超扩散输运在 FitzHugh–Nagumo 动力学中诱导的非经典图灵不稳定性

Rossella Rizzo[1] Gaetana Gambino[2] Vincenzo Sciacca[2] Marco Sammartino[1]

[1]巴勒莫大学工程系，Viale delle Scienze，Ed. 8，巴勒莫，90128，意大利[2]巴勒莫大学数学系，Via Archirafi 34，巴勒莫，90123，意大利

arXiv:2603.03254v1 [nlin.PS] 3 Mar 2026

摘要

我们研究具有超扩散输运的 FitzHugh–Nagumo 反应扩散系统中的扩散驱动不稳定性；该系统采用分数阶拉普拉斯算子建模，激活剂和抑制剂具有不同的扩散阶数。

线性稳定性分析得出了不稳定性阈值和临界波数的显式表达式，并表明超扩散会改变不稳定模态的波数带以及新兴模式的特征空间尺度。我们表明，阈值仅取决于分数阶指数之比和动力学参数，而空间尺度则由扩散阶数和区域大小控制。

当扩散阶数不同时，由于扩散速率、反常标度与系统尺寸的共同作用，即使在激活剂扩散速度快于抑制剂的条件下，也可能出现空间不稳定性。这会导致偏离经典激活剂–抑制剂框架的不稳定机制。

在阈值附近进行弱非线性分析，可得到支配非线性饱和的振幅方程，并揭示超扩散会促进亚临界行为。我们还分析了图灵–霍普夫余维二点附近定常不稳定性与振荡不稳定性之间的相互作用。所有解析结果均得到数值模拟的支持。

1 引言

本文研究超扩散输运对FitzHugh–Nagumo 反应扩散系统中扩散驱动不稳定性的影响，尤其关注激活剂和抑制剂具有不同分数阶扩散阶数时所起的作用。我们的目标是评估非局部输运机制如何改变这一典型激活剂–抑制剂模型中空间不稳定性的发生及其非线性发展。

FitzHugh–Nagumo（FHN）模型最初由 FitzHugh FitzHugh[1960] 提出，随后Nagumo等人 Nagumo 等人 [1962]将其验证为 Hodgkin–Huxley 方程的二变量简化模型，用于描述神经膜兴奋性。由于兼具数学上的简洁性和动力学的丰富性，FHN系统已成为可兴奋介质的经典模型，并被广泛用于描述许多现象，包括神经元和心脏兴奋性、化学反应以及其他生物和物理系统 Cebrián-Lacasa等人 [2024]。根据参数值的不同，FHN型方程能够再现兴奋性、振荡和双稳态等定性迥异的状态 Métens等人 [1997], Gambino等人 [2024]。此外，FHN模型及其密切相关的激活剂–抑制剂系统也被用于描述生态系统中的捕食者–猎物动力学 Medvinsky等人 [2002], Biktashev and Tsyganov [2005], Truscott and Brindley [1994]。

在许多复杂或非均质介质中，经典（Fickian）扩散往往不足以描述输运过程，而以非高斯统计或长程跳跃为特征的反常扩散变得相关 Klafter 等 [1987], Metzler 和 Klafter [2000]。分数阶导数提供了一个有效且被广泛使用的框架，用以编码这些非局部

空间或时间上的效应，因此分数阶反应–扩散系统已成为一种强大的建模工具，用于生物组织、多孔材料及神经介质中的反常输运 Metzler 和 Klafter [2000], Golovin 等 [2008], Iqbal 等 [2017], Khudhair 等[2022]。

1.1 反常扩散与分数阶导数

经典扩散的特征是均方位移$\langle(\Delta\mathbf{x}(t))^2\rangle \propto t$呈线性增长。相比之下，反常扩散的特征是更一般的标度关系：

$$\langle(\Delta\mathbf{x}(t))^2\rangle \propto t^{\alpha}, \qquad \alpha \in (0,2], \tag{1}$$

其中， α 为反常扩散指数。当 $0 < \alpha < 1$ 时，称为亚扩散；当 $1 < \alpha < 2$时，称为超扩散 [1987],Klafter 等 [2000],Metzler 和 Klafter [2008], Golovin 等 [2016], Alves 等 [2017] Iqbal 等。对于 $\alpha = 1$ ，可恢复正常扩散，而 $\alpha = 2$ 对应弹道运动。这两种状态在物理、化学、生物和地质系统中都发挥着重要作用。亚扩散通常出现在具有较长等待时间的系统中，例如多孔介质或拥挤的生物环境中的输运 Amblard 等 [1996], Drazer 和 Zanette [1999], Weiss [2003], ；而超扩散与远距离跳跃有关，例如可见于等离子体、湍流和半导体中的电荷载流子输运 Solomon 等 [1993],Carreras 等 [2001],Toner 等 [2005],Zhu 等 [2009], Marschall [2014]。莱维飞行是超扩散的典型例子 Metzler 和 Klafter [2000, 2004], Uchaˇ ıkin [2013]。

在宏观层面，经典扩散由标准拉普拉斯算子$\Delta = \partial_{xx} + \partial_{yy} + \partial_{zz}$描述。另一方面，物质 u 的莱维飞行由分数阶拉普拉斯算子 $\Delta^{\mu/2} \equiv \nabla^{\mu}$描述，其在傅里叶空间中的定义为：

$$\Delta^{\mu/2} u = \mathcal{F}^{-1}\left[-|\mathbf{k}|^{\mu}\,\mathcal{F}[u]\right], \tag{2}$$

其中 $\mathcal{F}$ 表示傅里叶变换，$\mathcal{F}^{-1}$ 表示其逆变换，而 $0 < \mu \le 2$ Metzler 和 Klafter[2000], Golovin 等 [2008], Iqbal 等 [2017],Khudhair 等 [2022]。

一类特殊的超扩散过程（如莱维飞行）对应于跳跃长度分布具有无限二阶矩的随机游走，因此其均方位移在形式上发散。尽管如此，通过引入适当的截断，或基于分数阶矩进行标度论证，可以定义伪均方位移，用以表征该过程的典型扩散范围 Bouchaud 和 Georges [1990], Shlesinger 等 [1993], Fogedby [1994], Klafter 等 [1996],Metzler 和 Klafter [2000]。本文聚焦于超扩散区制 $1 < \mu \le 2$，在此区制下，典型位移按如下方式标度：$|\mathbf{x}(t)|_{\mathrm{typ}} \sim t^{1/\mu}$ ，伪均方位移则按如下方式标度： $t^{2/\mu}$。由于跳跃长度分布满足 $P(|Y| > r) \sim r^{-\mu}$， μ 值越小，尾部越重，发生长跳跃的概率也越高。

1.2 反应–扩散系统中的超扩散

近二十年来，在反应–扩散系统中引入反常或超扩散输运引起了广泛关注，其动机在于需要描述嵌入复杂或非均匀环境中的斑图形成系统，而在这些环境中，长程输运过程不可忽略 Gafiychuk 和 Datsko [2008, 2010], Golovin 等 [2008], Zhang 和 Tian [2014], Iqbal 等 [2017], Khudhair 等 [2022]。在此背景下，分数阶扩散算子为模拟空间扩展系统中的非局部输运机制提供了自然框架。

超扩散输运的存在会改变经典反应–扩散模型的线性稳定性和非线性斑图选择机制。尤其是，由于分数阶扩散会改变短程与长程相互作用之间的平衡，

它会显著影响扩散驱动不稳定性所依据的标准激活剂–抑制剂范式。

已有多项研究在特定情境下探讨了这些想法。Golovin 等 Golovin 等 [2008] 分析了一个分数阶 Brusselator 模型，并表明，即使抑制剂的扩散速度低于激活剂，只要其扩散指数更高，也可能发生扩散驱动不稳定性。Zhang 和 Tian Zhang 和 Tian [2014] 以及 Iqbal 等 Iqbal 等 [2017] 主要通过数值方法研究了假设两种物种具有相同扩散指数的分数阶 FitzHugh–Nagumo 系统。Khudhair 等 Khudhair 等 [2022] 在同样假设扩散阶数相等的条件下，研究了分数阶 Schnakenberg 系统中的图案形成。数值延拓研究还表明，分数阶扩散能够改变非线性偏微分方程中的分岔结构 Ehstand 等 [2021]

关于 Lévy 型扩散的大多数科学研究兴趣，源于其刻画复杂系统中有效长程输运的能力。典型例子包括大尺度脑网络中的神经通信，其特点是高度非局部的突触连接；以及生态系统中由觅食策略或捕食者–猎物相互作用驱动的优先位移 Viswanathan 等 [1996, 1999], Sims 等 [2014]。

尽管动作电位沿轴突局部传播，但神经网络中存在远距离突触连接，因此，活动在神经群体间的有效传播可能呈现出类似长跳跃过程的特征。

当资源稀缺或随机分布时，Lévy 行走也被广泛假设为一种最优搜索策略，这一假设得到了关于蜜蜂、信天翁、鹿 Viswanathan 等 [1996, 1999], 以及海洋捕食者 Levandowsky 等 [1988], Sims 等 [2008, 2014]的实证研究支持。从进化角度看，在猎物稀少的环境中，类似 Lévy 行走的策略能提高遭遇率；而在猎物丰富的条件下，布朗运动效率更高 Viswanathan 等 [1999],Sims 等 [2008]。

Levandowsky 等 Levandowsky 等 [1988] 提出，在稀疏环境中，采用服从 Lévy 分布的步长是微型浮游动物觅食的最优策略；而 Viswanathan 等 Viswanathan 等 [1996, 1999] 和 Sims 等 Sims 等 [2008]报告称，在昆虫、哺乳动物、鸟类和海洋捕食者中，飞行距离分布呈幂律，且表现出类似 Lévy 行走的行为。最近，化石轨迹分析在灭绝海洋物种中发现了 Lévy 型搜索模式的迹象 Sims 等 [2014]。

尽管取得了这些进展，但对于激活剂和抑制剂具有不同超扩散阶数的 FitzHugh–Nagumo 系统，其扩散驱动不稳定性的系统性解析理解仍然缺乏。特别是，关于不稳定性阈值、临界波数以及模式非线性饱和的显式解析结果仍付阙如。此外，反常输运在多大程度上能够改变经典激活剂–抑制剂范式，目前也只得到了部分探索。

1.3 概述和主要结果

本文分析具有分数阶输运和异质扩散阶数的 FitzHugh–Nagumo 系统中的扩散驱动不稳定性。

我们首先推导不稳定性阈值和临界波数的显式解析表达式。我们证明，当扩散阶数不同时，阈值仅取决于它们的比值和动力学参数，而与各自的具体数值无关。这一性质为反常反应–扩散系统中的不稳定性状态分类提供了自然框架。

随后，我们证明分数阶输运能够产生非经典的不稳定性机制。具体而言，即使在激活剂扩散速度快于抑制剂的情况下，也可能出现空间不稳定性，这是扩散速率、反常标度和区域大小相互作用的结果。这种行为偏离了经典的短程激活与长程抑制范式。

接下来，我们在不稳定性阈值附近进行弱非线性分析，并推导相应的振幅方程。我们表明，超扩散会显著影响非线性饱和，并系统性地促使系统呈现亚临界行为，从而增强有限振幅效应。

最后，我们分析图灵–霍普夫余维二点附近定常不稳定性与振荡不稳定性之间的相互作用，并刻画由此产生的时空动力学。

所有分析结果均通过数值模拟得到验证。

本文结构安排如下。第 2 节介绍全文研究的分数阶FitzHugh–Nagumo系统，并明确相关符号。第 3 节分析均匀FitzHugh–Nagumo系统，对参数空间中的不同动力学状态进行分类；随后研究空间扩展系统的线性稳定性，并推导扩散驱动不稳定性发生的条件。第 5 节在图灵阈值附近进行弱非线性分析，并推导相应的振幅方程。第 6 节研究余维二图灵–霍普夫分岔点附近的动力学。最后，第 7 节讨论研究结果，并展望未来工作。

2 分数阶FHN模型

我们考虑一个在一维空间区域 $\Omega = [0, \ell]$ 中与超扩散输运耦合的广义FHN系统：

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = U(B - AU^2) - CV + EUV + D_U \, \partial_{\tilde{x}}^{\alpha_1} U, \tag{3}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} = FU - GV - H + D_V \, \partial_{\tilde{x}}^{\alpha_2} V. \tag{4}$$

该系统同时满足给定的初始条件和周期边界条件。

为推导该系统的无量纲形式，我们引入以下无量纲变量：

$$\tilde{t} = \frac{\ell^{\alpha_1}}{D_U}\tau, \quad \tilde{x} = \ell x, \quad \tilde{u} = \sqrt{\frac{B}{A}}, \quad \tilde{v} = \frac{B}{C}\sqrt{\frac{B}{A}}, \tag{5}$$

从而得到以下无量纲形式：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Gamma(u(1 - u^2) - (1 - \beta u)v) + \partial_x^{\alpha_1} u, \tag{6}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \Gamma(\varepsilon(\gamma u - v - a)) + d\partial_x^{\alpha_2} v. \tag{7}$$

无量纲参数定义为

$$\begin{aligned} &\Gamma = \frac{B\ell^{\alpha_1}}{D_U}, \quad \beta = \frac{E}{C}\sqrt{\frac{B}{A}}, \quad \varepsilon = \frac{G}{B}, \\ &\gamma = \frac{FC}{BG}, \quad a = \frac{HC}{BG}\sqrt{\frac{A}{B}}, \quad d = \frac{D_V}{D_U}\ell^{\alpha_1 - \alpha_2}. \end{aligned} \tag{8}$$

在系统（6）–（7）中，$u(x,\ t)$和 $v(x,\ t)$分别表示激活剂和抑制剂物种，常数 α_1 和 α_2 表示与各物种相关的分数扩散指数。在本文中，我们聚焦于超扩散区制，并假设

$$1 < \alpha_i \leq 2, \qquad i = 1, 2. \tag{9}$$

当 $\alpha_1 = \alpha_2 = 2$时，该系统简化为具有标准扩散的经典FHN模型 Gambino等人 [2019]。如果 $\alpha_1 = \alpha_2$，参数 d 表示 v 和 u的扩散系数之比。在更一般的情况下 $\alpha_1 \neq \alpha_2$，由于扩散算子的不同尺度行为，参数 d 还取决于空间区域的大小。

参数 ε 表示两种物种特征时间尺度之比，而γ 和 a 控制零倾线交点的数量和位置。参数 $\beta \in \mathbb{R}$打破了系统在变换 $(u \to -u,\ v \to -v,\ a \to -a)$ 下的对称性，参见 Dewel 等人 [2001], Bachir等人 [2001], Borckmans等人 [2002], Tlidi等人 [2012]。我们选择 $|\beta| < 1$，使经典 FHN u–零倾线保持其典型形状，不会受到相平面中垂直渐近线 $u = 1/\beta$ 的显著影响 $(u,\ v)$。在此条件下，若 $\beta > 0$，渐近线位于三次曲线右侧；若 $\beta < 0$，则位于其左侧。

在本文其余部分中，按照已有文献的做法 Dewel 等人 [2001], Bachir等人 [2001], Borckmans等人 [2002], Tlidi等人 [2012], ，我们将范围限定为 $0 \leq \beta < 1$。对 $-1 < \beta \leq 0$ 的分析与此类似，并会得出相近的结果。参数 $\Gamma > 0$ 量化反应项的强度，并取决于区域大小。除 a外，所有其他动力学参数均为非负； a可以取正值或负值。因此，本文全篇假设

$$a \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq \beta < 1, \quad \gamma > 0, \quad \varepsilon > 0, \quad \Gamma > 0, \quad d > 0. \tag{10}$$

最后，我们引入两个分数阶指数之比

$$\alpha = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}, \qquad \text{so that} \qquad \frac{1}{2} < \alpha < 2. \tag{11}$$

3 线性稳定性分析

本节首先回顾在不存在扩散时，FHN系统存在唯一稳态 E^* 及其稳定性的条件。随后，我们推导超扩散驱动的图灵分岔发生的条件。

3.1 局部动力学

考虑不含空间效应的系统（6）–（7）：

$$\frac{du}{dt} = \Gamma(u(1-u^2) - (1-\beta u)v), \tag{1}$$

$$\frac{dv}{dt} = \Gamma(\varepsilon(\gamma u - v - a)). \tag{2}$$

根据参数 β、 γ 和 a 的取值，系统（1）–（2）的零倾线可能以不同方式相交，从而产生不同的动力学状态 Hagberg和Meron [1994],Gambino等人 [2022], Cebrián-Lacasa等人 [2024]。具体而言，系统可能呈现以下互斥情形：（i）位于 u零倾线内分支上的唯一稳定平衡点（单稳态情形）；（ii）位于某一外分支上的唯一稳定平衡点（可激发情形）；或（iii）三个平衡态，其中两个稳定、一个不稳定（双稳情形）。

在本研究中，我们将分析限定于系统存在唯一平衡点的参数区域。之所以作此选择，是因为图灵失稳分析及其后续的弱非线性理论，都是围绕单一均匀稳态建立的局部分岔理论。在双稳态区域中，两个稳定平衡态并存，扩散驱动不稳定性原则上可能出现在不止一个平衡态附近，从而导致模态相互作用和共振现象，并可能产生更复杂的结构，例如超晶格图案 Dewel 等人 [2001],

Tlidi 等人 [2012]。分析这类情形需要采用不同的理论框架，超出了本文的讨论范围。

下面我们总结系统 (1)–(2) 存在唯一平衡态且属于情形 (i) 或 (ii) 时参数所需满足的条件。首先，在命题 1 中，我们给出确保存在唯一平衡点 $E^* = (u^*,\ v^*)$ 的条件。我们假设

$$1 - \beta u^* > 0, \tag{3}$$

从而平衡点位于相平面 $(u,\ v)$ 中 u–零流线的垂直渐近线 $u = 1/\beta$ 左侧。

命题 1（唯一平衡态的存在）考虑系统 (1)–(2)并定义

$$p := a\beta + \gamma - 1 - \frac{\beta^2\gamma^2}{3}, \tag{4}$$

$$q := \frac{\beta\gamma(a\beta + \gamma - 1)}{3} - \frac{2\beta^3\gamma^3}{27} - a. \tag{5}$$

当且仅当满足以下条件时，系统存在唯一平衡点 $E^* = (u^*, v^*)$，其中 $v^* = \gamma u^* - a$，

$$4p^3 + 27q^2 > 0. \tag{6}$$

关于命题 1 的证明，请参阅 Gambino等人 [2022] 的附录。为分析稳态的稳定性，我们在 E^* 附近对系统 (1)–(2) 进行线性化：

$$\dot{\mathbf{w}} = J\mathbf{w}, \quad \text{with} \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} u - u^* \\ v - v^* \end{pmatrix}, \tag{7}$$

$$J = \begin{pmatrix} \varepsilon_H & -(1 - \beta u^*) \\ \varepsilon\gamma & -\varepsilon \end{pmatrix}, \tag{8}$$

其中

$$\varepsilon_H := 1 + \beta v^* - 3u^{*2}. \tag{9}$$

由此得到特征方程

$$\lambda^2 - \Gamma \mathrm{tr}(J)\lambda + \Gamma^2 \det(J) = 0, \tag{10}$$

with

$$\mathrm{tr(J)} = -\varepsilon + \varepsilon_H, \tag{11}$$

$$\det(J) = \varepsilon\left[-\varepsilon_H + (1 - \beta u^*)\,\gamma\right]. \tag{12}$$

稳定性要求 $\mathrm{tr}(J) < 0$ 且 $\det(J) > 0$。

令 $v(u) = u(1 - u^2)/(1 - \beta u)$ 表示 u–零流线。这条类三次曲线的两个极值点将其分为三个分支：位于两个极值点之间的内分支，以及分别位于两侧的两个外分支。由于 $\varepsilon_H = v'(u^*)/(1 - \beta u^*)$ 且条件 (3) 成立，ε_H 的符号与 $v'(u^*)$ 的符号一致。因此，$\varepsilon_H > 0$ 对应于位于 u–零流线内分支上的一个平衡态，而 $\varepsilon_H < 0$ 对应于位于外分支之一上的一个平衡态。

在此基础上，我们在命题 2、3 和 4 中确定了使唯一平衡态 E^* 对应于单稳态构型、发生 Hopf 分岔或属于可激发区域的参数区域。

命题2 （单稳态情形）设命题 *1* 的假设成立。若

$$0 < \varepsilon_H < \min\left(\varepsilon, \gamma(1-\beta u^*)\right), \tag{13}$$

那么，唯一的平衡点 $E^* = (u^*, v^*)$ 位于 u–零流线上，并且线性稳定。

事实上，由于 $\varepsilon_H > 0$，平衡态 E^* 位于 u–零流线的内分支上。此外，在条件 (13) 下，tr(J) < 0，见式 (11)，且 det(J) > 0，见式 (12)，因此 E^*是线性稳定的。

命题 3 （*Hopf* 分岔）假设命题 *1* 的条件成立，且平衡态 E^* 位于 u–零流线的内分支上。如果

$$\varepsilon_H = \varepsilon < \gamma(1-\beta u^*),$$

那么， E^* 发生 *Hopf* 分岔。

在这种情况下，tr(J) $= 0$ 且 det(J) > 0，因此一对纯虚特征值穿过虚轴，平衡态 E^* 发生 Hopf 分岔。

命题 4 （可激发情形）假设命题 *1* 的条件成立。若

$$\varepsilon_H < 0,$$

则唯一的平衡点 $E^* = (u^*, v^*)$ 位于 u–零流线的一条外分支上，且线性稳定。

事实上，若 $\varepsilon_H < 0$，平衡态 E^* 位于 u–零流线的一条外分支上。此外，tr(J) < 0且 det(J) > 0，这意味着其线性稳定。

图 1 展示了局部 FHN 系统 (1)–(2) 在 (a, γ) 参数平面上的不同动力学状态，即单稳态（黑色区域）、可激发（深灰色区域）和双稳态区域（浅灰色区域）。该图还突显了参数 ε 和β的作用：减小 ε 可能会通过 Hopf 分岔使唯一的平衡态失稳，正如命题 3 所预测的那样，见图 1(b) 中的白色区域。另一方面， β取非零值会打破系统的对称性，使不同状态之间的边界相对于直线 $a = 0$呈非对称分布，见图 1(c)。

3.2 扩散驱动不稳定性

本节中，我们将通过线性稳定性分析，研究在无扩散时线性稳定的平衡点 E^* 在何种条件下会因空间扰动而在扩散存在时失去稳定性，并发生图灵分岔。具体而言，我们将证明，在可激发情形下，即满足命题 4 的假设时，此类分岔不会发生。在单稳态情形下，即满足命题2的假设时，我们将证明 E^* 可能通过图灵机制失去稳定性。我们将确定分岔阈值 d_c 以及相应的临界波数 k_c。

为研究平衡态 E^* 的线性稳定性，我们将正规模态假设 $\mathbf{w} = \mathbf{W}_k e^{\sigma t + ikx}$ 代入 (6)–(7)，其中 σ 是扰动的增长率， k 是相应的波数，而 $\mathbf{w}$ 在 (7) 中定义。由此得到以下特征值问题：

$$\sigma \mathbf{W}_k = \mathcal{L}\mathbf{W}_k, \quad \text{with} \quad \mathcal{L} = \Gamma J - D_k, \tag{14}$$

$$\text{and} \quad D_k = \begin{pmatrix} k^{\alpha_1} & 0 \\ 0 & dk^{\alpha_2} \end{pmatrix}. \tag{15}$$

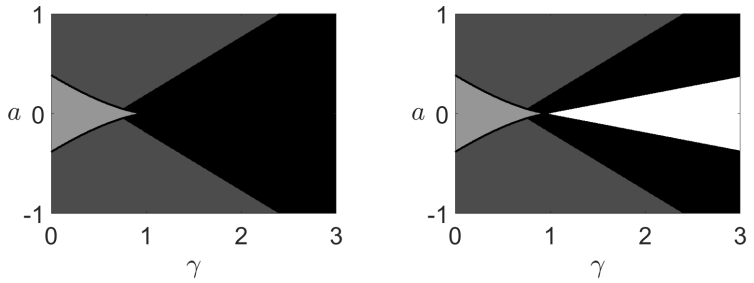


图1：局部 FitzHugh–Nagumo 系统 (1)–(2) 在 (a, γ) 平面上的不同动力学状态。黑色、深灰色和浅灰色区域分别对应单稳态、可激发和双稳态区域。白色区域表示唯一平衡态通过 Hopf 分岔失去稳定性的参数值。(a) $\beta = 0$, $\varepsilon = 2$。(b) $\beta = 0$,$\varepsilon = 0.9$。

其中 J 由 (8) 给出。特征值 σ视为波数 k 的函数，满足以下色散关系：

$$\sigma^2 + g\,(k)\,\sigma + h\,(k) = 0, \tag{16}$$

其中：

$$\begin{aligned} g\,(k) &= -\mathrm{tr}(\Gamma J - D_k) \qquad (17)\\ &= k^{\alpha_1} + dk^{\alpha_2} + \Gamma(\varepsilon - \varepsilon_H),\\ h\,(k) &= \det(\Gamma J - D_k) \qquad (18)\\ &= (k^{\alpha_1} - \Gamma\varepsilon_H)(dk^{\alpha_2} + \Gamma\varepsilon) + \Gamma^2\varepsilon\gamma(1 - \beta u^*). \end{aligned}$$

回顾一下，当某个模态 $k \neq 0$ 对应的特征值 $\sigma(k)$ 为实数，且从负值穿越零变为正值时，均匀平衡态 E^* 会发生图灵不稳定性。

现在可以陈述以下定理1和定理2。

定理1（可激发区域内不存在图灵不稳定性）考虑系统(6)–(7)，并假设命题*1*和命题*4*的条件均成立，因此位于 u-零流线外分支上的平衡点 E^* 对系统(1)-(2)是线性稳定的。那么，系统(6)–(7) 的平衡态 E^* 不可能发生图灵分岔。

证明 1 由于命题 *4* 的假设成立，我们有 $\varepsilon_H < 0$。因此，在(17) 和(18)中定义的 g（k）和 h（k）对于所有 $k \in \mathbb{R}^+$ 均为正。根据笛卡尔符号法则，色散关系（16）的根对于所有 $k \in \mathbb{R}^+$ 都必须具有负实部，因此不会发生不稳定性。

定理2（单稳态区域中的图灵不稳定性）考虑系统 (6)–(7)，并假设命题*1*和命题*2*的条件均满足，因此位于 u-零流线内分支上的平衡点 E^* 对系统 (1)-(2)是线性稳定的。那么，系统 (6)–(7) 的稳态 E^* 在 $d = d_c$ 处发生图灵分岔，其中：

$$d_c = \frac{\varepsilon\Gamma\left((1 - \beta u^*)\gamma(1 - \alpha) + \sqrt{\delta}\right)}{\left(\Gamma\left(\varepsilon_H - \frac{\gamma}{2}(1 + \alpha)(1 - \beta u^*) + \frac{\sqrt{\delta}}{2}\right)\right)^{1/\alpha}\left(\gamma(1 + \alpha)(1 - \beta u^*) - \sqrt{\delta}\right)}, \tag{19}$$

and:

$$\delta = (\gamma(1+\alpha)(1-\beta u^*) - 2\varepsilon_H)^2 + 4\varepsilon_H(\gamma(1-\beta u^*) - \varepsilon_H). \tag{20}$$

在 $d = d_c$ 处，临界波数为：

$$k_c = \left(\Gamma\left(\varepsilon_H - \frac{\gamma}{2}(1+\alpha)(1-\beta u^*) + \frac{\sqrt{\delta}}{2}\right)\right)^{1/\alpha_1}. \tag{21}$$

证明 2 我们要寻找一个波数 $k \in \mathbb{R}^+$，使得对应的特征值 $\sigma(k)$ 为实数，并从负值变为正值。

由于命题*2*的假设成立，因此对所有 $k \in \mathbb{R}^+$，都有 $g(k) > 0$。因此，要使色散关系 (16) 对某个 $k \in \mathbb{R}^+$存在正根，必须满足$h(k) < 0$，这也确保对应的特征值 $\sigma(k)$ 为实数。根据 (18)中给出的 $h(k)$ 表达式，我们得到不稳定性的以下必要条件：

$$k^{\alpha_1} - \Gamma\varepsilon_H < 0. \tag{22}$$

为简化分析，我们引入以下变量替换：

$$z = k^{\alpha_2} \quad \Rightarrow \quad z^\alpha = k^{\alpha_1}. \tag{23}$$

于是，函数 $h(k)$ 变为：

$$h(z) = (z^\alpha - \Gamma\varepsilon_H)(\Gamma\varepsilon + dz) + \Gamma^2\varepsilon\gamma(1-\beta u^*) \tag{24}$$

此处我们现在考虑 $z \in \mathbb{R}^+$。

我们要求 $h(z)$ 在 $z > 0$ 上的最小值为零，以施加边际不稳定条件；这等价于寻找满足以下条件的临界点 $z^* \in \mathbb{R}^+$：

$$h(z^*) = 0, \tag{25a}$$

$$h'(z^*) = 0, \tag{25b}$$

$$h''(z^*) > 0, \tag{25c}$$

其中$' = \frac{d}{dz}$以及：

$$h' = (\alpha+1)dz^\alpha + \Gamma\alpha\varepsilon z^{\alpha-1} - \Gamma d\varepsilon_H, \tag{26}$$

$$h'' = \alpha z^{\alpha-2}\left((\alpha+1)dz + \Gamma(\alpha-1)\varepsilon\right). \tag{27}$$

假设这样的点 $z^* > 0$ 存在。那么，分岔参数 d的相应临界值可由(25a)计算得到：

$$d = d_c = \frac{-\Gamma\varepsilon\left(z^{*\alpha} + \Gamma(-\varepsilon_H + \gamma(1-\beta u^*))\right)}{z^*(z^{*\alpha} - \Gamma\varepsilon_H)}. \tag{28}$$

在 $z = z^*$ 处计算导数 $h'(z)$，并将 d的表达式代入(26)，我们得到： (28)

$$h'(z^*) = \frac{\Gamma\varepsilon}{z^*(\Gamma\varepsilon_H - z^{*\alpha})}\tilde{h}(z^{*\alpha}), \tag{29}$$

其中：

$$\begin{aligned}\tilde{h}(z^{*\alpha}) = (z^{*\alpha})^2 + \Gamma\big(\gamma(1+\alpha)(1-\beta u^*) - 2\varepsilon_H\big)z^{*\alpha} \\ - \Gamma^2\varepsilon_H\big(\gamma(1-\beta u^*) - \varepsilon_H\big).\end{aligned} \tag{30}$$

˜根据假设， h（$z^{*\alpha}$）中的常数项为负（命题*2*确保了这一点）。˜因此，根据笛卡尔符号法则， h（$z^{*\alpha}$）恰好有一个正实根，而与一次项系数的符号无关。该正根为：

$$z^{*\alpha} = \frac{\Gamma}{2}(2\varepsilon_H - \gamma(1+\alpha)(1-\beta u^*) + \sqrt{\delta}), \tag{31}$$

其中 δ 定义于(20)。

由(29)可得

$$z^* = \left(\frac{\Gamma}{2}(2\varepsilon_H - \gamma(1+\alpha)(1-\beta u^*) + \sqrt{\delta})\right)^{\frac{1}{\alpha}}, \tag{32}$$

满足 $h'(z^*) = 0$，从而验证了条件(25b)。将(32) 代入(28) ，得到临界值 $d = d_c$，如(19) 所示，此时条件(25a) 也成立。接下来还需验证(32) 中的值 $z = z^*$ 也满足条件(25c)。为此，将(19)所示的 $d = d_c$和(32)所示的 $z = z^*$代入(25c)，得到：

$$h''(z^*) = \frac{2\alpha\varepsilon\Gamma\sqrt{\delta}z^{*(\alpha-2)}}{\gamma(1+\alpha)(1-\beta u^*) - \sqrt{\delta}}, \tag{33}$$

很容易验证(33) 中的表达式恒为正。因此可以得出结论： $z = z^*$ 是满足条件(25)的所需临界值。通过逆转(23)中的变量替换，我们得到相应的临界波数 $k = k_c$，如(21)所示。

最后，很容易验证(19) 中给出的 $d = d_c$ 表达式为正。事实上，利用(21) ，我们可以将 d_c 改写如下：

$$d_c = \frac{\varepsilon\Gamma\left((1-\beta u^*)\gamma(1-\alpha) + \sqrt{\delta}\right)}{k_c^{\alpha_2}\left(\gamma(1+\alpha)(1-\beta u^*) - \sqrt{\delta}\right)}, \tag{34}$$

分母始终为正，因为它是 k_c 与另一项的乘积，其中 k_c 为正，而另一项也很容易证明为正。同样，在命题*2*的假设下，可以证明分子为正。

注1 注意，(19) 中的分岔阈值 d_c 不取决于各自的扩散幂次 α_1 和 α_2，而只取决于它们的比值 α 以及动力学参数。

这一结果表明，图灵阈值由两个输运过程的相对标度决定，而非由其超扩散指数的绝对值决定。

注2（ k_c 对 Γ的依赖关系）注意，在命题*2*的假设和条件(3)下，必要条件(22) 始终成立。

注意，条件(22) 给出了临界波数的上界，该上界取决于 Γ。

定理*2*给出了系统(6)-(7) 在 $d > d_c$ 情形下出现有限 k 模式形成型图灵不稳定性的必要条件，但并不能保证空间图样会出现。事实上，只有当至少存在一个整数 n ，使得 $k_1 < n < k_2 < (\Gamma\varepsilon_H)^{1/\alpha_1}$ 时，模式才会出现；其中， k_1 和 k_2 是(18) 中 $h(k)$ 的根，而 $n\,(n \in \mathbb{N})$ 是区间 $[0, 2\pi] \subseteq \mathbb{R}$ 上周期边界条件所允许的模态。因此，要在周期边界条件下观察到图案形成，Γ 必须足够大。

这反映出这样一个事实：更大的空间区域（即 Γ 的值更大）允许出现更丰富的不稳定模态谱，因此更有利于空间图样的形成。

4 反常扩散对模式形成的影响

4.1 情形 $\alpha_1 = \alpha_2$

我们首先考虑两个物种以相同分数阶次超扩散的情形，即 $\alpha_1 = \alpha_2$，或等价地， $\alpha = 1$。在此条件下，激活剂和抑制剂具有相同的输运标度，反常扩散只影响各物种的空间重新分布，而不会在它们之间引入任何相对不对称性。请注意， $\alpha_1 = \alpha_2$ 的值越小，超扩散越强，也就是说，底层输运过程中发生长跳跃的概率越高。

分岔阈值。 当 $\alpha_1 = \alpha_2$ 时，图灵阈值 d_c in 的表达式化简为: (19)

$$d_c = \frac{\varepsilon}{\left[\sqrt{\gamma(1-\beta u^*)} - \sqrt{\gamma(1-\beta u^*) - \varepsilon_H}\right]^2}, \tag{35}$$

这与存在标准扩散时得到的经典阈值一致。特别地， d_c 不依赖于宽度参数 Γ ，也不依赖于共同的扩散指数$\alpha_1 = \alpha_2$。在命题2的假设和条件（3）下，根据（35）中 d_c in 的表达式，可以直接验证 $d_c > 1$。此外，由于此时尺度变换（8）化简为 $d = D_V/D_U$，不稳定性只能通过经典图灵机制产生，即抑制剂的扩散速度快于激活剂时。因此，当 $\alpha_1 = \alpha_2$ 时，反常扩散不会改变导致图案出现的机制，只会影响其空间尺度。

临界波数与波长选择。 在 $\alpha_1 = \alpha_2$ 的情况下，（21）中给出的临界波数表达式变为:

$$k_c = \left[\Gamma\left(\varepsilon_H - \gamma(1-\beta u^*) + \frac{\sqrt{\delta}}{2}\right)\right]^{1/\alpha_1}, \tag{36}$$

with

$$\delta = 4\gamma(1-\beta u^*)[\gamma(1-\beta u^*) - \varepsilon_H]. \tag{37}$$

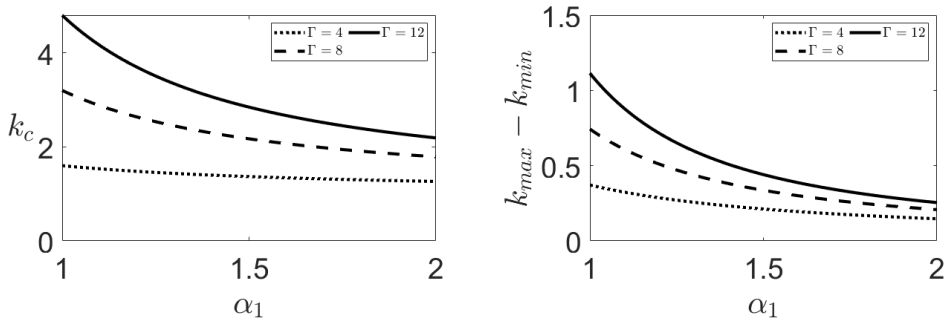
因此，所形成图案的特征空间尺度既取决于区域参数 Γ ，也取决于超扩散指数。

由于我们假设 $\Omega = [0, 2\pi]$ 上满足周期边界条件，图案形成要求$k_c \geq 1$，这意味着:

$$\Gamma \geq \frac{1}{\varepsilon_H - \gamma(1-\beta u^*) + \frac{\sqrt{\delta}}{2}}, \tag{38}$$

根据命题2的假设，分母为正，这一点很容易验证。因此，只有当 Γ 超过式（38）给出的阈值时，才可能形成图案。

超扩散对尺度选择的影响。 图2说明了临界波数 k_c 以及不稳定模态带如何依赖于 $\alpha_1 = \alpha_2$ 和 Γ。对于足够大以满足(38)的固定 Γ ，减小 $\alpha_1 = \alpha_2$ （即增强超扩散）会导致k_c增大，从而形成具有更短特征波长和更高空间分离程度的模式。与此同时， $h(k)$的两个根之间的距离增大，其表达式见(18)，这意味着不稳定模态带更宽，因而所得模式具有更高的潜在复杂性。当 Γ 增大到阈值(38)以上时，这一效应变得更加显著，见图2(b)以及图??，其中色散曲线及相应的不稳定区域逐渐向更大的波数移动，导致 k_c 和不稳定模态数量均增加。由于 Γ 按 $\Gamma \sim \ell^{\alpha_1}$ 标度（见(8)），这一行为



(a) (b)

图2：(a) 不同 Γ取值下，临界波数 k_c 随 $\alpha_1 = \alpha_2$的变化。(b) 不稳定区间 $[k_{\max} - k_{\min}]$的长度（表示不稳定模态的范围）随 $\alpha_1 = \alpha_2$ 的变化，其中 Γ取不同值。其余系统参数固定为 $a = -0.1$、$\beta = 0.3$、 $\gamma = 2$、 $\varepsilon = 1$和 $d_c = 6.9525$，而 d 设为 $d = 7.0220 > d_c$。

反映了更大的空间区域允许更精细的空间结构，而不影响不稳定性阈值 d_c这一事实。

结果解释。当两个物种以相同的指数发生超扩散时，反常扩散不会改变经典的激活剂–抑制剂机制，该机制负责图案形成：不稳定性仍要求抑制剂的扩散速度快于激活剂。然而，超扩散对图案特征空间尺度的选择起着关键作用。超扩散越强（ $\alpha_1 = \alpha_2$越小），输运算子的正则化效应越弱，从而导致临界波数增大，不稳定模态的区间也更宽。因此，形成的模式分离得更明显，并呈现出更丰富的空间结构。例如，将该系统解释为捕食者–猎物模型时，这对应于两个物种以相近的统计特性进行类莱维运动的情形。尽管产生模式的定性机制保持不变，增强超扩散会加剧空间碎片化，并形成更复杂的共存结构。

4.2 情形 $\alpha_1 \neq \alpha_2$

现在我们转向反常情形：两种物种具有不同的超扩散指数，即 $\alpha_1 \neq \alpha_2$，或等价地， $\alpha \neq 1$。在此区间内，输运过程不只是对空间图样进行缩放，还会在激活剂与抑制剂之间引入内在的不对称性，从而可能改变经典的图灵机制。

在此情形下，式（19）中给出的图灵阈值 d_c 不仅取决于动力学参数，还取决于区域参数 Γ 以及比值 $\alpha = \alpha_1/\alpha_2$。正如注1所述，尽管两种物种具有不同的分数阶次，不稳定性阈值仅取决于它们的比值，而不取决于各自的数值。这一性质使我们能够按照参数 α系统地划分图案形成区间。

打破经典激活剂–抑制剂范式。 对于标准扩散，即 $\alpha_1 = \alpha_2 = 2$，经典图灵机制要求抑制剂的扩散速度快于激活剂，即 $D_V > D_U$，这在无量纲形式（8）中对应于 $d > 1$ 。这一条件体现了图案形成所依赖的短程激活和长程抑制原则。

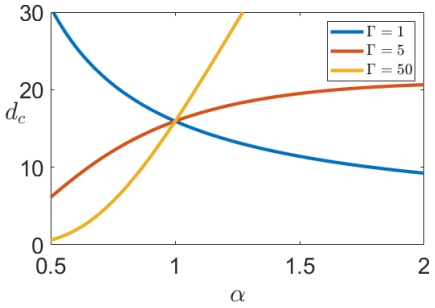


图 3：不同 Γ取值下，分岔阈值 d_c 对 α 的依赖关系。其他参数为 $a = -0.1$、$\beta = 0.3$、$\gamma = 2.3$ 和 $\varepsilon = 2$。

然而，在存在反常扩散的情况下，每种物种的有效输运由两个独立因素决定：由 α_1 和 α_2 表征的扩散指数，以及由无量纲参数 d描述的扩散速率；该参数通过缩放关系（8）取决于比值D_V/D_U。因此，“更快”或“更慢”的扩散这一概念变得更加微妙。

利用缩放变换 (8)，经典条件 $D_V < D_U$ 等价于：

$$d < \ell^{\alpha_1 - \alpha_2}, \tag{39}$$

因此，即使按照经典意义，激活剂的扩散速度快于抑制剂，只要超扩散指数之差能够补偿这一效应，仍可能出现图案形成。

注释 3 注意，条件 $d_c < \ell^{\alpha_1-\alpha_2}$ 成立，当且仅当参数满足以下条件：

$$\Gamma^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} > \ell^{\alpha_1 \frac{1-\alpha}{\alpha}} \frac{\varepsilon\left[(1-\beta u^*)\gamma(1-\alpha) + \sqrt{\delta}\right]}{\left[\varepsilon_H - \frac{\gamma}{2}(1+\alpha)(1-\beta u^*) + \frac{\sqrt{\delta}}{2}\right]^{\frac{1}{\alpha}} \left[\gamma(1+\alpha)(1-\beta u^*) - \sqrt{\delta}\right]}, \tag{40}$$

其中 δ 由(20)给出，ℓ 表示一维空间区域的长度。

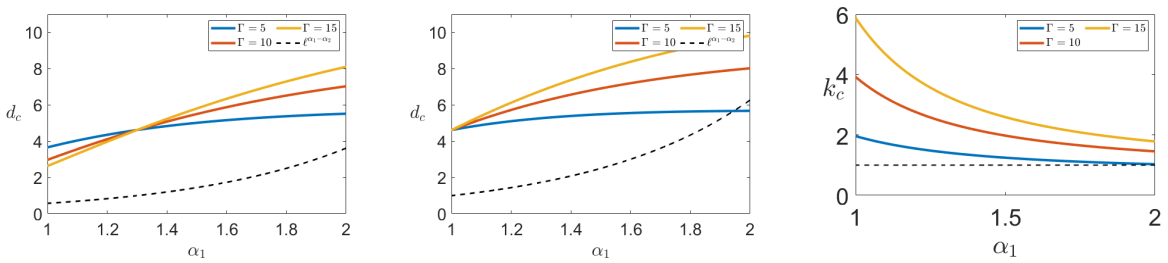
若 $\alpha > 1$，函数 $\Gamma^{(1-\alpha)/\alpha}$ 在 Γ中递减，因此需要 Γ 取足够小的值。反之，若 $\alpha < 1$，同一函数递增，因此 Γ 需要取足够大的值。

图 3 展示了固定其他动力学参数时，不同 Γ取值下分岔阈值 d_c 随比值 α 的变化关系。当 Γ 足够小时，$d_c(\alpha)$ 是递减函数；而随着 Γ 增大，其递增趋势逐渐变得更加陡峭。

这一行为可由式 (19) 理解，该式表明 $d_c \propto \Gamma^{(\alpha-1)/\alpha}$。由于不稳定性要求 $d > d_c$，因此 d_c 较小时更有利于图案形成。对于 $\alpha > 1$，指数 $(\alpha-1)/\alpha$为正，且 d_c随 Γ增大而增大，使得较大区域中更难发生不稳定性。相反，对于 $\alpha < 1$，该指数为负，且 d_c 随 Γ减小，从而促进图案形成。

所有曲线均交于 $\alpha = 1$，对应标准扩散情形 $\alpha_1 = \alpha_2 = 2$；此时，d_c 仅通过式 (35) 依赖于动力学参数。该点标志着经典区制与反常区制之间的转变。

这些结果凸显了扩散速率、超扩散指数与反应动力学之间的相互作用如何决定不稳定性的发生。



(a) (b) (c)

图4：分岔阈值 d_c 随 α_1 的变化，其中 $\alpha_2 = 1.3$ 对应(a)， $\alpha_2 = 1.001$对应(b)；对于不同的宽度参数 Γ且 $\alpha_2 = 1.001$ 时，临界波数 k_c 随 α_1 的变化见(c)。虚线表示曲线 $d = \ell^{\alpha_1-\alpha_2}$，对应于原变量中的条件 $D_V/D_U = 1$ 。其他参数固定为 $a = 0.1$、$\beta = 0.4$、 $\gamma = 1.8$和 $\varepsilon = 1.01$。

情形 $\alpha_1 > \alpha_2$ 我们首先考虑情形 $\alpha_1 > \alpha_2$，即 $\alpha > 1$，这对应于抑制剂的超扩散程度高于激活剂的情形，因为较小的扩散指数与更强的反常效应相关。

从捕食者–猎物的角度解释，这对应于捕食者进行类似莱维飞行的运动，其长跳跃的概率较高，而猎物则表现出更接近类布朗动力学的行为。

图4(a)和图4(b)展示了不同 Γ 取值、且 α_2固定时，分岔阈值 d_c 随激活剂扩散指数 α_1的变化。在所有考察的情形中， d_c均随 α_1增大而增大，这表明较小的 α_1对应于激活剂更强的超扩散，有利于图案形成，因为它会降低不稳定性阈值。

此外，对于固定的 α_1，增大 Γ 会使 d_c 的值变大，从而使不稳定性更难发生。相反，减小 Γ 会系统性地降低阈值，并促进图案形成。

虚线标示出根据式 (39)，经典条件 $D_V > D_U$ 被违反的参数区域。在此区域中，即使激活剂的扩散速度快于抑制剂，也会发生不稳定性。这得益于标度关系 $d = \frac{D_V}{D_U}\ell^{\alpha_1-\alpha_2}$，它使扩散指数之差能够补偿扩散速率之比。

特别是，当 α_2 足够小时， d_c 可能降至足以允许 $D_U > D_V$ 的水平，如图 4(b) 中 $\Gamma = 5$ 的情况所示。

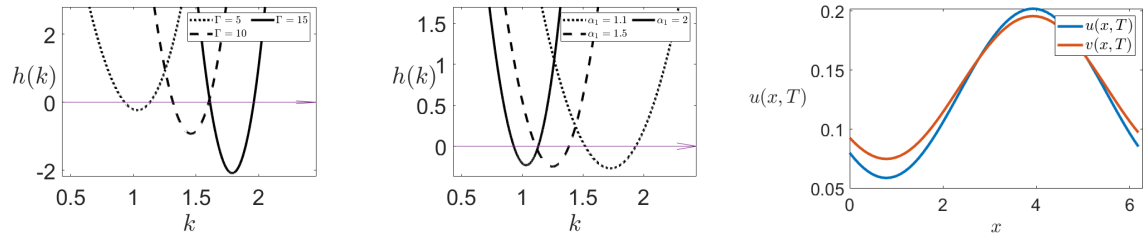
这种行为体现了扩散速率与扩散指数之间的补偿机制：尽管激活剂的扩散速率更快，但抑制剂更强的超扩散效应抵消了这一影响，使得图案形成得以超越经典区域。

还必须考察相应的临界波数，以判断有界区域上能否形成空间图样。如图 4(c) 所示，在 $\alpha_2 = 1.001$ 和 $\Gamma = 5$ 的情况下， k_c 仍大于 1，因此只要不稳定带足够宽，就能在具有周期边界条件的 $\Omega = [0, 2\pi]$ 上形成图案。

图5展示了相应的色散曲线。固定 $\alpha_1 = 2$时，增大 Γ会使不稳定区域移向更大的波数，并拓宽不稳定模态带（图5(a)），从而形成分离程度更高、也更复杂的空间图样。

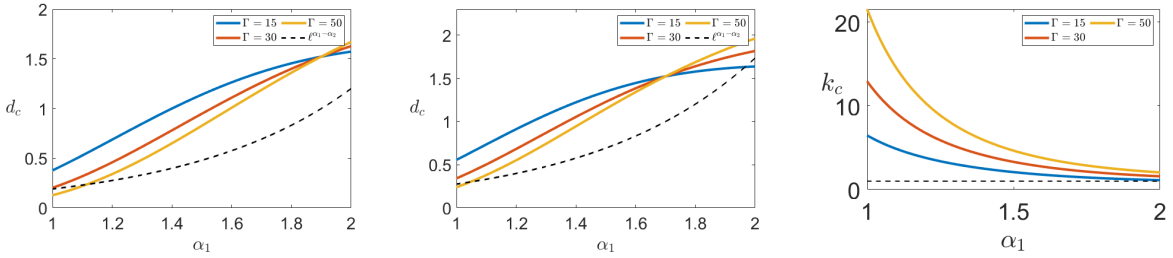
相反，固定 $\Gamma = 5$时，增大 α_1 会使色散曲线移向更小的波数，并缩窄不稳定带（图5(b)），从而形成分离程度较低、更加平滑的空间结构。

这些结果证实，在该机制下，区域参数 Γ 以及扩散速率与超扩散指数之间的相互作用，都在决定不稳定性阈值和所涌现模式的特征空间尺度方面起着核心作用。



(a) (b) (c)

图5： $\alpha_2 = 1.001$的色散曲线：(a) 在 $\alpha_1 = 2$下改变 Γ，(b) 改变 $\alpha_1 > \alpha_2$ 和$\Gamma = 5$，以及(c) 对应于 $\alpha_1 = 2$、 $\alpha_2 = 1.001$和 $\Gamma = 5$的一维图案。所有面板中的其余参数均固定为 $a = 0.1$、 $\beta = 0.4$、 $\gamma = 1.8$和 $\varepsilon = 1.01$，以及 $d = d_c(1 + 0.1^2)$。



(a) (b) (c)

图6：对于 $\alpha_2 = 1.9$ (a)和 $\alpha_2 = 1.7$ (b)，分岔阈值 d_c 对 α_1 的依赖关系；以及在$\alpha_2 = 1.7$ 下，取不同宽度参数 Γ 时，临界波数 k_c 对 α_1 的依赖关系(c)。虚线表示曲线 $d = \ell^{\alpha_1-\alpha_2}$，对应于条件$D_V/D_U = 1$。其余参数固定为 $a = 0.001$、 $\beta = 0.1$、 $\gamma = 1.03$和 $\varepsilon = 1.1$。

情形 $\alpha_1 < \alpha_2$ 我们现在考虑情形 $\alpha_1 < \alpha_2$，即 $\alpha < 1$，这对应于激活剂比抑制剂具有更强超扩散性的机制。

图6(a)和图6(b)显示了在 Γ 取不同值且 α_2取固定值时，分岔阈值 d_c 对 α_1 的依赖关系。当Γ足够大时， d_c 是 α_1的增函数，表明激活剂更强的超扩散（更小的 α_1）会促进不稳定性。

此外，当 $\alpha_1 \ll \alpha_2$时，增大 Γ 会系统性地降低不稳定性阈值，表明在该情形下大区域强烈有利于图案形成。

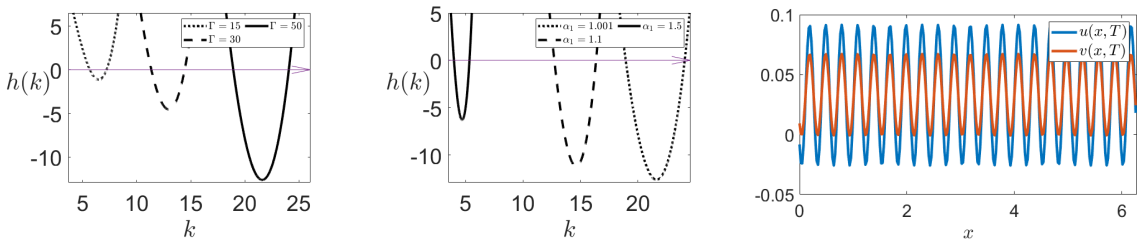
虚线标出了根据(39)经典条件 $D_V > D_U$ 被违反的参数区域。在这种情况下，即使激活剂比抑制剂扩散得更快，图案形成仍会发生。例如，图6(b)表明，对于 $\Gamma = 50$ 以及足够小的 α_1，d_c 会变得足够低，从而允许 $D_U > D_V$。

与情形 $\alpha_1 > \alpha_2$不同，此处经典条件的违反并非源于扩散速率与扩散指数之间的补偿，而是源于一种联合效应：激活剂在速率和超扩散指数两方面都扩散得更快。这导致了一种强烈的非经典不稳定机制。

图7展示了相应的色散曲线。对于固定的 $\alpha_1 = 1.001$，增大Γ 会使不稳定区域向更大的波数移动，并扩大不稳定模态的波数范围（图7(a)），从而形成高度分离的图样。

相反，对于固定的 $\Gamma = 50$，增大 α_1 会使色散曲线向更小的波数移动，并缩小不稳定区域（图7(b)），从而形成更平滑的空间结构。

如 在 $\alpha_1 > \alpha_2$ 的情况下，特征波长主要由激活子的 r



(a) (b) (c)

图7： $\alpha_2 = 1.7$的色散曲线：(a) 在 $\alpha_1 = 1.001$下改变 Γ，(b) 在 $\Gamma = 50$下改变 $\alpha_1 < \alpha_2$，以及(c) $\alpha_1 = 1.001$、$\alpha_2 = 1.7$和$\Gamma = 50$所对应的一维图案。在所有面板中，其余参数均固定为 $a = 0.001$、$\beta = 0.1$、$\gamma = 1.03$和 $\varepsilon = 1.1$，以及$d = d_c(1 + 0.1^2)$。

扩散指数和区域参数 Γ控制，而比率 α 主要影响不稳定性阈值。

在此状态下，尺度关系$d = \frac{D_V}{D_U}\ell^{\alpha_1-\alpha_2}$ 意味着，由于 $\alpha_1 - \alpha_2 < 0$，需要较大的Γ 值和激活剂的强超扩散，才能补偿扩散速率比。这解释了为什么只有在足够大的区域内，$D_V/D_U < 1$ 的图案形成才有可能发生。

从生物学视角来看，这一状态对应于这样一种情形：猎物的扩散速度快得多，并且频繁进行长跳跃，而捕食者移动得较慢，遵循近似布朗动力学。强超扩散的正则化效应减弱，导致高度碎片化且呈簇状分布的空间结构形成。

5 弱非线性分析

本节在图灵分岔阈值附近进行弱非线性（WNL）分析，以描述新兴模式的渐近行为。我们推导出控制主导模态振幅缓慢时间演化的斯图尔特–朗道方程，将分岔分类为超临界或亚临界，并研究非线性状态如何依赖于反常扩散指数。我们还给出数值模拟，以展示扩散幂次对图案形态的影响。

我们采用基于多重尺度法的摄动分析。设 η 是衡量与图灵分岔阈值 d_c 的无量纲距离的小控制参数。接近图灵分岔时，必须引入多个时间尺度 $T_j = \eta^j t$，$j = 1, 2, \ldots\ldots$，使得时间导数可分解为：

$$\frac{\partial}{\partial t} = \eta\frac{\partial}{\partial T_1} + \eta^2\frac{\partial}{\partial T_2} + \eta^3\frac{\partial}{\partial T_3} + \ldots \tag{41}$$

系统 (6)–(7) 的解和分岔参数 d 均展开为：

$$\mathbf{w} = \eta\mathbf{w}_1 + \eta^2\mathbf{w}_2 + \eta^3\mathbf{w}_3 + \mathcal{O}(\eta^4), \tag{42}$$
$$d = d_c + \eta d_1 + \eta^2 d_2 + \eta^3 d_3 + \mathcal{O}(\eta^4). \tag{43}$$

将 (42)、(43) 和 (41) 代入 (6)–(7)，并按 η的幂展开，我们得到

在 η的各阶上得到如下问题层级:

$$O(\eta): \qquad \mathscr{L}^{d_c}\mathbf{w}_1 = \mathbf{0}, \tag{44a}$$

$$O(\eta^2): \qquad \mathscr{L}^{d_c}\mathbf{w}_2 = \mathbf{F}, \tag{44b}$$

$$O(\eta^3): \qquad \mathscr{L}^{d_c}\mathbf{w}_3 = \mathbf{G}, \tag{44c}$$

其中，我们将线性算子 $\mathscr{L}$ 定义如下:

$$\mathscr{L} = \Gamma J + \mathscr{D}, \text{ with } \mathscr{D} = \begin{pmatrix} \nabla^{\alpha_1} & 0 \\ 0 & d\nabla^{\alpha_2} \end{pmatrix} \tag{45}$$

而 $\mathscr{L}^{d_c}$ 表示在 $d = d_c$ 处取值的算子 $\mathscr{L}$。源项 $\mathbf{F}$ 和$\mathbf{G}$ 为:

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{w}_1}{\partial T_1} - \begin{pmatrix} 0 \\ d_1\nabla^{\alpha_2} v_1 \end{pmatrix} + \Gamma \begin{pmatrix} 3u^* u_1^2 - \beta u_1 v_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{46}$$

$$\mathbf{G} = \frac{\partial \mathbf{w}_1}{\partial T_2} + \frac{\partial \mathbf{w}_2}{\partial T_1} - \begin{pmatrix} 0 \\ d_2\nabla^{\alpha_2} v_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ d_1\nabla^{\alpha_2} v_2 \end{pmatrix} + \Gamma \begin{pmatrix} 6u^* u_1 u_2 - \beta(u_1 v_2 + u_2 v_1) + u_1^3 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{47}$$

其中$\mathbf{w}_i \equiv (u_i, v_i)^\top$, $i = 1, 2$。满足周期边界条件的线性问题 (44a) 的解为:

$$\mathbf{w}_1 = A(T_i)\boldsymbol{\varrho}\, e^{ik_c x} + c.c., \tag{48}$$

其中， $A(T_i)$ 是尚未知晓的振幅， $D_{k_c}^{d_c}$ 是 (15) 式中的矩阵在 $k \equiv k_c$ 和 $d \equiv d_c$ 处的取值，而 $\boldsymbol{\varrho} \in$ 核 $\left\{\Gamma J - D_{k_c}^{d_c}\right\}$ 为:

$$\boldsymbol{\varrho} = z \begin{pmatrix} 1 \\ M \end{pmatrix}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad M = \frac{\Gamma\gamma\varepsilon}{\varepsilon\Gamma + d_c k_c^{\alpha_2}}. \tag{49}$$

将解 (48) 代入 $O(\eta^2)$ 处的 (44b) 后，通过施加 $T_1 = 0$ 和 $d_1 = 0$ 即可满足可解性条件。此外，由于分数阶拉普拉斯算子 ∇^{α_i} 在 L^2 Muratori [2016], Petrosyan [2020], 中是自伴的，因此伴随问题可以像经典情形那样处理。因此，问题 (44b) 存在如下形式的解$\mathbf{w}_2$:

$$\mathbf{w}_2 = |A|^2\mathbf{w}_{20} + A^2\mathbf{w}_{22}e^{2ik_c x} + c.c., \tag{50}$$

其中，$\mathbf{w}_{20}$ 和$\mathbf{w}_{22}$ 满足以下线性方程组:

$$\begin{cases} J\mathbf{w}_{20} = \Gamma\left(3u^* - \dfrac{\beta\gamma\varepsilon\Gamma}{\varepsilon\Gamma + d_c k_c^{\alpha_2}}, 0\right)^\top, \\ (J - D_{2k_c})\,\mathbf{w}_{22} = \Gamma\left(3u^* - \dfrac{\beta\gamma\varepsilon\Gamma}{\varepsilon\Gamma + d_c k_c^{\alpha_2}}, 0\right)^\top. \end{cases}$$

将 (48) 和 (50) 代入 (47) 中$\mathbf{G}$ 的表达式，得到:

$$\mathbf{G} = \left(\frac{\partial A}{\partial T_2}\boldsymbol{\varrho} + A\mathbf{G}_1 + A|A|^2\mathbf{G}_3\right)e^{ik_c x} + \mathbf{G}^* + c.c., \tag{51}$$

$$\text{where} \quad \mathbf{G}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ d_2 k_c^{\alpha_2} M \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}_3 = \Gamma \begin{pmatrix} (2u_{20} + u_{22})(6u^* - \beta M) - \beta(2v_{20} + v_{22}) + 3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

其中 $\mathbf{w}_{2j} \equiv (u_{2j}, v_{2j})^\top$。在 $O(\eta^3)$ 处施加弗雷德霍姆可解性条件，可得以下振幅的斯图尔特–朗道方程：

$$\frac{\partial A}{\partial T_2} = \sigma A - LA|A|^2, \tag{52}$$

其中：

$$\sigma = -\frac{\langle \mathbf{G}_1, \boldsymbol{\varrho}' \rangle}{\langle \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}' \rangle}, \qquad L = \frac{\langle \mathbf{G}_3, \boldsymbol{\varrho}' \rangle}{\langle \boldsymbol{\varrho}, \boldsymbol{\varrho}' \rangle}. \tag{53}$$

且 $\boldsymbol{\varrho}' \in$ 核$(\Gamma J^\top - D_{k_c}^{d_c})$由下式给出：

$$\boldsymbol{\varrho}' = h \begin{pmatrix} 1 \\ M' \end{pmatrix}, \quad h \in \mathbb{C}, \quad M' = \frac{\Gamma(\beta u^* - 1)}{\Gamma\varepsilon + d_c k_c^{\alpha_2}}. \tag{54}$$

在发生图灵不稳定性的参数区域内，系数 σ 始终为正。朗道系数 L 的符号决定了分岔的性质：当 $L > 0$ 时，分岔为超临界；而当 $L < 0$ 时，分岔为亚临界。在超临界情形下，振幅方程预言不稳定性会稳定饱和，并且可以明确确定新出现模式的渐近振幅。这为阈值附近的弱非线性区域提供了定量描述，正如定理 3 所述。在亚临界情形下，不稳定性会导致大振幅模式的出现，振幅方程的三次截断已不足以描述其动力学。因此，必须考虑更高阶的非线性项。具体而言，要一致地描述图样振幅，就需要将弱非线性分析扩展至 η^5阶。

定理 3 （超临界情形下的渐近解）在定理 *2* 的假设下，假定距分岔阈值的距离足够小，使得唯一的不稳定模态是(21)中给出的、波数为 k_c的临界模态，并且 k_c 与所施加的边界条件相容。此外，假定系统(6)-(7) 的初始条件是平衡态 E^*的一个足够小的扰动。则涌现的斑图解具有如下形式：

$$\mathbf{w} = \varepsilon \boldsymbol{\varrho} |A_\infty| \cos(k_c x), \tag{55}$$

其中：

$$|A_\infty| = \sqrt{\frac{\sigma}{L}}$$

是斯图尔特–朗道方程(52)的稳定平衡振幅。

上述结果可借助中心流形约化得到严格证明，其方法遵循 Farivaretal. [2025] 中所发展的途径。

本节最后，我们给出数值模拟，用以说明扩散幂次如何影响图灵分岔的性质。在图 8 中，我们给出朗道系数 L对共同扩散指数 $\bar{\alpha} = \alpha_1 = \alpha_2$的依赖关系。随着 $\bar{\alpha}$ 减小（对应于更强的超扩散）， L 由正变负，表明由超临界分岔向亚临界分岔转变。这表明反常扩散会系统性地促进亚临界性。

图 5 进一步展示了这一效应，其中我们给出了在动力学参数固定、 $\bar{\alpha}$取两个不同值时，(a, γ)平面上的图灵不稳定区域。在经典扩散情形（$\bar{\alpha} = 2$）下，可观察到超临界和亚临界状态。超扩散增强时（$\bar{\alpha} = 1.1$），亚临界区域变大，表明系统呈现出趋向亚临界的规律性倾向，尽管这种倾向并不占主导。图 (b,d) 中所示的相应模式证实了更强的超扩散所引发的从超临界到亚临界行为的转变。

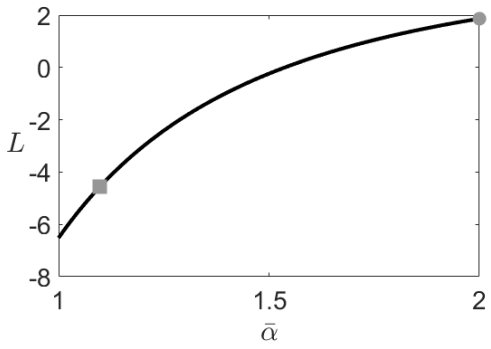


图8：朗道系数 L随扩散指数 $\bar{\alpha}$ 的变化：$= \alpha_1 = \alpha_2$，对应于 $a = -0.28$、$\beta = 0.3$、 $\gamma = 2$、 $\varepsilon = 0.9$和 $\Gamma = 13$。 L 的符号变化标志着从强超扩散向经典扩散的转变。浅灰色圆点标记和方形标记分别对应于图9(b)和图9(d)所示的超临界斑图和亚临界斑图。

在所有这些模拟中，动力学参数以及距不稳定性阈值的距离均保持不变。具体而言，分岔参数 d 选取为距 d_c 相同的相对距离；由于该距离仅取决于比值 $\alpha = \alpha_1/\alpha_2 = 1$，因此在两种情况下均相同。所以，观察到的变化完全是由扩散指数的变化所致。

在非对称输运构型中也观察到类似趋势：两种物种中仅有一种表现出超扩散行为，而另一种则经历经典扩散。在所有已测试的情形中，至少一种组分存在反常输运都会导致亚临界区域扩大，而与其关联的是激活剂还是抑制剂无关。这表明，对亚临界性的促进是超扩散的一种稳健效应，而非对称情形 $\alpha_1 = \alpha_2$所特有的特征。

我们已验证，对于其他参数组合，定性行为仍然存在，包括不存在 Hopf 分岔的情形，以及只有一个物种表现出反常扩散的配置。在所有情况下，超扩散越强，越有利于亚临界性，并会增强非线性效应。

6 图灵–霍普夫分岔及其标准形

我们已证明，平衡态 E^* 可能通过图灵分岔（定理2）或 Hopf 分岔（命题 3）而失稳，具体取决于参数值和反常扩散指数。因此，参数空间被划分为若干区域，分别对应稳态斑图、时间振荡或二者共存。特别是，当图灵失稳与 Hopf 失稳的阈值重合时，会发生余维二图灵–Hopf分岔。在此类点的邻域内，出现的动力学同时受到空间失稳和时间失稳的影响。在当前的分数阶框架中，这种相互作用会通过约化振幅方程的系数受到超扩散输运的影响。

本节研究余维二分岔点附近图灵模态与霍普夫模态之间的相互作用。通过多重尺度摄动方法，我们推导出相应的正规形，并确定不同动力学状态出现的参数区域。我们还给出了数值模拟，以说明主要的理论预测。

类似于第 5 节所进行的弱非线性分析，我们通过多重尺度展开研究余维二图灵–Hopf分岔点邻域内的动力学。

与纯图灵情形一样，引入慢时间尺度 T_j 来描述图样振幅的缓慢调制。然而，与图灵分岔不同的是，

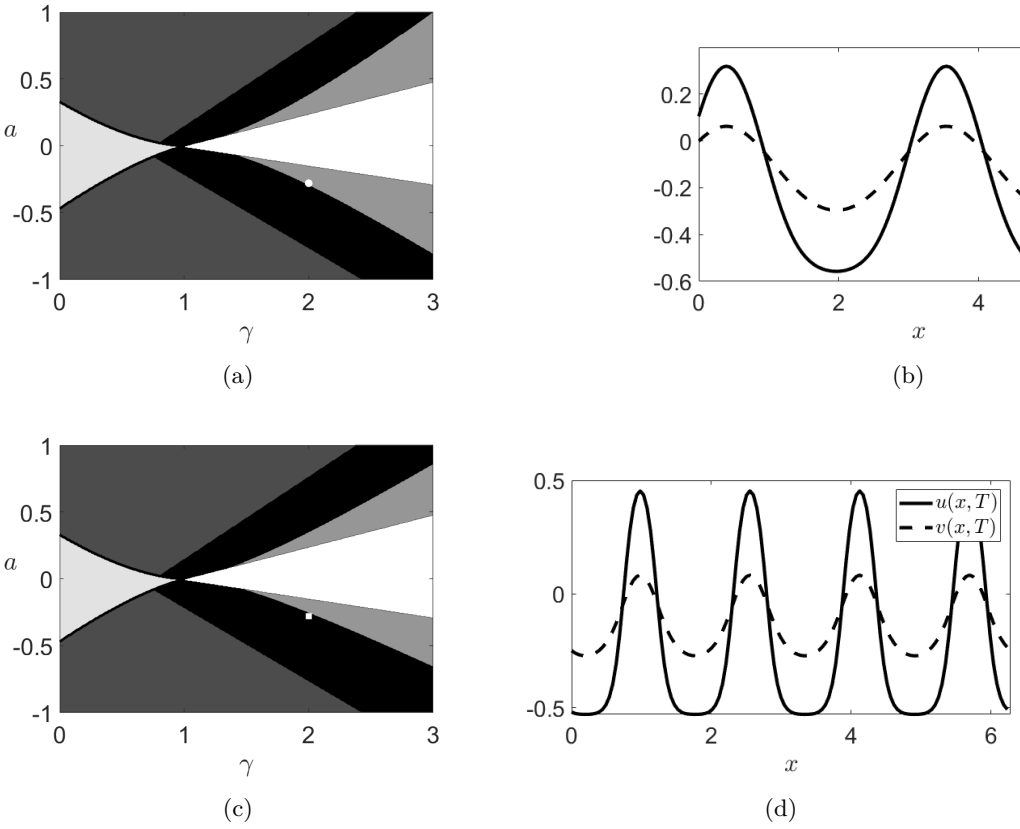


图 9：(a,c) (a,γ) 参数平面中的图灵不稳定区域，其中 β、ε 和 Γ 的选取与图 8 相同。图 (a,b) 对应于经典扩散情形 $\bar{\alpha}=2$，而图 (c,d) 对应于超扩散情形 $\bar{\alpha}=1.1$。在 (a,c) 中，浅灰色、深灰色、黑色和中灰色区域分别表示双稳态、可激发、单稳态亚临界和单稳态超临界区间。(a,c) 中的圆点和方块标记与图 8 中的相同标记相对应，并标示了计算 (b,d) 中模式所用的参数值。(b,d) 为对应于所标记参数值的 u 和 v 的图灵斑图，其中 $d=d_c(1+\eta^2)$、$d_c=11.2367$ 和 $\eta=0.1$。经典扩散情形 (b) 呈现超临界分岔，而超扩散情形 (d) 则导致亚临界分岔。

在图灵–霍普夫点附近，平衡态 E^* 会发生与霍普夫不稳定性相关的时间振荡。因此，展开中还必须保留快时间尺度 T_0 ，时间导数分解为：

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \eta\frac{\partial}{\partial T_1} + \eta^2\frac{\partial}{\partial T_2} + \eta^3\frac{\partial}{\partial T_3} + \dots \tag{56}$$

不失一般性，我们选择参数 ε 来度量与 Hopf 分岔的距离，并选择参数 d来度量与图灵分岔的距离。因此，解和参数 d 按式（42）和（43）展开，而 ε 则展开如下：

$$\varepsilon = \varepsilon_c + \eta\varepsilon^{(1)} + \eta^2\varepsilon^{(2)} + \eta^3\varepsilon^{(3)} + O(\eta^4). \tag{57}$$

所有系数 $\mathbf{w}_i$ 现在都依赖于多重时间尺度 T_j, $j = 0$，1，2，.....。

将（41）、（42）、（43）和（57）代入系统（6）–（7），并收集关于 η的连续各阶项，可得到一个线性问题层级。在最低阶，$\mathbf{w}_1$ 满足：

$$\left(\frac{\partial}{\partial T_0} - \mathscr{L}^c\right)\mathbf{w}_1 = 0, \tag{58}$$

where $\mathscr{L}^c$ 是式（45）中定义的算子在余维二点（ε_c， d_c）.

(58) 的通解为：

$$\mathbf{w}_1 = A(T_k)e^{ik_cx}\mathbf{e}_1 + B(T_k)e^{i\Omega_cT_0}\mathbf{e}_2 + c.c., \tag{59}$$

其中 A和 B 是缓慢变化的复振幅， $c.c.$ 表示复共轭。临界波数 k_c 见式（21），而：

$$\Omega_c = \gamma\sqrt{\det(J_c)} \tag{60}$$

是余维二点处的霍普夫频率。

特征向量 $\mathbf{e}_1 \in$核 $\left\{\Gamma J^{\varepsilon_c} - D_{k_c}^{d_c}\right\}$ 和 $\mathbf{e}_2 \in$核 $\{J^{\varepsilon_c} - i\Omega_cI\}$选取为

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} \dfrac{J_{22}^{\varepsilon_c} - k_c^2D_{22}^{d_c}}{J_{21}^{\varepsilon_c} - k_c^2D_{21}^{d_c}} \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} \dfrac{i\Omega_c - J_{22}^{\varepsilon_c}}{J_{21}^{\varepsilon_c}} \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{61}$$

在 $O(\eta^2)$ 处，我们得到关于 $\mathbf{w}_2$ 的以下线性方程：

$$\left(\frac{\partial}{\partial T_0} - \mathscr{L}^c\right)\mathbf{w}_2 = -\left(\frac{\partial}{\partial T_1} - \mathscr{L}^1\right)\mathbf{w}_1 + \mathbf{H}, \tag{62}$$

其中：

$$\begin{aligned} \mathscr{L}^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \Gamma\varepsilon^{(1)}\gamma & -\Gamma\varepsilon^{(1)} + d^{(1)}\nabla^{\alpha_2} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{H} &= \Gamma\begin{pmatrix} u_1(\beta v_1 - 3u^*u_1) \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

方程（62）存在解，当且仅当满足弗雷德霍姆择一定理。为消除强迫项的共振分量所产生的久期项，我们施加 $T_1 = 0$ 并令 $\varepsilon^{(1)} = d^{(1)} = 0$，从而自动满足可解性条件。

在这些假设下，方程（62）的解可写成如下形式

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_2 = {} & |A|^2(\mathbf{w}_{200}^{(2)} + \mathbf{w}_{202}e^{2ik_cx}) + |B|^2(\mathbf{w}_{200}^{(1)} + \mathbf{w}_{220}e^{2i\Omega_cT_0}) \\ & + AB\,\mathbf{w}_{211}e^{i(\Omega_cT_0 + k_cx)} + A\bar{B}\,\mathbf{w}_{2-11}e^{i(-\Omega_cT_0 + k_cx)} + c.c., \end{aligned}$$

其中，系数$\mathbf{w}_{200}^{(i)}$, $i = 1,2$ 和 $\mathbf{w}_{2j1}$, $j = \pm 1$ 是通过汇集方程（62）中具有相同的时空依赖关系的项而得到的显式线性系统的解。这些系统与第 5 节弱非线性分析中出现的系统类似，并且可以用闭式形式求得。为简洁起见，此处不列出它们的显式表达式。

在 $O(\eta^3)$ 处，我们得到关于 $\mathbf{w}_3$ 的以下方程：

$$\left(\frac{\partial}{\partial T_0} - \mathscr{L}^c\right)\mathbf{w}_3 = -\left(\frac{\partial}{\partial T_2} - \mathscr{L}^2\right)\mathbf{w}_1 + \mathbf{P}, \tag{63}$$

其中：

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \Gamma\varepsilon^{(2)}\gamma & -\Gamma\varepsilon^{(2)} + d^{(2)}\nabla^{\alpha_2} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{H} &= \Gamma\begin{pmatrix} \beta u_2 v_1 - u_1(u_1^2 + \beta v_2 - 6u^* u_2) \\ 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

同样在这种情况下，(63) 中会出现久期项。施加可解性条件后，可得到关于 A 和 B 的以下振幅方程：

$$\frac{\partial B}{\partial T_2} = \tilde{\sigma}_1 B - \tilde{L}_1|B|^2 B + \tilde{\Omega}_1|A|^2 B, \tag{64}$$

$$\frac{\partial A}{\partial T_2} = \tilde{\sigma}_2 A - \tilde{L}_2|A|^2 A + \tilde{\Omega}_2|B|^2 A. \tag{65}$$

~ ~系数 $\tilde{\sigma}_i$、L_i 和 Ω_i $i = 1,2$ 的显式推导过程较为繁琐，需通过相应的伴随模态将非线性项投影到临界特征子空间上，进行代数计算。这些计算遵循第 5 节介绍的标准多尺度方法，此处从略。(64) 中的系数是复数，而 (65) 中的系数是实数。此外，$\tilde{\sigma}_1$ 关于 $\varepsilon^{(2)}$ 呈线性关系，而 $\tilde{\sigma}_2$同时关于 $\varepsilon^{(2)}$ 和 $d^{(2)}$呈线性关系。其他所有系数均与 $\varepsilon^{(2)}$ 和 $d^{(2)}$无关。

将复振幅 A 和 B 写成极坐标形式，并分离实部和虚部，最终得到正规形：

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial T_2} = \rho_1\left(\sigma_1 - L_1\rho_1^2 + \Omega_1\rho_2^2\right), \tag{66}$$

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial T_2} = \rho_2\left(\sigma_2 - L_2\rho_2^2 + \Omega_2\rho_1^2\right), \tag{67}$$

$$\frac{\partial \vartheta_1}{\partial T_2} = \sigma_1' - L_1'\rho_1^2 + \Omega_1'\rho_2^2, \tag{68}$$

$$\frac{\partial \vartheta_2}{\partial T_2} = 0, \tag{69}$$

~ ~ ~其中 $\sigma_j = R(\tilde{\sigma}_j)$、$L_j = R(L_j)$、$\Omega j = R(\Omega j)$、$j = 1,2$，而 $\sigma_1' = I(\tilde{\sigma}_1)$、$L_1' = I(L_1)$ 和~$\Omega_1' = I(\Omega_1)$。

正规形系统 (66)–(69) 存在以下四个平衡解：

$$\begin{aligned} O &: \rho_1 = \rho_2 = 0, \\ H &: \rho_1^2 = \frac{\sigma_1}{L_1}, \quad \rho_2 = 0, \\ T &: \rho_1 = 0, \quad \rho_2^2 = \frac{\sigma_2}{L_2}, \\ TH &: \rho_1^2 = \frac{\sigma_1 L_2 + \sigma_2\Omega_1}{L_1 L_2 - \Omega_1\Omega_2}, \qquad \rho_2^2 = \frac{\sigma_2 L_1 + \sigma_1\Omega_2}{L_1 L_2 - \Omega_1\Omega_2}. \end{aligned}$$

平凡平衡态 O 对应于原系统 (6)–(7) 的空间均匀稳态。解 H 表示由 Hopf 分岔产生的空间均匀但时间周期振荡。解 T 对应于临界波数为 k_c 的定常空间周期图灵斑图。最后，解 TH 表示一种时空混合状态，其中空间调制与时间振荡共存。

下面我们分析平衡态 (70)–(70) 的线性稳定性，并在平面 ($d^{(2)}$，$\varepsilon^{(2)}$) 中构造相应的分岔图。

在平凡平衡态 O 处计算的、与 (66)–(69) 相关的雅可比矩阵，其特征值为 σ_1 和 σ_2。因此，平衡态 O 稳定当且仅当：

$$\sigma_j < 0, \qquad j = 1, 2. \tag{70}$$

现在考虑平衡态 H。在 H 处计算的雅可比矩阵的特征值为 $\lambda_1^H = -2\sigma_1$ 和 $\lambda_2^H = \sigma_2 + \sigma_1 \Omega_2/L_1$。因此， H 存在且稳定的条件为：

$$L_1 > 0, \tag{71}$$
$$\sigma_1 > 0, \tag{72}$$
$$\sigma_2 + \frac{\sigma_1 \Omega_2}{L_1} < 0. \tag{73}$$

沿着由下式定义的直线 $\mathcal{S}_1$：

$$\sigma_1 = 0, \qquad \sigma_2 < 0, \tag{74}$$

平凡平衡态 O 失去稳定性，并分岔为解 H。这对应于原反应–扩散系统 (6)–(7) 的 Hopf 分岔。由于 σ_1 仅线性依赖于 $\varepsilon^{(2)}$，直线 $\mathcal{S}_1$ 在平面 ($d^{(2)}$，$\varepsilon^{(2)}$) 中为水平线。

现在我们转而讨论平衡态 T。其存在性和稳定性要求：

$$L_2 > 0, \tag{75}$$
$$\sigma_2 > 0, \tag{76}$$
$$\sigma_1 + \frac{\sigma_2 \Omega_1}{L_2} < 0. \tag{77}$$

沿着由下式定义的临界线 $\mathcal{S}_2$：

$$\sigma_2 = 0, \qquad \sigma_1 < 0, \tag{78}$$

平凡平衡态 O 失去稳定性，并分岔为图灵解 T。这对应于原系统 (6)–(7) 中的定常斑图形成失稳。由于 σ_2对 $d^{(2)}$ 和 $\varepsilon^{(2)}$均呈线性依赖，因此直线 $\mathcal{S}_2$ 是平面 ($d^{(2)}, \varepsilon^{(2)}$) 中的一条斜线。

最后，我们考虑混合模态平衡态 TH。在 TH 处计算得到的雅可比矩阵的特征多项式为 $\lambda^2 - t\lambda + d$，其中：

$$t = -2(L_1\rho_1^2 + L_2\rho_2^2), \qquad d = 4\rho_1^2\rho_2^2(L_1L_2 - \Omega_1\Omega_2). \tag{79}$$

当且仅当满足 $t < 0$ 和 $d > 0$ 时，平衡态 TH 稳定。利用显式表达式 (70)，可知只要满足以下条件， TH 就存在且稳定：

$$\sigma_1 L_2 + \sigma_2 \Omega_1 > 0, \tag{80}$$
$$\sigma_2 L_1 + \sigma_1 \Omega_2 > 0, \tag{81}$$
$$L_1 L_2 - \Omega_1 \Omega_2 > 0, \tag{82}$$
$$\sigma_1 L_2(\Omega_2 + L_1) + \sigma_2 L_1(\Omega_1 + L_2) > 0. \tag{83}$$

根据条件 (71)–(73) 和 (81)，我们定义直线$\mathcal{S}_3$:

$$\sigma_2 L_1 + \sigma_1 \Omega_2 = 0, \qquad L_1 > 0, \quad \sigma_1 > 0. \tag{84}$$

穿过$\mathcal{S}_3$, 时，霍普夫解 H 失去稳定性并分岔为混合模态解TH。这对应于原系统中的图灵–霍普夫分岔。

同样地，根据条件 (75)–(77) 和 (80)，我们定义直线$\mathcal{S}_4$:

$$\sigma_1 L_2 + \sigma_2 \Omega_1 = 0, \qquad L_2 > 0, \quad \sigma_2 > 0. \tag{85}$$

穿过$\mathcal{S}_4$, 时，图灵解 T 失去稳定性并分岔为混合模态解TH。

注意，在平面 ($d^{(2)}, \varepsilon^{(2)}$) 中，$\mathcal{S}_3$ 和$\mathcal{S}_4$ 都是直线，因为 L_1, L_2,Ω_1,Ω_2 与 $d^{(2)}$ 和 $\varepsilon^{(2)}$ 无关，而 σ_1 和 σ_2 线性依赖于这些参数。

反常扩散对图灵–霍普夫相互作用的影响并非结构性的，而是定量性的：分数阶指数通过 k_c、Ω_c和正规形系数进入问题，从而重塑分岔图以及不同动力学状态的相对规模。

与纯图灵情形相比，正规形系数对分数阶指数的依赖关系要复杂得多。这使得各种机制难以清晰区分，也难以从不稳定性边界的变化中识别出简单的趋势。因此，超扩散主要影响参数空间的定量组织，而非分岔情景的定性结构。

现在，我们给出一组数值模拟，以验证正规形分析，并展示图灵–霍普夫余维二分岔附近出现的不同动力学状态。

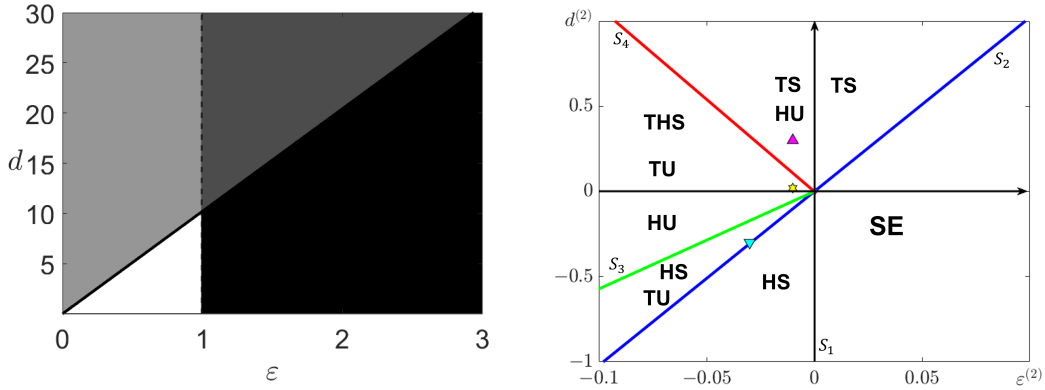
在第一个数值实验中，参数值选取为图 10(a) 图注所示，其中展示了参数平面 (ε， d) 上与图灵和霍普夫不稳定性相关的分岔结构。该图标出了纯图灵不稳定性和纯霍普夫不稳定性区域，以及两种不稳定性同时出现的参数范围。对于这组参数，图灵和霍普夫不稳定性边界在余维二图灵–霍普夫分岔点 (ε_c， d_c) = (0。9928，10。1398) 相交。图 10(b) 给出了系统 (66)–(69) 的正规形分析所预测的分岔线 $\mathcal{S}_1$–$\mathcal{S}_4$, ，这些分岔线将参数平面 ($\varepsilon^{(2)}$， $d^{(2)}$) 划分为若干区域，分别对应平衡态 O、 H、 T 和 TH 的存在与稳定性。

具体而言，蓝线对应于图灵分岔阈值（解 T 存在），而纵轴表示霍普夫分岔阈值（解 H 存在）。绿线和红线界定了解 TH 存在且稳定的区域。需要强调的是，余维二点的位置以及由线 $\mathcal{S}_1$–$\mathcal{S}_4$ 分隔的区域形状，取决于正规形系数中的分数扩散指数。特别地，改变 $\bar{\alpha}$ 会改变纯振荡区域、纯稳态区域和混合图灵–霍普夫区域的相对大小，尽管分岔图的整体结构保持不变。

为验证正规形分析的预测，我们对完整的反应–扩散系统（6）–（7）进行直接数值模拟。激活剂 u的时空动力学结果如图 11 所示。

在图 11(a) 中，参数值 $(\varepsilon^{(2)}, d^{(2)}) = (-0.03, -0.3)$ 对应图 10(b) 中的青色倒三角。在该区域内，只有正规形的霍普夫平衡态 H 存在且稳定。因此，解呈现空间均匀的时间振荡。

在图 11(b) 中，参数 $(\varepsilon^{(2)}, d^{(2)}) = (-0.01, 0.3)$ 对应图 10(b) 中的品红色正三角。在此处，只有图灵平衡态 T 稳定，且解收敛至稳态空间周期图案。



(a) (b)

图 10：(a) (ε, d) 参数平面中的不稳定区域，其中 ε 和 d 分别作为霍普夫不稳定性和图灵不稳定性的控制参数。白色区域对应纯霍普夫不稳定性，深灰色区域对应纯图灵不稳定性，浅灰色区域对应图灵–霍普夫相互作用，黑色区域对应均匀平衡态的线性稳定性。参数值为 $a = 0.2$, $\beta = 0.21$, $\gamma = 3.1$, $\Gamma = 13$，其中 $\bar{\alpha} = 1.1$。(b) ($\varepsilon^{(2)}$, $d^{(2)}$) 平面中，余维 2 图灵–霍普夫点 (ε_c, d_c) = (0.9928, 10.1398) 邻域内的分岔图，由正规形 (66)–(69) 得到。蓝线表示图灵分岔阈值（解 T 的存在），而纵轴对应霍普夫分岔阈值（解 H 的存在）。绿线和红线界定了混合模态解 TH 存在的区域。这些曲线将参数平面划分为不同区域，各区域由平衡态 O,H, T 和 TH 的存在性与稳定性特征所决定。标记表示图 11 所示数值模拟中使用的参数值。

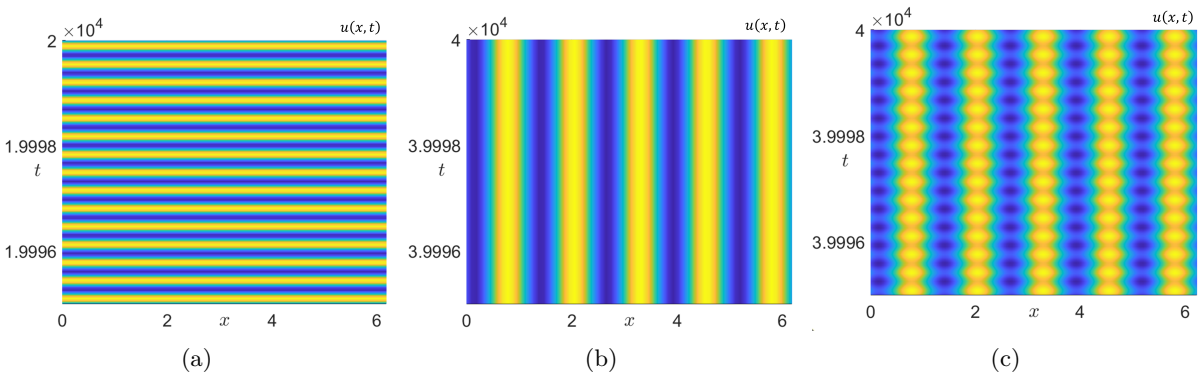


图11：余维2图灵–霍普夫分岔点附近系统 (6)–(7) 的时空解。参数值为 $a = 0.2$, $\beta = 0.21$, $\gamma = 3.1$, $\Gamma = 13$, 其中 $\bar{\alpha} = 1.1$。(a) 纯霍普夫区间：正规形 (66)–(69) 的平衡态 H 存在且稳定。参数为 $(\varepsilon^{(2)}, d^{(2)}) = (-0.03, -0.3)$，对应图 10(b) 中的青色倒三角形。该解表现为空间均匀的时间振荡。(b) 纯图灵区间：平衡态 T 稳定。参数为 $(\varepsilon^{(2)}, d^{(2)}) = (-0.01, 0。3)$，对应图 10(b) 中的洋红色正三角形。该解收敛到稳态空间周期图案。(c) 图灵–霍普夫区间：混合模态平衡态 TH稳定。参数为 $(\varepsilon^{(2)}, d^{(2)}) = (-0.01, 0。02)$，对应图 10(b) 中的黄色星形。该解表现出空间调制与时间振荡的组合。

最后，在图 11(c) 中，参数 $(\varepsilon^{(2)}, d^{(2)}) = (-0.01, 0。02)$ 对应于图 10(b) 中的黄色星号。在该区域，混合模态平衡态 TH 稳定。正如正规形所预测的，解呈现出时空复合行为，其特征为空间调制与时间振荡并存。

这些数值实验验证了弱非线性分析的有效性，并表明正规形不仅能正确预测分岔边界的位置，还能预测参数空间不同区域中新兴动力学的定性特征。

该分析表明，即使存在反常扩散，FitzHugh–Nagumo系统仍呈现扩散驱动不稳定性与振荡不稳定性之间经典的相互作用情景。超扩散输运并未破坏图灵–霍普夫机制，而是重新组织了平稳、振荡以及混合时空模式出现的参数区域。结合前面各节的结果，这就完整描绘了分数阶FHN模型中的图案形成，表明反常扩散不仅重塑了平稳空间结构，也改变了向时空复杂性的转变过程。

7 结论

本文研究了具有分数阶输运和非均匀扩散阶数的 FitzHugh–Nagumo系统中的扩散驱动不稳定性。

通过推导不稳定性阈值和临界波数的显式解析表达式，我们表明，不稳定性的起始由扩散指数之比和动力学参数决定，而非由它们各自的取值决定。这一性质为反常反应–扩散系统中不稳定性状态的分类提供了自然框架。

当扩散阶数不同时，便会出现非经典不稳定机制。特别是，由于反常标度、扩散速率和区域大小的共同作用，即使在激活剂扩散速度快于抑制剂的情况下，也可能出现空间不稳定性。这种行为无法用基于扩散速率分离的经典激活剂–抑制剂框架来解释

基于扩散速率分离。

弱非线性分析表明，超扩散会影响非线性饱和并促进亚临界行为。这会增强有限振幅效应，并提高对扰动的敏感性。

对图灵–霍普夫相互作用的分析表明，分数阶输运会改变稳态不稳定性区域与振荡不稳定性区域之间的边界。

从更广泛的角度来看，我们的结果凸显了在非均质介质中进行输运建模时，区分扩散速率与扩散指数的重要性。在存在长程运动的生物、生态和物理系统中，这种区分尤为重要。

未来的工作将把当前分析拓展至更一般的情形，包括高维区域以及更贴近现实的边界效应和噪声效应，以进一步阐明反常输运在复杂动力学状态中的作用。针对非标准几何（如演化区域或弯曲区域）上的图案形成开展研究（Woolley等人 [2011],Krause等人 [2019], Lacitignola等人 [2022], ），以及分析二维反应–扩散系统中的图灵不稳定性和图案选择（Gambino等人 [2013],Capone等人 [2022],），都提出了可与分数阶输运效应相结合的互补方法。此外，通过分数阶算子耦合复杂动力学元件，以研究涌现的时空行为及可能出现的混沌行为，也是一个值得探索的方向，耦合振子网络及相关的复杂传播动力学便体现了这一点（Alì等人 [2021],Martinelli等人 [2024]）。此外，探究此处考虑的分数阶输运机制能否通过动理学极限从微观相互作用规则推导出来，也颇有意义；神经系统和趋化系统的动理学宏观研究已沿此方向展开（Perthame等人[2018], Bisi等人 [2025]）。

8 致谢

本研究部分获得欧盟—下一代欧盟资助：MUR PrinPNRR 2022年 PRIN 项目，项目代码 P202254HT8，资助编号 CUP B53D23027760001；MUR PrinPNRR 2022年 PRIN 项目，项目代码 P2022Z7ZAJ，资助编号 CUP B53D23027930001；以及 MUR PRIN 2022-scorrimento 项目，项目代码 2022ALZH2K002，资助编号 CUP：B53C24006330006 的支持；此外，还获得巴勒莫大学工程系单一研究人员项目的支持。作者还衷心感谢 GNFM-INdAM 和巴勒莫大学 FFR2024 资助提供的经费支持。

参考文献

Samuel B. Alves、Gilson F. de Oliveira、Luimar C. de Oliveira、Thierry Passerat de Silans、Martine Chevrollier、Marcos Oriá 和 Hugo L.D. de S. Cavalcante。《扩散过程的表征：正常区制与反常区制》。*Physica A*：统计力学及其应用，447：392–401，2016年。ISSN 0378-4371。doi: https://doi.org/10.1016/j.physa.2015.12.049。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437115010778。

Giuseppe Alì、Eleonora Bilotta、Francesco Chiaravalloti、Pietro Pantano、Oreste Pezzi、Carmelo Scuro 和 Francesco Valentini。Chua 振荡器环中的时空图案形成。《规则与混沌动力学》，26(6):717 – 731，2021年。doi: 10.1134/S1560354721060095。

F. Amblard、A. C. Maggs、B. Yurke、A. N. Pargellis 和 S. Leibler。肌动蛋白网络中的亚扩散与反常局部黏弹性。《物理评论快报》，77:4470–4473，1996年11月。doi: 10.1103/ PhysRevLett.77.4470。URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.77.4470。

M. Bachir、S. Métens、P. Borckmans 和 G. Dewel。双稳态系统中菱形模式和超晶格图案的形成。*EPL*，54(5):612–618，2001年。

Vadim N. Biktashev和Mikhail A. Tsyganov。具有交叉扩散的可激发系统中的孤立波。英国皇家学会会刊*A*辑：数学、物理与工程科学，461(2064):3711 – 3730，2005年。doi: 10.1098/rspa.2005.1529。URL https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-34250643388&doi=10.1098%2Frspa.2005.1529&partnerID=40&md5=4375a7ed21995f6744464940fa7578d7。

Marzia Bisi、M. Groppi、Giorgio Martalò和Romina Travaglini。多发性硬化症趋化性模型的动力学理论推导与二维图案分析。数学生物学杂志，91(4)，2025年。doi: 10.1007/s00285-025-02282-1。

Pierre B. Borckmans、Guy Dewel、Anne de Wit、Etiennette Dulos、Jacques Boissonade、Fabienne Gauffre 和 Patrick de Kepper。扩散不稳定性与化学反应。国际分岔与混沌杂志，12(11):2307 – 2332，2002年。doi: 10.1142/S0218127402005881。URL https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-0036876280&doi=10.1142%2FS0218127402005881&partnerID=40&md5=987af5f7804523e674128126800dd80e。Jean-Philippe Bouchaud 和 Antoine Georges。无序介质中的反常扩散：统计机制、模型与物理应用。《物理学报告》，195(4):127– 293，1990年。ISSN 0370-1573。doi: https://doi.org/10.1016/0370-1573(90)90099-N。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/037015739090099N。Florinda Capone、Maria Francesca Carfora、Roberta De Luca 和 Isabella Torcicollo。模拟捕食者阿利效应的反应扩散系统的非线性稳定性与数值模拟。国际非线性科学与数值模拟杂志，23(5):751 – 760，2022年。doi: 10.1515/ijnsns-2020-0015。B. A. Carreras、V. E. Lynch 和 G. M. Zaslavsky。等离子体湍流模型中粒子示踪剂的反常扩散与逃逸时间分布。等离子体物理学，8(12):5096–5103，2001年12月。ISSN 1070-664X。doi: 10.1063/1.1416180。URL https://doi.org/10.1063/1.1416180。Daniel Cebrián-Lacasa、Pedro Parra-Rivas、Daniel Ruiz-Reynés 和 Lendert Gelens。FitzHugh–Nagumo 模型的六十年：其时空动力学及其跨学科影响指南。*arXiv*，2404.11403，2024年。URL https://doi.org/10.48550/arXiv.2404.11403。G. Dewel、M. Bachir、P. Borckmans 和 S. Meétens。双稳态系统中的超晶格结构与准图案； [超晶格与双稳态系统中的准晶体]。法国科学院院报：*IIb*辑，力学，329(6):411 – 416，2001年。doi: 10.1016/S1620-7742(01)01332-0。URL https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-0034910844&doi=10.1016%2fS1620-7742%2801%2901332-0&partnerID=40&md5=8e3ec61620f71fb4ff4397b8d309be78。German Drazer 和 Damián H. Zanette。多孔介质中幂律俘获时间分布的实验证据。《物理评论 *E*》，60:5858–5864，1999年11月。doi: 10.1103/PhysRevE. 60.5858。URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.60.5858。Noémie Ehstand、Christian Kuehn 和 Cinzia Soresina。分数阶偏微分方程的数值延拓：尖齿与膨胀蛇形结构。非线性科学与数值模拟通讯，98，2021年。doi: 10.1016/j.cnsns.2021.105762。

F. Farivar、G.Gambino、V. Giunta、M.C. Lombardo 和 M. Sammartino。具有反捕食行为的种间集团内捕食群落。*SIAM 应用动力系统杂志*，24 (2):1110 – 1149，2025年。

R. FitzHugh。Hodgkin-Huxley 神经方程中的阈值与平台。《普通生理学杂志》，43:867–896，1960年。

Hans C. Fogedby。随机环境中的莱维飞行。《物理评论快报》，73:2517–2520，1994年11月。doi: 10.1103/PhysRevLett.73.2517。URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.73.2517。

V. Gafiychuk 和 B. Datsko。时间分数阶反应扩散系统中不同类型不稳定性的数学建模。计算机与应用数学，59 (3):1101–1107，2010年。ISSN 0898-1221。doi: https://doi.org/10.1016/j.camwa.2009.05.013。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0898122109003496。分数阶微分方程进展。

V. V. Gafiychuk 和 B. Y. Datsko. 分数阶反应扩散系统中不同阶数指标驱动的时空图案形成。《物理评论 E》，77:066210，2008年6月。doi: 10.1103/PhysRevE.77.066210。URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.77.066210。

G. Gambino、M.C. Lombardo 和 M. Sammartino. 二维区域中由交叉扩散驱动的图案形成。《非线性分析：现实世界应用》，14(3):1755 – 1779，2013年。doi: 10.1016/j.nonrwa.2012.11.009。

G. Gambino、M.C. Lombardo、G. Rubino 和 M. Sammartino. 二维 FitzHugh–Nagumo 模型中的斑图选择。《数学研究》，68(2):535–549，2019年。

Gaetana Gambino、Valeria Giunta、Maria Carmela Lombardo 和 Gianfranco Rubino。交叉扩散对 FitzHugh-Nagumo 模型中稳态图案形成的影响。离散与连续动力系统 - *B*，27(12):7783–7816，2022年。ISSN 1531-3492。doi: 10.3934/dcdsb.2022063。URL https://www.aimsciences.org/article/id/624126352d80b71c06b8beae。

Gaetana Gambino、Maria Carmela Lombardo、Rossella Rizzo 和 Marco Sammartino。具有交叉扩散的可激发 FitzHugh-Nagumo 模型：长程激活不稳定性。*Ricerche di Matematica*，73(1):115–135，2024年。ISSN 1827-3491。doi: 10.1007/s11587-023-00814-9。URL https://doi.org/10.1007/s11587-023-00814-9。A. A. Golovin、B. J. Matkowsky 和 V. A. Volpert。具有超扩散的 Brusselator模型中的图灵斑图形成。*SIAM Journal on Applied Mathematics*，69(1):251–272，2008年。doi: 10.1137/070703454。URL https://doi.org/10.1137/070703454。A Hagberg 和 E Meron。非梯度反应扩散系统中的图案形成：前沿分岔的影响。*Nonlinearity*，7(3):805，1994年5月。doi: 10.1088/0951-7715/7/3/ 006。URL https://dx.doi.org/10.1088/0951-7715/7/3/006。N. Iqbal、R. Wu 和 B. Liu。FitzHugh-Nagumo 模型中的超扩散图案形成。*Appl. Math. Comput.*，313:245–258，2017年。Hatim K. Khudhair、Yanzhi Zhang 和 Nobuyuki Fukawa。Schnakenberg方程中的斑图选择：从正常扩散到反常扩散。偏微分方程数值方法，38(6):1843–1860，2022年。doi: https://doi.org/10.1002/num.22842。URL https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/num.22842。

J. Klafter、A. Blumen 和 M. F. Shlesinger。通向反常扩散的随机途径。《物理评论*A*》，35:3081–3085，1987年4月。doi: 10.1103/PhysRevA.35.3081。URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.35.3081。

Joseph Klafter、Michael F. Shlesinger 和 Gert Zumofen。超越布朗运动。《今日物理》，49(2):33–39，1996年02月。ISSN 0031-9228。doi: 10.1063/1.881487。URL https://doi.org/10.1063/1.881487。

Andrew L. Krause、Meredith A. Ellis 和 Robert A. Van Gorder。曲率、生长和各向异性对生长流形上图灵斑图演化的影响。《数学生物学通报》，81(3):759 – 799，2019年。doi: 10.1007/s11538-018-0535-y。

Deborah Lacitignola、Massimo Frittelli、Valerio Cusimano 和 Andrea De Gaetano。在生长的扁球体上形成图案：成年海胆发育的一个应用。《计算动力学杂志》，9(2):185 – 206，2022年。doi: 10.3934/jcd.2021027。

M. Levandowsky、J. Klafter 和 B. S. White。原生生物微型浮游动物的游泳行为和趋化反应随水动力状态的变化。《海洋科学通报》，43(3):758–763，1988年。

Roland Marschall。半导体复合材料：提升电荷载流子分离以改善光催化活性的策略。《先进功能材料》，24(17):2421–2440，2014年。doi: https://doi.org/10.1002/adfm.201303214。URL https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/adfm.201303214。

Tiago Martinelli、Alberto Aleta、Francisco Aparecido Rodrigues 和 Yamir Moreno。通过宏观分析揭示疫情传播中年龄组间相互作用的信息论方法。《物理评论E》，110(6)，2024年。doi: 10.1103/PhysRevE.110.064321。

A. B. Medvinsky、Sergei V. Petrovskii、I. A. Tikhonova、Horst Malchow 和 Bailian Larry Li。浮游生物与鱼类动力学的时空复杂性。《*SIAM*评论》，44(3):311 – 370，2002年。doi: 10.1137/S0036144502404442。URL https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-0036733930&doi=10.1137%2FS0036144502404442&partnerID=40&md5=6cd48ecb207fefffb636662ca400a488。

Ralf Metzler 和 Joseph Klafter。《随机游走与反常扩散指南：分数阶动力学方法》。《物理学报告》，339(1):1–77，2000年。ISSN 0370-1573。doi：https://doi.org/10.1016/S0370-1573(00)00070-3。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370157300000703。Ralf Metzler 和 Joseph Klafter。《随机游走的终点餐厅：分数阶动力学描述反常输运的最新进展》。《物理学杂志*A*：数学与通用》，37(31):R161，2004年7月。doi：10.1088/0305-4470/37/31/R01。URL https://dx.doi.org/10.1088/0305-4470/37/31/R01。Matteo Muratori。《幂加权Lp空间中的分数阶拉普拉斯算子：分部积分公式与自伴性》。《泛函分析杂志》，271(12):3662–3694，2016年。ISSN 0022-1236。doi：https://doi.org/10.1016/j.jfa.2016.09.012。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022123616302683。S. Métens、G. Dewel、P. Borckmans 和 R. Engelhardt。双稳态系统中的斑图选择。《欧洲物理快报》，37(2):109–114，1997年。J. Nagumo、S. Arimoto 和 S. Yoshizawa。模拟神经轴突的有源脉冲传输线。《*IRE*会刊》，50(10):2061–2070，1962年。doi: 10.1109/JRPROC.1962.288235。

Benoít Perthame、Weiran Sun 和 Min Tang。具有生化通路的动力学模型的分数阶扩散极限。《应用数学与物理学杂志》，69(3)，2018年。doi：10.1007/s00033-018-0964-3。

Garik Petrosyan。关于分数阶微分算子的伴随算子。《俄罗斯大学报告：数学》，25(131):284–289，2020年。doi: 10.20310/ 2686-9667-2020-25-131-284-289。

Michael F. Shlesinger、George M. Zaslavsky 和 Joseph Klafter。奇异动力学。《自然》，363 (6424):31–37，1993年。

David W. Sims、Emily J. Southall、Nicolas E. Humphries、Graeme C. Hays、Corey J. A. Bradshaw、Jonathan W. Pitchford、Alex James、Mohammed Z. Ahmed、Andrew S. Brierley、Mark A. Hindell、David Morritt、Michael K. Musyl、David Righton、Emily L. C. Shepard、Victoria J. Wearmouth、Rory P. Wilson、Matthew J. Witt 和 Julian D. Metcalfe。海洋捕食者搜索行为的标度律。《自然》，451(7182):1098–1102，2008年。doi: 10.1038/nature06518。URL https://doi.org/10.1038/nature06518。

David W. Sims、Andrew M. Reynolds、Nicolas E. Humphries、Emily J. Southall、Victoria J. Wearmouth、Brett Metcalfe与Richard J. Twitchett。遗迹化石中的分层随机游走与最优搜索行为的起源。《美国国家科学院院刊》，111(30):11073–11078，2014。doi: 10.1073/pnas.1405966111。

T. H. Solomon、Eric R. Weeks与Harry L. Swinney。二维旋转流中反常扩散与莱维飞行的观测。《物理评论快报》，71:3975–3978，1993年12月。doi: 10.1103/PhysRevLett.71.3975。URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.71.3975。

Mustapha Tlidi、Giorgio Sonnino与M. Bachir。空间分布式反应扩散解中局域超晶格形成的预测。《物理评论*E*》——统计、非线性与软物质物理学，86(4)，2012。doi: 10.1103/PhysRevE.86.045103。URL https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-84867750767&doi=10.1103%2FPhysRevE.86.045103&partnerID=40&md5=670e9c40bc4f20dc10ee7aedc47d5652。

John Toner、Yuhai Tu 和 Sriram Ramaswamy。《群体的流体动力学与相》。《物理学年鉴》，318(1):170–244，2005。ISSN 0003-4916。doi: https://doi.org/10.1016/j.aop.2005.04. 011。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0003491605000540。特刊。

J. E. Truscott 和 John Brindley。海洋浮游生物种群作为可激发介质。《数学生物学通报》，56(5):981 – 998，1994年。doi: 10.1016/ s0092-8240(05)80300-3。URL https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-105006970939&doi=10.1016%2Fs0092-8240%2805%2980300-3&partnerID=40&md5=f991073e58aab32ffd71b4a08096b6a6。被引用：1。Vladimir V. Uchaĭkin。《分数阶导数：面向物理学家和工程师》。非线性物理科学，第 XXI、385 页，2013年。doi: 10.1007/978-3-642-33911-0。G. M. Viswanathan、V. Afanasyev、Sergey V. Buldyrev、E. J. Murphy、P. A. Prince 和 H. Eugene Stanley。漂泊信天翁的莱维飞行搜索模式。《自然》，381:413–415，1996年。doi: 10.1038/381413a0。URL https://doi.org/10.1038/381413a0。G. M. Viswanathan、Sergey V. Buldyrev、Shlomo Havlin、M. G. E. da Luz、E. P. Raposo 和 H. Eugene Stanley。优化随机搜索的成功率。《自然》，401:911–914，1999年。doi: 10.1038/44831。URL https://doi.org/10.1038/44831。

Matthias Weiss。利用亚扩散稳定低粒子数系统中的图灵斑图。《物理评论 *E*》，68:036213，2003年9月。doi: 10.1103/PhysRevE.68.036213。URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.68.036213。Thomas E. Woolley、Ruth E. Baker、Eamonn A. Gaffney 和 Philip K. Maini。生长域上的随机反应与扩散：理解稳健图案形成的失效。《物理评论*E*：统计、非线性与软物质物理》，84(4)，2011年。doi: 10.1103/PhysRevE.84.046216。Lai Zhang 和 Canrong Tian。超扩散激活剂-抑制剂系统中的图灵斑图动力学。《物理评论 *E*》，90:062915，2014年12月。doi: 10.1103/PhysRevE.90.062915。URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.90.062915。X.Y. Zhu、Q. Yang 和 M. Muntwiler。有机半导体表面与界面处的电荷转移激子。《化学研究综述》，42(11):1779–1787，2009年。