xi'\in A(\alpha)$取上确界。由此得到下界

$$\mathcal{G}_n(\xi)[\varphi]\ge\tfrac12\mu[\varphi]\,e^{-\sqrt{\alpha}\,d(\xi,A(\alpha))}\,. \tag{C.12}$$

接下来，我们推导 $\mathbb{P}[A(\alpha)]$的下界。鉴于 $\mathbb{E}\,\mathcal{G}_n(\xi)[\varphi]=\mu[\varphi]$，佩利-齐格蒙德不等式给出

$$\mathbb{P}[A_1]\ge\frac{\mu[\varphi]^2}{4\mathbb{E}\,(\mathcal{G}_n(\xi)[\varphi])^2}=\frac{\mu[\varphi]^2}{4\mu_\varphi^{\otimes 2}[e^{\mathsf{k}_n}]}=\frac{1}{4\rho_n}\,, \tag{C.13}$$

其中，第一个等式可由（C.2）直接验证。接下来，注意到事件 $A_2(\alpha)^{\mathrm{c}}\cap A_1$蕴含 $\mathcal{G}_n^{\otimes 2}[\varphi^{\otimes 2}\mathsf{k}_n]\ge\alpha\mu[\varphi]^2/4$，我们使用马尔可夫不等式写出

$$\mathbb{P}[A_2(\alpha)^{\mathrm{c}}\cap A_1]\le\frac{4\mathbb{E}\,\mathcal{G}_n^{\otimes 2}[\varphi^{\otimes 2}\mathsf{k}_n]}{\alpha\mu[\varphi]^2}=\frac{4\mu_\varphi^{\otimes 2}[\mathsf{k}_n e^{\mathsf{k}_n}]}{\alpha\mu[\varphi]^2}=\frac{4\rho'_n}{\alpha}\,, \tag{C.14}$$

其中，等式中的第一个等号同样可由（C.2）直接验证。结合（C.13）–（C.14）并代入 $\alpha=2^5\rho_n\rho'_n$ 可得

$$\mathbb{P}[A(\alpha_*)]\ge\frac{1}{4\rho_n}-\frac{4\rho'_n}{\alpha_*}=\frac{1}{2^3\rho_n}\,,\qquad\alpha_*:=2^5\rho_n\rho'_n\,. \tag{C.15}$$

利用（C.12）得到 $\mathbb{P}[\mathcal{G}_n(\xi)[\varphi] < e^{-r}\mu[\varphi]] \le \mathbb{P}[d(\xi, A(\alpha_*)) \ge (r-\log 2)/\sqrt{\alpha_*}]$，再将其与高斯集中不等式 [Tal03，引理 2.2 结合，即完成证明。11]

$$\mathbb{P}\big[d(\xi, A(\alpha_*)) \ge u + 2\sqrt{\log 2/\mathbb{P}[A(\alpha_*)]}\big] \le 2e^{-u^2/4} \tag{C.16}$$

对于 $u = ((r-\log 2)/\sqrt{\alpha_*} - 2\sqrt{\log 2^4}\rho_n)_+$ 借助（C.15）。 □

参考文献

[ABD95] S Albeverio、Z Brzezniak 和 Ludwik Dabrowski。带点相互作用的热方程与薛定谔方程的基本解。《J Funct Anal》，130(1):220–254，1995。[And98] George E. Andrews。《分拆理论》。剑桥数学丛书。剑桥大学出版社，剑桥，1998。1976 年原版重印。[BC98] Lorenzo Bertini 和 Nicoletta Cancrini。二维随机热方程：对乘性噪声进行重整化。《J Phys A: Math Gen》，31(2):615，1998。[CC22] Francesco Caravenna 和 Francesca Cottini。亚临界混沌的高斯极限。《Electronic Journal of Probability》，27:1–35，2022。[CCR23] Francesco Caravenna、Francesca Cottini 和 Maurizia Rossi。二维定向聚合物的准临界涨落。arXiv:2307.02453，2023。[CD20] Sourav Chatterjee 和 Alexander Dunlap。构造（$2+1$）维 KPZ 方程的一个解。《概率年刊》，48(2):1014–1055，2020。[CD25] Cl´ement Cosco 和 Anna Donadini。关于二维定向聚合物对数配分函数的中心极限定理。《Electron Commun Probab》，30(86):1–11，2025。[CM24] Jeremy Clark 和 Barkat Mian。与临界二维随机热流相对应的连续统聚合物测度。arXiv:2409.01510，2024。[CM25] Jeremy Clark 和 Barkat Mian。关于经点势奇异倾斜的平面布朗运动。《Electron J Probab》，30(121):1–97，2025。[CSZ17] Francesco Caravenna、Rongfeng Sun 和 Nikos Zygouras。边缘相关无序系统中的普适性。《Ann Appl Probab》，27(5):3050–3112，2017。[CSZ20] Francesco Caravenna、Rongfeng Sun 和 Nikos Zygouras。整个次临界区间内的二维 KPZ 方程。《概率年刊》，48(3):1086–1127，2020。[CSZ23] Francesco Caravenna、Rongfeng Sun 和 Nikos Zygouras。临界二维随机热流。《Invent Math》，233(1):325–460，2023。[CSZ25] Francesco Caravenna、Rongfeng Sun 和 Nikos Zygouras。临界二维随机热流的奇异性与正则性。arXiv:2504.06128，2025。[CT25] Jeremy Clark 和 Li-Cheng Tsai。随机热流中的条件GMC。arXiv:2507.16056，2025。[DG22] Alexander Dunlap 和顾宇。一个源自二维非线性随机热方程的前向-后向随机微分方程。《概率年刊》，50(3):1204–1253，2022。[DG23] Alexander Dunlap 和 Cole Graham。二维非线性随机热方程：逐点统计与解耦函数。arXiv:2308.11850，2023。[DR04] Jonathan Dimock 和 Sarada Rajeev。平面上具有点相互作用的多粒子薛定谔算子。《J Phys A: Math Gen》，37(39):9157，2004。[GQT21] 顾宇、Jeremy Quastel 和 Li-Cheng Tsai。临界性下二维随机热方程的矩。《Probab Math Phys》，2(1):179–219，2021。[Gu20] 顾宇。二维 KPZ 方程产生的高斯涨落。《Stochastics and Partial Differential Equations: Analysis and Computations》，8(1):150–185，2020。[Kah85] Jean-Pierre Kahane。论乘法混沌。《Ann Sci Math Québec》，9(2):105–150，1985。[LZ24] Ziyang Liu 和 Nikos Zygouras。关于临界 $2d$随机热流下收缩球质量的矩。arXiv 预印本 arXiv:2410.14601，2024。[MF14] Gregorio R. Moreno Flores。关于随机热方程解的（严格）正性。《概率年刊》，42(4):1635–1643，2014。[MOW25] Peter S Morfe、Felix Otto 和 Christian Wagner。一个临界漂移-扩散方程：通过（n）上的几何布朗运动展现间歇行为。arXiv 预印本 arXiv:2511.15473，2025。

[Nak25] Makoto Nakashima。临界 2*d*随机热流下球质量下尾概率的一个上界。*arXiv:2507.18080*，2025。[NN23] Shuta Nakajima 和 Makoto Nakashima。一般初始条件下次临界区间内二维随机热方程与 KPZ 方程的涨落。*Electron J Probab*，28:1–38，2023。[Raj99] Sarada Rajeev。二维空间中相互作用玻色子的凝聚。*arXiv: hep-th/9905120*，1999。[RV14] R´emi Rhodes 和 Vincent Vargas。高斯乘性混沌及其应用：综述。*Probab Surv*，11:315–392，2014。[Sha16] Alexander Shamov。论高斯乘性混沌。*J Funct Anal*，270(9):3224–3261，2016。[ST25] Sudheesh Surendranath 和 Li-Cheng Tsai。加权空间中的二维 δ-玻色气体。*ElectronCommun Probab*，30:1–10，2025。[Tal03] Michel Talagrand。自旋玻璃：数学家的挑战，第 46 卷。Springer-Verlag，柏林，2003。[Tsa24] Li-Cheng Tsai。基于矩的随机热流。*arXiv: 2410.14657*，2024。

（顾宇）马里兰大学大学公园市数学系，美国

（LI-CHENG TSAI）犹他大学数学系，美国