arXiv:2603.03253v1 [math.AG] 3 Mar 2026

# 有理数域上的诺特–莱夫谢茨一般完全交 K3 曲面

ASHER AUEL 和 HENRY SCHEIBLE

Abstract. 我们证明，定义在 $\mathbb{Q}$ 上的次数为 $d$ 的诺特–莱夫谢茨一般极化K3曲面的轨迹，在 $d \leq 8$的模空间中扎里斯基稠密。此前，van Luijk 已在四次情形证明了这一点；而在二次情形，这一结论可由 Elsenhans 和 Jahnel 的工作推出。改进他们的方法，并采用 Mukai 的霍奇同源，足以处理 8 次情形。新方法则使我们能够处理六次情形。

## Introduction

对于每个偶数 $d \geq 2$，模空间 $\mathcal{K}_d$ 是次数为 $d$ 的原始极化 K3 曲面所构成的 19 维拟射影簇。在 $\mathcal{K}_d$中除去可数无穷多个除子的并集后，次数为 $d$ 的极化 K3 曲面在 $\mathbb{C}$上的皮卡秩为 1。这些就是诺特–莱夫谢茨一般 K3 曲面。我们考虑以下开放问题，参见 [26,第 17 章，第 408-409], [49,注释 1.3。7], [9,问题 1.4–1。5]。

**问题 1.** 对于给定的偶数 $d \geq 2$，是否存在定义在 $\mathbb{Q}$ 上、次数为 $d$ 的原始极化 *K3* 曲面 $S$，使得 $\mathrm{Pic}(S_{\mathbb{C}}) \cong \mathbb{Z}$?

换言之，Noether–Lefschetz 一般轨迹中是否存在 $\mathbb{Q}$-有理点? 由于该轨迹是无穷多个除子的补集，因此 先验地 无法确定它是否含有任意给定可数域上的有理点。然而，Ellen- berg [16]证明了 $\mathcal{K}_d$ 中的 Noether–Lefschetz 一般轨迹对每个$\mathbb{Q}$都确实含有 $d \geq 2$-有理点。此前，Terasoma 的结果 [51] 对问题 1 在 $d = 4$、、的情形给出了肯定答案，即当一般的 K3 曲面（次数为 $d$）是完全交时。我们指出，沙法列维奇的一个猜想 [48], 预言：对于定义在固定数域上的 K3 曲面，作为其几何皮卡格出现的格的同构类只有有限多个；该猜想若成立，则意味着问题 1 仅对有限多个 $d$有肯定答案。沙法列维奇证明了该猜想对几何皮卡秩为 20 的数域上 K3 曲面成立。Orr 和 Skorobogatov [44],以及 Orr [45], 证明了沙法列维奇猜想对 CM 型 K3 曲面成立。然而，对于几何皮卡秩为 1 的 K3 曲面，该猜想似乎仍完全悬而未决。

类似地，根据 Gritsenko、Hulek 和 Sankaran 的工作，$\mathcal{K}_d$ 在 $d > 122$ 时变为一般型 [22, 定理 6。1], 邦别里–朗猜想将预言有理点集并非扎里斯基稠密，这意味着随着 $d$增大，Noether–Lefschetz 一般轨迹上的有理点会愈发稀少。相反，当 $d$ 较小时，$\mathcal{K}_d$ 是单有理的，因此我们预期会有许多有理点。我们的主要结果补全了完全交 K3 曲面的图景。

**定理 1**。 定义在 $\mathbb{Q}$ 上的 *Noether–Lefschetz* 一般 *K3* 曲面在 $\mathcal{K}_d$ 中对 $d \leq 8$是扎里斯基稠密的。

van Luijk [53]通过一种开创性方法证明了 4 次情形：利用 Weil 猜想和 Tate 猜想，以及皮卡群特化同态的性质

构造了定义在 $\mathbb{F}_p$ 和 $\mathbb{F}_{p'}$ 上的特定四次 K3 曲面，其几何皮卡秩为 2，且皮卡格彼此不相容，从而迫使它们在$\mathbb{Q}$ 上的一个共同提升具有几何皮卡秩 1。克洛斯特曼 [31] 指出，在范吕克方法中，可以用 Artin–Tate 公式提供的信息取代第二个素数 $p'$ 模下特定 K3 曲面的相关信息。Elsenhans 和 Jahnel [17, 18]将范吕克的策略应用于次数为 2 的 K3 曲面，随后又为 K3 曲面发展出一种新的通用技术 [19] （将其应用于次数 2 的情形），该方法只需在一个素数模下进行研究，另见 [24, 命题 5。3]这些作者给出了定义在 $\mathbb{Q}$上的首批 Noether–Lefschetz 一般 K3 曲面的明确例子；四次 K3 曲面的情形长期以来一直是芒福德提出的一个难题，而 van Luijk 的工作给出了已知的首批明确例子，见 [54, § 2.4-2。6]正如 [53, 第 12], 页所用，显式构造的特点在于，通过提升有限域上的特定 K3 曲面，可得出定理 1 中关于 $d = 4$的扎里斯基稠密性；类似地，利用 Elsenhans 和 Jahnel 的构造 [17, 18] 也可对$d = 2$作出论证，见第 4 节。对于 $d = 8$，结合 Mukai 的八次到二次同源（见第 2 节）与最初由 Elsenhans 和 Jahnel 给出的例子 [19,§ 8], ，即可得到结果。最后，我们还必须进一步发展 van Luijk 和 Elsenhans–Jahnel 的技术，以便将其应用于六次 K3 曲面。

次数为六的 K3 曲面是一个完全交$X = X_{2,\ 3} \subset \mathbb{P}^4$。我们特别考虑这类 $X$ 约化 $X_p$ 在 $\mathbb{F}_p$ 上包含一条直线的曲面；从这条直线作投影，便得到一个双覆盖 $X_p \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{F}_p}$。一般而言，这个二次模型不含三切线（见注3.5），因此无法直接使用 [19]中的技巧。相反，我们将 [24, 命题 53] 推广到射影 K3 曲面中所含的直线，详见第3节。验证 $\rho(X_p) = 2$后，我们将其提升为一个$X \subset \mathbb{P}^4$ 上不含任何直线的曲面，这一点通过 Gröbner 基验证。首批明确的例子由第二作者发表于¨。 [47]。

在次数为 8 的情形下，我们利用这样一个事实：三个二次超曲面的完全交 $X \subset \mathbb{P}^5$ 定义在 $\mathbb{Q}$ 上，与一个次数为 2 的判别式 K3 曲面 $Y$ 定义在 $\mathbb{Q}$上同源（霍奇等ogeny），见第2节。当约化 $Y_p$ 在 $\mathbb{F}_p$ 上有一条三切线，且几何皮卡秩为二，而 $Y$ 在 $\mathbb{Q}$上没有三切线时，则 $Y$(因而 $X$)的几何皮卡秩为一。第 8 次情形下的明确例子，曾在 [19,§ 8] 和 [38,§5]中使用这一技巧（隐含地）构造。

最后，在第 4 节中，我们将说明，如何利用几何皮卡秩为 1 的 K3 曲面的显式构造（例如 van Luijk、Elsenhans–Jahnel 以及本文中的工作所给出的构造），证明 $\mathbb{Q}$ 上 Noether–Lefschetz 一般 K3 曲面轨迹的扎里斯基稠密性 $\mathbb{Q}$ 。

目前尚不清楚，在 $\mathbb{Q}$ 上是否存在次数大于 8 的任意偶数次数的 Noether–Lefschetz 一般 K3 曲面，以及在这些次数 $d$ 上，此类曲面的轨迹是否在模空间 $\mathcal{K}_d$ 中扎里斯基稠密。

**致谢**。 作者感谢 Nick Addington 提出了在次数 6 的情形下从一条直线作投影的想法。我们也感谢 Jean-Louis Colliot-Th´el`ene 和 Bjorn Poonen 就有理点的扎里斯基稠密性进行讨论，并感谢 Sarah Frei 和 Salim Tayou 就特化同态进行讨论。Peter Doyle 和他的朋友 Steve 也与我们进行了富有启发性的交流。Auel 部分获得了美国国家科学基金会 DMS-2200845 号资助，Scheible 则获得了达特茅斯学院的本科生研究助理奖学金（URAD）以及 William H. Neukom计算科学研究所的研究奖学金。

## 1. Prerequisites

一个*K3 曲面* 是定义在某个域 $k$上的光滑、射影、几何不可约曲面 $X$，其典范丛 $\omega_X$ 在 $X$ 上是平凡的，且 $H^1(X,\ \mathscr{O}_X) = 0$。一个极化 *K3 曲面* 是一个对 $(X,\ H)$，其中 $X$ 是一个 K3 曲面，而 $H \in \mathrm{Pic}(X)$ 是一个充足除子类。若极化的次数 为 $d$，则称其为次数 $H^2 = d$。对每个偶数$d \geq 2$，次数为 $d$ 的原始极化K3曲面的模空间 $\mathcal{K}_d$ 是一个 19 维拟射影簇。对整数 $r,\ e$，定义诺特-莱夫谢茨除子 $\mathcal{K}^r_{d,\ e} \subset \mathcal{K}_d$ 为次数为 $d$ 的极化K3曲面 $(X,\ H)$ 所构成的轨迹，使得 $\mathrm{NS}(X)$ 包含一个由 $H$ 和 $L$ 张成的原始秩2子格，其格拉姆矩阵为

| $X$ | $H$ | $L$ |
|---|---|---|
| $H$ | $d$ | $e$ |
| $L$ | $e$ | $r$ |

当 $r$ 为偶数且 $dr - e^2 < 0$ 时，$\mathcal{K}^r_{d,\ e} \subset \mathcal{K}_d$ 是一个非空不可约除子，根据[43], 参见 [14], [21], [2]。

子簇 $X \subseteq \mathbb{P}^n$ 是完全交，当且仅当 $X$ 的理想恰由 $\mathrm{codim}\, X$ 个元素生成。伴随公式和莱夫谢茨超平面定理表明，完全交 K3 曲面只有 $\mathbb{P}^3$中的四次曲面、 $\mathbb{P}^4$中一个二次曲面与一个三次曲面的交，以及 $\mathbb{P}^5$中三个二次曲面的交，它们分别给出次数为 $d = 4$、 6、8 的本原极化。

$X$ 的皮卡秩 是秩 $\rho(X) = \mathrm{rk}_{\mathbb{Z}}\mathrm{NS}(X)$，即 N´eron–Severi 群 $\mathrm{NS}(X)$ 的秩； $X$ 的几何皮卡秩 则为 $\mathrm{rk}_{\mathbb{Z}}\mathrm{NS}(X)$，其中 $X = X \times_{\mathrm{Spec}\, k} \mathrm{Spec}\ \overline{k}$，对应于 $k$的一个代数闭包 $\overline{k}$ 。对于定义在 $k$上的 K3 曲面 $X$，相对于交积，$\mathrm{Pic}(X) \cong \mathrm{NS}(X) \cong \mathbb{Z}^{\rho(X)}$ 是一个符号为 $(1, \rho(X) - 1)$ 的偶格，其中 $1 \leq \rho(X) \leq 22$，参见 [26, 第 17 节2]。

现在，设 $X$ 是定义在 $\mathbb{Q}$ 上的 K3 曲面，且 $p$ 是一个素数。如果存在一个定义在 $\mathbb{Z}$ 上的 $X$ 的真平坦模型，并且其在 $\mathbb{F}_p$ 上有一个光滑纤维 $X_p$，我们就称 $p$ 是 $X$ 的良约化素数。记 $X_p = X_p \times_{\mathrm{Spec}\, \mathbb{F}_p} \mathrm{Spec}\ \overline{\mathbb{F}}_p$。对于良约化素数 $p$，存在特化同态

$$\mathrm{sp} : \mathrm{NS}(X) \to \mathrm{NS}(X_p) \quad \text{and} \quad \overline{\mathrm{sp}} : \mathrm{NS}(\overline{X}) \to \mathrm{NS}(\overline{X}_p)$$

这些同态是单射，并且保持交积，参见 [20, §20.3], [52, 命题 6.2], [36, §3.2]。此外，我们有如下结论。

**引理 1.1** (Elsenhans 和 Jahnel [19, 推论 3。7])。设 $X$ 是定义在 $\mathbb{Q}$ 上的真概形，且 $p > 2$ 是一个良约化素数。那么，特化同态 *sp* :$\mathrm{NS}(X) \to \mathrm{NS}(X_p)$ 的余核无挠。

对于定义在 $\mathbb{F}_p$ 上的簇 $X$，有绝对 *Frobenius* 态射 $F : X \to X$，它在 $X$ 的拓扑空间上是恒等映射，并在结构层上作用为 $u \mapsto u^p$。设 $F^*$ 是它在 $H^2_{\text{ét}}(X_p, \mathbb{Q}_\ell)$ 上的拉回。我们称$F^*$ 的特征多项式为 $X_p$ 的韦伊多项式。根据韦伊猜想，它是一个次数为 22 的多项式，其根是绝对值为 $p$的代数整数。

对于定义在 $\mathbb{F}_p$上的 K3 曲面 $X_p$，循环类映射 $\mathrm{NS}(X_p) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_\ell \to H^2_{\text{ét}}(X_p,\ \mathbb{Q}_\ell(1))$ 是 Frobenius 等变单射，参见 [36], [52,命题 6.2]。注意到每个定义在 $\mathbb{F}_p$ 上的除子类都定义在 $\mathbb{F}_p$的某个有限扩张 $\mathbb{F}_{p^m}$ 上，因此，$X_p$ 上的每个除子在某个正整数 $m$对应的 $F^m$ 作用下不变。因此，若令 $F^*(1)$表示在循环类映射下诱导的映射（作用于 $\mathbb{Q}_\ell$-向量空间） $H^2_{\text{ét}}(X_p,\ \mathbb{Q}_\ell(1))$，则每个除子

类都成为 $F^*$(1)的特征向量，其特征值为单位根。因此，由循环类映射的单射性可知，NS($X_p$) $\otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$的 $\mathbb{Q}_\ell$-维数，进而 NS($X_p$) 的$\mathbb{Z}$-秩，不超过 $\overline{F^*}$(1)中单位根特征值的个数（按重数计）。 $F^*$(1)的特征值与 $F^*$ 的特征值相差一个 $p$因子，因此几何皮卡秩 $\rho(X)$不超过 $F^*$ 中满足 $\lambda/p$ 为单位根的 $\lambda$ 个数（按重数计），参见 [53, 推论 2.3]。事实上，Nygaard–Ogus [42], 、Maulik [35], 、Charles [10, 11], 、Madapusi Pera [33], 、Kim–Madapusi Pera [30, 34], 以及 Ito–Ito–Koshikawa [28], 证明的K3曲面泰特猜想的一个推论是，这个上界是精确的。

**定理 1.2**。 对于定义在 $\mathbb{F}_q$ 上的 *K3* 曲面 $X$，其几何皮卡秩 $\rho(X)$ 等于 $F^*$ 的特征值 $\lambda$ 中使 $\lambda/q$ 为单位根的特征值个数，按重数计。

有一些算法可以计算定义在 $\mathbb{F}_p$ 上的 K3 曲面的韦伊多项式：给定一个二次模型（由 Elsenhans 和 Jahnel [19] 提出，并在 Magma [8] 中实现），或给定一个环面簇中的超曲面模型（由 Kedlaya [29], 、Abbott– Kedlaya–Roe [1], 以及 Costa–Harvey–Kedlaya [12] 提出）。在较小的有限域上，使用专门的点计数技术可能更快；而在中等大小的有限域上， $p$-进方法通常更快。

## 2. Degree 8 Case

一般的 8 次极化 K3 曲面（$X$, $H$）是 $\mathbb{P}^5$ 中三个二次曲面的完全交。在这种情况下，包含 $X$ 的二次曲面空间 $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}^5, \mathscr{I}_X(2)))$，称为与 $X$ 相关联的二次曲面网，由这三个二次曲面张成。该网中退化二次曲面的轨迹 $C \subseteq \mathbb{P}^2$ 是一条六次曲线。设 $f : Y \to \mathbb{P}^2$ 为该二次曲面的判别式双覆盖，它在 $C$ 上分支。判别式覆盖既可以通过偶克利福德代数的中心来定义，参见 [32, §3], [4, §1.6], ；也可以通过与该网相关联的极大各向同性子空间相对模空间的斯坦因分解来定义，参见 [25, §3], [38, §3.2], 。根据 [4, 附录 B]，这两种观点是等价的。当 $C$ 光滑时， $Y$ 也光滑，且（$Y$, $f^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$）是一个次数为 2 的极化K3曲面，称为与 $X$ 相关联的判别式 K3 曲面。

具体而言，在特征为 $\neq 2$ 的域 $k$ 上，若二次型 $q_0, q_1, q_2$ 定义在 $V$ 上，且 $X = V(q_0, q_1, q_2) \subset \mathbb{P}^5 = \mathbb{P}(V)$，则我们考虑定义在 $V \otimes_k k[x_0, x_1, x_2]$ 上的线性张成二次型 $q = x_0q_0 + x_1q_1 + x_2q_2$，参见 [4, 定义 1.2.3]。带符号判别式 disc($q$) = –det($x_0Q_0 + x_1Q_1 + x_2Q_2$) $\in k[x_0, x_1, x_2]$，其中 $Q_i$ 是与二次型 $q_i$相关联的对称格拉姆矩阵，因而是一个次数为 6 的齐次形式。判别式 K3 曲面 $Y \subset \mathbb{P}(1, 1, 1, 3)$ 是由 $y^2$ =disc($q$) 在加权齐次坐标 ($x_0 : x_1 : x_2 : y$) 下定义的簇，其中双覆盖 $Y \to \mathbb{P}^2$ 由从最后一个坐标出发的投影给出，参见 [38, §5]。

**命题 2.1**。 判别式 *K3* 曲面的构造确定了一个支配有理映射 $\Phi\colon \mathcal{K}_8 \dashrightarrow \mathcal{K}_2$。

证明。 唯一的问题是上述显式构造是否在 $\mathcal{K}_8$ 的某个开集上有定义。该构造在 $\mathcal{K}_8$ 中满足以下条件的轨迹上有定义：极化$H$ 将 $X$ 嵌入为由 3 个二次曲面构成的光滑完全交，且其判别式 K3 曲面光滑。该轨迹是有限多个 Noether–Lefschetz 除子的补集。

事实上，当极化不再是非常丰时，光滑性便会失效；这种情况发生在单锥轨迹 $\mathcal{K}_{8,1}^0$ 或超椭圆轨迹 $\mathcal{K}_{8,2}^0$，见 [46, §5, §8]；此外，完全交性质会在三角轨迹 $\mathcal{K}_{8,3}^0$ 上失效，见 [46, 定理 7.2]；当 $X$ 光滑时，判别式 K3 $Y$ 至多会出现普通二重点，见 [6, §6.2], ，这种情况发生在$\mathcal{K}_8^{-2}{}_{,1}$ （当 $X$ 含有一条直线时）或 $\mathcal{K}_8^{-2}{}_{,2}$ （当 $X$ 含有一条圆锥曲线时）。最后，根据 [6,命题 6.23]，该有理映射是占优的。□

特别地，存在扎里斯基开集 $\mathcal{K}_8^\circ \subset \mathcal{K}_8$ 和 $\mathcal{K}_2^\circ \subset \mathcal{K}_2$，使得 $\Phi\colon \mathcal{K}_8^\circ \to \mathcal{K}_2^\circ$ 是满射态射。

当次数为 8 的完全交 K3 曲面 $X \subset \mathbb{P}^5$ 定义在 $\mathbb{Q}$ 上时，判别式 K3 曲面的显式构造表明， $Y \to \mathbb{P}^2$ 也定义在 $\mathbb{Q}$ 上。以下结果源自 Mukai 关于 K3 曲面之间同源的开创性工作 [39, 41, 40] 。

**命题 2.2**。对于有理数域$\mathbb{Q}$ 上由三个二次曲面构成的光滑完全交$X \subset \mathbb{P}^5$，若其对应的判别式 $Y \to \mathbb{P}^2$ 光滑，则有 $\rho(X) = \rho(Y)$。

由于基变换映射 $\mathrm{NS}(X \times_{\mathrm{Spec}\,\mathbb{Q}} \mathrm{Spec}\,\mathbb{Q}) \to \mathrm{NS}(X \times_{\overline{\mathrm{Spec}\,\mathbb{Q}}} \mathrm{Spec}\,\mathbb{C})$ 是由 N´eron–Severi 群的刚性所保证的同构，参见 [36, 命题 3。1], 要证明命题 2.2 ，只需在复数域上进行讨论。

为此，我们简要回顾 Mukai 关于 K3 曲面同源和扭曲导出等价的理论。更多详情请参见 [26, 第 16 节。4] 以及 [27]。回忆托雷利定理：该定理指出， $X$ 和 $Y$ 上的 K3 曲面 $\mathbb{C}$ 同构，当且仅当存在霍奇等距 $H^2(X,\mathbb{Z}) \to H^2(Y,\mathbb{Z})$。更一般地， $X$ 和 $Y$ 上的 K3 曲面之间的霍奇同源是一个有理霍奇等距$H^2(X,\mathbb{Q}) \to H^2(Y,\mathbb{Q})$。注意，任何霍奇同源都会限制为 $\mathrm{NS}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cong H^{1,1}(X,\mathbb{Q}) \to H^{1,1}(Y,\mathbb{Q}) \cong \mathrm{NS}(Y) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$之间的同构，因此 $X$和 $Y$具有相同的皮卡秩。获得霍奇同源的一种方式是考虑层的模空间。 $X$ 的 Mukai 格是

$$\widetilde{H}(X,\mathbb{Z}) = H^0(X,\mathbb{Z}) \oplus H^2(X,\mathbb{Z}) \oplus H^4(X,\mathbb{Z})$$

配以 Mukai 配对 $v.w = v_2.w_2 - v_0.w_4 - v_4.w_0$，其中 $v_i.w_j$ 是 $H^*(X,\mathbb{Z})$ 中通常的杯积配对。对于 $v \in H(X,\mathbb{Z})$，用 $M_X(v)$ 表示 $X$ 上 Mukai 向量为.....的稳定层模空间 $\mathscr{E}$

$$v(\mathscr{E}) = \mathrm{ch}(\mathscr{E})\mathrm{Td}_X^{1/2} = (\mathrm{rk}(\mathscr{E}), c_1(\mathscr{E}), c_1(\mathscr{E})^2/2 - c_2(\mathscr{E}) + \mathrm{rk}(\mathscr{E})) = v.$$

若 $v^2 = 0$，则 $M_X(v)$ 也是一个 K3 曲面，见 [41,定理 1.4]。若 $M_X(v)$ 是精细模空间，则 $X$ 和 $M_X(v)$ 是 Fourier–Mukai 伙伴，其中 $X \times M_X(v)$ 上的泛层确定了有界导出范畴之间的 Fourier–Mukai 等价 $\mathrm{D^b}(X) \to \mathrm{D^b}(M_X(v))$。一般而言， $M_X(v)$ 不是精细模空间，而 $X$ 和 $M_X(v)$ 是扭曲 Fourier–Mukai 伙伴。事实上，$X \times M_X(v)$ 上的泛层是关于类 $\alpha \in \mathrm{Br}(M_X(v))$ 的 $p^*\alpha$-扭曲层，该类阻碍模空间成为精细模空间，其中 $p\colon X \times M_X(v) \to M_X(v)$ 是投影。这个万有扭曲层确定了一个扭曲 Fourier–Mukai 等价 $\mathrm{D^b}(X) \cong \mathrm{D^b}(M_X(v)\ \alpha)$，见 [13, 定理 1.3]。仿照 Mukai [41, 推论 6.5], , Huy- brechts [27, 第 1 节3] 利用万有扭曲层在 $H^2(X,\mathbb{Q}) \otimes H^2(M_X(v)\ \mathbb{Q})$ 中的陈特征，在 $X$ 与 $M_X(v)$ 之间构造霍奇同源，从而诱导出一个上同调对应关系。

回到 $X \subset \mathbb{P}^5$ 是三个二次曲面的完全交、并具有相应判别式 $Y \to \mathbb{P}^2$ 的情形，Mukai [39, 例 0.9], [40, 例 2.2] 表明， $Y = M_X(v)$ 是 $X$ 上稳定层的模空间，其 Mukai 向量为 $v = (2, H, 2)$。此外， $X \times Y$ 上的万有扭曲层诱导出等价 $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(X) \cong \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(Y, \alpha)$，其中 Brauer 类 $\alpha \in \mathrm{Br}(Y)[2]$ 可用二次曲面网明确地定义，见 [38, 第 3.2 节，引理 15], ; 而诱导的同源 $H^2(X, \mathbb{Q}) \to H^2(Y, \mathbb{Q})$ 确定了超越格的一个包含 $T_X \hookrightarrow T_Y$，其余核为 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$。这是 Mukai 在 8 次 K3 曲面 $X$ 与其 2 次判别式 K3 曲面 $Y$ 之间构造的同源，由此得到命题 2.2。

最后，我们给出一个条件，以确保 $\mathbb{Q}$ 上的 8 次 K3 曲面关于其判别式 K3 曲面是 Noether–Lefschetz 一般的。

**命题 2.3**。 设 $X \subset \mathbb{P}^5_{\mathbb{Q}}$ 是三个二次曲面的光滑完全交，其相应的判别式 $Y \to \mathbb{P}^2$ 是光滑的，并设 $Y_p \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{F}_p}$ 是 $Y$ 在良约化素数 $p > 2$ 处模 $p$ 的约化。若 $\rho(Y_p) = 2$， $Y_p \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{F}_p}$ 的分支轨迹含有一条三切线，而 $Y$ 的分支轨迹不含三切线，则 $\rho(X) = \rho(Y) = 1$。

证明。我们遵循 [19, 例 1.7], [24, 命题 5.3],和 [38, 命题 26] 中概述的策略，证明 $\rho(Y) = 1$，然后应用命题 2.2。事实上，根据命题 2.2 以及特化映射的单射性，我们有 $\rho(X) = \rho(Y) \leq 2$。为导出矛盾，假设 $\rho(X) = \rho\, Y = 2$。在这种情况下，$\mathrm{sp} : \mathrm{Pic}(Y) \to \mathrm{Pic}(Y_p)$ 的像具有秩 2，因而具有挠余核。根据引理 1.1，余核无挠，因此它为 0，从而 sp 是满射。

现在，三切线在 $Y_p$ 上的拉回分裂为两个不可约分支。令 $L$ 为其中一个分支的除子类，并令 $L' \in \mathrm{Pic}(Y)$ 为 $L$ 在 sp 下的一个提升。与 [19, Example 1.7] 中一样， $L$ 必须来自 $Y \to \mathbb{P}^2$ 分支轨迹的一条三切线，但根据假设，这样的三切线不存在，矛盾。□

为寻找满足命题 $X$ 关于 $\mathbb{Q}$的假设的显式 2.3对象，固定一个素数 $p$后，可以先遍历完全交 $X_p \subset \mathbb{P}^5_{\mathbb{F}_p}$，并检查相应的判别式双覆盖 $Y_p$ 是否存在三切线。然后，我们使用第 1 节中的技巧检查 $\rho(X_p) = 2$。经过若干次迭代后即可找到例子：

**例 2.4. </style}令 (**, $q_2, q_3$) $\subset \mathbb{P}^5$ 定义在 $\mathbb{F}_{47}$上，其中

$$
\begin{aligned}
q_1 = {} & 5x_0^2 + 6x_0x_1 + x_1^2 + 10x_0x_2 + 45x_1x_2 + x_2^2 + 6x_0x_3 \\
& + 45x_1x_3 + 45x_2x_3 + 37x_0x_4 + 39x_1x_4 + 39x_2x_4 \\
& + 2x_4^2 + 10x_0x_5 + 10x_1x_5 + 45x_2x_5 + 8x_4x_5 + 2x_5^2 \\
q_2 = {} & 43x_0^2 + 41x_0x_1 + 41x_0x_2 + 8x_1x_2 + 44x_2^2 + 2x_0x_3 \\
& + 39x_1x_3 + 5x_3^2 + 45x_0x_4 + 2x_1x_4 + 45x_2x_4 + 10x_3x_4 + 3x_4^2 \\
& + 43x_0x_5 + 6x_1x_5 + 2x_2x_5 + 2x_3x_5 + 10x_4x_5 + 3x_5^2 \\
q_3 = {} & 5x_0^2 + 45x_0x_1 + 46x_1^2 + 37x_0x_2 + 2x_1x_2 + 4x_2^2 + 2x_0x_3 \\
& + 8x_1x_3 + 6x_2x_3 + 42x_3^2 + 8x_0x_4 + 39x_1x_4 + 43x_2x_4 + 4x_3x_4 \\
& + 2x_1x_5 + 43x_2x_5 + 43x_3x_5 + 39x_4x_5 + 44x_5^2
\end{aligned}
$$

且 $(x_0 : \ldots : x_5)$ 是 $\mathbb{P}^5$上的齐次坐标。则 $X_{47}$ 是一个光滑完全交，其判别式 $Y_{47} \to \mathbb{P}^2$ 光滑，分支轨迹由以下表达式的消失定义

$$\begin{aligned}
&13u^6 + 43u^5v + 19u^4v^2 + 7u^3v^3 + 46u^2v^4 + 11uv^5 + 21v^6 + 43u^5w + 22u^4vw \\
&\quad + u^3v^2w + 27u^2v^3w + 17uv^4w + 41v^5w + 26u^4w^2 + 42u^3vw^2 + 33u^2v^2w^2 \\
&\quad + 46uv^3w^2 + 19v^4w^2 + 42u^3w^3 + 8u^2vw^3 + 34uv^2w^3 \\
&\quad + 17v^3w^3 + 41u^2w^4 + 32uvw^4 + 21v^2w^4 + 46uw^5 + 33vw^5 + 17w^6,
\end{aligned}$$

其中（$u:\ v:\ w$）是 $\mathbb{P}^2$ 的齐次坐标。判别式 $Y_{47}$ 有三切线 $V$（$u+32y+17w$），且 $\rho$（$X_{47}$）$=\rho$（$Y_{47}$）$=2$；我们利用定理1.2，通过计算 $Y_{47}$ 的韦伊多项式，验证其为

$$\begin{aligned}
&(t-47)^2(t^{20} - 15t^{19} - 2491t^{18} + 92778t^{17} + 2387929t^{16} - 34157767t^{15} - 6421660196t^{14} \\
&- 53896076645t^{13} + 27357648505002t^{12} + 95245146647044t^{11} - 49241740816521748t^{10} \\
&+ 210396528943320196t^9 + 1334965976145366643 62t^8 - 5809574155447428912 05t^7 \\
&- 1529079917713763289651 56t^6 - 1796668903313671865340583t^5 \\
&+ 2774570120688684694904528 89t^4 + 2381304964451940690322 4087082t^3 \\
&- 1412340634868996252284076212411t^2 - 1878679523740834637472214584 4335t \\
&+ 2766668711962335809450748011342401)。
\end{aligned}$$

有了这样的例子，我们可以选择随机提升 $X$ to $\mathbb{Z}$，然后使用 Gr¨obner 基算法，参见 [17, Algorithm 8], ，便可快速检验判别式双覆盖 $Y$ 是否存在定义在 $\mathbb{Q}$ 上的三切线。

**推论 2.5.** 设 $X = V(q_1,\ q_2,\ q_3) \subset \mathbb{P}^5_{\mathbb{Q}}$，其中

$$\begin{aligned}
q_1 &= -136x_0^2 - 464x_0x_1 - 140x_1^2 - 272x_0x_2 + 374x_1x_2 + x_2^2 + 288x_0x_3 + 186x_1x_3 \\
&\quad + 468x_2x_3 + 47x_3^2 - 292x_0x_4 - 196x_1x_4 + 274x_2x_4 - 188x_3x_4 + 237x_4^2 - 84x_0x_5 \\
&\quad + 386x_1x_5 + 562x_2x_5 - 282x_3x_5 - 274x_4x_5 - 139x_5^2 \\
q_2 &= 43x_0^2 + 88x_0x_1 + 141x_1^2 - 100x_0x_2 + 384x_1x_2 + 185x_2^2 - 280x_0x_3 - 8x_1x_3 \\
&\quad - 376x_2x_3 - 89x_3^2 + 562x_0x_4 + 190x_1x_4 + 562x_2x_4 + 104x_3x_4 + 144x_4^2 - 98x_0x_5 \\
&\quad - 182x_1x_5 - 468x_2x_5 + 190x_3x_5 - 84x_4x_5 - 44x_5^2 \\
q_3 &= 193x_0^2 - 2x_0x_1 + 234x_1^2 - 292x_0x_2 + 190x_1x_2 + 51x_2^2 + 2x_0x_3 - 180x_1x_3 \\
&\quad + 6x_2x_3 + 183x_3^2 + 8x_0x_4 + 274x_1x_4 + 184x_2x_4 + 286x_3x_4 + 470x_0x_5 - 280x_1x_5 \\
&\quad + 560x_2x_5 + 90x_3x_5 - 196x_4x_5 + 185x_5^2
\end{aligned}$$

那么 $X \subset \mathbb{P}^5$ 是定义在 $\mathbb{Q}$ 上、次数为 *8*、几何皮卡秩为 *1* 的光滑完全交 *K3* 曲面。

我们注意到，Elsen hans 和 Jahnel [18, §8] 给出了一个颇具吸引力的 K3 曲面实例，$Y \to \mathbb{P}^2$ 其定义在 $\mathbb{Q}$ 上，几何皮卡秩为 1，其六次分支曲线 $C \subset \mathbb{P}^2$ 是一个由线性形式构成的 $6\times6$ 矩阵的行列式；其模 5 约化光滑且有一条三切线。根据这些实例，并利用命题2.3，还可以得到定义在 $\mathbb{Q}$ 上的 8 次 K3 曲面，几何皮卡秩为 1。类似的实例可见 [38,§5。4]。

注记2.6。 注意，次数为 2 且其分支轨迹存在一条三切线的极化K3曲面的轨迹是一个 Noether–Lefschetz 除子$\mathcal{K}_2^{-2,\ 1} \subset \mathcal{K}_2$。特别地，由命题2.1，可知在 $\mathcal{K}_8$中，由极化K3曲面$X$ 组成的轨迹——这些曲面的次数为 8，且其射影模型是 $\mathbb{P}^5$ 中的三个二次曲面的光滑完全交，且其判别式 $Y \to \mathbb{P}^2$ 光滑并存在一条三切线——在 $\mathcal{K}_8^\circ$中是扎里斯基闭的。我们将在第4 节的证明中用到这一点，以证明 Noether–Lefschetz 一般 K3 曲面的集合在 $\mathcal{K}_8$ 中扎里斯基稠密。

## 3. Degree 6 Case

每个六次无基点非双曲型极化K3曲面（$X$， $H$）都是类型为 (2，3) 的完全交，位于 $\mathbb{P}^4$中，即二次超曲面与三次超曲面的完全交，见 [46, 定理 6。1]。要限制 $X$ 的几何皮卡秩，可以仿照 van Luijk 的策略， [53], 计算某个 $X_p$ 良约化素数处约化的韦伊多项式，并利用特化映射的单射性应用定理 1.2。为计算韦伊多项式，可以尝试对 $\mathbb{F}_{p^n}$进行点计数，取 $n = 1$，.....，12。然而，在 $\mathbb{P}^4$ 中枚举所有点的朴素点计数算法，其计算可行性已接近极限。理论上，存在 $p$-进算法来计算完全交的韦伊多项式；这些算法运用“凯莱技巧”将完全交转化为超曲面，然后使用 [12], ，但目前尚未公开实现。相反，秉承 [3, §3], 的思路，我们利用线性投影的几何性质来设计一种快速专用算法。

我们首先回顾：K3 曲面上任意满足 $L^2 = 2$ 的大且数值有效除子 $L$决定一个态射 $X \to \mathbb{P}^2$；只要 $(X, H)$ 不是单谷型，即不存在满足 $L.E = 1$ 与 $E^2 = 0$的除子 $E$，该态射便是一次吹下后接一个双覆盖。在后一种情形中，$(L - 2E)^2 = -2$ 且 $L.(L - 2E) = 0$，因此 $L$ 不是丰富的，并具有扎里斯基分解 $L = 2E + (L - 2E)$，其活动部分为 $2E$。特别地，由 $L$ 诱导的映射 $X \to \mathbb{P}^2$ 经由由 $E$ 诱导的椭圆纤维化 $X \to \mathbb{P}^1$ 以及一个维罗内塞嵌入 $\mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^2$分解，从而 $X \to \mathbb{P}^2$ 不是占优的，见 [37,第 5 节，附注]。反之，当由 $L$ 诱导的映射 $X \to \mathbb{P}^2$ 为占优时，任意满足 $L.C = 0$ 的 $(-2)$-曲线 $C \subset X$ 都会被吹下，且映射 $X \to \mathbb{P}^2$分解为一系列吹下 $X \to X_0$ 后接一个双覆盖 $X_0 \to \mathbb{P}^2$，见 [46, § 5] 或 [5, III.3]。由黎曼–赫尔维茨公式（并假设我们处于特征$\neq 2$），该双覆盖的分支轨迹必为一条六次曲线，且该曲线光滑当且仅当不存在被吹下的曲线。

有鉴于此，我们回顾完全交曲面 $\mathbb{P}^4$ 中含有一条直线的几何性质的如下简化。

**引理 3.1**。 设 $X \subset \mathbb{P}^4$ 是一个非退化的 $(a, b)$ 完全交曲面，其超平面截面为 $H$。如果 $X$ 的光滑点集包含一条直线 $L$，则从 $L$ 出发的投影限制为一个优势泛有限态射 $X \to \mathbb{P}^2$，其一般次数为$(a - 1)(b - 1)$，由 $H - L$ 的线性系诱导。

证明。 消解从 $L$ 出发的投影后，得到态射 $\phi : \mathrm{Bl}_L \mathbb{P}^4 \to \mathbb{P}^2$。由于 $L \subset X$是光滑点集中的光滑除子，严格变换与 $X$重合，从而得到嵌入 $X \subset \mathrm{Bl}_L \mathbb{P}^4$，并考虑其限制 $\phi|_X : X \to \mathbb{P}^2$。根据通过 $L$的平面来构造投影映射的方式，射影态射 $\phi|_X$ 对应于 $H - L$的线性系。投影的纤维是 $X$ 与包含 $L$的平面的剩余交。记

$X = X_a \cap X_b$ 是 $\mathbb{P}^4$ 中次数为 $a$ 和$b$的超曲面的完全交，则 $X_a$ 和 $X_b$ 与包含 $L$的平面 $P$ 的剩余交是次数分别为 $a-1$ 和 $b-1$的平面曲线 $C_{a-1}$，$C_{b-1} \subset P$。由于 $X$ 是非退化的，这两个次数均为正。因此，$\phi|_X\colon X \to \mathbb{P}^2$ 中对应于 $P$的纤维，是这些平面曲线的交$C_{a-1} \cap C_{b-1}$。在一般纤维上，这些平面曲线的交必为有限的（否则它们会有公共分支，进而 $X$ 将与 $\mathbb{P}^2$上的曲线丛双有理等价；但这不可能，因为 $X$ 是一个曲面），因此根据贝祖定理，该交是次数为$(a-1)(b-1)$的有限概形。□

对于六次 K3 曲面的情形，我们可以说得更多。

**引理 3.2.** 设 $X \subset \mathbb{P}^4$ 是一张含有一条直线 $L$ 的光滑六次 *K3* 曲面。从 $L$ 出发的投影 $X \to \mathbb{P}^2$ 是先吹下例外曲线，再作一个以六次曲线为分支曲线的有限平坦二重覆盖的复合映射。

证明。由引理 3.1，从 $X \to \mathbb{P}^2$ 出发的投影 $L$ 是占优的，并由 $H-L$ 的线性系诱导。由于 $(H-L)^2 = 6-2\cdot 1-2 = 2$ 且 $H-L$ 诱导一个占优映射 $X \to \mathbb{P}^2$，那么如前所述，它必定会吹下 $(-2)$ 曲线 $C$，使得 $(H-L).C = 0$，然后再作一个双覆盖，其分支曲线必为六次曲线。□

备注 3.3。我们指出，在模空间 $\mathcal{K}_6$ 中，次数为 6 的极化 K3 曲面 $(X,\ H)$ 里“含有一条直线”的轨迹，即存在一条不可约曲线 $L \subset X$，满足$H.L = 1$ 且 $L^2 = -2$，是 Noether–Lefschetz 除子 $\mathcal{K}_{6,1}^{-2}$。于是 $H-L$ 是有效的，且 $(H-L)^2 = 2$。此外，当且仅当 $(X,\ H)$ 既非单谷型也非超椭圆的，即不包含于 Noether–Lefschetz 除子 $\mathcal{K}_{6,1}^{0}$ 或$\mathcal{K}_{6,2}^{0}$ 中时，$H-L$ 无基点（且诱导的映射 $X \to \mathbb{P}^2$ 是一个双覆盖）。

因此，包含一条直线的六次 K3 曲面容许一个二次模型，在该模型上我们可以使用由 Elsenhans 和 Jahnel 在 Magma [8]中实现的高度优化的韦伊多项式计算算法。

然而，为了运用该算法，我们需要能够通过计算验证从直线作投影是双覆盖 $X \to \mathbb{P}^2$，并且需要计算出一个显式模型，即 $\mathbb{P}(1,1,1,3)$ 中加权次数为 6 的超曲面；或者，就我们的目的而言已经足够（见注记 3.11），至少显式计算出 $\mathbb{P}^2$ 中的六次分支曲线。为此，在相差一个线性变量替换的意义下，我们可以固定$L = V(x_0, x_1, x_2)$，其中 $(x_0\colon x_1\colon x_2\colon y_0\colon y_1)$ 是 $\mathbb{P}^4$ 的齐次坐标。假设 $X = V(f_2, f_3) \subset \mathbb{P}^4$ 包含 $L$，其中 $f_2$、$f_3 \in k[x_0, x_1, x_2, y_1, y_2]$ 分别是次数为 2 和 3 的齐次形式，则 $f_2$、$f_3$ 可以表示为

$$\begin{aligned} f_2 &= l_0 y_0 + l_1 y_1 + q \\ f_3 &= l_{00} y_0^2 + l_{01} y_0 y_1 + l_{11} y_1^2 + q_0 y_0 + q_1 y_1 + c \end{aligned} \tag{1}$$

其中 $l_0, l_1, l_{00}, l_{01}$ 和 $l_{11}$ 是齐次线性形式，$q, q_0, q_1$ 是齐次二次型，$c$ 是齐次三次形式，且它们都属于 $k[x_0, x_1, x_2]$。

**定理 3.4**。设 $k$ 是一个特征为 $\neq 2$ 的域，并设 $X \subset \mathbb{P}^4$ 是定义在 $k$ 上的光滑六次 *K3* 曲面，且包含一条直线 $L \subset \mathbb{P}^4$。采用 (1)中的记号，考虑以下对称矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & v^t \\ v & M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & l_0 & l_1 & q \\ l_0 & 2l_{00} & l_{01} & q_0 \\ l_1 & l_{01} & 2l_{11} & q_1 \\ q & q_0 & q_1 & 2c \end{pmatrix} \tag{2}$$

上的齐次形式，记 $g_6 = \det(A)$ 和 $g_3 = \det(M)$，并令 $D = V(g_6)$和 $C = V(g_3)$ 属于 $\mathbb{P}^2$。若 $D$ 光滑，则从 $L$ 作投影确定一个有限平坦二重覆盖 $\pi\colon X \to \mathbb{P}^2$，其分支轨迹 $D$ 与有节点三次曲线$C \subset \mathbb{P}^2$相切。

对于一般的系数选择，$X \subset \mathbb{P}^4$ 是光滑的，$D \subset \mathbb{P}^2$ 是光滑的，$C \subset \mathbb{P}^2$在远离 $D$处有一个节点，而 $C$ 与 $D$ 在9个不同的点相切。

注3.5。在给出证明之前，我们指出，霍奇理论预言存在一条9-切有理三次曲线，即一条有理三次曲线 $C \subset \mathbb{P}^2$ 与分歧六次曲线 $D$ 在9个点相切，它位于 $X$的双覆盖模型中。事实上，根据引理3.1，在包含一条直线$X$、$H$的六次极化K3曲面 $L$中，双平面模型（假设其存在）由线性系 $H - L$确定，并且我们在 $X$上得到次数为6和2的格极化

| $X$ | $H$ | $L$ |
|---|---|---|
| $H$ | 6 | 1 |
| $L$ | 1 | $-2$ |

| $X$ | $H-L$ | $L$ |
|---|---|---|
| $H-L$ | 2 | 3 |
| $L$ | 3 | $-2$ |

就模空间而言，从 $L$ 作投影确定了诺特–勒夫谢茨除子$\mathcal{K}_6^{-2,\,1} \dashrightarrow \mathcal{K}_{2\,3}^{-2,}$ 之间的双有理映射。最后我们看到，在双覆盖模型中，$L$在 $\mathbb{P}^2$ 中的像是一条有理三次曲线，它分裂为两个有理曲线分支$L$ 和3$(H - L) - L = 3H - 4L$，二者在 $L$.$(3H - 4L) = 11$ 个 $X$上的点相交。这11个点包括 $C$ 与 $D$ 的9个交点的原像，以及 $C$上节点的两个不同原像。

为证明定理 3.4，我们需要用到射影对偶的以下推论。回顾一下，方阵 $M$ 的矩阵伴随 adj( $M$)。

**引理 3.6**。设 $k$ 是一个特征为 $\neq 2$ 的域，$L \subset \mathbb{P}^n$ 是与 $v \in k^{n+1}$ 对偶的超平面。对于格拉姆矩阵为 $M$ 的光滑二次超曲面 $Q \subset \mathbb{P}^n$，$L$ 与 $Q$ 相切，当且仅当 $v^t \operatorname{adj}(M) v = 0$。

当 $n = 2$ 和 $Q$ 是 $\mathbb{P}^2$ 中两条不同直线的并时，$v^t \operatorname{adj}(M) v = 0$ 和 $v^t M v = 0$ 当且仅当 $L$ 是这两条直线之一。

我们还需要用到以下线性代数恒等式。

**引理 3.7**。设 $n \times n$ 是一个 $M$ 方阵，$v$ 是整环上长度为 $n$ 的列向量，则

$$v^t \operatorname{adj}(M) v = -\det \begin{pmatrix} 0 & v^t \\ v & M \end{pmatrix}$$

证明。回顾一下，adj($M$) 由 adj$(M)_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ji}$ 给出，其中 $M_{ij}$ 是 $M$ 的（$i$, $j$）余子式，即删去第 $i$ 行和第 $j$ 列后所得矩阵 $M$ 的行列式。沿第一行、再沿第一列对右侧的行列式作余子式展开，得到

$$\begin{aligned} -\det \begin{pmatrix} 0 & v^t \\ v & M \end{pmatrix} &= -\sum_{i=1}^{n} (-1)^i v_i \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} v_j M_{ji} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} v_i M_{ji} v_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} v_i \operatorname{adj}(M)_{ij} v_j = v^t \operatorname{adj}(M) v \end{aligned}$$

其中 $v^t = (v_1, \ldots\ldots, v_n)$。 □

定理 3.4 的证明。与引理 3.1 的证明一样，消解从$L$ 出发的投影得到态射 $\phi\colon\ \widetilde{\mathbb{P}}^4 = \mathrm{Bl}_L\,\mathbb{P}^4 \to \mathbb{P}^2$。记 $X = X_2 \cap X_3$ 为次数分别为 2 和 3 的超曲面 $X_2$、$X_3 \subset \mathbb{P}^4$，我们考虑严格变换$\widetilde{X}_2$、$\widetilde{X}_3 \subset \widetilde{\mathbb{P}}^4$。我们有 $\widetilde{\mathbb{P}}^4 \cong \mathbb{P}(\mathscr{E})$，其中 $\mathscr{E} = \mathscr{O}_{\mathbb{P}^2}^{\oplus 2} \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)$，参见 [15, 第 9.3 节。2], 与 $\phi\colon\ \mathbb{P}(\mathscr{E}) \to \mathbb{P}^2$ 与射影丛映射重合。齐次坐标（$y_0\colon\ y_1$）经由等同 $\widetilde{\mathbb{P}}^4 \cong \mathbb{P}(\mathscr{E})$ 对应于 $\mathscr{O}_{\mathbb{P}(\mathscr{E})}(1)$ 的整体截面的一组基。设 $z$ 为 $\mathscr{O}_{\mathbb{P}(\mathscr{E})}(1) \otimes \phi^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)$ 的一个非零整体截面。则 $z$ 在相差标量倍数的意义下是唯一的，因为

$$\begin{aligned} h^0(\mathbb{P}(\mathscr{E}), \mathscr{O}_{\mathbb{P}(\mathscr{E})}(1) \otimes \phi^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)) &= h^0(\mathbb{P}^2, \phi_*\mathscr{O}_{\mathbb{P}(\mathscr{E})}(1) \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}^2}(-1))) \\ &= h^0(\mathbb{P}^2, \mathscr{E}^\vee \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)) = 1 \end{aligned}$$

根据投影公式。因此，$(y_0 : y_1 : z)$ 构成 $\mathbb{P}^2$ 上 $\mathbb{P}(\mathscr{E})$ 的相对齐次坐标系。于是，$\widetilde{X}_2$ 和 $\widetilde{X}_3$ 可分别视为由整体截面消失所定义的 $\mathbb{P}(\mathscr{E})$ 的子概形

$$l_0 y_0 + l_1 y_1 + qz \quad \text{and} \quad l_{00} y_0^2 + l_{01} y_0 y_1 + l_{11} y_1^2 + q_0 y_0 z + q_1 y_1 z + c z^2,$$

$\mathscr{O}_{\mathbb{P}(\mathscr{E})}(2) \otimes \phi^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$ 和 $\mathscr{O}_{\mathbb{P}(\mathscr{E})}(3) \otimes \phi^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$。

这为考察引理 3.1 的证明提供了另一种方法。事实上，将 $\phi|_{\widetilde{X}_i}\colon\ \widetilde{X}_i \to \mathbb{P}^2$ 限制在 $\mathbb{P}(\mathscr{E})$ 上，可得一条次数为 $i-1$ 的相对平面曲线，由上述方程之一确定。由于 $L$ 是 $X$的光滑点集中的一个光滑除子，我们知道 $X$ 与其在 $\widetilde{\mathbb{P}}^4$中的严格变换重合，因此 $\widetilde{X}_2 \cap \widetilde{X}_3 \cong X$。于是，$\phi|_X : X \to \mathbb{P}^2$ 在点 $a \in \mathbb{P}^2$ 上方的纤维，是 $\phi_{\widetilde{X}_2}\colon\ \widetilde{X}_2 \to \mathbb{P}^2$ 和 $\phi_{\widetilde{X}_2}\colon\ \widetilde{X}_2 \to \mathbb{P}^2$在 $a$ 上方的纤维的交。当两个相对超曲面在 $a \in \mathbb{P}^2$ 处均平坦时，等价地说，齐次形式

$$l_0(a)y_0 + l_1(a)y_1 + q(a)z \quad \text{and} \quad l_{00}(a)y_0^2 + l_{01}(a)y_0y_1 + l_{11}(a)y_1^2 + q_0(a)y_0z + q_1(a)y_1z + c(a)z^2,$$

在（$y_0 : y_1 :\ z$）中不全为零时，纤维是 $\mathbb{P}(\mathscr{E}) \to \mathbb{P}^2$在 $a$ 上方的纤维中的一条直线与一条圆锥曲线的交集。即使其中一个相对超曲面（或两者）不平坦，$a$ 上方的纤维仍非空。特别地，态射$\phi|_X : X \to \mathbb{P}^2$ 是满射，并且在各个相对超曲面的非平坦纤维之外是一个双覆盖。

注意，$\phi_{\widetilde{X}_2}\colon\ \widetilde{X}_2 \to \mathbb{P}^2$ 在 $V(l_0, l_1, q) \subset \mathbb{P}^2$ 中的点上不平坦，而$\phi_{\widetilde{X}_3}\colon\ \widetilde{X}_3 \to \mathbb{P}^2$ 在 $V(l_{00}, l_{01}, l_{11}, q_0, q_1, c) \subset \mathbb{P}^2$中的点上不平坦。显然，对于一般系数，两个非平坦轨迹均为空。

在 $\widetilde{X}_2$ 和 $\widetilde{X}_3$ 均为平坦的轨迹上，二重覆盖 $\phi|_X\colon\ X \to \mathbb{P}^2$ 在且仅在 $X_2$ 的纤维（这是纤维平面中的一条直线）与 $X_3$ 的纤维（这是一个圆锥曲线）相切~时~分歧。因此，引理 3.6 表明，这发生在 $v^t\,\mathrm{adj}(M)v$的零点轨迹上，其中 $M$ 是（2）中的右下角 $3 \times 3$ 子矩阵，而 $v$ 是满足 $v^t = (l_0, l_1, q)$ 的向量。根据引理 3.7，这与（2）中矩阵 $A$ 的行列式的零点轨迹 $D \subset \mathbb{P}^2$ 相同。

现在，我们证明，如果 $D$ 光滑，则映射 $\phi|_X : X \to \mathbb{P}^2$ 是平坦的，因此是 $\mathbb{P}^2$ 的有限平坦二重覆盖，其分支轨迹为 $D$。根据雅可比公式，我们有

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\det(A) = \mathrm{tr}\left(\mathrm{adj}(A)\frac{\partial A}{\partial x_i}\right)$$

接下来我们将使用雅可比判别法证明：在 $\phi|_X$ 不平坦的点上方，$D$ 是奇异的；等价地，$\widetilde{X}_i \to \mathbb{P}^2$ 中至少有一个不

~ ~平坦，或者 $X_2$ （直线）的纤维是 $X_3$ 的纤维的一个分支（因此后者是若干条直线的并）。在 $\widetilde{X}_2$ 不平坦的点 $a \in \mathbb{P}^2$ 上， $A$ 的第一行和第一列恒为零，因此 adj($A$)至多只有 (1, 1) 项非零。但这一项乘以 $\frac{\partial A}{\partial x_i}$ 后得到零矩阵。同样，在 $\widetilde{X}_3$ 不平坦处， $A$ 的右下 $3 \times 3$ 块整个为零，这意味着 adj($A$)已经是零矩阵。在点 $a \in \mathbb{P}^2$ 上（由于我们正在检验光滑性，可以假设它是一个几何点），若 $X_3$ 是不同直线的并，其中一条是 $X_2$，则可在齐次坐标为 ($x$: $y$ : $z$) 的纤维平面中作变量替换，使得~ ~$X_3 = V(xy)$且 $X_2 = V(x)$。在这些变量下，引理 3.6 表明 $v^t = (1, 0, 0)$ 或~ ~$v^t = (0, 1, 0)$，此时 adj($A$)是零矩阵。若 $X_3$ 是双直线 $X_2$，则可在齐次坐标为 ($x$: $y$ : $z$) 的纤维平面中作变量替换，使得 $\widetilde{X}_3 = V(x^2)$且 $\widetilde{X}_2 = V(x)$且 $v^t = (1, 0, 0)$，此时 adj($A$)仍是零矩阵。因此，在所有情况下， $D$ 在 $a$处都是奇异的。这表明， $D$ 的光滑性蕴含双覆盖是平坦的，并且已经指出，此时分支轨迹将是 $D$。

至于 $D$ 与 $C$ 的交相切，这是关于在 $\mathbb{P}^2$ 中解消 9 个点以及矩阵 $A$ 在 (2) 中的形状的一条标准事实，参见 [7, 第 4 节。1]。可以直接验证 $C$ 有一个节点。

最后，在所有系数构成的空间中，所要求的光滑性和相交条件都是开条件，因此只需找出一个同时满足所有条件的实例，例如推论3.10 中的例子。 □

注 3.8。含有一条直线的六次 K3 曲面的二次模型的分支轨迹具有如下形式 $\det A$ 的对称行列式表示，其中 $A$ 是 (2) 中 $\mathbb{P}^2$ 上由齐次形式构成的 $4 \times 4$ 分次齐次矩阵，这表明它应当与含有一个平面的三次四维簇存在某种关系。事实上，矩阵 $A$ 确定了一个含有平面的三次四维簇 $Z \subset \mathbb{P}^5$ ；按 (1) 中的记号，其方程为 $f_3 + y_3 f_2 = 0$ ，其中 ($x_0$ : $x_1$ : $x_2$ : $y_1$ : $y_2$ : $y_3$) 是 $\mathbb{P}^5$ 上的齐次坐标。因此， $Z$ 在 (0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 1) 处奇异，并且一般而言，该奇点是一个普通二重点。与 [23, 第 4 节 2], 的情形一样，六次 K3 曲面 $X$ 出现在从节点出发的投影 $Z \dashrightarrow \mathbb{P}^4$ 的解消中，作为 $\mathbb{P}^4$ 中过该节点的直线轨迹。在此情形下， $Z$ 在节点处的切锥与 $\mathbb{P}^5$ 中二次超曲面 $V(f_2) \subset \mathbb{P}^4$ 上的射影锥重合。注意， $Z$ 还包含平面 $V(x_0, x_1, x_2) \subset \mathbb{P}^5$。因此，这些三次四维簇构成了 $\mathcal{C}_6 \cap \mathcal{C}_8$ 的一个分支，其中 $\mathcal{C}_6$、$\mathcal{C}_8 \subset \mathcal{C}$ 分别是在三次四维簇的（半稳定）模空间 $\mathcal{C}$ 中参数化具有节点和含有平面的三次四维簇的 Hassett 除子，参见 [23]。不过，这与 [50], 中所考察的 $\mathcal{C}_6 \cap \mathcal{C}_8$ 的另一分支不同，因为与之相关的次数为 2 的 K3 曲面的六次分支除子对非常一般的元素而言实际上是光滑的。我们记录如下事实：与含节点三次四维簇 $Z$ 相关的极限霍奇结构中，整型 (2, 2) 霍奇类格上的交形式具有格极化，

| $Z$ | $h^2$ | $P$ | $X$ |
|---|---|---|---|
| $h^2$ | 3 | 1 | 6 |
| $P$ | 1 | 3 | 1 |
| $X$ | 6 | 1 | 14 |

其中 $h^2$ 是超平面类的平方， $P$ 是平面类，而 $X$ 是六次 K3 曲面的类。

现在，我们利用上述结果，为有理数域 $\mathbb{Q}$上的六次 K3 曲面具有几何皮卡秩 1 建立充分条件。以下关于射影 K3 曲面具有几何皮卡秩 1 的一般判据，灵感来自 [19, 例 1。7],[24, 命题 5。3],以及 [38,命题 26]。

**定理 3.9.** 设 $X \subset \mathbb{P}^n_{\overline{\mathbb{Q}}}$ 为一个*K3* 曲面。假设 $X$ 在$\mathbb{Q}$上不含直线，并且对某个良约化素数 $p > 2$， $X_p$ 含有一条直线，且 $\rho(X_p) = 2$。则 $\rho(X) = 1$。

证明。 设 $H \in$NS$(X)$为超平面截面。为得出矛盾，假设 $X$ 的几何皮卡秩至少为2。若 $\rho(X) \geq 2$，则得到矛盾，因为sp：NS$(X) \to$NS$(X_p)$是单射，且我们假设 $\rho(X_p) = 2$。因此，我们可以假设 $\rho(X) = 2$。由于sp是单射，sp的像的秩同样为2，故余核的秩为0。然而，由引理1.1，余核是无挠的，因此必为0。从而sp是满射。

最后，设 $L$ 是 $X_p$ 上的一条直线。由于 sp 是满射，存在一个除子类 $L' \in$NS$(X)$，使得 sp$(L') = L$；但 sp 保持次数不变（即与 $H$ 的交数不变），因此 $L'$ 是 $X$ 上一条直线的类，这与我们的假设矛盾。□

我们指出，对于一个作为双覆盖的 K3 曲面 $X \to \mathbb{P}^2$，其上的“一条直线” $X$，即一个除子类 $L \in \mathrm{Pic}(X)$，满足 $H.L = 1$ 且 $L^2 = -2$，恰好是覆盖的分支除子上一条三切线之原像的一个分支。因此，可以将定理3.9 视为对任意次数的充分极化推广的起点，这一策略始于 [19, 例 1。7], 参见 [24, 命题 5。3], 针对次数为 2 的 K3 曲面。

为了构造一个具体例子，我们随机生成含有一条固定直线 $X_p$ 的$\mathbb{F}_p$ 六次K3曲面 $L \subset \mathbb{P}^4$，直到找到一个满足 $\rho(X_p) = 2$的曲面；我们通过从直线作投影计算韦伊多项式来验证这一点。然后，我们将$X_p$提升到 $X$ 上的 $\mathbb{Q}$，使得 $X$ 不含直线，再应用定理3.9。我们实施这一策略，得到如下结果。

**推论 3.10**。令 $X = V(f_2, f_3) \subset \mathbb{P}^4_{\mathbb{Q}}$ 其中

$$\begin{aligned} f_2 &= x_0^2 - 3x_0x_1 + 3x_1^2 + 5x_0x_2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 - x_0x_3 - 2x_1x_3 \\ &\quad - 3x_2x_3 - 5x_0x_4 + 5x_1x_4 + 47x_3^2 + 47x_4^2 \\ f_3 &= 2x_0^3 + 3x_0^2x_1 + 3x_0x_1^2 + x_1^3 - x_0x_1x_2 - 3x_1^2x_2 + 4x_0x_2^2 - 4x_1x_2^2 + 5x_2^3 \\ &\quad + 4x_0^2x_3 + x_0x_1x_3 + 5x_1^2x_3 + 4x_0x_2x_3 + 4x_1x_2x_3 - 3x_2^2x_3 + 4x_1x_3^2 - x_2x_3^2 \\ &\quad + 5x_0^2x_4 - 4x_0x_1x_4 + 2x_1^2x_4 + x_0x_2x_4 + 4x_1x_2x_4 - 2x_2^2x_4 \\ &\quad + 4x_0x_3x_4 - 3x_2x_3x_4 - x_0x_4^2 - x_1x_4^2 + 5x_2x_4^2, \end{aligned}$$

那么 $X$ 是一张几何皮卡秩为 *1* 的六次 *K3* 曲面。

证明。 我们构造这个例子，使得 $X_{47}$ 包含直线 $V(x_0, x_1, x_2)$。从这条直线作投影，并利用定理 3.4，我们得到双覆盖 $X_{47} \to \mathbb{P}^2$

其分支除子由 $g_6(u,\ v,\ w)$ 的零点给出

$$\begin{aligned}14u^6+36u^5v+40u^4v^2+2u^3v^3+38u^2v^4+40uv^5+26v^6+7u^5w+29u^4vw\\+12u^3v^2w+29u^2v^3w+2uv^4w+28v^5w+29u^4w^2+15u^3vw^2+12u^2v^2w^2\\+16uv^3w^2+11v^4w^2+40u^3w^3+31u^2vw^3+38uv^2w^3+26v^3w^3+35u^2w^4\\+10uvw^4+18v^2w^4+2uw^5+43vw^5+w^6\end{aligned}$$

其中（$u$: $v$ : $w$）是 $\mathbb{P}^2$ 的齐次坐标。使用 Magma 的算法，我们计算了双覆盖模型 $s^2=g_6(u,\ v,\ w)$ 的韦伊多项式，结果为

$$\begin{aligned}&(t-47)^2(t^{20}+35t^{19}+1410t^{18}+79524t^{17}-311469t^{16}+39037448t^{15}+5504280168t^{14}\\&-86233722632t^{13}-1013246240926t^{12}-6667160265293 08t^{11}-78339133117193690t^{10}\\&-1472775702603241372t^9-4944318430168024606t^8-9295318648715886259 28t^7\\&+1310639929468939962558 48t^6+2053335889501339274674952t^5\\&-3619004505246110471614602 9t^4+2041118540958806305990636035 6t^3\\&+7994380952088658031796657806 10t^2+4383585555395280820768500697 0115t\\&+2766668711962335809450748011342401)\end{aligned}$$

由于韦伊多项式除了（$t-47$）$^2$（来自超平面截面和直线）之外不含分圆根，定理 1.2 表明 $X_p$ 的几何皮卡秩为 2。

接下来，我们使用 Gr¨obner 基，对格拉斯曼流形 Gr(2，5）的每个舒伯特胞腔进行计算；该格拉斯曼流形参数化 $\mathbb{P}^4$ 中的直线，以验证 $X$ 在 $\mathbb{Q}$上不含直线，参见 [19]。最后，我们断定因此 $\rho(X)=1$ 成立，依据定理 3.9。□

注记 3.11。仅知道分支轨迹 $D\subseteq\mathbb{P}^2$ 只能把多项式 $g_6$确定到乘以一个单位。这不足以确定双覆盖 $X\to\mathbb{P}^2$ 的同构类，其分支轨迹为 $V(g_6)$，因为可能存在非平凡的二次扭曲。具体而言，双覆盖模型 $s^2=g_6$ 与 $s^2=\lambda g_6$ 可能不同，当 $\lambda$ 是基域中的非平方元时。事实上，不难找到例子，使得这些二次扭曲在某个有限域上的点数不同，因而彼此不同构。当然，在特征为 $\neq 2$的有限域上，并且对 $g_6$作一般选取时，至多只有一个二次扭曲。然而，由于任意两个二次扭曲在代数闭包上都同构，它们具有相同的几何皮卡秩。因此，虽然我们不知道哪一个扭曲给出原六次 K3 曲面的双平面模型，但这并不影响我们的论证。不过，经过一些试验后，我们相信双覆盖的正确模型是 $s^2=g_6$，其中 $g_6$ 如定理 3.4中所述。

## 4. Zariski density

在本节中，我们将证明定理1，并在此过程中简化 van Luijk 用来 [53, 证明定理 1。1]证明 4 次情况下的 Zariski 稠密性。请注意，与 van Luijk 不同，我们并不关心我们的 Noether– Lefschetz 一般K3曲面是否有无穷多个 $\mathbb{Q}$-点，不过这或许可以成为一个有趣的后续研究方向。

在次数 $d\leq 8$ 的情形下，可以构造出 $\mathcal{K}_d(\mathbb{Q})$ 的一个子集，其中包含 Noether–Lefschetz 一般 K3 曲面。每种情况下，这个子集的形式为 $T\cap U$，其中 $T$ 是集合

所有具有整模型且模 $p$ 约化为固定模型的 K3 曲面，并且 $U \subset \mathcal{K}_d$ 是一个扎里斯基开稠密子簇，由有限个 Noether–Lefschetz 除子的补集构成。

我们首先说明 Zariski 开集 $U \subset \mathcal{K}_d$。对于 $d = 2$，依照 Elsenhans 和 Jahnel [17, 18],，我们取 $U = \mathcal{K}_d \setminus \mathcal{K}_2^{-2,\,1}$ 为三切线轨迹的补集；对于 $d = 4$，依照 van Luijk [53],，我们取 $U = \mathcal{K}_4 \setminus \mathcal{K}_4^{-2,\,1}$ 为包含一条直线的四次 K3 曲面之除子的补集；对于 $d = 6$，我们取 $U = \mathcal{K}_d \setminus \mathcal{K}_{6\,1}^{-2,}$ 为包含一条直线的六次 K3 曲面之除子的补集；对于$d = 8$，我们取 $U$ 为 $\mathcal{K}_8$ 中 $\mathcal{K}_{8,\,2}^{0}$、$\mathcal{K}_{8\,1,}^{-2}$、$\mathcal{K}_{8}^{-2,\,2}$ 之并集的补集（它定义了开轨迹 $\mathcal{K}_8^{\circ}$，其中判别式 K3 曲面有定义且光滑，见命题 2.1），并且还取 $\mathcal{K}_8^{\circ} \to \mathcal{K}_2^{\circ}$ 下三切线轨迹 $\mathcal{K}_{2\,1,}^{-2}$ 的原像之补集。

现在我们证明，$T$ 在 $\mathcal{K}_d$中扎里斯基稠密。在所有情形下，将以下一般结果应用于 $d \le 8$上的单有理簇 $\mathcal{K}_d$ 即可得到这一结论。

**引理 4.1**。设 $X$ 是一个等维的 $\mathbb{Z}$-概形，其非空一般纤维 $X_{\mathbb{Q}}$的维数为 $n$，并固定 $X$ 的一个 $\mathbb{Q}$-点 $x$，它模素数 $p$约化为约化$X_p$ 上的一个 $\mathbb{F}_p$-点 $x_p$。假设存在一个主导有理映射 $f\colon \mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} \dashrightarrow X$，使得对于某个 $\mathbb{P}^n_{\mathbb{F}_p}$的 $\mathbb{F}_p$-点 $z_p$，有 $x_p = f(z_p)$。那么，$X_{\mathbb{Q}}$中约化模 $p$后得到 $x_p$ 的 $\mathbb{Q}$-点集合 $T$ 在 $X_{\mathbb{Q}}$中扎里斯基稠密。

我们认为，这一结论应可由关于单有理簇的某些弱逼近类型结果推出，尽管我们未能找到明确的参考文献。因此，我们给出引理 4.1 的直接证明。

证明。首先，我们对 $X = \mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}$ 证明该结果。反设存在一个闭真子簇 $V \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}$，其 $\mathbb{Q}$-点包含 $T$。不失一般性，我们可以假设 $V$ 的余维为 1，即对于某个次数为 $d$ 的齐次多项式 $g$，有 $V = V(g)$。对于任意素数 $q$，施瓦茨–齐佩尔引理（朗–韦尔界的一种弱形式）于是表明，$V_q$ 的 $\mathbb{F}_q$-点数至多为 $dq^{n-1}$；随着 $q$ 增大，该数会严格小于 $q^n + q^{n-1} + \cdots + 1$。因此，除有限多个素数 $q$ 外，至少存在一个不属于 $V_q$ 的 $\mathbb{F}_q$-点 $\mathbb{P}^n_{\mathbb{F}_q}$。

取一个这样的素数 $q \neq p$、一个这样的 $\mathbb{F}_q$-点 $y_q$，其中 $y_q$ 属于 $\mathbb{P}^n_{\mathbb{F}_q}$，并令 $y$ 是 $y_q$ 在 $\mathbb{P}^n_{\mathbb{Q}}$ 中的一个提升，使其为一个 $\mathbb{Q}$-点。现在考虑 $\mathbb{P}^n_{\mathbb{Q}}$ 的 $\mathbb{Q}$-点 $qx + py$，我们在包含 $x$ 和 $y$ 的某个仿射开片 $\mathbb{A}^n_{\mathbb{Q}}$ 中进行加法。由于 $qx + py$ 模 $p$ 化简为 $x_p$，我们有 $qx + py \in T$，因此它是 $V$ 的一个 $\mathbb{Q}$-点。然而，这与以下事实矛盾：$qx + py$ 模 $q$ 化简为 $y_q$；根据构造，它不包含在 $V_q$ 中。因此，$T$ 必须在 $\mathbb{P}^n_{\mathbb{Q}}$ 中扎里斯基稠密。

现在，假设我们有一个主导有理映射 $f\colon \mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} \dashrightarrow X$，使得 $x_p$ 提升为一个 $\mathbb{F}_p$-点 $z_p$。根据上述论证，$S$ 中模 $p$ 约化到$z_p$ 的 $\mathbb{P}^n_{\mathbb{Q}}$ 上的 $\mathbb{Q}$-点集合 $S$ 在 $\mathbb{P}^n_{\mathbb{Q}}$中扎里斯基稠密。但由于 $f$ 占优，稠密子集的像也是稠密的，因此我们得到 $f(S)$ 在 $X_{\mathbb{Q}}$ 中扎里斯基稠密。由于 $f(z_p) = x_p$，我们有 $f(S) \subseteq T$，因此 $T$ 在 $X_{\mathbb{Q}}$ 中也扎里斯基稠密。□

最后，我们可以给出主要结果的证明。

定理 *1* 的证明。对于 $d \le 8$，我们构造一个素数 $p$ 和一个光滑 K3 曲面$X_p$，其次数为 $d$，定义在 $\mathbb{F}_p$ 上，且几何皮卡秩为 2。对于 $d = 2$，Elsenhans 和 Jahnel 最先完成了这一工作 [17, 例 28(ii)], [18, 例 6.1(ii)，并给出了若干不同的

情形；对于 $d = 4$，这是 van Luijk [53, § 3] 最初研究的情形；对于 $d = 6$，我们使用推论 3.10 中的 K3 曲面（的约化）；对于 $d = 8$，Elsenhans 和 Jahnel 最先完成了这一工作 [18, § 8], 在 [38, §5. 还有另一个例子，此外我们在推论 2.4 中又给出了一个例子。在 $d \leq 6$ 的情形下，几何 Picard 群由极化和一条直线生成；而在 $d = 8$ 的情形下，同源判别式 K3 曲面的几何 Picard 群由极化和一条直线生成。对于 $d \leq 6$，取一个提升到 $\mathbb{Q}$ 且包含在开集 $U = \mathcal{K}_d \smallsetminus \mathcal{K}_{d\,1}^{-2}$ 中的提升，，也就是说，该曲面不含直线，这迫使该提升根据定理 3.9 具有几何皮卡秩 1。对于 $d = 8$，我们取一个提升到 $\mathbb{Q}$，使其同源判别式 K3 曲面包含在开集 $U = \mathcal{K}_2 \smallsetminus \mathcal{K}_{2\,1}^{-2}$ 中，，也就是说，不含三切线，这根据命题 2.3 迫使其几何皮卡秩为 1。

引理4.1 表明，提升集合 $X$ 到 $\mathbb{Q}$ 的 $X_p$ 在 $\mathcal{K}_d$中扎里斯基稠密，因为对于 $d \leq 8$，其中一般的极化K3曲面是完全交，我们有 $\mathcal{K}_d$ 在 $\mathbb{Z}$上存在一个整模型，该模型是单有理的，并且可表示为由定义在 $\mathbb{Z}$上的线性代数群对射影空间取商所得。这个 $\mathcal{K}_d$($\mathbb{Q}$的稠密子集与开子簇 $U$ 的交集在 $\mathcal{K}_d$ 中仍然稠密，且由 Noether–Lefschetz 一般的极化K3曲面组成。□

## References


1. Timothy G. Abbott、Kiran S. Kedlaya 和 David Roe, *Bounding Picard numbers of surfaces using p-adic cohomology* 2005 ´ , 《算术、几何与编码理论》（AGCT），《法国数学学会研讨会论文集》，第 21 卷，法国数学学会，巴黎，2010 年，第 125–159 页。2. Valery Alexeev 和 Philip Engel, *On lattice-polarized K3 surfaces*, arXiv:2505.22557, 即将在《斯捷克洛夫数学研究所论文集》发表，2025 年。3. Asher Auel 和 Nicolas Addington, *Some non-special cubic fourfolds*, 《数学文献》23（2018），637–651。4. Asher Auel、Marcello Bernardara 和 Michele Bolognesi, *Fibrations in complete intersections of quadrics Clifford algebras derived categories and rationality problems* , , , , 《纯粹与应用数学杂志》102（2014），249–291。5. Wolf P. Barth、Klaus Hulek、Chris A. M. Peters, 以及 Antonius Van de Ven, *surfaces* 4, 2004 *Compact complex* , 《数学与相关领域成果》，施普林格出版社，第 卷，。6. Arnaud Beauville, *Variétés de Prym et jacobiennes intermédiaires*, 《高等师范学校科学年刊》 ´Ecole Norm. Sup.（第 4 辑）10（1977），第 3 期，309–391。7. Arnaud Beauville, *Determinantal hypersurfaces*, 《密歇根数学杂志》48（2000），39–64。8. Wieb Bosma、John Cannon 和 Catherine Playoust, *The Magma algebra system. I. The user language* **24** 1997 3 4, 235 265, , 《符号计算杂志》（），第 - 期 – 计算代数与数论（伦敦，1993）。9. Emma Brakkee, *Open questions about K3 surfaces & friends*, 2025 年在 Lorentz 中心举办的研讨会“K3 曲面与朋友：Brauer 群与模空间”上的开放问题讨论会（链接）。10. Fran˙cois Charles, *The Tate conjecture for K3 surfaces over finite fields*, 《数学发明》194（2013），第 1 期，119–145。11. , *Birational boundedness for holomorphic symplectic varieties Zarhin's trick for K3 surfaces and the Tate conjecture* 2 **184** 2016 2, 487 526 , , , 《数学年刊》（）（），第 – 期。12. Edgar Costa、David Harvey 和 Kiran S. Kedlaya, *Zeta functions of nondegenerate hypersurfacesin toric varieties via controlled reduction in p-adic cohomology*, 《第十三届算法数论研讨会论文集》，《开放图书丛书》第 2 卷，数学科学出版社，加利福尼亚州伯克利，2019 年，第 221–238 页。13. Andrei C˘ald˘araru, *Nonfine moduli spaces of sheaves on K3 surfaces*, 《国际数学研究通知》（2002），第 20 期，1027–1056。14. Igor Dolgachev, *Mirror symmetry for lattice polarized K3 surfaces* **81** 1996 3, , 《数学科学杂志》2599 2630 （），第 – 期。15. David Eisenbud 和 Joe Harris, *3264 and all that: A second course in algebraic geometry*, 剑桥大学出版社，2016 年。

16. Jordan S. Ellenberg, *K3 surfaces over number fields with geometric Picard number one*, 《高维代数簇算术》（Bjorn Poonen 和 Yuri Tschinkel 编），波士顿比尔克豪泽出版社，2004 年，第 135–140 页。17. Andreas-Stephan Elsenhans 和 J¨org Jahnel, *K3 surfaces of Picard rank one and degree two*, 《算法数论：第八届国际研讨会 ANTS-VIII》，《计算机科学讲义》，第 5011 卷，施普林格，柏林，2008 年，第 212–225 页。18. Andreas-Stephan Elsenhans 和 J¨org Jahnel, *K3 surfaces of Picard rank one which are double covers of the projective plane*, 《有限域上的高维几何》。北约高级研究所会议论文集，会议于 2007 年 6 月 25 日至 7 月 6 日在德国哥廷根大学举行，阿姆斯特丹：IOS出版社，2008 年，第 63–77 页。19. Andreas-Stephan Elsenhans 和 J¨org Jahnel, *The Picard group of a K3 surface and its reduction modulo p*, 《代数与数论》（），第 **5** 卷，2011 年，第 8, 1027–1040 – 期。20. William Fulton, *Intersection theory, 2nd edition*, 施普林格出版社，1998 年。21. Francois Greer、Zhiyuan Li 和 Zhiyu Tian, *Picard groups on moduli of K3 surfaces with Mukai models*, 《国际数学研究通知》（），第 **2015** 卷，2014 年，第 16, 7238–7257 – 期。22. V. Gritsenko、K. Hulek 和 G. K. Sankaran, *Moduli of K3 surfaces and irreducible symplectic manifolds*, 《模空间手册》第 I 卷，《高级讲义数学丛书》（ALM），第 24, 卷，国际出版社，马萨诸塞州萨默维尔，2013 年，第 459–526 页。23. Brendan Hassett, *Special cubic fourfolds*, 《数学汇刊》120（2000），第 1 期，1–23。24. Brendan Hassett 和 Anthony V´arilly-Alvarado, *Failure of the Hasse principle on general K3 surfaces*, 《朱西厄数学研究所杂志》（），第 **12** 卷，2013 年，第 4, 853–877 – 期。25. Brendan Hassett、Anthony V´arilly-Alvarado 和 Patrick Varilly, *Transcendental obstructions to weak approximation on general K3 surfaces*, 《数学进展》（），第 **228** 卷，2011 年，第 3, 1377–1404 – 期。26. Daniel Huybrechts, *Lectures on K3 surfaces*, 《高级数学》，第 158 卷，大学出版社，2016 年。27. Daniel Huybrechts, *Motives of isogenous K3 surfaces*, 《瑞士数学评论》（），第 **94** 卷，2019 年，第 3, 445–458 – 期。28. Kazuhiro Ito、Tetsushi Ito 和 Teruhisa Koshikawa, *CM liftings of K3 surfaces over finite fields and their applications to the Tate conjecture*, 《数学论坛 Sigma》（），论文编号 e，第 **9** 卷，2021 年，第 29 – 期。29. Kiran S. Kedlaya, *Counting points on hyperelliptic curves using Monsky–Washnitzer cohomology*, 《拉马努金数学会杂志》16（2001），第 4 期，323–338。30. Wansu Kim 和 Keerthi Madapusi Pera, *2-adic integral canonical models*, 《数学论坛 Sigma》4（2016），论文编号 e28。31. Remke Kloosterman, *Elliptic K3 surfaces with geometric Mordell-Weil rank 15*, 《加拿大数学通报》50（2007），第 2 期，215–226。32. Alexander Kuznetsov, *Derived categories of quadric fibrations and intersections of quadrics*, 《数学进展》218（2008），第 5 期，1340–1369。33. Keerthi Madapusi Pera, *The Tate conjecture for K3 surfaces in odd characteristic*, 《数学发明》201（2015），第 2 期，625–668。34. , *Erratum to appendix to “2-adic integral canonical models”*, 《数学论坛 Sigma》8（2020），论文编号 e14。35. Davesh Maulik, *Supersingular K3 surfaces for large primes*, 《杜克数学杂志》（），第 **163** 卷，2014 年，第 13, 2357–2425, – 期，附有 Andrew Snowden 撰写的附录。36. Davesh Maulik 和 Bjorn Poonen, *Néron-Severi groups under specialization*, 《杜克数学杂志》161（2012），第 11 期，2167–2206。37. Alan Mayer, *Families of K-3 surfaces*, 《名古屋数学杂志》48（1972），1–17。38. Kelly McKinnie、Justin Sawon、Sho Tanimoto 和 Anthony V´arilly-Alvarado, *Brauer groupson K3 surfaces and arithmetic applications*, 《布劳尔群与障碍问题：模空间与算术》（Asher Auel、Brendan Hassett、Anthony V´arilly-Alvarado 和 Bianca Viray 编），施普林格国际出版，2017 年，第 177–218 页。39. Shigeru Mukai, *Symplectic structure of the moduli space of sheaves on an abelian or K3 surface*, 《数学发明》77（1984），第 1 期，101–116。40. , *Moduli of vector bundles on K3 surfaces and symplectic manifolds*, 《数学》¯ugaku 39（1987），第 3 期，216–235；《数学展望》1（1988），第 2 期，139–174。41. , *On the moduli space of bundles on K3 surfaces. I*, 《代数簇上的向量丛》（孟买，1984），塔塔基础研究所数学研究丛书，第 11 卷，塔塔基础研究所，孟买，1987 年，第 341–413 页。

42. Niels Nygaard 和 Arthur Ogus, *Tate's conjecture for K3 surfaces of finite height*, 《数学年刊》（第2辑）122（1985），第3期，461–507。43. Kieran O'Grady, *Moduli of abelian and K3 surfaces*, 博士论文，布朗大学，1986年。44. Martin Orr 和 Alexei N. Skorobogatov, *Finiteness theorems for K3 surfaces and abelian varieties of CM type* **154** 2018 8, 1571 1592 , 《组合数学》（），第–期。45. Martin Orr、Alexei N. Skorobogatov 和 Yuri G. Zarhin, *On uniformity conjectures for abelian varieties and K3 surfaces* **143** 2021 6, 1665 1702 , 《美国数学杂志》（），第–期。46. Bernard Saint-Donat, *Projective models of K-3 surfaces*, 《美国数学杂志》96（1974），602–639。47. Henry Scheible, *Sextic K3 surfaces with geometric Picard number 1*, 达特茅斯大学数学系海报展示会，2025年6月（链接）。48. Igor R. Shafarevich, *On the arithmetic of singular K3-surfaces*, 《国际切博塔廖夫百年纪念会议论文集》，会议于俄罗斯喀山举行，1994年6月5日至11日（M. M. Arslanov、A. N. Parshin 和 I. R. Shafarevich 编），德古意特出版社，1996年，第103–108页。49. Pawel Sosna, *Derived categories and scalar extensions*, 博士论文，波恩大学，2010年。50. Paolo Stellari, *Singular cubic fourfolds containing a plane*, 《数学》（卡塔尼亚）58（2003），第2期，277–305。51. Tomohide Terasoma, *Complete intersections with middle Picard number* 1 *defined over* 有理数域, 《数学杂志》189（1985），第2期，289–296。52. Ronald van Luijk, *An elliptic K*3 *surface associated to Heron triangles*, 《数论杂志》123（2007），第1期，92–119。53. , *K3 surfaces with Picard number one and infinitely many rational points*, 《代数与数论》1（2007），第1期，1–15。54. Anthony V´arilly-Alvarado, *Arithmetic of K3 surfaces*, 《非闭域上的几何》，西蒙斯专题研讨会，施普林格出版社，Cham，2017年，第197–248页。

Department of Mathematics, Dartmouth College, Kemeny Hall, Hanover, New Hampshire, *E-mail address:* asher.auel@dartmouth.edu

Department of Mathematics, Dartmouth College, Kemeny Hall, Hanover, New Ham pshire, *E-mail address:* henry.j.scheible.26@dartmouth.edu